

Р. К. Гордин

**Это должен знать
каждый матшкольник**

МЦНМО, 2003

УДК 514.112
ББК 22.151.0
Г89

Гордин Р. К.

Г89 Это должен знать каждый матшкольник. — 2-е изд., испр.
— М.: МЦНМО, 2003. — 56 с.

ISBN 5-94057-093-3

В этой книге в форме серии задач излагается практически вся элементарная геометрия. Книга состоит из двух частей: первую можно считать базовым курсом геометрии, содержащим наиболее известные и часто используемые теоремы; во второй приводятся малоизвестные, но красивые факты. Близкие по тематике задачи располагаются рядом, так чтобы было удобно их решать.

В настоящем втором издании исправлены замеченные ошибки и опечатки.

Книга будет полезна как школьникам математических классов («матшкольникам»), так и преподавателям. Кроме того, она доставит немало приятных минут всем любителям геометрии.

ББК 22.151.0

Рафаил Калманович Гордин

ЭТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ КАЖДЫЙ МАТШКОЛЬНИК

Художник Н. Суворова.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано к печати 26.02.2003 г. Формат
60 × 88/16. Печать офсетная. Объем 3,5 печ. л. Тираж 3000 экз. Заказ № .

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы».

ISBN 5-94057-093-3

© Гордин Р. К., 2003.
© МЦНМО, 2003.

Предисловие

В первой части данного текста перечислены основные теоремы школьного курса геометрии и некоторые ключевые факты, которые будут полезны тем школьникам, которые добросовестно учатся в школе и хотели бы научиться решать более-менее содержательные геометрические задачи. Все эти факты не выходят за пределы школьной программы и содержатся практически в любом школьном учебнике (иногда в виде задач). Первая часть может служить памяткой по геометрии для поступающих вузы, где к абитуриентам не предъявляют повышенных требований по математике. Таких вузов большинство.

Вторая часть состоит из задач повышенной трудности. Это

- а) известные классические задачи и теоремы элементарной геометрии, не вошедшие в школьные учебники;
- б) красивые задачи математических олимпиад разных уровней;
- в) задачи, содержащие ключевые идеи;
- г) некоторые ставшие довольно популярными задачи, в разные годы предлагавшиеся на вступительных экзаменах в вузы с повышенными требованиями по математике (МГУ, МФТИ, МИФИ и т. д.);
- д) просто интересные и красивые геометрические задачи, которые традиционно предлагаются на занятиях различных математических кружков.

Задачи второй части могут быть рекомендованы тем школьникам, которые проявляют повышенный интерес к геометрии, любят решать геометрические задачи.

При необходимости, подробные решения большинства задач школьник может найти в известных книгах:

- 1) *Адамар Ж.* Элементарная геометрия. Часть I. Планиметрия. М.: Учпедгиз, 1936.
- 2) *Делоне Б., Житомирский О.* Задачник по геометрии. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
- 3) *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. М.: Наука, 1991.
- 4) *Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф.* Задачи по стереометрии. М.: Наука, 1989.
- 5) *Шарыгин И. Ф.* Задачи по геометрии. Планиметрия. М.: Наука, 1986.
- 6) *Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. М.: ГИТТЛ, 1954. (Библиотека математического кружка. Выпуск 2 и 3).

При подборе задач использована компьютерная информационно-поисковая система «Задачи», созданная Московским математическим центром под руководством И. Ф. Шарыгина, а также сотрудниками и учениками московской школы № 57. Система также содержит решения большинства из предложенных задач.

ЯГубов.РФ

Часть 1. Основные сведения из школьной геометрии

Планиметрия

1. Признаки равенства треугольников.

1) Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то треугольники равны.

2) Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то треугольники равны.

3) Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то треугольники равны.

2. Основные свойства и признаки равнобедренного треугольника.

1) Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

2) Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.

3) Если два угла треугольника равны, то он равнобедренный.

4) Если медиана треугольника является его высотой, то треугольник равнобедренный.

5) Если биссектриса треугольника является его высотой, то треугольник равнобедренный.

6) Если медиана треугольника является его биссектрисой, то треугольник равнобедренный.

3. Геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка, есть прямая, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину (серединный перпендикуляр к отрезку).

4. Признаки и свойства параллельных прямых.

1) **Аксиома параллельных.** Через данную точку можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

2) Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные внутренние накрест лежащие углы, то прямые параллельны.

3) Если две прямые параллельны одной и той же прямой, то они параллельны между собой.

4) Две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.

5) Если две параллельные прямые пересечь третьей, то образованные при этом внутренние накрест лежащие углы равны.

5. Теорема о сумме углов треугольника и следствия из нее.

1) Сумма внутренних углов треугольника равна 180° .

2) Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних не смежных с ним углов.

3) Сумма внутренних углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ(n-2)$.

4) Сумма внешних углов n -угольника равна 360° .

5) Углы со взаимно перпендикулярными сторонами равны, если они оба острые или оба тупые.

6. Если биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке M , то $\angle BMC = 90^\circ + \angle A/2$.

7. Угол между биссектрисами смежных углов равен 90° .

8. Биссектрисы внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей перпендикулярны.

9. Признаки равенства прямоугольных треугольников.

1) По двум катетам.

2) По катету и гипотенузе.

3) По гипотенузе и острому углу.

4) По катету и острому углу.

10. Геометрическое место внутренних точек угла, равноудаленных от его сторон, есть биссектриса угла.

11. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы.

12. Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, противолежащий этому катету, равен 30° .

13. **Неравенство треугольника.** Сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны.

14. **Следствие из неравенства треугольника.** Сумма звеньев ломаной больше отрезка, соединяющего начало первого звена с концом последнего.

15. Против большего угла треугольника лежит большая сторона.

16. Против большей стороны треугольника лежит больший угол.

17. Гипотенуза прямоугольного треугольника больше катета.

18. Если из одной точки проведены к прямой перпендикуляр и наклонные, то

1) перпендикуляр короче наклонных;

2) большей наклонной соответствует большая проекция и наоборот.

19. Параллелограмм. Параллелограммом называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

Свойства и признаки параллелограмма.

- 1) Диагональ разбивает параллелограмм на два равных треугольника.
- 2) Противоположные стороны параллелограмма попарно равны.
- 3) Противоположные углы параллелограмма попарно равны.
- 4) Диагонали параллелограмма пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.
- 5) Если противоположные стороны четырехугольника попарно равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.
- 6) Если две противоположные стороны четырехугольника равны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм.
- 7) Если диагонали четырехугольника делятся точкой пересечения пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.

20. Прямоугольник. Прямоугольником называется параллелограмм с прямым углом.

Свойства и признаки прямоугольника.

- 1) Диагонали прямоугольника равны.
- 2) Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

21. Ромб. Ромбом называется четырехугольник, все стороны которого равны.

Свойства и признаки ромба.

- 1) Диагонали ромба перпендикулярны.
- 2) Диагонали ромба делят его углы пополам.
- 3) Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.
- 4) Если диагонали параллелограмма делят его углы пополам, то этот параллелограмм — ромб.

22. Квадрат. Квадратом называется прямоугольник, все стороны которого равны.

23. Геометрическое место точек, равноудаленных от данной прямой — две параллельные прямые.

24. Теорема Фалеса. Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла, то на второй стороне угла отложатся также равные отрезки.

25. Средняя линия треугольника. Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника называется средней линией треугольника.

Теорема о средней линии треугольника. Средняя линия треугольника параллельна стороне треугольника и равна ее половине.

26. Свойство середин сторон четырехугольника. Середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

27. Теорема о медианах треугольника. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершины.

28. а) Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

б) Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

29. Трапеция. Трапецией называется четырехугольник, у которого только две противоположные стороны (основания) параллельны. Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины непараллельных сторон (боковых сторон).

Теорема о средней линии трапеции. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

30. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.

31. Трапеция называется равнобедренной, если ее боковые стороны равны.

Свойства и признаки равнобедренной трапеции.

- 1) Углы при основании равнобедренной трапеции равны.
- 2) Диагонали равнобедренной трапеции равны.
- 3) Если углы при основании трапеции равны, то она равнобедренная.
- 4) Если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная.
- 5) Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме оснований.

32. Окружность. Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, удаленных от данной точки, называемой центром окружности, на одно и то же положительное расстояние.

Свойства окружности.

- 1) Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам.
- 2) Диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде.
- 3) Серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности.
- 4) Равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния.

