

Задачи ЕГЭ № 8 считаются настолько сложными, что многие их даже не решают. Но существуют приемы, с которыми многие задачи №8 решаются элементарно, а некоторые задачи можно решить вообще без формул. И они вполне доступны простому ученику.

Рассмотрим некоторые из них.

Первый тип - задачи, когда одно объёмное тело вписано в другое.

Задача №1: *Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота равны 1. Найдите объём параллелепипеда.*

Решение.

Прежде всего, заметим, что высота цилиндра равна высоте параллелепипеда. Если нарисовать вид сверху, то есть круг, вписанный в прямоугольник, то можно увидеть. Что круг вписан в квадрат со стороной в два раза больше радиуса. Значит, площадь основания равна 4, а высота 1, объём равен 4.

Задача №2: *В прямоугольный параллелепипед вписан шар радиуса 1. Найдите объём параллелепипеда.*

Решение.

Если нарисовать вид сверху или сбоку, или спереди, то есть круг, вписанный в прямоугольник, то можно увидеть. Что круг вписан в квадрат. Но можно ничего не рисовать, а просто представить себе, что шарик положили в коробочку, так чтобы он касался всех стенок, дна и крышки, ясно, что такая коробочка будет кубической формы. Длина, ширина и высота этой коробочки будет в два раза больше, чем радиус шара. Объём равен 8.

Задача №3: *Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём конуса равен 6. Найдите объём шара.*

Решение. Площадь основания конуса равна площади большого круга шара, а высота цилиндра равна радиусу шара. Значит, $V_{\text{кон}} = 1/3 \pi R^2 \cdot R = 1/3 \pi R^3 = 6$.
 $V_{\text{ш}} = 4/3 \pi R^3 = 24$

Задача №4: *Цилиндр описан около шара. Объём шара равен 24. Найдите объём цилиндра.*

Решение.

Объём цилиндра равен произведению площади основания на высоту. Площадь основания цилиндра равна площади большого круга вписанного шара, а высота цилиндра равна диаметру вписанного шара. Получим, $V_{\text{цил.}} = S_{\text{осн.}} \cdot h = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3 = 3/2 \cdot 4/3 \pi R^3 = 3/2 V_{\text{ш.}}$

Ответ: 36

Задача №5: Цилиндр описан около шара. Объем цилиндра равен 33. Найдите объем шара.

Решение.

Из предыдущей задачи можно сделать вывод, что если цилиндр описан около шара, то его объем в 1,5 раза больше объема шара. То есть $V_{\text{цил}} = 1,5 V_{\text{ш.}}$

Получим, $33 = 1,5 V_{\text{ш.}}$,

$$V_{\text{ш.}} = 33 : 1,5 = 22$$

Ответ: 22

Слайд 2 тип задач

Часто в задачах В11 дается многогранник и его объем или площадь. Затем многогранник растягивается или сжимается по разным направлениям. В результате получается новый многогранник, объем (площадь) которого и требуется найти.

Как решать такие задачи? Прежде всего, надо помнить, что многогранник рассматривается в *трехмерном пространстве*. И все изменения происходят по одной из трех осей. (слайд) Теперь, когда в задаче написано «высота цилиндра увеличена в 2 раза, а основание уменьшено в 3 раза», это следует понимать так:

- Растяжение в 2 раза по оси OZ;
- Сжатие в 3 раза по осям OX и OY.

Обратите внимание: сжатие произошло сразу *по двум осям*. Ведь окружность — фигура двумерная, в отличие, например, от отрезка (который одномерен). Поэтому изменение радиуса влечет растяжение сразу «в обе стороны».

Рассмотрим задачи, в которых увеличили или уменьшили какой – нибудь линейный размер (или размеры) объемного тела в n раз.

Слайд: Теорема

Примеры: **Задача №1 [Пробный ЕГЭ 2012]**

Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильной пирамиды, если все ее стороны увеличить в 7 раз?

