

МБУ ДО города Ростова-на-Дону «Дворец творчества детей и молодежи»
Донская академия наук юных исследователей им. Ю. А. Жданова

Математика

Тема: «Координатный метод решения стереометрических задач.
Правило треугольника и метод Саррюса»

Автор работы:
Олейникова Яна, 11 кл.,
МБОУ СОШ № 3,
г. Сальск, Ростовская область

Руководитель:
Олейникова Людмила Александровна,
учитель математики,
МБОУ СОШ № 3,
г. Сальск, Ростовская область

г. Ростов-на-Дону
2017 год

ОГЛАВЛЕНИЕ:

1. Введение	стр.3-4
2. Экскурс в историю	стр.5
3. Немного теории	стр.6
3.1 Метод координат	стр. 6-7
3.2 Правило треугольника	стр. 8
а. Метод Саррюса	стр. 9
4. Социологический опрос	стр.10
5. Решение стереометрических задач №14 Открытого банка заданий ФИПИ	стр.11
6. Заключение	стр.22
7. Список литературы	стр. 23

I. Введение

При подготовке к ЕГЭ по математике я столкнулась с проблемой решения задач на нахождение угла между плоскостями. Решая задачи школьным способом, мои вычисления иногда были такими громоздкими, а сами чертежи не понятными. Тогда я обратилась к маме с просьбой показать мне способ, который бы был и понятен и в тоже время сэкономил бы мое время при решении такого типа задач на ЕГЭ. Я хочу рассказать о таком способе. Это всем известный координатный метод решения стереометрических задач, а так же метод вычисления определителей третьего порядка способом треугольника и способом Саррюса. Они меня заинтересовали и я самостоятельно изучила теорию и применение этих способов к решению задач Открытого банка заданий ФИПИ.

Я поставила перед собой цель: проанализировать различные способы нахождения угла между плоскостями, изучить и исследовать способы вычисления определителей третьего порядка и применить их к решению стереометрических задач, провести стандартизацию подхода к решению отдельных типов задач.

Гипотеза: существуют различные способы нахождения углов между плоскостями, а так же углов между прямыми и плоскостями, отличные от способов, предлагаемых в школьном курсе геометрии.

Методы исследования: частично-поисковый, исследовательский, сравнительный анализ, синтез, практический, изучение и анализ литературы по данной теме, проведение практических вычислений, анализ результатов.

Задачи:

- Рассмотреть сущность каждого метода;
- Рассмотреть решение одной задачи разными способами;
- Показать применение способов для различных стереометрических фигур;
- Определение оптимальных способов решения стереометрических задач из открытого банка ЕГЭ 2017г.

Актуальность: Изучение данной темы способствует лучшей подготовке учащихся к итоговым и выпускным профильным экзаменам по математике ЕГЭ, а так же при подготовке к олимпиадам.

Исследование: подробное изучение метода координат, понять сущность метода определителей третьего порядка, способа Саррюса, подбор практических задач по данной теме; выявление наиболее простого способа решения стереометрических задач.

Результат работы: материал, изложенный в моей работе, может быть использован в учебном процессе в курсе геометрии в учебном заведении, в классах с углубленным изучением математики и на элективных курсах.

Научная новизна: теоретический материал представлен в форме доступной для понимания учащимися старших классов, подобраны и решены задачи по текстам из открытого банка ЕГЭ.

Практическая значимость: данный материал может использоваться в качестве основы для элективного курса в 10 - 11 классах при подготовке к олимпиадам и ЕГЭ.

II. Экскурс в историю.

Первые упоминания об определителях относятся к концу 17-го века, когда немецкий математик Лейбниц изучал линейные уравнения с многими неизвестными. Далее в конце 18-го века швейцарский математик Крамер (см. Приложение 1) указал общий закон составления определителей и привел формулы для решения систем линейных уравнений с n неизвестными с помощью определителей.

В настоящее время нет почти ни одной отрасли математики, в которой не имели бы приложений определители. Они встречаются в алгебре, в аналитической геометрии, в механике, в теории функций, в линейном программировании и т.д.

Диагональ определителя, состоящая из элементов с одинаковыми индексами, называется *главной*, а вторая называется *побочной*.

Теория определителей возникла в связи с задачей решения систем линейных уравнений.

К понятию определителя близко подошли авторы древнекитайского учебника «Математика в девяти книгах»

В Европе определители матриц 2×2 встречаются у Кардано в XVI веке. Для старших размерностей определены Лейбницем в 1693 году. Первая публикация принадлежит Крамеру. Теория определителей создана Вандермондом, Лапласом, Коши и Якоби. Термин «определитель» встречается впервые у Гаусса.

Японский математик Сэки Такакадзу (см. Приложение 2) ввёл определители независимо в 1683 году.