5) Хорды окружности, удаленные от центра на равные расстояния, равны.

6) Окружность симметрична относительно любого своего диаметра.

7) Дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны.

8) Из двух хорд больше та, которая менее удалена от центра.

9) Диаметр есть наибольшая хорда окружности.

33. Замечательное свойство окружности. Геометрическое место точек M , из которых отрезок AB виден под прямым углом ($\angle AMB = 90^\circ$), есть окружность с диаметром AB без точек A и B .

34. Геометрическое место точек M , из которых отрезок AB виден под острым углом ($\angle AMB < 90^\circ$) есть внешность круга с диаметром AB без точек прямой AB .

35. Геометрическое место точек M , из которых отрезок AB виден под тупым углом ($\angle AMB > 90^\circ$), есть внутренность круга с диаметром AB без точек отрезка AB .

36. Свойство серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, описанной около треугольника.

37. Линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде.

38. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника — середина гипотенузы.

39. Теорема о высотах треугольника. Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

40. Касательная к окружности. Прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку, называется касательной к окружности.

1) Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

2) Если прямая l , проходящая через точку на окружности, перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то прямая l — касательная к окружности.

3) Если прямые, проходящие через точку M , касаются окружности в точках A и B , то $MA = MB$.

4) Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.

5) Теорема о биссектрисах треугольника. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник.

41. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a , b и гипотенузой c , равен $(a + b - c)/2$.

42. Если M — точка касания со стороной AC окружности, вписанной в треугольник ABC , то $AM = p - BC$, где p — полупериметр треугольника.

43. Окружность касается стороны BC треугольника ABC и продолжений сторон AB и AC . Тогда расстояние от вершины A до точки касания окружности с прямой AB равно полупериметру треугольника ABC .

44. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB , BC и AC соответственно в точках K , L и M . Если $\angle BAC = \alpha$, то $\angle KLM = 90^\circ - \alpha/2$.

45. Даны окружности радиусов r и R ($R > r$). Расстояние между их центрами равно a ($a > R + r$). Тогда отрезки общих внешних и общих внутренних касательных, заключенные между точками касания, равны соответственно $\sqrt{a^2 - (R - r)^2}$ и $\sqrt{a^2 - (R + r)^2}$.

46. Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.

47. Касающиеся окружности. Говорят, что две окружности касаются, если они имеют единственную общую точку (точка касания).

- 1) Точка касания двух окружностей лежит на их линии центров.
- 2) Окружности радиусов r и R с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом тогда и только тогда, когда $R + r = O_1O_2$.
- 3) Окружности радиусов r и R ($r < R$) с центрами O_1 и O_2 касаются внутренним образом тогда и только тогда, когда $R - r = O_1O_2$.
- 4) Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K . Некоторая прямая касается этих окружностей в различных точках A и B и пересекается с общей касательной, проходящей через точку K , в точке C . Тогда $\angle AKB = 90^\circ$ и $\angle O_1CO_2 = 90^\circ$.

48. Углы, связанные с окружностью.

- 1) Угловая величина дуги окружности равна угловой величине центрального угла.
- 2) Вписанный угол равен половине угловой величины дуги, на которую он опирается.
- 3) Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, отсекаемых хордами.
- 4) Угол между двумя секущими равен полуразности дуг, отсекаемых секущими на окружности.
- 5) Угол между касательной и хордой равен половине угловой величины дуги, заключенной между ними.

49. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

50. Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, есть две дуги равных окружностей (без концов этих дуг).

51. Если четырехугольник можно вписать в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180° .

52. Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180° , то около него можно описать окружность.

53. Если в трапецию можно вписать окружность, то боковая сторона трапеции видна из центра окружности под прямым углом.

54. Если M — точка на отрезке AB , причем $AM : BM = a : b$, то $AM : AB = a : (a + b)$, $BM : AB = b : (a + b)$.

55. Теорема о пропорциональных отрезках. Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на них пропорциональные отрезки.

56. Подобие. Признаки подобия треугольников.

1) Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого, а углы, заключенные между этими сторонами, равны, то треугольники подобны.

2) Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то треугольники подобны.

3) Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трем сторонам другого, то треугольники подобны.

57. Отношение соответствующих линейных элементов подобных фигур равно коэффициенту подобия.

58. Замечательное свойство трапеции. Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

59. Свойство биссектрисы треугольника. Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

60. Произведение основания на высоту для данного треугольника постоянно.

61. Если BM и CN — высоты треугольника ABC ($\angle A \neq 90^\circ$), то треугольник AMN подобен треугольнику ABC , причем коэффициент подобия равен $|\cos \angle A|$.

62. Произведения длин отрезков хорд AB и CD окружности, пересекающихся в точке E , равны, т. е. $|AE| \cdot |EB| = |CE| \cdot |ED|$.

63. Теорема о касательной и секущей и следствие из нее.

1) Если из одной точки проведены к окружности касательная и секущая, то произведение всей секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной.

2) Произведение всей секущей на ее внешнюю часть для данной точки и данной окружности постоянно.

64. Тригонометрические соотношения в прямоугольном треугольнике.

1) Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего или на косинус прилежащего к этому катету острого угла.

2) Катет прямоугольного треугольника равен другому катету, умноженному на тангенс противолежащего или котангенс прилежащего к этому катету острого угла.

65. Теорема Пифагора. Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов.

66. Теорема, обратная теореме Пифагора. Если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то треугольник — прямоугольный.

67. Средние пропорциональные в прямоугольном треугольнике. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное проекций катетов на гипотенузу, а каждый катет есть среднее пропорциональное гипотенузы и своей проекции на гипотенузу.

68. Если в трапецию можно вписать окружность, то радиус окружности есть среднее пропорциональное отрезков, на которые точка касания делит боковую сторону.

69. Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен отрезку общей внутренней касательной, заключенному между общими внешними. Оба эти отрезка равны $2\sqrt{Rr}$.

70. Метрические соотношения в треугольнике.

1) **Теорема косинусов.** Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

2) **Следствие из теоремы косинусов.** Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

3) **Формула для медианы треугольника.** Если m — медиана треугольника, проведенная к стороне c , то $m = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}/2$, где a и b — остальные стороны треугольника.

4) **Теорема синусов.** Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

5) **Обобщенная теорема синусов.** Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру окружности, описанной около треугольника.

71. Формулы площади треугольника.

- 1) Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.
- 2) Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.
- 3) Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности.
- 4) Площадь треугольника равна произведению трех его сторон, деленному на учетверенный радиус описанной окружности.
- 5) Формула Герона.

72. Элементы равностороннего треугольника со стороной a . Пусть h , S , r , R — высота, площадь, радиусы описанной и вписанной окружности равностороннего треугольника со стороной a . Тогда

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

73. Формулы площади параллелограмма.

- 1) Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту.
- 2) Площадь параллелограмма равна произведению его соседних сторон на синус угла между ними.
- 3) Площадь прямоугольника равна произведению двух его соседних сторон.
- 4) Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

74. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

75. Площадь четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

76. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

77. Если в многоугольник можно вписать окружность, то его площадь равна произведению полупериметра многоугольника на радиус этой окружности.

78. Если M — точка на стороне BC треугольника ABC , то

$$\frac{S(AMB)}{S(AMC)} = \frac{BM}{CM}.$$

79. Если P и Q — точки на сторонах AB и AC (или на их продолжениях) треугольника ABC , то

$$\frac{S(APQ)}{S(ABC)} = \frac{AP}{AB} \cdot \frac{AQ}{AC}.$$

80. Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.

81. Площадь круга радиуса R равна πR^2 .

Задачи на построение с помощью циркуля и линейки

1. Постройте треугольник по трем сторонам.
2. Постройте угол, равный данному.
3. Постройте треугольник по двум сторонам и углу между ними.
4. Постройте треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам.
5. Разделите отрезок пополам.
6. Через данную точку проведите прямую, перпендикулярную данной.
7. Через данную точку проведите прямую, параллельную данной.
8. Постройте биссектрису данного угла.
9. Постройте сумму (разность) двух данных отрезков.
10. Разделите отрезок на n равных частей.
11. Постройте окружность, описанную около данного треугольника.
12. Даны отрезки a , b и c . Постройте такой отрезок x , что $x : a = b : c$.
13. Постройте прямоугольный треугольник по двум катетам.
14. Постройте прямоугольный треугольник по катету и гипотенузе.
15. Даны отрезки a и b . Постройте отрезки $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt{a^2 - b^2}$, $\sqrt{ab}$.
16. Постройте треугольник по серединам трех его сторон.
17. Постройте дугу, вмещающую данный угол.
18. Постройте окружность с данным центром, проходящую через данную точку.
19. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки.
20. Через данную точку проведите касательную к данной окружности.
21. Постройте трапецию по основаниям и боковым сторонам.
22. Постройте трапецию по основаниям и диагоналям.
23. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей.

