

2016

Сложные проценты в задачах ЕГЭ

Решение различных типов задач на сложные банковские проценты.

Ануфриева М.Н.
МБОУ «Лицей № 21» г. Курска
01.01.2016



Пусть сумма кредита равна a , ежегодный платеж равен x рублей, а годовые составляют $k\%$. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $m=1+0,01k$. После первой выплаты сумма долга составит: $a_1 = am - x$. После второй выплаты сумма долга составит:

$$a_2 = a_1 m - x = (am - x)m - x = am^2 - mx - x = am^2 - (1+m)x$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга:

$$a_3 = am^3 - (1 + m + m^2)x = am^3 - \frac{m^3 - 1}{m - 1}x$$

По условию тремя выплатами Сергей должен погасить кредит полностью, поэтому

$$am^3 - \frac{m^3 - 1}{m - 1}x = 0 \quad \text{откуда} \quad x = \frac{am^3(m-1)}{m^3-1}$$

При $a = 9930000$ и $k=10$, получаем $m=1,1$ и $x = \frac{9930000 \cdot 1,331 \cdot 0,1}{0,331} = 3993000$

Ответ: 3993 000 рублей.

Теперь когда мы разобрались с этим предложенным во всех решебниках решением, давайте посмотрим на другое решение.

Пусть $F = 9\,930\,000$ – величина кредита, x – искомая величина ежегодного платежа.

Первый год:

Долг: $1,1F$;

Платеж: x ;

Остаток: $1,1F - x$.

Второй год:

Долг: $1,1(1,1F - x)$;

Платеж: x ;

Остаток: $1,1(1,1F - x) - x$.

Третий год:

Долг: $1,1(1,1(1,1F - x) - x)$;

Платеж: x ;

Остаток: 0, потому что по условию было всего три платежа.

Единственное уравнение

$$1,1(1,1(1,1F - x) - x) - x = 0. \quad 1,331F = 3,31x, \quad x = 3993000$$

Ответ: 3 993 000 рублей.

Однако-1! Если предположить, что процентная ставка не красивые 10%, а страшные 13,66613%. Шансы где-то умереть по ходу умножений или сойти с ума при подробном расписывании множителя при величине долга за каждый год резко увеличились. Добавим к этому еще и не маленькие 3 года, а лет 25. Такое решение не работает.

3. 31 декабря 2014 года Андрей взял в банке некоторую сумму в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), а затем Андрей переводит в банк 3 460 600 рублей. Какую сумму взял Андрей в банке, если он выплатил долг тремя равными платежами (то есть за 3 года)?

Решение.

Пусть a – искомая величина, $k\%$ – процентная ставка по кредиту, x – ежегодный платеж. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга будет умножаться на коэффициент $m = 1 + 0,01k$. После первой выплаты сумма долга составит: $a_1 = am - x$. После второй выплаты сумма долга составит:

$$a_2 = a_1 m - x = (am - x)m - x = a^2 m^2 - mx - x = am^2 - (1 + m)x$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга:

$$a_3 = am^3 - (1 + m + m^2)x = am^3 - \frac{m^3 - 1}{m - 1}x$$

По условию Андрей выплатил долг за три года,

то есть $a_3 = 0$, откуда $a = \frac{x(m^3 - 1)}{(m - 1)m^3}$.

При $x = 3\,460\,600$, $k\% = 10\%$, получаем: $m = 1,1$ и $a = \frac{0,331 \cdot 3\,460\,600}{0,1 \cdot 1,331} = 8\,606\,000$ (рублей).

Ответ: 8 606 000 рублей.

4. 31 декабря 2013 года Игорь взял в банке 100 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на некоторое количество процентов), затем Игорь переводит очередной транш. Игорь выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 51 000 рублей, во второй 66 600 рублей. Под какой процент банк выдал кредит Игорю?

Решение

Пусть $k\%$ – искомая ставка по кредиту; $m = (1 + 0,01k)$ – множитель оставшегося долга; $a = 100\,000$ – сумма, взятая в банке; $x_1 = 51\,000$, $x_2 = 66\,600$ – размеры первого и последнего траншей.

После первой выплаты сумма долга составит: $a_1 = ma - x_1$.