Решение Подставляем $n = 7$ в формулу площади:

$S_{\text{новая}} = S_{\text{старая}} \cdot 7^2$, $S_{\text{новая}} = 49 \cdot S_{\text{старая}}$. Итак, площадь увеличится в 49 раз — это и есть ответ. Ответ 49

Задача №2 [Материалы индивидуальных занятий]

Площадь первой сферы равна 175. Найдите площадь второй сферы, если ее радиус в 5 раз меньше радиуса первой.

Решение

Работаем по той же формуле: $n = 5$. Но вместо умножения будет деление, поскольку радиус уменьшается. Имеем:

$$S_{\text{новая}} = S_{\text{старая}} : n^2 = 175 : 5^2 = 175 : 25 = 7$$

Ответ 7

Задача № 3 Во сколько раз увеличится площадь поверхности октаэдра, если все его ребра увеличить в 3 раза?

Решение. Если все ребра увеличили в 3 раза, значит, площадь поверхности увеличится в 9 раз.

Ответ: 9

Задача №4 [Демонстрационный ЕГЭ 2011]

Бетонный шар весит 0,75 т. Сколько будет весить шар, изготовленный из того же материала, если его радиус в 2 раза больше?

Решение

Поскольку шары изготовлены из одного и того же материала, масса меняется по тому же закону, что и объем. Следовательно, работаем по формулам, приведенным выше.

$$V_{\text{старый}} = 0,75;$$

Растяжение в 2 раза по всем осям $n = 2$.

Почему растяжение по всем осям одинаково? Да очень просто: если растяжения будут разные, получится «приплюснутый» шар — в математике он называется эллипсоид. Чтобы такого не случилось, радиус меняется по всем осям.

Осталось найти ответ (по упрощенной формуле):

$$V_{\text{новый}} = V_{\text{старый}} \cdot n^3 = 0,75 \cdot 2^3 = 6$$

Ответ 6

Метод коэффициентов в задачах В11 применяется и в тех случаях, когда изменяется линейный размер в разное число раз, а найти надо как изменится объём или площадь поверхности.

Рассмотрим следующую теорему. (слайд)

Примеры: Задача №1 [ЕГЭ 2011]

Параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ имеет объем 35 см^3 . Ребро AB увеличили в 2 раза, ребро AC — в 5 раз, а ребро AA_1 уменьшили в 7 раз. Найдите объем нового параллелепипеда.

Решение

Только не надо чертить параллелепипед! Эта задача словно создана для решения описанным выше методом. Имеем:

$V_{\text{старый}} = 35$;

Ось OX : растяжение в 2 раза, $a = 2$;

Ось OY : растяжение в 5 раз, $b = 5$;

Ось OZ : сжатие в 7 раз, $c = 1/7$.

Рассчитываем объем нового параллелепипеда:

$V_{\text{новый}} = V_{\text{старый}} \cdot a \cdot b \cdot c = 35 \cdot 2 \cdot 5 : 7 = 50$

Получили, что $V_{\text{новый}} = 50$ — это и есть ответ.

Задача №2 [Пробный ЕГЭ 2012]

Высоту кругового цилиндра увеличили в 4 раза, а радиус основания уменьшили в 3 раза. Найдите объем нового цилиндра, если объем исходного равен 45 м^3 .

Решение

По условию, нам известно:

$V_{\text{старый}} = 45$;

По оси OZ идет растяжение в 4 раза, поэтому $c = 4$;

По осям OX и OY идет сжатие в 3 раза, поэтому $a = b = 1/3$.

Теперь можно найти объем:

$V_{\text{новый}} = V_{\text{старый}} \cdot a \cdot b \cdot c = 45 \cdot 4 : 3 : 3 = 20$

Задача №3: В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 12 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если её перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания в два раза больше, чем у первого?

Решение.

