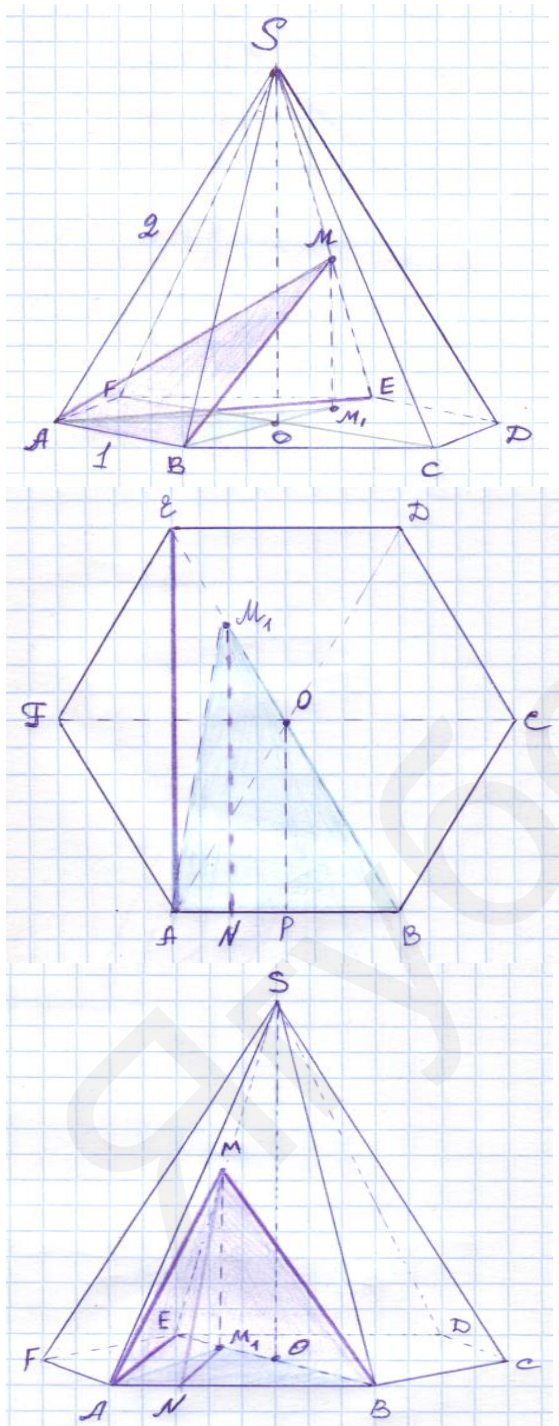


В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания равна 1, а боковое ребро равно 2. Через сторону основания AB и середину бокового ребра SE проведено сечение. Найдите тангенс угла между прямой AE и плоскостью проведенного сечения.

Первый способ решения



MM_1 перпендикуляр к плоскости основания.

В $\triangle SOE$: $SO = \sqrt{3}$,

$MM_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ - средняя линия.

Проведем $M_1N \parallel AE$.

Угол MNM_1 - искомый угол.

$\triangle AM_1B$ - проекция $\triangle AMB$
на плоскость основания.

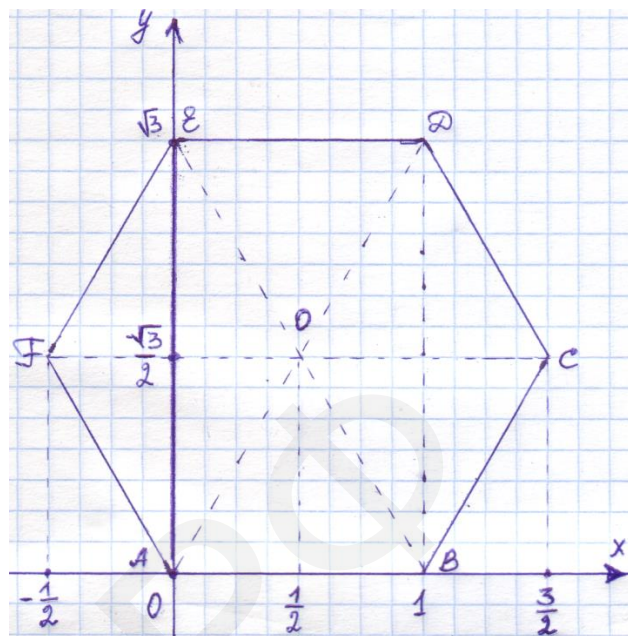
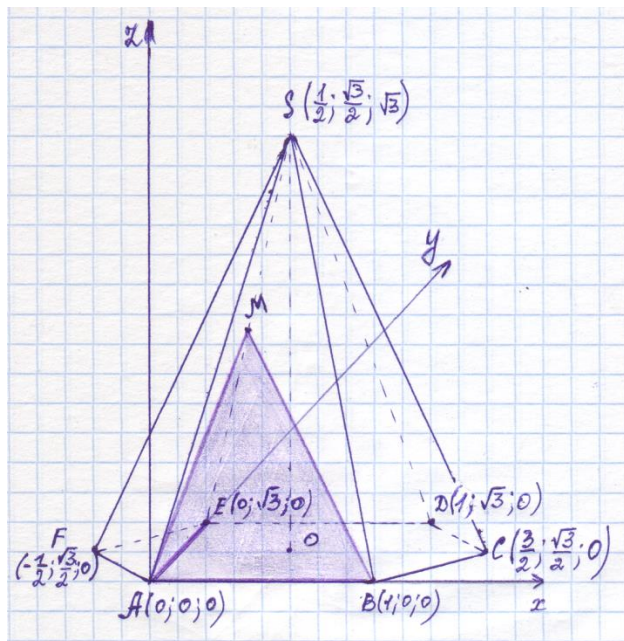
В $\triangle NM_1B$: $OP = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{M_1B}{OB} = \frac{M_1N}{OP}; \Rightarrow \frac{\frac{3}{2}}{1} = \frac{M_1N}{\frac{\sqrt{3}}{2}};$$