Правило Саррюса — метод вычисления определителя матрицы третьего порядка. Наряду с правилом треугольника призвано внести в процесс вычисления определителя наглядность, уменьшив тем самым вероятность возникновения ошибки. Названо по имени французского математика Пьера Фредерика Саррюса (см. Приложение 3) Данный метод применим лишь для определителей третьего порядка, вычислять методом Саррюса определители более высоких порядков нельзя. Однако в октябре 2000 года мексиканский математик Густаво Вильялобос Эрнандес из Гвадалахарского университета нашёл метод, сходный с правилом Саррюса, для вычисления определителей четвёртого порядка и доказал, что вычислять определители пятого порядка подобным методом уже нельзя. Но об этом я думаю, что узнаю уже в ВУЗе, куда я мечтаю поступить после окончания школы.

III. Немного теории.

3.1 Метод координат.

В ходе исследования я выяснила, что большую роль в развитии геометрии сыграло применение алгебры к изучению свойств геометрических фигур, разросшееся в самостоятельную науку — аналитическую геометрию. Возникновение аналитической геометрии связано с открытием метода координат, являющегося основным ей методом. Метод координат — весьма эффективный и универсальный способ нахождения любых углов или расстояний между стереометрическими объектами в пространстве. Решая ту или иную математическую или физическую задачу методом координат, можно использовать различные координатные системы, выбирая ту из них, в которой задача решается проще или удобнее в данном конкретном случае.

Существует множество систем координат: аффинная, полярная, биполярная, коническая, параболическая, проективная, сферическая, цилиндрическая и др. Наиболее используемая из них — прямоугольная система координат (также известная как декартова система координат). Ею мы и пользуемся в школьном курсе геометрии. Данный метод решения заключается во введении (привязке к исследуемым фигурам) декартовой системы координат, а затем — исчислении образующихся векторов (их длин и углов между ними). Достоинство метода координат состоит в том, что его применение избавляет от необходимости прибегать к наглядному представлению сложных пространственных конфигураций. Алгоритм применения метода координат к решению геометрических задач сводится к следующему:

- Выбираем в пространстве систему координат из соображений удобства выражения координат и наглядности изображения.
- Находим координаты необходимых для нас точек.
- Решаем задачу, используя основные задачи метода координат.
- Переходим от аналитических соотношений к геометрическим.

Из школьного курса геометрии нам известно, что угол между двумя плоскостями в пространстве равен модулю угла между нормальными к этим плоскостям. Таким образом, если мы найдем координаты вектора нормали, то, воспользовавшись знакомой нам из школьного учебника геометрии формулой косинуса угла между векторами, найдем искомый угол. Но дело в том, что в школьном курсе совсем мало времени отводится на изучение понятия нормали. Вспомним, что же такое «нормаль»? Нормаль — это прямая, перпендикулярная плоскости.

Для того, чтобы использовать метод координат, надо хорошо знать формулы. Их всего три: Главная формула - косинус угла φ между векторами

1. $\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$

$$\cos \varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

2. Уравнение плоскости в трехмерном пространстве: $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B, C и D — действительные числа, причем, если плоскость проходит через начало координат, $D = 0$. А если не проходит, то $D = 1$.
3. Вектор, перпендикулярный к плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, имеет координаты: $\vec{n} \{A; B; C\}$.
4. Составляем и решаем систему уравнений. На первый взгляд, выглядит устрашающе, но достаточно немного практики — и все будет работать великолепно.

3.2 Правило треугольника

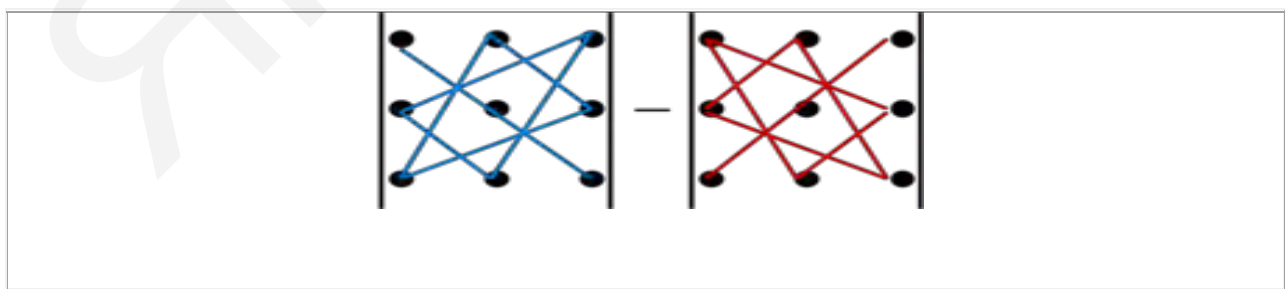
Уравнение плоскости составляется с помощью определителя третьего порядка и решается способом треугольника. Определитель – это такая специальная квадратная числовая таблица, вычисляемая по определенным правилам. Такая таблица представляет собой совокупность строк и столбцов, на пересечении которых находятся её элементы. Диагональ определителя, состоящая из элементов с одинаковыми индексами, называется *главной*, а вторая называется *побочной*. Определителем *третьего порядка* называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