Слова «в другой такой же сосуд» означают, что другой сосуд то же имеет форму правильной треугольной призмы. То есть – в его основании правильный треугольник, у которого все стороны в 2 раза больше, чем у первого. Значит, площадь этого треугольника будет в 4 раза больше. Объем воды остается неизменным, значит, высота уменьшится в 4 раза. Ответ: 3

Задача №4: *Через среднюю линию основания треугольной призмы, объём которой равен 32, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём отсеченной треугольной призмы.*

Решение.

Высота меньшей призмы такая же, как у большой. А площадь основания уменьшится в 4 раза (свойство средней линии треугольника). Значит, объём отсеченной призмы будет равен $32 : 4 = 8$

Задача №5: *Одна цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в два раза шире. Найдите отношение объёма второй кружки к объёму первой.*

Решение

Высота 2 кружки в 2 раза меньше первой, а радиус в 2 раза больше, значит, $V_{2\text{круж.}} = V_{1\text{круж.}} : 2 \cdot 4 = V_{1\text{круж.}} \cdot 2$. Получается, что объём второй кружки в 2 раза больше, чем первой.

Ответ: 2.

Следующий тип задач – такие, в которых надо найти объём части объёмного тела. (Слайд)

Задача №1:

Объём параллелепипеда равен 9. Найдите объём треугольной пирамиды $ABDA_1$.

Решение. Мы знаем, что $V_{\text{пир.}} = 1/3 V_{\text{пар.}}$, то есть объём пирамиды в три раза меньше объёма параллелепипеда. А у нашей пирамиды еще и площадь основания в два раза меньше, значит объём в 6 раз меньше, получим $9/6 = 1.5$

Задача №2: *Объём куба равен 12. Найдите объём четырехугольной пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершиной – центр куба.*

Решение. В этой задаче высота в 2 раза меньше, а основание одинаковое. Объём так же в 6 раз меньше объёма куба.

Ответ: $12 : 6 = 2$

Задача №3: *Найдите объём части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите V/π .*

Решение.

Вырезан кусок с углом 60^0 , а 60^0 – это 6 часть полного круга. Значит, от всего цилиндра отрезали $1/6$ часть, осталось $5/6$ цилиндра. Находим объём всего цилиндра и умножаем на $5/6$ и делим на π . $5/6\pi \cdot 144 \cdot 6 = 720\pi$. Ответ: 720

Четвертый тип задач - задачи, в которых надо найти объём многогранника, вписанного в многогранник. (слайд №)

Это самые сложные задачи, но для их решения существуют фишки.

Пример.

Задача №1: Объем тетраэдра равен 1,9. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются середины сторон данного тетраэдра.

Решение.

При решении этой задачи можно поступить так же как мы поступаем в задачах V_6 , когда надо найти площадь неудобно расположенных фигур. Например, как на слайде, мы достраиваем до прямоугольника и затем вырезаем площади трех треугольников. В нашей задаче от исходного тетраэдра отрезали 4 маленьких тетраэдра, объём каждого из которых в 8 раз меньше, чем объём большого. Получим, $V - 4/8V = 1/2V$, т. е. $1,9 : 2 = 0,95$

Ответ: 0,95

Задача №2: Объем параллелепипеда равен 4,5. Найдите объём треугольной пирамиды AD_1CB_1 .

Решение. Решение этой задачи такое же как и предыдущей. Ведь пирамида AD_1CB_1 получается, если мы отрезем от параллелепипеда 4 пирамиды по углам – $ABCB_1$,

$D_1B_1CC_1$, $AA_1D_1B_1$, $ADCD_1$. А объём каждой из них легко посчитать – мы уже делали это.

Объём одной отсеченной пирамиды будет равен $1/6$ объёма параллелепипеда.

Объём четырех всех пирамид будет равен $2/3$ объёма параллелепипеда.

Значит, объём пирамиды AD_1CB_1 равен $1/3$ объёма параллелепипеда.

Ответ: 1,5