

муниципальное образовательное учреждение средняя
общеобразовательная школа №9

Проект по алгебре на тему: «Логарифмы с параметрами»

Авторы:

- **Александрова Светлана Викторовна-учитель математики**
- **Учащийся 11 класса Герасимов Виталий.**

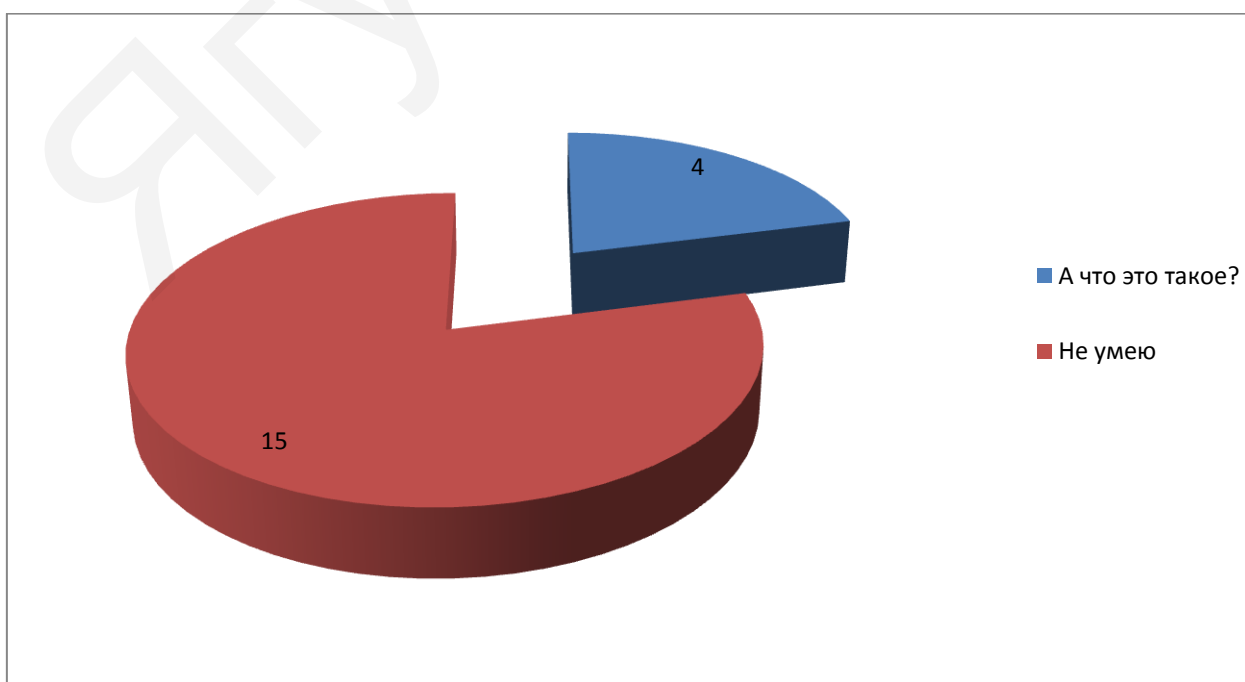
2013 год.

Введение.

- Изучение многих физических процессов и геометрических закономерностей часто приводит к решению уравнений, содержащих параметр. Решение задач с параметрами вызывает большие трудности у учащихся, так как их изучение не является отдельной составляющей школьного курса математики, и рассматривается только на немногочисленных факультативных занятиях. Между тем, параметрические уравнения, в том числе и логарифмические, входят в состав сборников ЕГЭ. А ЕГЭ сдавать придется каждому.
- Данный проект должен помочь в изучении таких интересных тем, как «Логарифмы» и «Параметры», а так же должен помочь при подготовке к единому государственному экзамену.

Анализ ситуации:

- Логарифмы, а тем более с параметрами – вещь очень сложная. Поэтому перед началом проекта был проведен опрос в нашем классе (22 человека, 6 не участвовали в опросе) : «Можете ли вы решать логарифмы с параметрами?».
- Результаты (представлены в диаграмме) оказались очень интересными:



Результаты опроса:

- ▣ Как мы видим из результатов опроса, логарифмические уравнения с параметрами особой популярностью не пользуются. Но это и не удивительно: чтобы их решать, нужно знать все о логарифмах.