Чтобы составить уравнение плоскости, нам нужно найти определитель третьего порядка, в котором количество строк равно количеству столбцов. Вообще определители 3×3 оказывается можно решить 8 способами. Но я хочу рассказать о двух способах решения таких определителей – способе треугольника и способе Саррюса. Итак. Допустим, что у нас есть плоскость, проходящая через три точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$. Координаты точек запишем в специальную таблицу, называемую определителем третьего порядка (по количеству строк и столбцов в такой таблице). И вот что мы получим:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

Для запоминания этих формул используют схематические правила



При вычислении определителей 3-го порядка удобно пользоваться правилом треугольников. С плюсом берутся произведения элементов стоящих на главной диагонали и элементы, стоящие в вершинах следующих треугольников. С минусом берутся произведения элементов, стоящих на побочной диагонали и в вершинах следующих треугольников. (см. Приложение 4)

3.3 Метод Саррюса

Второй метод заключается в том, что рядом с определителем справа записываются первый и второй столбцы и тогда с плюсом берутся произведения элементов, стоящих на главной диагонали и двух ей параллельных, с минусом – произведения элементов, стоящих на второй диагонали и двух ей параллельных. (см. Приложение 5)

$$\begin{array}{ccc|cc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
 \hline
 - & - & - & + & + & +
 \end{array}$$

4. Социологические опрос.

Я провела социологический опрос среди своих одноклассников и выяснила, что о методе координат они слышали и знают из школьного курса геометрии. Но пользуются им очень редко при решении задач №14 ЕГЭ. А об определителях знают лишь 3 моих одноклассников и пользуются при решении задач.



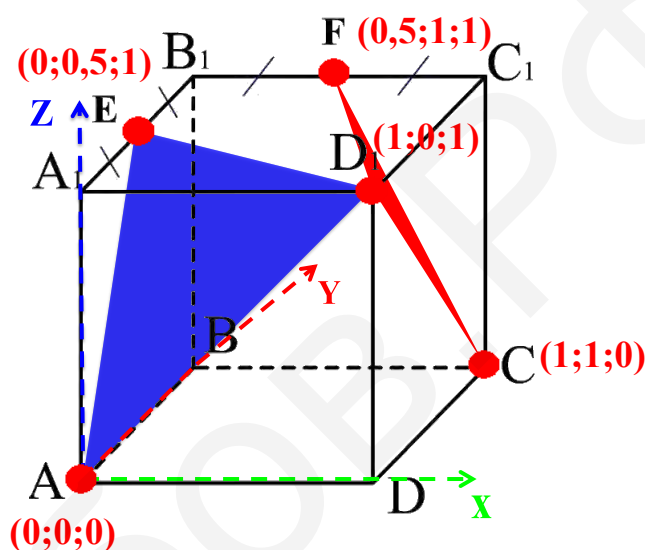
Различные способы решения стереометрических задач №14 ЕГЭ по математике.

Открытый банк заданий ЕГЭ 2017. Решу ЕГЭ.

В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между плоскостями $(AD_1 E)$ и $(D_1 F C)$, где E и F середины рёбер $A_1 B_1$ и $B_1 C_1$ соответственно.

Решение.

1 способ (Саррюса).



Составить уравнение плоскостей

Введем систему координат и найдем координаты трёх точек плоскости $(D_1 F C)$.

$F(0,5;1;1)$, $D_1(1;0;1)$, $C(1;1;0)$. Составим уравнение плоскости $(D_1 F C)$, используя определитель третьего порядка и вычислив его методом Саррюса.

$$\begin{vmatrix} x-0,5 & y-1 & z-1 \\ 1-0,5 & 0-1 & 1-1 \\ 1-0,5 & 1-1 & 0-1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-0,5 & y-1 \\ 1-0,5 & 0-1 \\ 1-0,5 & 1-1 \end{vmatrix} = 0,$$

Уравнение плоскости $(D_1 F C)$ примет вид: $x+0,5y+0,5z-1,5=0$. Нормаль к плоскости имеет координаты $\vec{n}_1(1;0,5;0,5)$.

Найдем координаты трёх точек плоскости $(AD_1 E)$. $A(0;0;0)$, $D_1(1;0;1)$, $E(0;0,5;1)$. Составим уравнение плоскости $(AD_1 E)$.