24. Внутри произвольного угла взята точка M . Проведите через точку M прямую так, чтобы отрезок ее, заключенный между сторонами угла, делился бы точкой M пополам.

25. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и высоте, проведенной из вершины этого угла.

Стереометрия

1. Аксиомы стереометрии.

Факты, непосредственно связанные с аксиомами

2. Через прямую и точку, не лежащую на этой прямой, проходит единственная плоскость.

3. Через две параллельные прямые проходит единственная плоскость.

4. Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной.

Параллельность в пространстве

5. Признак параллельности прямой и плоскости. Если прямая a параллельна некоторой прямой плоскости α , то прямая a параллельна плоскости α .

6. Если через прямую a , параллельную плоскости α , провести плоскость, пересекающую плоскость α по прямой b , то прямые a и b параллельны.

7. Если прямые a и b параллельны, а плоскость, проходящая через прямую a , пересекается с плоскостью, проходящей через прямую b , то прямая пересечения плоскостей параллельна прямым a и b .

8. Транзитивность параллельности прямых в пространстве. Если прямая a параллельна прямой b , а прямая b параллельна прямой c , то прямая a параллельна прямой c .

9. Признак параллельности плоскостей. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то плоскости параллельны.

10. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то прямые пересечения параллельны.

11. Транзитивность параллельности плоскостей. Если плоскость α параллельна плоскости β , а плоскость β параллельна плоскости γ , то плоскость α параллельна плоскости γ .

12. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.

13. Через точку, не лежащую в плоскости, проходит единственная плоскость, параллельная данной.

14. Свойства граней и диагоналей параллелепипеда. Противоположные грани параллелепипеда равны и параллельны. Диагонали параллелепипеда пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

15. Теорема о медианах тетраэдра. Медианы тетраэдра (отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней) пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $3:1$, считая от вершины.

16. Диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проходит через точку пересечения медиан треугольника $A_1 BD$ и делится ею в отношении $1:2$, считая от точки A .

17. Если пересечь пирамиду плоскостью, параллельной основанию, то в сечении образуется многоугольник, подобный основанию.

Скрещивающиеся прямые

18. Признак скрещивающихся прямых. Если прямая a лежит в плоскости α , а прямая b пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на прямой a , то a и b — скрещивающиеся прямые.

19. Через две скрещивающиеся прямые проходит единственная пара параллельных плоскостей.

20. Геометрическое место середин отрезков с концами на двух скрещивающихся прямых есть плоскость, параллельная этим прямым и проходящая через середину одного из таких отрезков.

21. Угол между скрещивающимися прямыми (угол между пересекающимися в произвольной точке M прямыми, соответственно параллельными данным) не зависит от выбора точки M .

22. Для любых двух скрещивающихся прямых существует единственный общий перпендикуляр (отрезок с концами на этих прямых, перпендикулярный обоим прямым).

Параллельное проектирование

23. Прямая, непараллельная проектирующей, переходит в прямую.

24. Пара параллельных прямых, непараллельных проектирующей, переходит в пару параллельных прямых или в одну прямую.

25. При проектировании сохраняется отношение отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых.

26. Наклонная пересекает плоскость в точке, лежащей на любой ее параллельной проекции на эту плоскость.

27. Площадь ортогональной проекции плоского многоугольника на плоскость равна произведению площади проектируемого многоугольника на косинус угла между плоскостью этого многоугольника и плоскостью проекций.

Координаты и векторы в пространстве

28. Координаты вектора равны разностям соответствующих координат конца и начала данного вектора.

29. Для того, чтобы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$, где k — некоторое число.

30. Для того, чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы один из них можно было представить в виде линейной комбинации двух других ($\vec{a} = x \cdot \vec{b} + y \cdot \vec{c}$, где x, y — некоторые числа).

31. Любой вектор можно единственным образом разложить по трем некомпланарным векторам.

32. Если M — середина AB , то $\vec{OM} = (\vec{OA} + \vec{OB})/2$.

33. Если M — середина AB , а N — середина CD , то $\vec{MN} = (\vec{AC} + \vec{BD})/2$.

34. Если M — точка пересечения медиан треугольника ABC , то $\vec{OM} = (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})/3$.

35. Если M — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, то $\vec{OM} = (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})/4$.

36. Координаты середины отрезка равны средним арифметическим координат его концов.

37. Свойства скалярного произведения векторов.

а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

б) $\alpha \vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha (\vec{a} \cdot \vec{b})$;

в) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;

г) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$;

д) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2 \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) + \vec{b}^2$;

е) $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны;

ж) ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

38. Расстояние между точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ равно

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

39. Если φ — угол между ненулевыми векторами $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, то

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

40. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно ненулевому вектору $\vec{n}(a; b; c)$ (вектор нормали), имеет вид:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

41. Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно ненулевому вектору $\vec{m}(a; b; c)$ (направляющий вектор), имеют вид:

$$\begin{cases} x - x_0 = at, \\ y - y_0 = bt, \\ z - z_0 = ct. \end{cases}$$

42. Прямая как пересечение двух плоскостей задается системой

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \end{cases}$$

где $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \neq 0$ и $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \neq 0$, а коэффициенты при соответствующих неизвестных непропорциональны.

43. Если φ — угол между плоскостями, заданными уравнениями $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$, то

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

44. Уравнение плоскости «в отрезках». Если плоскость пересекает оси координат в точках $A(p; 0; 0)$, $B(0; q; 0)$ и $C(0; 0; r)$ ($p, q, r \neq 0$), то ее уравнение можно представить в виде

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1.$$

45. Если ρ — расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, то

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Перпендикулярность прямой и плоскости

46. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

47. Если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то они параллельны.

48. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то вторая прямая также перпендикулярна этой плоскости.

49. Две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны.

50. Если прямая и плоскость перпендикулярны одной прямой, то они параллельны.

51. Через данную точку проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной прямой.

52. Через данную точку проходит единственная прямая, перпендикулярная данной плоскости.

53. Теорема о трех перпендикулярах. Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной к плоскости тогда и только тогда, когда она перпендикулярна ортогональной проекции наклонной на эту плоскость.

54. Если из одной точки проведены к плоскости перпендикуляр и наклонные, то

- а) перпендикуляр короче наклонных;
- б) равные наклонные имеют равные ортогональные проекции;
- в) большей наклонной соответствует большая ортогональная проекция;
- г) из двух наклонных больше та, ортогональная проекция которой больше.

55. Теорема об угле прямой с плоскостью. Угол между наклонной и ее ортогональной проекцией на плоскость меньше угла между этой наклонной и любой другой прямой плоскости.

56. Геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка, есть плоскость, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину.

57. Геометрическое место точек, удаленных на данное расстояние от данной плоскости, есть две параллельные плоскости.

58. Геометрическое место точек, равноудаленных от вершин треугольника, есть прямая, проходящая через центр описанной окружности треугольника перпендикулярно его плоскости.

59. Если боковые ребра пирамиды равны, то ее высота проходит через центр окружности, описанной около основания.

Двугранный угол

60. Линейный угол двугранного угла (сечение двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру) не зависит от выбора точки на ребре двугранного угла.

61. Геометрическое место внутренних точек двугранного угла, равноудаленных от его граней, есть биссекторная плоскость двугранного угла.

62. Необходимое и достаточное условие перпендикулярности плоскостей. Две плоскости перпендикулярны (образуют прямой двугранный угол) тогда и только тогда, когда одна из них проходит через перпендикуляр к другой.

63. Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей, то они пересекаются по прямой, также перпендикулярной этой плоскости.

64. Если боковые грани треугольной пирамиды образуют равные двугранные углы с плоскостью основания, то высота пирамиды проходит либо через центр вписанной окружности, либо через центр одной из вневписанных окружностей основания.

Многогранные углы

65. Плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.

66. Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360° .

67. Свойства диагоналей прямоугольного параллелепипеда.

- а) Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.
- б) Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений (длин трех ребер с общей вершиной).