После второй выплаты сумма долга составит: $a_2 = ma_1 - x_2 = am^2 - mx_1 - x_2$. По условию, $a_2 = 0$. Уравнение надо будет решить сначала относительно m , разумеется взяв только положительный корень:

$$100\,000m^2 - 51\,000m - 66\,600 = 0; \quad 500m^2 - 255m - 333 = 0.$$

Вот где начинаются трудности.

$$D = 255^2 + 4 \cdot 500 \cdot 333 = 15^2 \cdot 17^2 + 15^2 \cdot 37 \cdot 80 = 15^2(289 + 2\,960) = 15^2 \cdot 3249 = 15^2 \cdot 3^2 \cdot 19^2.$$

$$m = \frac{255 + \sqrt{D}}{2 \cdot 500} = \frac{255 + 15 \cdot 3 \cdot 19}{1000} = \frac{255 + 855}{1000} = 1,11 \quad \text{Тогда} \quad k = \frac{m - 1}{0,01} = \frac{1,11 - 1}{0,01} = 11\%.$$

Ответ: 11%.

5. 31 декабря 2013 года Маша взяла в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на некоторое количество процентов), затем Маша переводит очередной транш. Если она будет платить каждый год по 2 788 425 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 4 991 625, то за 2 года. Под какой процент Маша взяла деньги в банке?

Решение

После двух лет выплаты сумма взятого кредита вычисляется по формуле:

$$a = \frac{x_2(m^2 - 1)}{(m - 1)m^2}$$

После четырех лет выплаты сумма взятого кредита вычисляется по формуле:

$$a = \frac{x_1(m^4 - 1)}{(m - 1)m^4}$$

Откуда $(m^2 + 1)x_1 = m^2 x_2$

$$m = \sqrt{\frac{x_1}{x_2 - x_1}} \quad \text{тогда} \quad k = 100 \left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2 - x_1}} - 1 \right) = 12,5\%.$$

Ответ: 12,5%.

6. 31 декабря 2013 года Ваня взял в банке 9 009 000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Ваня переводит в банк платеж. Весь долг Ваня выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

Решение

Воспользуемся результатом из задачи 2.

$$x_3 = \frac{am^3(m - 1)}{m^3 - 1} = \frac{9009000 \cdot 1,2 \cdot 0,2}{0,728} = 4276800$$

$$x_2 = \frac{am^2(m - 1)}{m^2 - 1} = \frac{9009000 \cdot 1,44 \cdot 0,2}{0,44} = 5896800$$

Искомая разность $x_3 - x_2 = 4\,276\,800 - 5\,896\,800 = 1\,620\,000$ рублей.

Ответ: 1 620 000 рублей.

7. 1 июня 2013 года Всеволод Ярославович взял в банке 900 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Всеволод Ярославович переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев Всеволод Ярославович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 300 000 рублей?

Надо понять простую истину – чем больше будет платеж по кредиту, тем меньше будет долг. Меньше будет долг – быстрее его выплатишь.

Максимальный ежемесячный платеж, который может себе позволить кредитор, равен 300 000 рублей согласно условию. Если Всеволод Ярославович будет платить максимальный платеж, то он быстрее всего погасит долг. Другими словами, сможет взять кредит на наименьший период времени, что и требуется условием.

Попробуем решить задачу в лоб.

1 июня 2013 года: долг 900 000.

Прошел месяц. 1 июля 2013 года: долг $(1 + 0,01)900\,000 - 300\,000 = 609\,000$.

Прошел месяц. 1 августа 2013 года: долг $(1 + 0,01)609\,000 - 300\,000 = 315\,090$.

Прошел месяц. 1 сентября 2013 года: долг $(1 + 0,01)315\,090 - 300\,000 = 18\,240,9$.

Прошел месяц. 1 октября 2013 года: долг $(1 + 0,01)18\,240,9 = 18\,423,309 < 300\,000$, кредит погашен. Итого прошло 4 месяца.

Ответ: 4 месяца.

Решим задачу стандартным методом.

Воспользуюсь результатами задачи 3 с учётом следующего рассуждения: неравенство оставшейся части долга имеет вид $a_x \leq 0$.

Пусть x – искомая величина, $a = 900\,000$ – сумма, взятая в банке, $k\% = 1\%$ – ставка по кредиту, $y = 300\,000$ – ежемесячный платеж, $m = (1 + 0,01k)$ – ежемесячный множитель оставшегося долга. Тогда, по уже известной формуле, получим неравенство:

$$a_{\text{ч}} = am^x - \frac{m^x - 1}{m - 1}y \leq 0; \quad x \geq \log_m \frac{y}{y - 0,01ka}; \quad x \geq \log_{1,01} \frac{100}{97}$$

Получили неприятное неравенство, но верное.

$$\log_{1,01} \frac{100}{97} \approx 3,0611 > 3$$

Целую часть числа берем потому, что число платежей не может быть числом не целым. Берем ближайшее большее целое, меньшее взять не можем (потому что тогда останется долг) и видно, что полученный логарифм число не целое.