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 0-0 & 0,5-1 & 1-0 \\ 1-0 & 0-0 & 1-0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-0 & y-0 \\ 0-0 & 0,5-1 \\ 1-0 & 0-0 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости (AD_1E) примет вид: $0,5x+y-0,5z=0$. Нормаль к плоскости имеет координаты $\vec{n}_2(0,5;1;-0,5)$. Найдем косинус угла между плоскостями.

$$\cos \alpha = \frac{|1*0,5+1*0,5-0,5*0,5|}{\sqrt{1+0,25+0,25}*\sqrt{0,25+1+0,25}} = \frac{1}{2}, \text{ значит } \alpha = 60^\circ$$

Ответ: $\alpha = 60^\circ$

2 способ (координатный)

Подставим координаты точек $F(0,5;1;1)$, $D_1(1;0;1)$, $C(1;1;0)$ в уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$. Так как плоскость не проходит через начало

координат, то $D=1$. Получим систему уравнений
$$\begin{cases} 0,5A + B + C + 1 = 0, \\ 1A + 0B + C + 1 = 0, \\ A + B + 0C + 1 = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получим $A=-\frac{2}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=-\frac{1}{3}$. Уравнение плоскости принимает вид: $-\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z + 1 = 0$, разделив уравнение на $-\frac{2}{3}$, получим: $x+0,5y+0,5z-1,5=0$.

Подставим координаты точек в уравнение плоскости $A(0;0;0)$, $D_1(1;0;1)$,

$E(0;0,5;1)$, получим систему уравнений
$$\begin{cases} 0A + 0B + 0C = 0, \\ A + 0B + C = 0, \\ 0A + 0,5B + C = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получим $A=0,5B$, $C=-A=-0,5B$. $0,5Bx+By-0,5Bz=0$. Разделив уравнение на $0,5B$, получим: $0,5x+y-0,5z=0$. Найдем косинус угла

между плоскостями. $\cos \alpha = \frac{|1*0,5+1*0,5-0,5*0,5|}{\sqrt{1+0,25+0,25}*\sqrt{0,25+1+0,25}} = \frac{1}{2}$, значит $\alpha = 60^\circ$

Ответ: $\alpha = 60^\circ$

(ФИПИ 2017. Вариант 26, №14)

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ все ребра равны 1. Точка F – середина ребра SB , G – середина ребра SC . Найдите угол между плоскостями ABG и GLF

Решение.

1 способ (треугольника).

Введем систему координат и найдем координаты точек $B; A$; и G , через которые проходит плоскость (BAG) . $B(1;0;0)$, $A(1;1;0)$, $G(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4})$. Составим определитель третьего порядка из координат данных точек.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{vmatrix} = 0. \text{ Вычислим определитель способом треугольника.}$$

$(x-1) * \frac{\sqrt{2}}{4} - (-\frac{3}{4}z) = 0$, $\frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{4}z = 0$, $\frac{\sqrt{2}}{4}x + 0y - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{4}z = 0$. Значит, вектор нормали $\vec{n}$ имеет координаты $\vec{n}_1 \left\{ \frac{\sqrt{2}}{4}; 0; \frac{3}{4} \right\}$. Найдем координаты точек $D; A$ и G , через которые проходит плоскость (DAG) . $D(0;1;0)$, $A(1;1;0)$, $G(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4})$. Составим определитель третьего порядка из координат точек.

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{vmatrix} = 0. \text{ Вычислим определитель способом треугольника.}$$

$-\frac{3}{4}x - \frac{\sqrt{2}}{4}(y-1) = 0$. Уравнение плоскости (DAG) принимает вид:

$0x - \frac{\sqrt{2}}{4}y - \frac{3}{4}z + \frac{\sqrt{2}}{4} = 0$. Значит, вектор нормали $\vec{n}$ имеет координаты $\vec{n}_2 \left\{ 0; -\frac{\sqrt{2}}{4}; -\frac{3}{4} \right\}$. Вычислим $\cos \alpha$ угла между векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$.

$$\cos \alpha = \frac{\left| -\frac{9}{16} \right|}{\sqrt{\frac{2}{16} + \frac{9}{16}} * \sqrt{\frac{2}{16} + \frac{9}{16}}} = \frac{\frac{9}{16}}{\frac{11}{16}} = \frac{9}{11}. \text{ Следовательно, } \alpha = \arccos \frac{9}{11}.$$

Ответ: $\alpha = \arccos \frac{9}{11}$.

2 способ (координатный)

Введем систему координат, найдем координаты точек В;А; и G и составим уравнение плоскости (BAG). В (1;0;0), А(1;1;0), G ($\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}$). Так как наша плоскость не проходит через начало координат — точку (0; 0; 0), то предположим, что D = 1.

Подставим координаты точек в уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$. Получим

систему уравнений
$$\begin{cases} 1A + 0B + 0C + 1 = 0, \\ 1A + 1B + 0C + 1 = 0, \\ \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{\sqrt{2}}{4}C + 1 = 0. \end{cases}$$
 решая систему уравнений получим

$A=-1, B=0, C=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. Уравнение плоскости принимает вид:

$-x+0y+\frac{3\sqrt{2}}{2}z+1=0$ (если уравнение, составленное в первом способе, разделить на $\frac{\sqrt{2}}{4}$, то получим уравнение такого же вида. Аналогично составим уравнение

плоскости (DAG). D(0;1;0), А(1;1;0), G ($\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}$).составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0A + 1B + 0C + 1 = 0, \\ 1A + 1B + 0C + 1 = 0 \\ \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{\sqrt{2}}{4}C + 1 = 0. \end{cases}, \text{ Решая систему уравнений получим } A=0, B=-1,$$

$C=\frac{-3\sqrt{2}}{2}$. Уравнение плоскости примет вид: $0x-1y-\frac{-3\sqrt{2}}{2}z+1=0$. Нахождение координат нормали и угла между ними аналогичный первому способу.