Сфера. Касательная плоскость. Касающиеся сферы

68. Сечение сферы плоскостью, удаленной от центра сферы на расстояние, меньшее радиуса, есть окружность. Основание перпендикуляра, опущенного из центра сферы на секущую плоскость, есть центр этой окружности.

69. Касательная плоскость к сфере (плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку) перпендикулярна радиусу сферы, проведенному в точку касания.

70. Касательная прямая к сфере (прямая, имеющая со сферой единственную общую точку) перпендикулярна радиусу сферы, проведенному в точку касания.

71. Центр сферы, вписанной в двугранный угол, лежит в биссекторной плоскости этого угла.

72. Отрезки касательных прямых, проведенных к сфере из одной точки, равны между собой.

73. Линия центров касающихся сфер (имеющих единственную общую точку) проходит через их точку касания.

74. Если две различные сферы имеют более одной общей точки, то они пересекаются по окружности. Плоскость этой окружности перпендикулярна линии центров данных сфер.

Правильная пирамида

75. Если $ABCD$ — правильная треугольная пирамида с вершиной D , высотой DM и стороной основания a , а A_1 , B_1 и C_1 — середины сторон соответственно BC , AC и AB , то

а) $\angle DAM = \angle DBM = \angle DCM$ — угол бокового ребра с плоскостью основания;

б) $\angle DA_1M = \angle DB_1M = \angle DC_1M$ — линейный угол двугранного угла боковой грани с плоскостью основания;

в) $\angle AFB$ (где F — основание перпендикуляра, опущенного из вершины A основания на боковое ребро DC) — линейный угол между боковыми гранями пирамиды;

г) $AA_1 = BB_1 = CC_1 = a\sqrt{3}/2$ — высота треугольника основания;

д) $AM = BM = CM = 2AA_1/3 = a/\sqrt{3} = (a\sqrt{3})/3$ — ортогональная проекция бокового ребра на плоскость основания;

е) $A_1M = B_1M = C_1M = AA_1/3 = a/(2\sqrt{3}) = a\sqrt{3}/6$ — ортогональная проекция апофемы на плоскость основания;

ж) C_1F — общий перпендикуляр противоположных ребер AB и CD .

76. Противоположные ребра правильной треугольной пирамиды попарно перпендикулярны.

77. Высота правильного тетраэдра с ребром a равна $a\sqrt{2/3}$.

78. Если $PABCD$ — правильная четырехугольная пирамида с вершиной P , высотой PM и стороной основания a , а A_1 , B_1 , C_1 и D_1 — середины сторон соответственно AB , BC , CD и AD , то

а) $\angle PAM = \angle PBM = \angle PCM = \angle PDM$ — угол бокового ребра с плоскостью основания;

б) $\angle PA_1M = \angle PB_1M = \angle PC_1M = \angle PD_1M$ — линейный угол двугранного угла боковой грани с плоскостью основания;

в) $\angle BFD$ (где F — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B основания на боковое ребро AP) — линейный угол между соседними боковыми гранями пирамиды;

г) $\angle A_1PC_1 = \angle B_1PD_1$ — линейный угол двугранного угла между противоположными боковыми гранями;

д) $AM = BM = CM = DM = DB/2 = (a\sqrt{2})/2 = a/\sqrt{2}$ — ортогональная проекция бокового ребра на плоскость основания;

е) $A_1M = B_1M = C_1M = D_1M = a/2$ — ортогональная проекция апофемы на плоскость основания;

ж) FM — общий перпендикуляр диагонали BD основания и скрещивающегося с ней бокового ребра AP .

79. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды перпендикулярно скрещивающейся с ним диагонали основания.

Площадь поверхности многогранника

80. Боковая поверхность призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения призмы на боковое ребро.

81. Боковая поверхность правильной пирамиды равна площади ее основания, деленной на косинус угла боковой грани с плоскостью основания.

Объемы многогранников

82. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.

83. Объем наклонной призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения на боковое ребро.

84. Объем призмы равен произведению площади основания на высоту.

85. Объем треугольной призмы равен половине произведения площади боковой грани на расстояние между этой гранью и противолежащим ей боковым ребром.

86. Объем пирамиды равен трети произведения площади основания на высоту.

87. Пирамиды с равными высотами и равновеликими основаниями равновелики.

88. Плоскость, проходящая через вершину пирамиды и прямую, лежащую в основании, делит объем пирамиды в том же отношении, в котором прямая делит площадь основания.

89. Если точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на боковых ребрах соответственно DA , DB и DC треугольной пирамиды $ABCD$ или на их продолжениях,

то объем пирамиды $A_1B_1C_1D_1$ относится к объему пирамиды $ABCD$ как произведение отношений $\frac{DA_1}{DA} \cdot \frac{DB_1}{DB} \cdot \frac{DC_1}{DC}$.

90. Отношение объемов подобных многогранников равно кубу коэффициента подобия.

91. Произведение площади основания на высоту тетраэдра постоянно.

92. Объем тетраэдра V равен шестой части произведения длин двух противоположных ребер a и b на расстояние между ними c и на синус угла φ между ними, т. е. $V = \frac{1}{6} abc \cdot \sin \varphi$.

93. Объем тетраэдра V равен двум третям произведения площадей двух граней P и Q на синус угла φ между ними, деленному на их общее ребро a , т. е. $V = \frac{2}{3} \frac{P \cdot Q \cdot \sin \varphi}{a}$.

94. а) Объем тетраэдра равен трети произведения его полной поверхности на радиус вписанной сферы.

б) Объем многогранника, в который можно вписать сферу, равен одной третьей произведения полной поверхности многогранника на радиус сферы.

Объемы и поверхности круглых тел

95. Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.

96. Объем конуса равен трети произведения площади его основания на высоту.

97. Объем шара радиуса R равен $4\pi R^3/3$.

98. Объем шарового сегмента высотой h шара радиуса R равен $\pi h^2(R - h/3)$.

99. Боковая поверхность цилиндра с высотой h и радиусом основания r равна $2\pi rh$.

100. Боковая поверхность конуса с образующей l и радиусом основания r равна πrl .

101. Поверхность сферы радиуса R равна $4\pi R^2$.

102. Сферическая поверхность шарового сегмента высотой h шара радиуса R равна $2\pi Rh$.

Часть 2. Избранные задачи и теоремы элементарной геометрии

Планиметрия

1. Сумма расстояний от произвольной точки основания равнобедренного треугольника до боковых сторон постоянна.
2. Если три медианы одного треугольника соответственно равны трем медианам другого треугольника, то треугольники равны.
3. Медиана треугольника ABC , проведенная из вершины A , меньше полусуммы сторон AB и AC , но больше их полуразности.
4. Сумма трех медиан треугольника меньше периметра, но больше трех четвертей периметра треугольника.
5. Сумма диагоналей выпуклого четырехугольника больше суммы его двух противоположных сторон.
6. Отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой, лежащей на противоположной стороне, меньше большей из двух других сторон.
7. Расстояние между любыми двумя точками, взятыми на сторонах треугольника, не больше наибольшей из его сторон.
8. а) Если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle BAC > \angle B_1A_1C_1$, то $BC > B_1C_1$.
б) Если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $BC > B_1C_1$, то $\angle BAC > \angle B_1A_1C_1$.
9. Пусть AA_1 — медиана треугольника ABC . Угол A острый тогда и только тогда, когда $AA_1 > BC/2$.
10. Сумма расстояний от любой точки внутри треугольника до трех его вершин больше полупериметра, но меньше периметра треугольника.
11. Две окружности радиусов r и R ($r < R$) пересекаются тогда и только тогда, когда расстояние между их центрами меньше, чем $r + R$, но больше, чем $R - r$.
12. Если отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника,
 - а) равны, то диагонали четырехугольника перпендикулярны;
 - б) перпендикулярны, то диагонали четырехугольника равны.

13. Точки K , L , M и N — середины сторон соответственно AB , BC , CD и DE пятиугольника $ABCDE$, а точки P и Q — середины отрезков соответственно KM и LN . Тогда $PQ \parallel AE$ и $PQ = AE/4$.

14. Два равносторонних треугольника ABC и CDE (вершины перечислены против часовой стрелки) расположены по одну сторону от прямой AE и имеют единственную общую точку C . Пусть M , N и K — середины отрезков BD , AC и CE соответственно. Тогда треугольник MNK — равносторонний.

15. Биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются на ее средней линии.

