9 ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

9.1. Методы решения неравенств

Иррациональными называют неравенства, содержащие переменную под знаком радикала.

При решении иррациональных неравенств необходимо помнить:

а) если обе части неравенства на ОДЗ принимают только неотрицательные значения, то, возводя обе его части в квадрат, (или в любую четную степень) и сохранив знак исходного неравенства, получим неравенство, равносильное данному неравенству (на ОДЗ);

б) возводя обе части неравенства в одну и ту же нечетную степень, всегда получим неравенство, равносильное данному неравенству.

1. Рассмотрим неравенство вида $\sqrt{f(x)} \le g(x)$.

Так как выражение, стоящее под знаком радикала и правая часть неравенства не могут быть отрицательными, то, возводя обе части неравенства в квадрат, получим $f(x) \le g^2(x)$. Учитывая систему ограничений $\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0, \end{cases}$ найдем решение неравенства.

2. Рассмотрим неравенство вида $\sqrt{f(x)} \ge g(x)$. Так как $g(x)$ может принимать как неотрицательные, так и отрицательные значения, то возможны два случая:

1) если правая часть неравенства не отрицательна, то есть $g(x) \ge 0$, то решаем систему неравенств $\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0, \\ f(x) \ge g^2(x); \end{cases}$

2) если правая часть неравенства отрицательна, то есть $g(x) < 0$, то решаем систему неравенств $\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$

Решением исходного неравенства является объединение решений, полученных в каждом случае.

Заметим, что неравенства $\sqrt{f(x)} \le g(x)$ и $\sqrt{f(x)} \ge g(x)$ можно решить методом интервалов (см. п. 7.1).

Тест для проверки теоретических знаний

Укажите правильный вариант ответа (1–3):

1. Неравенство $\sqrt{f(x)} \le g(x)$ равносильно:

1) неравенству $f(x) \le g^2(x)$;

2) неравенству $f(x) \le g^2(x)$, при условии, что $f(x) \ge 0$;

3) неравенству $f(x) \le g^2(x)$ при условии, что $g(x) \ge 0$ и $f(x) \ge 0$;

4) неравенству $f(x) \le g^2(x)$ при условии, что $g(x) \ge 0$;

5) неравенству $f(x) \le g^2(x)$ при условии, что $g(x) < 0$, и $f(x) \ge 0$.

2. Если $g(x) \ge 0$, то неравенство $\sqrt{f(x)} \ge g(x)$ равносильно:

1) неравенству $f(x) \ge g^2(x)$;

2) неравенству $f(x) \ge g^2(x)$ при условии, что $f(x) \ge 0$;

3) неравенству $f(x) \ge g(x)$ при условии, что $f(x) \ge 0$;

4) неравенству $|f(x)| \ge g^2(x)$;

5) системе неравенств $\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$

3. Если $g(x) < 0$, то неравенство $\sqrt{f(x)} \ge g(x)$ равносильно:

1) неравенству $f(x) \ge g^2(x)$;

2) неравенству $f(x) \ge g^2(x)$ при условии, что $f(x) \ge 0$;

3) системе неравенств $\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0; \end{cases}$

4) системе неравенств $\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0, \\ f(x) \ge g^2(x); \end{cases}$

5) совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0. \end{array}\right.$

Укажите все необходимые действия:

4. Чтобы решить неравенство $\sqrt{f(x)} \ge g(x)$ методом интервалов, необходимо:

1) записать неравенство в виде $\sqrt{f(x)}-g(x)\geq 0$;

2) найти нули функций $f(x)$ и $g(x)$;

3) найти нули функции $F(x)=\sqrt{f(x)}-g(x)$;

4) найти область определения функций $f(x)$ и $g(x)$;

5) найти область определения функции $F(x)=\sqrt{f(x)}-g(x)$;

6) нанести нули функции на ее область определения;

7) установить знаки функции на полученных промежутках;

8) записать все промежутки, на которых рассматриваемая функция положительна;

9) записать все промежутки, на которых рассматриваемая функция не отрицательна.

Ответы

Номер задания	**1**	**2**	**3**	**4**
Вариант правильного ответа	3	2	3	1, 3, 5, 6, 7, 9

Примеры

Пример 1. Решите неравенство $\sqrt{2x-15+x^2}>-1$.