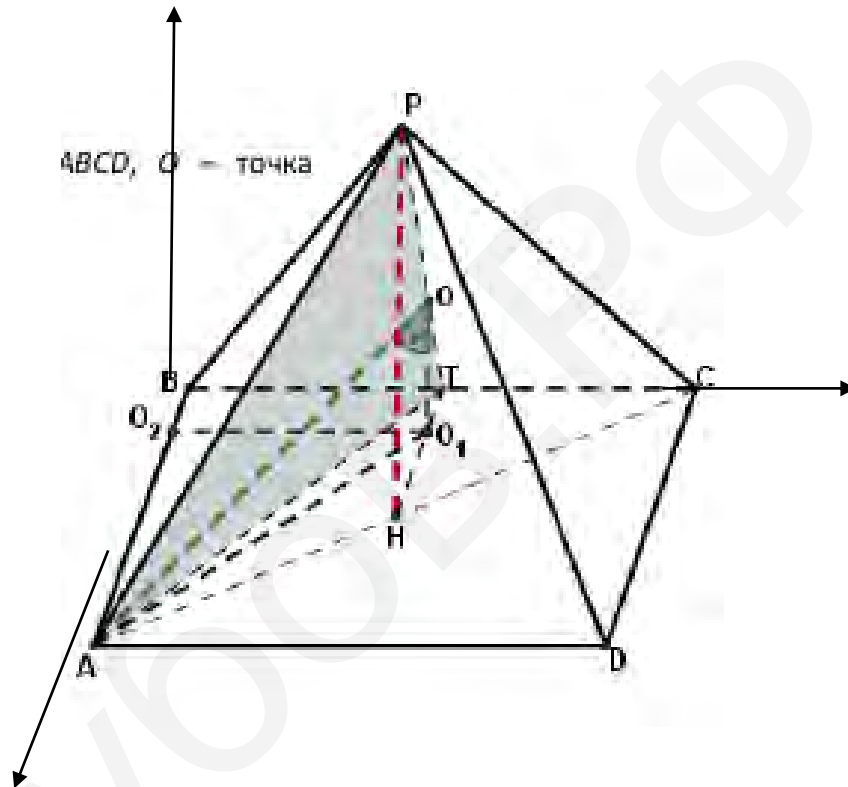
Ответ: $\alpha = \arccos \frac{9}{11}$.

ALEXLARIN.NET. Тренировочный вариант № 174 (№14)

PH – высота правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$, O – точка пересечения медиан треугольника BCP . Найдите угол между прямыми PH и AO , если известно, что $AB=PH$.

Решение.

1 способ (координатный).



Введем систему координат и определим координаты соответственно точек A, O, P и H . Пусть сторона основания пирамиды равна 1. Тогда $A(1;0;0)$,

$H(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0)$, $P(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1)$, $O(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$. Найдём координаты векторов $AO \left\{ -\frac{2}{3}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3} \right\}$

$$\overrightarrow{HP} \{0; 0; 1\}. \cos \alpha = \frac{-\frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{\frac{38}{36}}} = \frac{2}{\sqrt{38}}. \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{38}} = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{38}}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{34}}{2},$$

$$\alpha = \arctg \frac{\sqrt{34}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \arctg \frac{\sqrt{34}}{2}$$

2 способ.

Пусть $AB=PH=1$. Проведем $OO_1 \perp (ABC)$, тогда $OO_1 \parallel$

PH и угол между PH и AO равен углу между OO_1 и AO , т.е. $\angle AOO_1 = \alpha$. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{O_1O}{AO_1}$,

$OO_1 = \frac{1}{3}PH = \frac{1}{3}$. Так как O - точка пересечения медиан $\triangle BPC$ и $OO_1 \parallel PH$. $O_1T =$

$\frac{1}{3}HT = \frac{1}{6}AB = \frac{1}{6}$. Тогда $AO_2 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$; $O_1O_2 = \frac{1}{2}$. По теореме Пифагора

находим $AO_1 = \sqrt{\frac{25}{36} + \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{34}}{6}}$. Значит, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{\sqrt{34}}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{34}}{2}$, $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{34}}{2}$,

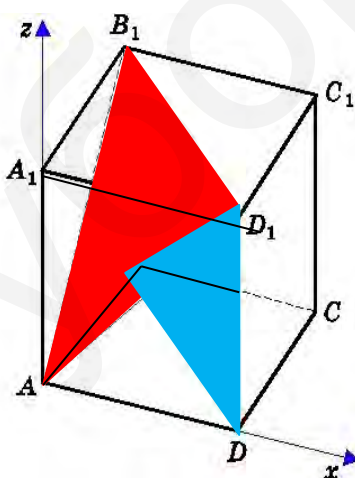
Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{34}}{2}$.