Логарифмом положительного числа b по основанию a , где $a > 0, a \neq 1$, называется показатель степени c , в которую нужно возвести число a , чтобы получилось b .

$$\log_a b = c, \quad b > 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

$$a^x = b$$

Свойства логарифмов:

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^r = r \log_a b$$

$$\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b$$

Параметры:

- ▣ С логарифмами и его свойствами разобрались, теперь приступим к параметрам.
- ▣ **Определение:** Параметрами называются переменные $a, b, c, \dots, k$, которые при решении данного уравнения считаются постоянными.
- ▣ Решить уравнение, содержащее параметры, это значит, для каждой допустимой системы значений параметров найти множество всех решений данного уравнения

Виды логарифмических уравнений с параметрами:

Логарифмические уравнения с параметрами можно разделить на три вида в зависимости от местоположения параметра:

- ▣ Уравнения, содержащие параметры в логарифмируемом выражении.
- ▣ Уравнения, содержащие параметры в основании.
- ▣ Уравнения, содержащие параметры и в основании и в логарифмируемом выражении.

Уравнения, содержащие параметры в логарифмируемом выражении:

1. Решить при всех a : $\log_{x+1}(x^2 + a) = 2$.

Решение:

Из определения логарифма следует, что $x + 1 > 0$, $x + 1 \neq 1$ и $x^2 + a > 0$.
Получаем уравнение $x^2 + a = (x + 1)^2$. Из ограничения $x + 1 > 0$ следует, что $x^2 + a > 0$. Следовательно, нужно найти решения уравнения $x^2 + a = (x + 1)^2$, удовлетворяющие неравенствам $x + 1 > 0$ и $x \neq 0$.

Раскроем скобки в правой части уравнения: $x^2 + a = x^2 + 2x + 1$.

Вычитая $x^2 + 2x + 1$ из обеих частей уравнения, находим $-2x = 1 - a$, откуда получаем: $x = \frac{a - 1}{2}$.

Из ограничения $x + 1 > 0$ следует $\frac{a - 1}{2} + 1 > 0$, откуда $a - 1 + 2 > 0$. Значит, $a > -1$. Из ограничения $x \neq 0$ находим $\frac{a - 1}{2} \neq 0$, что влечет $a \neq 1$.

Ответ: Если $a > -1$, $a \neq 1$, то одно решение $x = \frac{a - 1}{2}$.

Если $a \leq -1$ или $a = 1$, то решений нет.

Уравнения, содержащие параметры в основании:

2. Решить при всех a : $\log_a(x^2 + 2x - 8) = 2$

Решение:

Из определения логарифма следует, что

$a \neq 1$, $a > 0$, $x^2 + 2x - 8 > 0$ ($x < -4$; $x > 2$). Значит, требуется решить уравнение $a^2 = x^2 + 2x - 8$.

Решая это уравнение, получаем $x = \frac{a^2 - 2}{2}$ или $x = \frac{a^2 - 2}{2}$.

Подкоренное выражение положительно при всех значениях a , поэтому дальнейших ограничений не последует.

Ответ: Если $a > 0, a \neq 1$, то $x =$.
 Если $a \leq 0$ или $a = 1$, то решений нет.

Уравнения, содержащие параметры и в основании и в логарифмируемом выражении:

3. Решить при всех a уравнение $\log_a(ax + 1) = 1$.

Решение:

Из определения логарифма следует, что $a > 0, a \neq 1, ax + 1 > 0$.
 Получаем уравнение $ax + 1 = a$. Заметим, что так как $a > 0$, то $ax + 1 = a > 0$.
 Следовательно, надо решить уравнение $ax + 1 = a$ при ограничениях на параметр $a: a > 0, a \neq 1$. Вычитая из обеих частей уравнения единицу, получим $ax = a - 1$. Так как $a > 0$, то уравнение имеет единственное решение $x =$.

Ответ: При $a \leq 0$ и $a = 1$ решений нет.

При $a > 0$ и $a \neq 1$ одно решение $x =$.

C2. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\log_{\cos x - a}(\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x + \sqrt{3} \sin x + \cos x + \sqrt{3} + 1) = 0$ не имеет корней.