16. Стороны параллелограмма равны a и b . Тогда диагонали четырехугольника, образованного пересечениями биссектрис углов параллелограмма, равны $|a - b|$.

17. Если сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90° , то отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности.

18. На сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и N так, что прямые MC и NC делят параллелограмм на три равновеликие части. Найдите MN , если $BD = d$.

19. Диагонали трапеции равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найдите площадь трапеции.

20. Отрезок прямой, параллельной основаниям трапеции, заключенный внутри трапеции, разбивается ее диагоналями на три части. Тогда отрезки, прилегающие к боковым сторонам, равны между собой.

21. Через точку пересечения диагоналей трапеции с основаниями a и b проведена прямая, параллельная основаниям. Отрезок этой прямой, заключенный между боковыми сторонами трапеции, равен $\frac{2ab}{a+b}$.

22. Трапеция разделена прямой, параллельной ее основаниям, равным a и b , на две равновеликие трапеции. Тогда отрезок этой прямой, заключенный между боковыми сторонами, равен $\sqrt{(a^2 + b^2)}/2$.

23. Точка M — середина отрезка AB . Точки A_1 , M_1 и B_1 — проекции точек A , M и B на некоторую прямую. Тогда M_1 — середина отрезка A_1B_1 .

24. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BD и CE . Если BF и CG — перпендикуляры, опущенные из вершин B и C на прямую ED , то $EF = DG$.

25. На отрезке AB взята точка C . Прямая, проходящая через точку C , пересекает окружности с диаметрами AC и BC в точках K и L , а также окружность с диаметром AB — в точках M и N . Тогда $KM = LN$.

26. Пусть α , β и γ — углы треугольника, причем $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Тогда $\alpha \leq 60^\circ$, $\gamma \geq 60^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$.

27. На двух сторонах треугольника вне его построены квадраты. Тогда отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из одной вершины треугольника, в два раза больше медианы треугольника, выходящей из той же вершины.

28. Обобщенная теорема Пифагора. Пусть CD — высота прямоугольного треугольника ABC , проведенная из вершины прямого угла. Тогда треугольники ABC , CBD и ACD подобны. Если l , m и n — соответствующие линейные элементы этих треугольников, то

$$l^2 = m^2 + n^2.$$

29. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, делит этот треугольник на два треугольника. Расстояние между центрами вписанных окружностей этих треугольников равно 1. Найдите радиус вписанной окружности исходного треугольника.

30. Две окружности пересекаются в точках A и B . Продолжения хорд AC и BD первой окружности пересекают вторую окружность в точках E и F . Тогда прямые CD и EF параллельны.

31. Через точку касания двух окружностей проведена секущая. Тогда касательные, проведенные к окружностям через концы образовавшихся хорд, параллельны.

32. Теорема Коперника. По неподвижной окружности, касаясь ее изнутри, катится без скольжения окружность вдвое меньшего радиуса. Тогда фиксированная точка K подвижной окружности движется по диаметру неподвижной окружности.

33. Продолжения биссектрис остроугольного треугольника ABC пересекают описанную окружность этого треугольника в точках A_1 , B_1 , C_1 . Тогда высоты треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на прямых AA_1 , BB_1 , CC_1 .

34. Продолжения высот остроугольного треугольника ABC пересекают описанную окружность этого треугольника в точках A_1 , B_1 , C_1 . Тогда биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на прямых AA_1 , BB_1 , CC_1 .

35. Если выполняется одно из следующих условий, то четыре точки A , B , C и D лежат на одной окружности.

а) $\angle CAD = \angle CBD = 90^\circ$.

б) Точки A и B лежат по одну сторону от прямой CD и $\angle CAD = \angle CBD$.

в) Прямые AC и BD пересекаются в точке O и $OA \cdot OC = OB \cdot OD$.

36. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC с катетами $BC = a$ и $AC = b$ во внешнюю сторону построен квадрат $ABKM$. Тогда расстояние от точки C до центра квадрата равно $(a + b)/\sqrt{2}$.

37. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат с центром в точке O . Докажите, что CO есть биссектриса прямого угла.

38. В треугольнике ABC угол B равен 60° , биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O . Докажите, что $OD = OE$.

39. а) Три прямые, проходящие через точку O , образуют друг с другом углы в 60° . Тогда проекции произвольной точки, отличной от O , на эти прямые являются вершинами правильного треугольника.

б) Проекции произвольной точки на высоты треугольника являются вершинами треугольника, подобного данному.

40. Через вершину C равностороннего треугольника ABC проведена произвольная прямая, K и M — проекции точек A и B на эту прямую, P — середина AB . Докажите, что треугольник KMP — равносторонний.

41. Основание каждой высоты треугольника проектируется на боковые стороны треугольника. Докажите, что шесть полученных точек лежат на одной окружности.

42. Задача Архимеда. В дугу AB окружности вписана ломаная AMB из двух отрезков ($AM > MB$). Докажите, что основание перпендикуляра KH , опущенного из середины K дуги AB на отрезок AM , делит ломаную пополам, т. е. $AN = HM + MB$.

43. Около равностороннего треугольника ABC описана окружность, и на дуге BC взята произвольная точка M . Тогда $AM = BM + CM$.

44. Точка Торричелли. На сторонах треугольника ABC построены вне треугольника равносторонние треугольники BCA_1 , CAB_1 , ABC_1 , и проведены отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 . Тогда

- а) эти отрезки равны;
- б) эти отрезки пересекаются в одной точке;
- в) если эта точка находится внутри треугольника ABC , то сумма ее расстояний до трех вершин треугольника равна каждому из отрезков AA_1 , BB_1 , CC_1 .

45. Задача Ферма. Внутри остроугольного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин минимальна.

46. Если прямая, проходящая через точку A и центр O вписанной окружности треугольника ABC , вторично пересекает описанную окружность этого треугольника в точке M , то треугольники $ВОМ$ и $СОМ$ равнобедренные.

47. Теорема Мансиона. Докажите, что отрезок, соединяющий центры вписанной и невписанной окружностей треугольника, делится описанной окружностью пополам.

48. Формула Эйлера. Если O_1 , O_2 — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC , а r и R — радиусы этих окружностей, то $O_1O_2 = \sqrt{R^2 - 2rR}$.

49. Четыре круга, построенных на сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах, покрывают весь четырехугольник.

50. Два противоположных угла выпуклого четырехугольника — тупые. Докажите, что диагональ, соединяющая вершины этих углов, меньше другой диагонали.

51. Две окружности касаются внутренним образом в точке M . Пусть AB — хорда большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке T . Докажите, что MT — биссектриса угла AMB .

52. Общие хорды трех попарно пересекающихся окружностей или их продолжения проходят через одну точку, либо параллельны, либо лежат на одной прямой.

53. Точка M находится на продолжении хорды AB . Если точка C окружности такова, что $MC^2 = MA \cdot MB$, то MC — касательная к окружности.

54. Центры квадратов, построенных на сторонах параллелограмма вне его, сами образуют квадрат.

55. Если в треугольнике один угол равен 120° , то треугольник, образованный основаниями его биссектрис, прямоугольный.

56. Если в треугольнике ABC с углом B , равным 120° , биссектрисы AE , BD и CM пересекаются в точке O , то $\angle DMO = 30^\circ$.

57. Даны прямая (окружность) и на ней точки A и B . Найдите геометрическое место точек касания окружностей, одна из которых касается данной прямой (окружности) в точке A , а другая — в точке B .

58. Прямая Эйлера. В любом треугольнике точка H пересечения высот (ортоцентр), центр O описанной окружности и точка M пересечения медиан (центр тяжести) лежат на одной прямой, причем точка M расположена между точками O и H , и $MH = 2MO$.

59. Теорема Менелая. Дан треугольник ABC . Некоторая прямая пересекает его стороны AB , BC и продолжение стороны AC в точках C_1 , A_1 , B_1 соответственно. Тогда

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1.$$

60. Теорема Чевы. Пусть точки A_1 , B_1 и C_1 принадлежат соответственно сторонам BC , AC и AB треугольника ABC . Отрезки AA_1 , BB_1 ,

CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

61. а) Точка Жергонна. В треугольник вписана окружность. Точки касания со сторонами треугольника соединены с противоположными вершинами. Тогда три полученных отрезка пересекаются в одной точке.

б) Точка Нагеля. В любом треугольнике отрезки, соединяющие вершины с точками касания вневписанных окружностей с противоположными сторонами, пересекаются в одной точке.