Решение. Так как выражение, стоящее под знаком радикала не может быть отрицательным, то запишем ОДЗ неравенства:

$$x^2+2x-15\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;\ -5]\cup[3;\ +\infty) \text{ (рис. 9.1).}$$

Рис. 9.1

Поскольку левая часть неравенства неотрицательна, а правая – всегда отрицательна на ОДЗ, то решением неравенства является любое число из промежутков $(-\infty;\ -5]$ и $[3;\ +\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\ -5]\cup[3;\ +\infty)$.

Пример 2. Найдите целые решения неравенства

$$5>\sqrt{x+1}+x.$$

Решение. Способ 1. Запишем неравенство в виде

$$\sqrt{f(x)}<g(x):\ \sqrt{x+1}<5-x.$$

Так как выражение, стоящее под знаком радикала и правая часть неравенства не могут быть отрицательными, то запишем систему ограничений:

$$\begin{cases} x+1\ge 0, \\ 5-x\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1, \\ x\le 5; \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-1;\ 5].$$

Возводя обе части неравенства $\sqrt{x+1}<5-x$ в квадрат, получим: $(\sqrt{x+1})^2<(5-x)^2$, $x+1<25-10x+x^2$, $x^2-11x+24>0$.

Решим это неравенство методом интервалов (рис. 9.2). Очевидно, что решением неравенства является промежуток $[-1;\ 3)$.

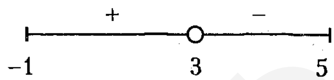

Рис. 9.2

Запишем целые решения неравенства: $\{-1; 0; 1; 2\}$.

Способ 2. Запишем неравенство в виде $\sqrt{x+1}-5+x<0$ и решим его методом интервалов.

1. Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{x+1}-5+x$.

2. $D(f): x\ge -1$.

3. Найдем нули функции, решая уравнение $\sqrt{x+1}=5-x$ при условии, что $x\le 5$. Получим: $x+1=25-10x+x^2$, $x^2-11x+24=0$, откуда $x_1=3$, $x_2=8$, причем $x_2=8$ – посторонний корень уравнения, так как он не удовлетворяет условию $x\le 5$.

4. Нанесем число 3 на область определения функции и установим ее знаки на полученных промежутках (рис. 9.3).

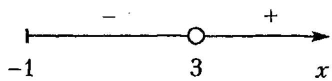

Рис. 9.3

5. Решением неравенства является промежуток, на котором функция $f(x)=\sqrt{x+1}-5+x$ отрицательна: $x\in[-1;\ 3)$.

Ответ: $\{-1; 0; 1; 2\}$.

Пример 3. Найдите сумму целых решений неравенства $\sqrt{x^2-4x}>x-3$, удовлетворяющих условию $\sqrt[4]{(1-x)^4}\le\left(-\sqrt{2}\right)^4$.

Решение. Способ 1. Имеем неравенство вида $\sqrt{f(x)}>g(x)$. Рассмотрим два случая.

1. Если правая часть неравенства неотрицательна, то запишем систему ограничений: $\begin{cases} x^2-4x\geq 0, \\ x-3\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow x\in[4;+\infty)$ (рис. 9.4).

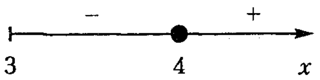

Рис. 9.4

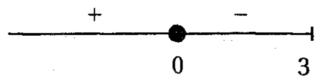

Рис. 9.5

Возведем обе части неравенства в квадрат и получим:

$$x^2-4x>x^2-6x+9,\ 2x>9,\ x>4{,}5.$$

Учитывая систему ограничений, запишем: $x\in(4{,}5;\ +\infty)$.

2. Если правая часть неравенства отрицательна, то решим систему неравенств:

$$\begin{cases} x^2-4x\geq 0, \\ x-3<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-4)\geq 0, \\ x<3; \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty;0] \text{ (рис. 9.5).}$$

Решением исходного неравенства является объединение решений, полученных в первом и во втором случаях:

$$x\in(-\infty;\ 0]\cup(4{,}5;\ +\infty).$$

Рассмотрим дополнительное ограничение $\sqrt[4]{(1-x)^4}\leq\left(-\sqrt{2}\right)^4$ и запишем его в виде $|x-1|\leq 4$. Это неравенство равносильно системе неравенств: $\begin{cases} x-1\leq 4, \\ x-1\geq -4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 5, \\ x\geq -3; \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-3;5]$.