Решение:

$$\text{C2. } \log_{\cos x - a}(\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x + \sqrt{3} \sin x + \cos x + \sqrt{3} + 1) = 0$$

Уравнение не имеет корней, если

$$\begin{cases} \cos x - a < 0, \\ \cos x - a = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq \cos x, \\ a = \cos x \neq -1. \end{cases}$$

По определению логарифма имеем:

$$\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x + \sqrt{3} \sin x + \cos x + \sqrt{3} + 1 = 1.$$

Найдём $\cos x$.

$$2 \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x + \sqrt{3} \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x + \cos x + \sqrt{3} = 0,$$

$$\cos x(2 \sin x + 1) + \sqrt{3}(\sin^2 x + \sin x + 1 - \cos^2 x) = 0,$$

$$\cos x(2 \sin x + 1) + \sqrt{3}(2 \sin^2 x + \sin x) = 0,$$

$$\cos x(2 \sin x + 1) + \sqrt{3} \sin x(2 \sin x + 1) = 0,$$

$$(2 \sin x + 1)(\cos x + \sqrt{3} \sin x) = 0,$$

$$1. 2 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}, \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$2. \cos x + \sqrt{3} \sin x = 0 \Rightarrow \sqrt{3} \sin x = -\cos x, \operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Найдём значение a , решив систему:

$$\begin{cases} a \geq \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ a = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ a = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right\} \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty \right), \\ \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right\} \cup \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty \right); \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right\} \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty \right).$$

Ответ: $\left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right\} \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty \right)$.

C5. Найдите все значения параметра a , при которых система

уравнений
$$\begin{cases} 2 \cdot 1000^x + 16 - a^2 - 2a = (2a + 9)(y - 1)^2 - 2ay, \\ (x^2 + 1)\lg(y - 1) = x^3 + x \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения

Решение:

$$\lg(y - 1) = \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 + 1}, \quad y - 1 = 10^x, \quad y = 10^x + 1.$$

Подставим $y = 10^x + 1$ в первое уравнение системы

$$2 \cdot 10^{3x} + 16 - a^2 - 2a = (2a + 9) \cdot 10^{2x} - 2a(10^x + 1).$$

$$a^2 + 2a - 16 - 2 \cdot 10^{3x} + 2a \cdot 10^{2x} + 9 \cdot 10^{2x} - 2a \cdot 10^x - 2a = 0.$$

$$a^2 - 2(10^x - 10^{2x})a - (2 \cdot 10^{3x} - 9 \cdot 10^{2x} + 16) = 0.$$

$$a_{1,2} = (10^x - 10^{2x}) \pm \sqrt{10^{2x} - 2 \cdot 10^{3x} + 10^{4x} + 2 \cdot 10^{3x} - 9 \cdot 10^{2x} + 16}.$$

$$a_{1,2} = (10^x - 10^{2x}) \pm (10^{2x} - 4), \quad 10^{2x} - 4 \neq 0, \quad 10^x \neq 2.$$

$$a_1 = 10^x - 4, \quad a_2 = -2 \cdot 10^{2x} + 10^x + 4.$$

$$1. \quad 10^x = a + 4, \quad a + 4 > 0, \quad a > -4.$$

Так как $10^x \neq 2$, то $a \neq -2$.

Система имеет одно решение при $a > -4$, $a \neq -2$

$$2. \quad a = -2 \cdot 10^{2x} + 10^x + 4 \quad (1)$$

По условию система имеет ровно два различных решения. Найдём, при каких значениях a уравнение (1) имеет единственный корень. Рассмотрим функцию $y = -2 \cdot 10^{2x} + 10^x + 4$, $10^x = t$, $t > 0$.

$$y = -2t^2 + t + 4, \quad t_0 = -\frac{1}{2 \cdot (-2)} = \frac{1}{4}, \quad y\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + 4 = \frac{33}{8}$$

(см. рис. 121).

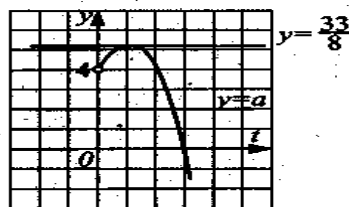


Рис. 121.

Уравнение (1) имеет единственный корень при $a = \frac{33}{8}$ и при $a \leq -4$.