62. Через точку M на высоте AD произвольного треугольника ABC проводятся прямые BM и CM , которые пересекают стороны AC и AB в точках P и Q соответственно. Тогда AD — биссектриса угла PDQ .

63. Прямая, соединяющая точку P пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ с точкой Q пересечения прямых AB и CD , делит сторону AD пополам. Тогда она делит пополам и сторону BC .

64. Если на стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AB и AC в точках M и N , то $S(AMN) = S(ABC) \cos^2 \alpha$.

65. Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции и ее основаниями, равны S_1 и S_2 . Найдите площадь трапеции.

66. Если площадь треугольника ABC равна S , то площадь треугольника, стороны которого равны медианам треугольника ABC , равна $3S/4$.

67. Через некоторую точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные сторонам. Эти прямые разбивают треугольник на шесть частей, три из которых — треугольники с площадями S_1 , S_2 , S_3 . Тогда площадь данного треугольника равна

$$(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2.$$

68. Каждая сторона выпуклого четырехугольника поделена на три равные части. Соответствующие точки деления на противоположных сторонах соединены отрезками. Тогда эти отрезки делят друг друга на три равные части.

69. Две прямые делят каждую из двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника на три равные части. Тогда между этими прямыми заключена треть площади четырехугольника.

70. Теорема Паскаля. Точки пересечения продолжений противоположных сторон вписанного шестиугольника лежат на одной прямой.

71. Теорема Брианшона. Диагонали описанного шестиугольника, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

72. Если в четырехугольник можно вписать окружность, то отрезок, соединяющий точки, в которых вписанная окружность касается противоположных сторон четырехугольника, проходит через точку пересечения диагоналей.

73. Геометрическое место точек, разность квадратов расстояний от которых до точек A и B постоянна, есть прямая, перпендикулярная AB .

74. Прямые AB и CD перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2.$$

75. Даны две окружности с центрами O_1 и O_2 . Геометрическое место точек M , для которых касательные к данным окружностям равны, есть прямая, перпендикулярная O_1O_2 , или часть такой прямой. В каких случаях искомым геометрическим местом является вся прямая?

76. В треугольнике ABC , стороны AC и BC которого не равны, биссектриса угла C делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными из вершины C , тогда и только тогда, когда $\angle C = 90^\circ$.

77. Найдите углы треугольника, если известно, что биссектриса, медиана и высота, проведенные из одной вершины, делят угол треугольника на четыре равные части.

78. В любом треугольнике ABC середина стороны BC лежит на отрезке, соединяющем точку пересечения высот с точкой окружности, описанной около этого треугольника, диаметрально противоположной вершине A , и делит этот отрезок пополам.

79. Свойства точки пересечения высот (ортоцентра) треугольника.

а) Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H . Тогда радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC , AHB , BHC и AHC , равны между собой.

б) Если H — точка пересечения высот треугольника ABC , а O — центр описанной окружности, то

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

в) Если H — точка пересечения высот треугольника ABC , то расстояние между серединами отрезков BC и AH равно радиусу описанной окружности треугольника ABC .

г) Расстояние от ортоцентра до вершины треугольника вдвое больше расстояния от центра описанной окружности до стороны, противоположной этой вершине.

д) Точка, симметричная ортоцентру относительно прямой, содержащей сторону треугольника, лежит на описанной окружности треугольника.

80. Три окружности равных радиусов пересекаются в точке O и, кроме того, попарно пересекаются в точках A , B и C . Тогда

а) окружность, описанная около треугольника ABC , имеет тот же радиус;

б) три прямые, каждая из которых соединяет центр одной окружности с точкой пересечения двух других, пересекаются в одной точке;

в) точка O — ортоцентр треугольника ABC .

81. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC , H — точка пересечения высот. Тогда $\angle HAB = \angle OAC$.

82. Если BM и CN — высоты треугольника ABC , а O — центр описанной окружности треугольника, то $OA \perp MN$.

83. а) В остроугольном треугольнике ABC известно, что $CH = AB$, где H — точка пересечения высот. Найдите угол C .

б) В остроугольном треугольнике ABC известно, что $CH = R$, где H — точка пересечения высот, а R — радиус описанного круга. Найдите угол C .

84. Каждое из оснований высот треугольника проецируется на его стороны. Докажите, что длина отрезка, соединяющего проекции, не зависит от выбора высоты.

85. Отрезки AB и CD — диаметры одной окружности. Из точки M этой окружности опущены перпендикуляры MP и MQ на прямые AB и CD . Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от положения точки M .

86. Из вершины C остроугольного треугольника ABC опущена высота CH , а из точки H опущены перпендикуляры HM и HN на стороны BC и AC соответственно. Докажите, что треугольники MNC и ABC подобны.

87. Продолжения высот AM и CN остроугольного треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках P и Q . Найдите радиус описанной окружности, если $AC = a$, $PQ = 6a/5$.

88. Точки K и P симметричны основанию H высоты BH треугольника ABC относительно его сторон AB и BC . Докажите, что точки пересечения отрезка KP со сторонами AB и BC (или их продолжениями) — основания высот треугольника ABC .

89. Свойства ортотреугольника (т.е. треугольника с вершинами в основаниях высот данного).

а) Высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами углов его ортотреугольника.

б) Если точки A_1 , B_1 и C_1 на сторонах соответственно BC , AC и AB остроугольного треугольника ABC таковы, что

$$\angle BA_1C_1 = \angle CA_1B_1, \quad \angle CB_1A_1 = \angle AB_1C_1 \quad \text{и} \quad \angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1,$$

то $A_1B_1C_1$ — ортотреугольник треугольника ABC .

в) Точки касания вписанного в данный треугольник круга соединены отрезками, и в полученном треугольнике проведены высоты. Докажите, что прямые, соединяющие основания этих высот, параллельны сторонам исходного треугольника.

г) **Задача Фаньяно.** Треугольник наименьшего возможного периметра с вершинами на сторонах данного остроугольного треугольника — это ортотреугольник данного треугольника.

90. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 8, 15 и 17. Найдите радиус описанной около треугольника окружности.

91. Окружность девяти точек. В любом треугольнике девять точек — середины сторон, основания высот и середины отрезков от вершин до ортоцентра — лежат на одной окружности.

92. Окружность касается стороны BC треугольника ABC в точке M , а продолжений сторон AB и AC — в точках N и P соответственно. Вписанная окружность этого треугольника касается стороны BC в точке K , а стороны AB — в точке L . Тогда

- а) отрезок AN равен полупериметру треугольника ABC ;
- б) отрезок AL равен разности полупериметра и стороны BC ;
- в) $BK = CM$; г) $NL = BC$.

93. На сторонах BC , CA , и AB треугольника ABC взяты соответственно точки A_1 , B_1 и C_1 , причем $AC_1 = AB_1$, $BA_1 = BC_1$ и $CA_1 = CB_1$. Тогда A_1 , B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника.

94. Три окружности радиусов 1, 2 и 3 касаются друг друга внешним образом. Тогда радиус окружности, проходящей через точки касания этих окружностей, равен 1.

95. Пусть p — полупериметр, а S — площадь треугольника.

а) Если r_1 — радиус вневписанной окружности треугольника, касающейся стороны, равной a , то $r_1 = \frac{S}{p - a}$.

б) Если r — радиус вписанной окружности треугольника, а r_1 , r_2 , r_3 — радиусы вневписанных окружностей, то

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}, \quad S = \sqrt{r \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}.$$

96. Если окружность, вписанная в треугольник ABC , касается стороны BC в точке M , то окружности, вписанные в треугольники ABM и ACM , касаются отрезка AM в одной точке.

97. Если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в такой четырехугольник можно вписать окружность.

98. Если AD — биссектриса треугольника ABC , то

$$\text{а) } AD = \frac{2AB \cdot AC \cos(\angle BAC/2)}{AB + AC},$$

$$\text{б) } AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD.$$

99. Теорема Штейнера—Лемуса. Если две биссектрисы треугольника равны, то он равнобедренный.

100. Свойства вписанного четырехугольника со взаимно перпендикулярными диагоналями. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R с центром O . Его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке P . Тогда

а) медиана треугольника APB перпендикулярна стороне CD ;
 б) ломаная AOC делит четырехугольник $ABCD$ на две равновеликие фигуры;

$$\text{в) } AB^2 + CD^2 = 4R^2;$$

$$\text{г) } AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = 4R^2 \text{ и } AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 8R^2;$$

д) расстояние от центра окружности до стороны четырехугольника вдвое меньше противоположной стороны.