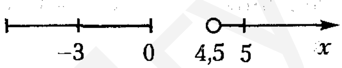

Рис. 9.6

Запишем решение задачи (рис. 9.6): $x\in[-3;0]\cup(4{,}5;5]$.

Найдем сумму целых решений задачи: $-3-2-1+0+5=-1$.

Способ 2. Запишем неравенство в виде $\sqrt{x^2-4x}-x+3>0$ и решим его методом интервалов.

1. Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{x^2-4x}-x+3$.

2. $D(f): x^2-4x\geq 0$. Поскольку решения неравенства должны удовлетворять условию $|x-1|\leq 4 \Leftrightarrow x\in[-3;5]$, то решим неравенство $x^2-4x\geq 0$ на отрезке $[-3;\ 5]$ и согласно рисунку 9.7 запишем: $x\in[-3;\ 0]\cup[4;\ 5]$.

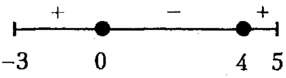

Рис. 9.7

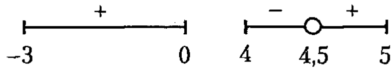

Рис. 9.8

3. Найдем нули функции, решая уравнение $\sqrt{x^2-4x}=x-3$, при условии, что $x-3\geq 0$. Получим: $x^2-4x=x^2-6x+9$, откуда $x=4{,}5$.

4. Нанесем число 4,5 на область определения функции и определим знаки функции на полученных промежутках (рис. 9.8).

5. Решением неравенства является объединение промежутков, на которых функция $f(x)=\sqrt{x^2-4x}-x+3$ положительна:

$$x\in[-3;\,0]\cup(4{,}5;\,5].$$

Этим промежуткам принадлежит 5 целых решений неравенства, сумма которых равна -1.

Ответ: -1.

Пример 4. Найдите среднее арифметическое целых решений неравенства $\sqrt[11]{-x^2+5x+6}\cdot\sqrt[10]{4-x}>0$.

Решение. Решим неравенство методом интервалов.

1. Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt[11]{-x^2+5x+6}\cdot\sqrt[10]{4-x}$.

2. $D(f)$: $4-x\geq 0$, $x\leq 4$.

3. Найдем нули функции, решая уравнения $-x^2+5x+6=0$ и $4-x=0$. Получим: $x_1=6$, $x_2=-1$, $x_3=4$.

4. Нанесем числа -1 и 4 на область определения функции и установим знаки функции на полученных промежутках (рис. 9.9).

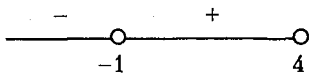

Рис. 9.9

5. Согласно рисунку 9.9 решением неравенства является интервал $(-1;\,4)$, на котором функция $f(x)=\sqrt[11]{-x^2+5x+6}\cdot\sqrt[10]{4-x}$ положительна.

Найдем среднее арифметическое целых решений неравенства:

$$(0+1+2+3):4=1{,}5.$$

Ответ: 1,5.

Пример 5. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}-(x+3)}{x+3}>-1.$$

Решение. Преобразуем данное неравенство:

$$\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}-\frac{x+3}{x+3}>-1,\quad \frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}-1>-1,$$

$$\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}>0.$$

Решим это неравенство методом интервалов.

1. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}$.

2. Найдем область определения функции. Поскольку выражение, стоящее под знаком радикала не должно быть отрицательным, то $17-15x-2x^2\ge 0 \Leftrightarrow 2x^2+15x-17\le 0 \Leftrightarrow x\in[-8{,}5;\ 1]$ (рис. 9.10). Исключив из отрезка $[-8{,}5;\ 1]$ точку -3 (точку разрыва функции), окончательно получим: $x\in[-8{,}5;\ -3)\cup(-3;\ 1]$.