Открытый банк заданий ЕГЭ 2017. Решу ЕГЭ.

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра $AB=8$, $AD=6$, $CC_1=5$. Найти угол между плоскостями BDD_1 и $AD_1 B_1$.

Решение.

1 способ (Саррюса и треугольника).



Введем систему координат и определим координаты соответственно трех точек, через которые проходят каждая плоскостей BDD_1 и $AD_1 B_1$.

$B(0;8;0)$, $D(6;0;0)$, $D_1(6;0;5)$ и $A(0;0;0)$, $D_1(6;0;5)$, $B_1(0;8;5)$. Составим определители третьего порядка для каждой плоскости, используя координаты точек.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ -6 & 8 \end{vmatrix} = 8x - 6y = 0, \text{ нормаль к плоскости}$$

(BDD_1) имеет координаты $\vec{n}_1\{4; -3; 0\}$.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 6 & 0 & 5 \\ 0 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 0, \text{ по правилу треугольника имеем } 20x + 15y - 24z = 0, \text{ нормаль к}$$

плоскости (AD_1B_1) имеет координаты $\vec{n}_2\{20; 15; -24\}$. Найдем угол между векторами по формуле: $\cos \alpha = \frac{|35|}{\sqrt{25 \cdot 1201}} = \frac{7}{\sqrt{1201}}, \alpha = \arccos \frac{7}{\sqrt{1201}}$.

Ответ: $\alpha = \arccos \frac{7}{\sqrt{1201}}$.

2 способ (координатный).

Введем систему координат и определим координаты соответственно трех точек, через которые проходит каждая плоскостей BDD_1 и AD_1B_1 .

$B(0; 8; 0)$, $D(6; 0; 0)$, $D_1(6; 0; 5)$ и $A(0; 0; 0)$, $D_1(6; 0; 5)$, $B_1(0; 8; 5)$. Составим систему уравнений. Так как плоскость (BDD_1) не проходит через начало координат, т.е. точку $(0; 0; 0)$, то предположим, что $D = 1$.

Подставим координаты точек в уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

$$\begin{cases} 0A + 8B + 0C + 1 = 0, \\ 6A + 0B + 0C + 1 = 0, \\ 6A + 0B + 5C + 1 = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений получим $A = -\frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{8}$, $C = 0$. Уравнение плоскости принимает вид: $-\frac{1}{6}x - \frac{1}{8}y + 1 = 0$ или $4x - 3y - 24 = 0$.

Так как плоскость (AB_1D_1) проходит через начало координат, т.е. точку $(0; 0; 0)$, то предположим, что $D = 0$. Подставим координаты точек в уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

$$\begin{cases} 0A + 0B + 0C = 0, \\ 6A + 0B + 5C = 0, \\ 0A + 8B + 5C = 0. \end{cases} \text{ Решая систему уравнений получим } A = \frac{8}{6}B, C = -\frac{8}{5}B, \frac{8}{6}Bx + By - \frac{8}{5}Bz = 0, / * 30 : B, 40x + 30y - 48z = 0, 20x + 15y - 24z = 0 \text{ -уравнение плоскости. Найдем}$$

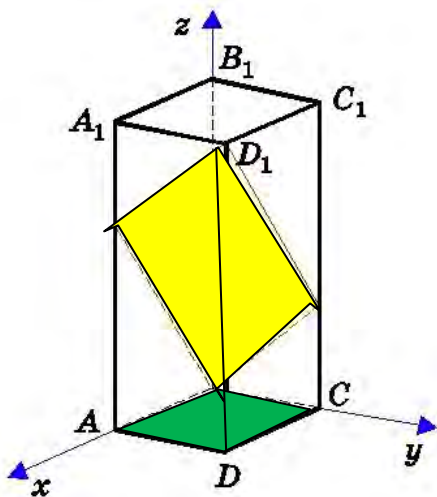
угол между векторами по формуле $\cos \alpha = \frac{|35|}{\sqrt{25 \cdot 1201}}, \alpha = \arccos \frac{7}{\sqrt{1201}}$,

Ответ: $\alpha = \arccos \frac{7}{\sqrt{1201}}$.

2. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 4. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 3 : 1$. Найти угол между плоскостями ABC и BED_1 .

Решение.

1 способ (Саррюса и треугольника).



Введем систему координат и определим координаты соответственно трех точек, через которые проходит каждая плоскостей ABC и BED_1 .