е) если перпендикуляры, опущенные на сторону AD из вершин B и C , пересекают диагонали AC и BD в точках E и F , то $BCFE$ — ромб;

ж) четырехугольник, вершины которого — проекции точки P на стороны четырехугольника $ABCD$, — и вписанный, и описанный;

з) четырехугольник, образованный касательными к описанной окружности четырехугольника $ABCD$, проведенными в его вершинах, можно вписать в окружность.

101. Если a, b, c, d — последовательные стороны четырехугольника, а S — его площадь, то $S \leq (ac + bd)/2$, причем равенство имеет место только для вписанного четырехугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярны.

102. Формула Брахмагупты. Если стороны вписанного четырехугольника равны сторонам a, b, c и d , то его площадь S может быть вычислена по формуле

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где $p = (a + b + c + d)/2$ — полупериметр четырехугольника.

103. Если четырехугольник со сторонами a, b, c, d можно вписать и около него можно описать окружность, то его площадь равна $\sqrt{abcd}$.

104. Две окружности пересекаются в точках A и B . В каждой из этих окружностей проведены хорды AC и AD так, что хорда одной окружности касается другой окружности. Тогда $AB = \sqrt{CB \cdot DB}$.

105. Окружность и прямая касаются в точке M . Из точек A и B этой окружности опущены перпендикуляры на прямую, равные a и b соответственно. Тогда расстояние от точки M до прямой AB равно $\sqrt{ab}$.

106. Из точки M , лежащей вне окружности, проведены к этой окружности две касательные. Если расстояния от точки C , лежащей на окружности, до касательных равны a и b , то расстояние от точки C до прямой AB (A и B — точки касания) равно $\sqrt{ab}$.

107. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Расстояния от точки A до прямых BC , DC и DE равны соответственно a, b, c . Тогда расстояние от вершины A до прямой BE равно ac/b .

108. Прямая Симсона. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки описанной окружности на стороны треугольника (или их продолжения), лежат на одной прямой.

109. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам общую касательную к ним.

110. Две окружности радиусов R и r пересекаются в точках A и B и касаются прямой в точках C и D ; N — точка пересечения прямых AB и CD (B между A и N). Найдите

- а) радиус окружности, описанной около треугольника ACD ;
- б) отношение высот треугольников NAC и NAD , опущенных из вершины N .

111. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD . Известно, что $AD = 2$, $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$, и расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD , равно $\sqrt{2}$. Найдите BC .

112. Теорема Стюарта. Точка D расположена на стороне BC треугольника ABC . Тогда

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD.$$

113. Точка P расположена внутри квадрата $ABCD$, причем $\angle PAB = \angle PBA = 15^\circ$. Тогда треугольник DPC — равносторонний.

114. Докажите, что если для вписанного четырехугольника $ABCD$ выполнено равенство $CD = AD + BC$, то биссектрисы его углов A и B пересекаются на стороне CD .

115. Вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках M и N . Пусть P — точка пересечения прямой MN и биссектрисы угла B (или ее продолжения). Докажите, что $\angle BPC = 90^\circ$.

116. Из точки A проведены к окружности две касательные AP и AQ (P и Q — точки касания) и секущая AKL (точка K между A и L). Пусть M — середина отрезка KL . Докажите, что $\angle AMP = \angle AMQ$.

117. На продолжении хорды KL окружности с центром O взята точка A , и из нее проведены касательные AP и AQ ; M — середина отрезка PQ . Докажите, что $\angle MKO = \angle MLO$.

118. Продолжения противоположных сторон AB и CD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M , а сторон AD и BC — в точке N . Тогда

- а) биссектрисы углов AMD и DNC взаимно перпендикулярны;
- б) прямые MQ и NQ пересекают стороны четырехугольника в вершинах ромба;
- в) точка пересечения Q этих биссектрис лежит на отрезке, соединяющем середины диагоналей четырехугольника $ABCD$.

119. Продолжения противоположных сторон четырехугольника, вписанного в окружность, пересекаются в точках P и Q . Найдите PQ , если касательные к окружности, проведенные из точек P и Q , равны a и b .

120. Окружность с центром O на стороне BC равностороннего треугольника ABC касается сторон AB и AC в точках P и Q соответственно. Касательная к окружности пересекает эти стороны в точках M и N , а отрезки OM и ON пересекают отрезок PQ в точках E и F . Тогда $EF = MN/2$.

121. Задача о бабочке. Через середину C произвольной хорды AB окружности проведены две хорды KL и MN (точки K и M лежат по одну сторону от AB). Отрезок KN пересекает AB в точке P . Отрезок LM пересекает AB в точке Q . Докажите, что $PC = QC$.

122. В любом треугольнике радиус описанной окружности не меньше удвоенного радиуса вписанной окружности, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда треугольник равносторонний.

123. Окружность Аполлония. Геометрическое место точек, расстояния от каждой из которых до двух данных точек относятся как $m : n$ ($m \neq n$), есть окружность.

124. Теорема Птолемея. Сумма произведений двух пар противоположных сторон вписанного четырехугольника равна произведению его диагоналей.

125. На отрезке AC взята точка B и на отрезках AB , BC и AC построены как на диаметрах полуокружности S_1 , S_2 и S_3 по одну сторону

от AC . Пусть D — точка на S_3 , проекция которой на AC совпадает с точкой B . Общая касательная к S_1 и S_2 касается этих полуокружностей в точках E и F соответственно.

а) Докажите, что прямая EF параллельна касательной к S_3 , проведенной через точку D .

б) Докажите, что $BFDE$ — прямоугольник.

в) Найдите радиус окружности, касающейся всех трех полуокружностей, если известно, что ее центр удален от прямой AC на расстояние a .

г) **Задача об арбелосе Архимеда.** Докажите, что радиус окружности, касающейся S_1 , S_3 и отрезка BD , равен радиусу окружности, касающейся S_2 , S_3 и отрезка BD .

126. Теорема Ньютона. Во всяком описанном четырехугольнике середины диагоналей и центр вписанной окружности расположены на одной прямой.

127. Если M — точка пересечения медиан треугольника ABC , а O — произвольная точка, то

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

128. Теорема Монжа. Прямые, проведенные через середины сторон вписанного четырехугольника перпендикулярно противоположным сторонам, пересекаются в одной точке.

129. а) Композиция симметрий относительно двух прямых, пересекающихся под углом α , есть поворот на угол 2α относительно точки пересечения прямых.

б) Композиция двух поворотов на углы, в сумме не кратные 360° , является поворотом. В какой точке находится его центр и чему равен угол поворота? Исследуйте также случай, когда сумма углов поворотов кратна 360° .

130. Треугольник Наполеона. Центры правильных треугольников, построенных внешним (внутренним) образом на сторонах произвольного треугольника, образуют правильный треугольник.

131. Две касающиеся окружности гомотетичны относительно их точки касания.

132. Теорема Шаля. Всякое движение плоскости есть либо параллельный перенос, либо поворот, либо осевая симметрия, либо скользящая симметрия (композиция осевой симметрии и параллельного переноса в направлении, параллельном оси симметрии).

133. Теорема Гаусса. Если продолжения сторон AB , AC и BC треугольника ABC пересекают прямую l в точках C_1 , B_1 и A_1 , то середины отрезков AA_1 , BB_1 и CC_1 лежат на одной прямой.

Задачи на построение

1. Постройте треугольник по трем медианам.
2. Постройте общие касательные к двум данным окружностям.
3. Постройте равносторонний треугольник ABC так, чтобы его вершины лежали на трех данных параллельных прямых.
4. Постройте треугольник по двум углам A , B и периметру P .
5. Постройте точки X и Y на сторонах AB и BC треугольника ABC так, что $AX = BY$ и $XY \parallel AC$.
6. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и сумме двух других сторон.
7. Впишите в угол окружность, проходящую через данную точку.
8. Постройте отрезок, равный и параллельный данному, так, чтобы его концы лежали на двух данных окружностях.
9. Точки A и B лежат по разные стороны от прямой l . Постройте на этой прямой точку M так, чтобы прямая l делила угол AMB пополам.
10. Точки M и N расположены по одну сторону от прямой l . Постройте на прямой l такую точку K , чтобы
 - а) сумма $MK + NK$ была наименьшей;
 - б) угол между прямыми MK и l был вдвое меньше угла между прямыми NK и l .
11. В каком месте нужно построить мост через реку с параллельными берегами так, чтобы путь из деревни A в деревню B , расположенную на другом берегу реки, был минимальным? Мост строится перпендикулярно берегу.
12. Даны две параллельные прямые. С помощью одной линейки
 - а) разделите пополам отрезок, расположенный на одной из них;
 - б) проведите через данную точку M прямую, параллельную этим прямым.
13. Даны две параллельные прямые, отрезок на одной из них и середина этого отрезка. С помощью одной линейки проведите через данную точку M прямую, параллельную этим прямым.
14. С помощью одной линейки опустите перпендикуляр из данной точки на данный диаметр данной окружности.
15. С помощью одной линейки опустите перпендикуляр на данную прямую из центра данной окружности.