Итак, исходная система имеет ровно два решения, если

$$a \in (-4; -2) \cup (-2; 4] \cup \left\{ \frac{33}{8} \right\}.$$

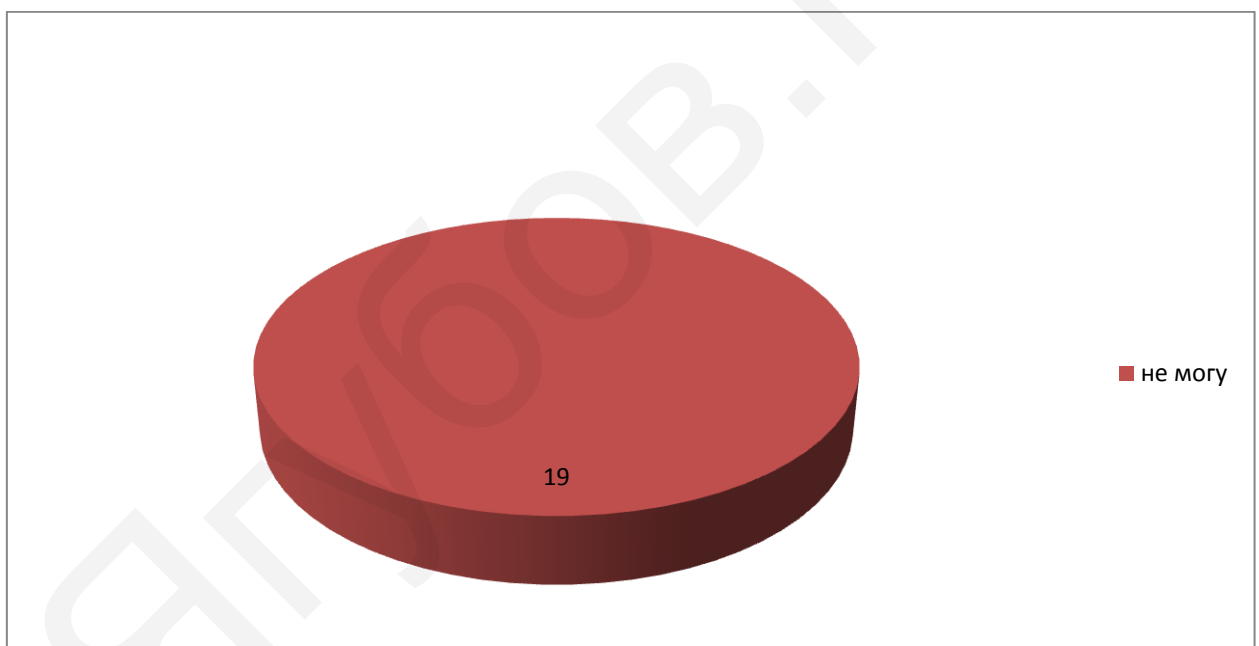
Ответ: $a \in (-4; -2) \cup (-2; 4] \cup \left\{ \frac{33}{8} \right\}.$

Что дал этот проект?

В процессе работы мы овладели начальными навыками решений параметрических уравнений, научились решать логарифмические уравнения с параметрами. Эта работа позволила нам лучше изучить и запомнить все свойства логарифмов. А главное, мы окончательно убедились в том, что **есть вещи похуже проектной по технологии.**

Результаты повторного опроса:

По окончании данного проекта был проведен повторный опрос на тему «Можете ли вы решать логарифмические уравнения с параметрами?». Результаты оказались намного лучше предыдущих: теперь все 100% (22 человек) ответили «не могу».



Используемая литература :

1. С.И.Колесникова «Решение сложных задач ЕГЭ» 300 задач с подробным решением. Издательство Москва Айрис пресс 2009 год.
2. Г.А.Воронина Практическое руководство для учителя «Элективные курсы»
Издательство Москва Айрис пресс 2008 год
3. Ю.Н.Макаров, Н.Г.Миндюк «Дополнительные главы к школьному учебнику»
9-11 класс, Москва Просвещение, 1997г.
4. КИМы ЕГЭ за 2012-2013 года.
5. А.Г. Мерзляк и др. «Алгебраический тренажер»., Москва «Илекс», 2005г.
6. А В Ефремов «Универсальные математические методы», Казань БФ КГТУ, 2010 год.
7. А.Г. Корянов 2012 задания C_1 – C_5 Методы решения (электронный ресурс)