$B(0;0;0)$, $A(1;0;0)$, $C(0;1;0)$ и $B(0;0;0)$, $D_1(1;1;4)$, $E(1;\frac{3}{4};0)$. Составим определители третьего порядка для каждой плоскости, используя координаты точек.

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, вычислив методом Саррюса, получим $z=0$, значит нормаль к плоскости (ABC) имеет координаты $\vec{n}_1\{0; 0; 1\}$.

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & \frac{3}{4} & 0 \end{vmatrix} = 0$, по правилу треугольника имеем $-\frac{3}{4}x + y - \frac{1}{4}z = 0$, умножим на (-4) ,

получим $x - 4y + z = 0$. нормаль к плоскости (BED_1) имеет координаты

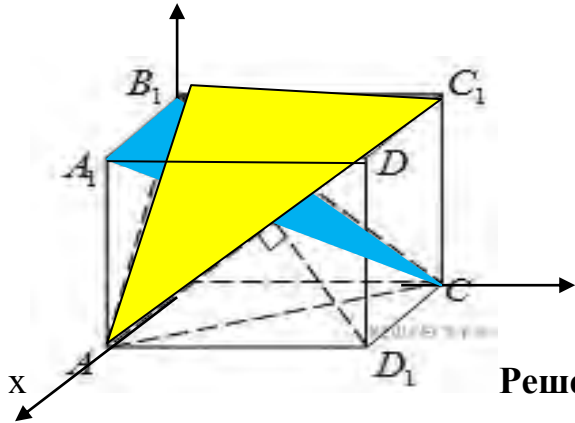
$\vec{n}_2\{1; -4; 1\}$. Найдем угол между векторами по формуле $\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{18}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$, $\alpha = \arccos \frac{\sqrt{2}}{6}$.

Ответ: $\alpha = \arccos \frac{\sqrt{2}}{6}$.

Решу ЕГЭ, 2017.

3. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

Найдите угол между плоскостями $AB_1 C_1$ и $A_1 B_1 C$.



Решение.

1 Способ решения этой задачи (способ Саррюса).

Введем систему координат и найдем координаты точек $A(1;0;0)$, $B_1(0;0;1)$, $C_1(0;1;1)$, $A_1(1;0;1)$, $C(0;1;0)$. Составим определители из координат точек,

через которые проходят плоскости. $\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Запишем справа от

определителя первые два столбца и решим способом Саррюса.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z & x-1 & y \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0. -1y -1z - (x-1-y) = 0, 1x+0y+1z-1=0 - \text{уравнение}$$

плоскости AB_1C_1 , нормаль имеет координаты $\vec{n}_1 \{1; 0; 1\}$.

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 & x & y \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, 0x+1y+1z=0 - \text{уравнение плоскости } A_1B_1C, \text{ нормаль}$$

имеет координаты $\vec{n}_2 \{0; 1; 1\}$. $\cos \alpha = \frac{|0+0+1|}{\sqrt{1+0+1} \cdot \sqrt{0+1+1}} = \frac{1}{2}$. Значит $\alpha = 60^\circ$.

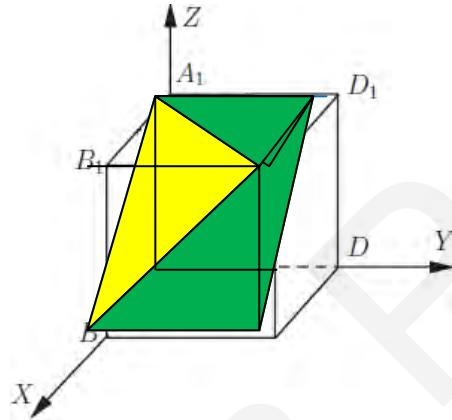
Ответ: $\alpha = 60^\circ$.

Вариант 11. № 14. ЕГЭ 2017. Математика, И.В. Яценко. 36 вариантов.

Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

б) Найдите угол между плоскостями $BA_1 C_1$ и $BA_1 D_1$.

Решение.



Углом между двумя плоскостями $BA_1 C_1$ и $BA_1 D_1$ будет двугранный угол, измеряемый линейным углом α между двумя отрезками $C_1 H$ и OH (данные отрезки получаются, если к $A_1 B$ провести перпендикулярные векторы в плоскостях $BA_1 C_1$ и $BA_1 D_1$; точка H - середина $A_1 B$, O - точка пересечения диагоналей прямоугольника).