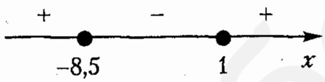

Рис. 9.10

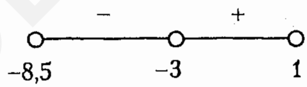

Рис. 9.11

3. Нанесем нули функции на ее область определения и установим знаки функции на полученных промежутках (рис. 9.11).

4. Решением неравенства является промежуток, на котором функция $f(x)=\dfrac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}$ положительна: $x\in(-3;\ 1)$.

Ответ: $(-3;\ 1)$.

Пример 6. Решите неравенство $x-12\le\sqrt{x}$.

Решение. Запишем неравенство в виде $x-\sqrt{x}-12\le 0$ и решим его методом интервалов.

1. Рассмотрим функцию $f(x)=x-\sqrt{x}-12$.

2. $D(f): x\ge 0$.

3. Найдем нули функции, решая уравнение $x-\sqrt{x}-12=0$.

По теореме Виета получим: $\sqrt{x}=4$, откуда $x=16$ и $\sqrt{x}=-3$, откуда $x\in\varnothing$.

4. Нанесем число 16 на область определения функции и определим знаки функции на полученных промежутках (рис. 9.12).

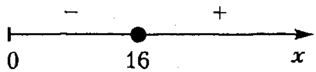

Рис. 9.12

5. Решением неравенства является промежуток, на котором функция $f(x)=x-\sqrt{x}-12$ не положительна: $x\in[0;\ 16]$.

Ответ: $[0;\ 16]$.

Задачи для самостоятельного решения

Решите неравенства (1–13):

1. $\sqrt[3]{3}\sqrt{x^3+3x+4}>-\sqrt[3]{9}$.

2. $\sqrt{x+5}-1<-x$.

3. $\sqrt{3x-x^2}+x<4$.

4. $-\sqrt{x^2-x-12}>-x$.

5. $\sqrt{9x-20}-x<0$.

6. $\sqrt{x^2-4x}+3>x$.

7. $2^{-1}\sqrt{-x^2+6x-5}-2^2+2^0x>0$.

8. $(1-x)\cdot\sqrt{x^2-x-20}\le 0$.

9. $\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x}+\sqrt{6-x}>\sqrt{x-1}$.

10. $\sqrt{3x^2+5x+8}\le\sqrt{3x^2+5x+1}+1$.

11. $\dfrac{\sqrt{2-x}+4x}{x}-\dfrac{3}{x}\ge 2$.

12. $\dfrac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}}<0$.

13. $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\dfrac{x-3}{\sqrt{x-3}}>\dfrac{5}{\sqrt{x-3}}$.

14. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\sqrt[4]{x^2-2x+1}\cdot\sqrt[3]{x+3}\le 0.$$

15. Найдите количество целых решений неравенства

$$\sqrt[3]{x^2-4}\cdot\sqrt{x+8}<0.$$

16. Найдите координату середины отрезка, на котором выполняется неравенство $1{,}5\sqrt[6]{x+1}-1\ge -0{,}5\sqrt[3]{-x-1}$.

17. Найдите длину отрезка, на котором выполняется неравенство $-\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}+6\ge 0$.

18. Найдите наименьшее значение x, при котором справедливо неравенство $\frac{3-x}{2} \le \frac{\left(\sqrt{x-5}\right)^2}{6-x}$.

19. Найдите наибольшее значение x, при котором верно неравенство $1+x \le 2{,}5\sqrt{x}$.

20. Сколько целых чисел входит в область определения функции $y=\sqrt{\left(4-x^2\right)\sqrt{2x-8}}+\sqrt{17}$?