$$M_1N = \frac{3\sqrt{3}}{4}; \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}(M_1NM) = \frac{MM_1}{M_1N} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{4}} = \frac{2}{3}.$$

Второй способ решения Координаты точек пирамиды



$$A(0;0;0), \quad B(1;0;0), \quad C\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), \quad D(1; \sqrt{3}; 0), \quad F\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), \quad S\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}\right),$$

$$M\left(\frac{1}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{4}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Синус угла между прямой l и плоскостью $ax + by + cz + d = 0$

$$\sin \varphi = \frac{|x_1 \cdot a + y_1 \cdot b + z_1 \cdot c|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

определяется по формуле:

$l(x_1; y_1; z_1)$ - направляющий вектор прямой l ,

$n(a; b; c)$ - вектор нормали

→

В нашей задаче $AE(0; \sqrt{3}; 0)$ - направляющий вектор прямой AE .

Координаты вектора нормали можно найти **двумя** способами.

1. Заданная плоскость проходит через три точки

$$A(0;0;0), \quad B(1;0;0), \quad M\left(\frac{1}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{4}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Для точки $A(0;0;0)$: $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0, \Rightarrow d = 0$;

Для точки $B(1;0;0)$: $a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + 0 = 0, \Rightarrow a = 0$;

Для точки $M\left(\frac{1}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{4}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$: $a \cdot \frac{1}{2} + b \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} + c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 = 0, \Rightarrow b = -\frac{2}{3}c$.

Подставим полученные значения в уравнение плоскости и получим:

$$0 + \left(-\frac{2}{3}\right)cy + cz = 0$$

$-\frac{2}{3}y + z = 0$ - уравнение плоскости, проходящее через точки A, B и M .

Следовательно, $n(a; b; c) = n(0; -\frac{2}{3}, 0)$,

$$a = 0, \quad b = -\frac{2}{3}, \quad c = 0.$$

$$\sin \varphi = \frac{|0 + \left(-\frac{2}{3}\right) \times \sqrt{3} + 1 \times 0|}{\sqrt{0 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 1^2} \times \sqrt{0 + \sqrt{3}^2 + 0}} = \frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{13}}}{\sqrt{1 - \frac{4}{13}}} = \frac{2}{3}.$$

Третий способ решения

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

$$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3),$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

после вычисления этого определителя получается уравнение плоскости

$$ax + by + cz + d = 0,$$

где a, b и c – координаты вектора нормали к плоскости.

$$A(0;0;0), B(1;0;0), M\left(\frac{1}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{4}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$x_1, y_1, z_1 \quad x_2, y_2, z_2 \quad x_3, y_3, z_3$$

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - 0 & z - 0 \\ 1 - 0 & 0 - 0 & 0 - 0 \\ \frac{1}{2} - 0 & \frac{3\sqrt{3}}{4} - 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = x \cdot 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot z + y \cdot 0 \cdot \frac{1}{4} - z \cdot 0 \cdot \frac{1}{4} - 1 \cdot y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot 0 \cdot x = -\frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3\sqrt{3}}{4}z$$

$$\text{Из } -\frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3\sqrt{3}}{4}z = 0 \text{ можно получить } -2y + 3z = 0 - \text{уравнение плоскости.}$$

$$\text{Тогда } n(a; b; c) = n(0; -2; 3).$$

$$\sin \varphi = \frac{|0 + \sqrt{3}(-2) + 0|}{\sqrt{0+3+0} \times \sqrt{0+(-2)^2+3^2}} = \dots = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{13}}}{\sqrt{1 - \frac{4}{13}}} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{3}.$$