Пусть ребра куба равны 1. Тогда длина отрезка $OH = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2}$. Длина отрезка $OC_1 = \frac{1}{2} AC_1$, где $AC_1 = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ и, соответственно, $OC_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Длина отрезка $HB = \frac{1}{2} A_1 B = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Наконец, длина

$$C_1 H = \sqrt{C_1 B^2 - HB^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Теперь есть все длины треугольника $OH C_1$, из которого по теореме косинусов находим косинус угла α между плоскостями:

$$\cos \alpha = \frac{OH^2 + C_1H^2 - OC_1^2}{2 \cdot OH \cdot C_1H} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \frac{3}{4}}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

и угол равен

$$\alpha = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Ответ: $\alpha = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$

2 способ(способ Саррюса и треугольника)

Введем систему координат и определим координаты трех точек, лежащих в каждой плоскости и составим уравнение плоскостей и нормалей к ним.

$$B(1;0;0), C_1(1;1;1), A_1(0;0;1), D_1(0;1;1).$$

Составим определитель третьего порядка из координат точек.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)*1*1 + z*0*0 + y*1*(-1) - (z*1*(-1) + y*0*1 + (x-1)*0*1) = 0,$$

$x-y+z=0$ –уравнение плоскости $(B C_1 A_1)$, нормаль к плоскости имеет координаты $\vec{n}_1 \{1; -1; 1\}$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$-y-z-(x-1-y)=0, -x-z+1=0$ –уравнение плоскости $(B D_1 A_1)$, нормаль к плоскости имеет координаты $\vec{n}_2 \{-1; 0; -1\}$. Вычислим $\cos \alpha$ угла между векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$

$$\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1 \cdot \cos \alpha = \frac{|-1+0-1|}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{1+0+1}} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \alpha = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ответ: $\alpha = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$

Заключение

В ходе исследования я выяснила, что большую роль в развитии геометрии сыграло применение алгебры к изучению свойств геометрических фигур, разросшееся в самостоятельную науку — аналитическую геометрию. Я выяснила, что метод координат — весьма эффективный и универсальный способ нахождения любых углов или расстояний между стереометрическими объектами в пространстве. Решая ту или иную математическую или физическую задачу методом координат, можно использовать различные координатные системы, выбирая ту из них, в которой задача решается проще или удобнее в данном конкретном случае.

Хочется отметить, что тема моей работы полезна и очень актуальна тем более в наше время, когда на первое место ставятся знания. В школе уделяется мало время на изучения геометрии (всего 2 часа в неделю). Проанализировав решенные мною задачи, я пришла к выводу, что решение задач геометрических задач -это не сложный процесс, просто необходимо знать методы решения и иметь аналитическое мышление. Использование же этих знаний на практике является творческой работой, при которой действительно учишься применять теорию на практике. Чтобы найти рациональный метод решения задачи, нужно хорошо знать эти методы, тогда легче ориентироваться в их выборе.

Для любознательных учащихся, а также для тех, кто желает углубленно заниматься геометрией, знания способов решения стереометрических задач на нахождение углов между плоскостями, углов между прямыми и плоскостями будет очень полезны, т.к. по данному принципу можно решить очень сложные и логические задачи. Я пришла к выводу, что только планомерная, вдумчивая и добросовестная учеба в школе позволит выпускнику хорошо подготовиться к участию в ЕГЭ. Таким образом, выдвинутая мной гипотеза подтвердилась, я доказала, что существует много способов решения стереометрических задач, нужно только выбрать наилучший из возможных способов для конкретной задачи. В процессе решения задач я выяснила, что составление определителей позволяет точнее и проще составить уравнение или систему уравнений для решения задач. Вся проделанная мною работа, заключенная в этой презентации может быть использована учащимися для подготовки к итоговым и выпускным экзаменам, в частности ГИА и ЕГЭ

Список использованной литературы:

1. А.С., Пантелеев А.В., 2005 (электронное приложение).
2. Бунеева Н.А, Каргаполов А.М. Задачи по стереометрии (координатный метод), 2006. Высшая математика в упражнениях и задачах в 2-х частях. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я. Год выпуска: 1986.
3. Высшая математика, Учебник для ВУЗов, Шипачев В.С., 1998. Глава 3. Аналитическая геометрия на плоскости 34 4. Угол между двумя прямыми Глава 9. Аналитическая геометрия в пространстве 222 (46) § 11. Уравнения плоскости 244
 1. Общее уравнение плоскости (244). 2. Угол между двумя плоскостями (245). Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости (246).
4. Единый Государственный экзамен: математика: методика подгот.: кн. для учителя / [Л.О.Денищева, Ю.А.Глазков, К.А. Краснянская и др.]. – М.: Просвещение, 2005. – 256 с.
5. История математики под редакцией А. П. Юшкевича в трёх томах, М.: Наука.Том 3 Математика XVIII столетия. (1972) Краткий курс высшей алгебры. Дураков Б.К. Год выпуска: 2006.
6. Краткий курс высшей алгебры. Дураков Б.К. Год выпуска: 2006.
7. Ларин А.А. Электронный учебник "Курс высшей математики": Часть 1
8. Саррюс, Фредерик-Пьер // Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона : в 86 т. (82 т. и 4 доп.). — СПб., 1890—1907.
9. <http://www.webmath.ru> –открытый банк заданий ЕГЭ
10. <http://www.fipi.ru>
11. alexlarin.net
12. ege.sdamgia.ru