Получается 4 платежа, 4 месяца.

8. Фермер получил кредит в банке под определённый процент годовых.

Через год фермер в счёт погашения кредита вернул в банк $\frac{3}{4}$ от всей суммы, которую он был должен банку к этому времени, а ещё через год в счёт полного погашения кредита он внёс в банк сумму, на 21% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке?

Решение:

Сумма кредита на ситуацию не влияет. Возьмём у банка 4 рубля (делится на 4).

Через год долг банку увеличится ровно в x раз и станет равным $4x$ рублей.

Поделим его на 4 части, вернём $3x$ рублей и останемся должны x рублей.

Известно, что к концу следующего года придётся выплатить $4 \cdot 1,21$ рублей.

Известно, что и сумма долга за год превратилась из числа x в число x^2 .

Так как долг через два года фермером был полностью погашен, то

$$x^2 = 4 \cdot 1,21 \quad x = 2 \cdot 1,1 \quad x = 2,2$$

Коэффициент x означает то, что 100% за год превращаются в 220%.

А это означает, что процент годовых у банка такой: 220% - 100%

Ответ: 120%

9. В банк помещена сумма 3900 тысяч рублей под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после вычисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%.

Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял к вкладу?

Решение:

Пусть фиксированная вносимая сумма x рублей.

Тогда после проведения всех операций, попросту говоря первого года, сумма на вкладе стала

$$A_1 = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right) + x$$

После 2 года

$$A_2 = A_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = (A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right) + x) \cdot 1,5 + x = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 + x \cdot (1 + 1,5)$$

После 3 года

$$A_3 = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 + x \cdot (1 + 1,5 + 1,5^2)$$

После 4 года

$$A_4 = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^4 + x \cdot (1 + 1,5 + 1,5^2 + 1,5^3)$$

После 5 года

$$A_5 = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^5 + x \cdot (1,5 + 1,5^2 + 1,5^3 + 1,5^4)$$

Так как к концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%, то составим уравнение:

$$A_0 \cdot 8,25 = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^5 + x \cdot (1,5 + 1,5^2 + 1,5^3 + 1,5^4)$$

$$3900 \cdot 8,25 = 3900 \cdot 1,5^5 + x \cdot (1,5^4 + 1,5^3 + 1,5^2 + 1,5) \quad / : 1,5$$

$$3900 \cdot 5,5 = 3900 \cdot 1,5^4 + x(1,5^3 + 1,5^2 + 1,5 + 1)$$

$$x = \frac{3900 \cdot (5,5 - (\frac{3}{2})^4)}{(\frac{3}{2})^3 + (\frac{3}{2})^2 + \frac{3}{2} + 1}$$

$$x = \frac{3900 \cdot (\frac{11}{2} - (\frac{3}{2})^4)}{\frac{27}{8} + \frac{9}{4} + \frac{3}{2} + 1}$$

$$x = \frac{3900 \cdot 7 \cdot 8}{16 \cdot 65} = 210$$

Ответ: 210 рублей.

10. Банк под определенный процент принял некоторую сумму. Через год четверть накопленной суммы была снята со счета. Но банк увеличил процент годовых на 40%. К концу следующего года накоплена сумма в 1,44 раза превысила первоначальный вклад. Каков процент новых годовых?

Решение:

От суммы вклада ситуация не изменится. Положим в банк 4 рубля (делится на 4).

Через год сумма на счету увеличится ровно в p раз и станет равной $4p$ рублей.

Поделим её на 4 части, унесём домой p рублей, оставим в банке $3p$ рублей.

Известно, что к концу следующего года в банке оказалось $4 \cdot 1,44 = 5,76$ рублей.

Итак, число $3p$ превратилось в число 5,76. Во сколько раз оно увеличилось?

$$x = \frac{5,76}{3p} = \frac{1,92}{p}$$

Таким образом, найден второй повышающий коэффициент x банка.

Интересно, что произведение обоих коэффициентов равно 1,92:

Из условия следует, что второй коэффициент на 0,4 больше первого.

$$p \cdot x = p \cdot (p + 0,4) = 1,92$$

Уже сейчас коэффициенты можно подобрать: 1,2 и 1,6.

Но продолжим, однако, решать уравнение:

$$10p \cdot (10p + 4) = 192 \text{ пусть } 10p = k$$

$$k \cdot (k + 4) = 192$$

$$k = 12, \text{ т.е. } p = 1,2; \text{ а } x = 1,6$$

Ответ: 60%