21. Найдите сумму целых решений системы неравенств

$$\sqrt{x^2-9x+20} \le \sqrt{x-1} \le \sqrt{x^2-13}.$$

Ответы: **1.** $[-1;\ +\infty)$. **2.** $x\in[-5;-1)$. **3.** $[0;\ 3]$. **4.** $[4;\ +\infty)$. **5.** $\left[\frac{20}{9};\ 4\right)\cup(5;\ +\infty)$. **6.** $(-\infty;\ 0]\cup(4{,}5;\ +\infty)$. **7.** $x\in(3;\ 4]$. **8.** $\{-4\}\cup$ $\cup[5;\ +\infty)$. **9.** $[2;\ 3]$. **10.** $\left(-\infty;\ -\frac{8}{3}\right)\cup[1;\ +\infty)$. **11.** $(-\infty;\ 0)\cup[1;\ 2]$. **12.** $(-\infty;\ 0{,}75)\cup(4;\ 7)$. **13.** $(5;\ +\infty)$. **14.** 1. **15.** 3. **16.** 31,5. **17.** 16. **18.** 5. **19.** 4. **20.** 1. **21.** 22.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Количество целых решений неравенства $\sqrt{x+2}\cdot(3-x)>0$ равно	1) 6; 2) 4; 3) 5; 4) 7; 5) 11.
2	Число неотрицательных решений неравенства $\sqrt{3-x}\cdot(x+2)\le 0$ равно	1) 3; 2) 9; 3) 1; 4) 2; 5) 12.
3	Наибольшее целое решение неравенства $\sqrt{x^2-3x+2}+5>2x$ равно	1) 0; 2) −1; 3) 2; 4) 4; 5) 3.
4	Длина промежутка, который образуют все решения неравенства $\sqrt{3x-x^2}<4-x$, равна	1) 3; 2) 1,5; 3) 6; 4) 9; 5) 10,5.

№	Задания	Варианты ответов
5	Множество всех решений неравенства $\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{1-4x^2}}{x}<3$ имеет вид	1) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; 2) $(-0{,}5;\ 0)\cup(0;\ 0{,}5)$; 3) $[-0{,}5;\ 0{,}5]$; 4) $(-0{,}5;\ 0{,}5)$; 5) $[-0{,}5;0)\cup(0;0{,}5]$.
6	Наименьшее целое решение неравенства $\frac{12x}{\sqrt{x^2-1}}>35-12x$ равно	1) -1; 2) 1; 3) 0; 4) 2; 5) 4.
7	Наименьшее целое решение неравенства $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}<0$ равно	1) 3; 2) 2; 3) 4; 4) -2; 5) 7.
8	Множество решений неравенства $\sqrt{5x-4}-3+\sqrt{3x+1}<0$ имеет вид	1) $\left[\frac{2}{3};\ 3\right]$; 2) $\left[\frac{1}{3};\ 2\right]$; 3) $[0{,}8;\ 1)$; 4) $(0{,}8;\ 1)$; 5) $(0{,}8;\ 11)$.
9	Наибольшее целое отрицательное решение неравенства $\sqrt{x^2+3x+2}<\sqrt{x^2-x+1}+1$ равно	1) -2; 2) -1; 3) -23; 4) -7; 5) -13.
10	Количество целых решений неравенства $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}+2x<35$ равно	1) 6; 2) 2; 3) 3; 4) 11; 5) 7.
11	Количество целых чисел, удовлетворяющих неравенству $\frac{1}{1+2^{-1}\sqrt{4-x^2}}+\frac{1}{2-\sqrt{4-x^2}}>\frac{x^2}{x^3}$, равно	1) 10; 2) 3; 3) 4; 4) 1; 5) 12.

№	Задания	Варианты ответов
13	Неравенство $\sqrt{4-4x^3+x^6}+\sqrt[6]{4}>x$ не выполняется если	1) $x\in\left(-\sqrt[3]{2};\ \sqrt[3]{2}\right)$; 2) $x\in\left(0;\ \sqrt[3]{2}\right]$; 3) $x=\sqrt[3]{2}$; 4) $x=\sqrt{2}$; 5) $x\in\left[\sqrt[3]{2};\ \sqrt{2}\right]$.
13	Среднее арифметическое целых значений x, при которых не выполняется неравенство $-\sqrt{x^4-2x^2+1}<x-1$, равно	1) 1,25; 2) –0,5; 3) –2; 4) 5,4; 5) 1,24.
14	Количество целых решений системы неравенств $\begin{cases}-\sqrt{4x-7}>-x,\\ \sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}-4>0\end{cases}$ равно	1) 2; 2) 1; 3) 7; 4) 3; 5) 4.

Ответы

Номер задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Номер правильного ответа	2	3	5	1	5	4	3
Номер задания	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Номер правильного ответа	3	2	1	3	3	2	1