16. Опишите около данного треугольника треугольник, равный другому данному треугольнику, т. е. через вершины данного треугольника проведите прямые, которые пересекаются в вершинах треугольника, равного другому данному треугольнику.

17. В данный треугольник впишите треугольник, равный другому данному треугольнику, т. е. на сторонах данного треугольника постройте вершины треугольника, равного другому данному треугольнику.

18. Через данную точку проведите прямую, отсекающую от данного угла треугольник

- а) заданного периметра;
- б) наименьшего периметра;
- в) наименьшей площади.

19. Постройте $(2n - 1)$ -угольник по серединам его сторон.

20. Постройте треугольник по точкам пересечения с описанной окружностью продолжений его высоты, медианы и биссектрисы, проведенных из одной вершины.

21. Постройте треугольник по трем точкам, симметричным центру описанной окружности относительно сторон треугольника.

22. Постройте треугольник по основаниям его высот.

23. Даны две пересекающиеся окружности. Проведите через точку их пересечения прямую так, чтобы отрезок этой прямой, заключенный между окружностями,

- а) делился этой точкой пополам;
- б) был равен заданному отрезку.

24. Даны две окружности. Проведите через данную точку прямую так, чтобы

- а) отрезок этой прямой, заключенный между окружностями, делился этой точкой пополам;
- б) она отсекала на окружностях равные хорды.

25. Даны две окружности. Проведите прямую, параллельную данной так, чтобы

- а) она отсекала на окружностях равные хорды;
- б) сумма хорд, отсекаемых ею на окружностях, была равна заданному отрезку.

26. A и B — фиксированные точки окружности, C — произвольная точка окружности. Постройте геометрическое место точек пересечения а) биссектрис; б) высот треугольника ABC .

27. Даны отрезки a и b . Постройте отрезок, равный $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$.

28. Постройте окружность, касающуюся данной окружности и данной прямой в данной на ней точке.

29. Постройте окружность, касающуюся данной прямой и данной окружности в данной на ней точке.

30. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.

31. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности.

32. Через данную точку проведите окружность, касающуюся данной прямой и данной окружности.

33. Постройте треугольник по трем высотам.

34. Постройте треугольник по центрам вписанной, описанной и одной из внеписанных окружностей.

35. Постройте геометрическое место точек, расположенных внутри данного угла, сумма расстояний от которых до сторон этого угла имеет данную величину.

36. Восстановите квадрат по четырем точкам, лежащим на его сторонах.

37. С помощью одного циркуля а) разделите отрезок пополам; б) постройте центр данной окружности.

38. Задача Аполлония. Постройте окружность, касающуюся трех данных окружностей.

Стереометрия

1. Докажите, что если две пересекающиеся плоскости параллельны некоторой прямой, то прямая их пересечения параллельна этой же прямой.

2. Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Какая фигура получится в сечении этой пирамиды плоскостью ABM , где M — точка на ребре SC ?

3. Может ли в сечении параллелепипеда плоскостью получиться правильный пятиугольник?

4. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке.

5. Через данную точку пространства проведите прямую, пересекающую две данные скрещивающиеся прямые.

6. На диагонали AC_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка M , а на прямой $B_1 C$ — точка N так, что отрезки MN и BD параллельны. Найдите отношение длин этих отрезков.

7. Основание пирамиды $SABCD$ — произвольный четырехугольник $ABCD$. Постройте прямую пересечения плоскостей ABS и CDS .

8. Докажите, что выпуклый четырехгранный угол можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм.

9. Дан произвольный трехгранный угол. Рассматриваются три плоскости, каждая из которых проведена через ребро и биссектрису противоположащей грани. Верно ли, что эти три плоскости пересекаются по одной прямой?

10. Пусть A, B, C и D — четыре точки, не лежащие в одной плоскости. В каком отношении плоскость, проходящая через точки пересечения медиан треугольников ABC , ABD и BCD , делит отрезок BD ?

11. Точка M — середина ребра AD тетраэдра $ABCD$. Точка N лежит на продолжении ребра AB за точку B , точка K — на продолжении ребра AC за точку C , причем $BN = AB$ и $CK = 2AC$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK . В каком отношении эта плоскость делит ребра DB и DC ?

12. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на прямых AC и BA_1 взяты точки K и M так, что $KM \parallel DB_1$. Найдите отношение $KM : DB_1$.

13. Дан тетраэдр $ABCD$. Точки M, N и K лежат на ребрах AD, BC и DC соответственно, причем $AM : MD = 1 : 3$, $BN : NC = 1 : 1$ и $CK : KD = 1 : 2$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK . В каком отношении эта плоскость делит ребро AB ?

14. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точки M, N и K — середины ребер AB, BC и DD_1 соответственно. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью MNK . В каком отношении эта плоскость делит ребро CC_1 и диагональ DB_1 ?

15. Дана четырехугольная пирамида $SABCD$, основание которой — трапеция $ABCD$. Отношение оснований AD и BC этой трапеции равно 2. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку D и середины ребер SA и SB . В каком отношении эта плоскость делит ребро SC ?

16. Дана четырехугольная пирамида $SABCD$, основание которой — параллелограмм $ABCD$. Точки M, N и K лежат на ребрах AS, BS и CS соответственно, причем $AM : MS = 1 : 2$, $BN : NS = 1 : 3$, $CK : KS = 1 : 1$. Постройте сечение пирамиды плоскостью MNK . В каком отношении эта плоскость делит ребро SD ?

17. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точки M, N и K лежат на ребрах AB, CC_1 и $A_1 D_1$ соответственно. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью MNK .

18. На плоскости даны три луча с общим началом. Они делят плоскость на три части, в которых взято по точке. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник, вершины которого лежат на данных лучах, а стороны проходят через данные точки.

19. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$, лежит параллелограмм $ABCD$. Через середину ребра AB проведите плоскость, параллельную прямым AC и SD . В каком отношении эта плоскость делит ребро SB ?

20. Через середины M и N ребер AD и CC_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена плоскость параллельно диагонали DB_1 . Постройте сечение параллелепипеда этой плоскостью. В каком отношении она делит ребро BB_1 ?

21. Плоскость пересекает ребра AB , AC , DC и DB тетраэдра $ABCD$ в точках M , N , P и Q соответственно, причем $AM : MB = m$, $AN : NC = n$, $DP : PC = p$. Найдите отношение $DQ : QB$.

22. В призме $ABCA_1 B_1 C_1$ медианы оснований ABC и $A_1 B_1 C_1$ пересекаются соответственно в точках O и O_1 . Через середину отрезка OO_1 проведена прямая, параллельная прямой CA_1 . Найдите длину отрезка этой прямой, лежащего внутри призмы, если $CA_1 = a$.

23. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите углы между прямыми

а) AA_1 и BD_1 ; б) BD_1 и DC_1 ; в) AD_1 и DC_1 .

24. На прямой l в пространстве последовательно расположены точки A , B и C так, что $AB = 10$ и $BC = 22$. Найдите расстояние между прямыми l и m , если расстояния от точек A , B и C до прямой m равны 12, 13 и 20 соответственно.

25. Докажите, что для любых четырех точек пространства верно равенство

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

26. Формула Лейбница. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC , O — произвольная точка пространства. Докажите, что

$$OM^2 = \frac{1}{3} (OA^2 + OB^2 + OC^2) - \frac{1}{9} (AB^2 + BC^2 + AC^2).$$

27. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной s , и углом в 30° . Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом в 45° . Найдите объем пирамиды.

28. В трехгранный угол с вершиной S вписана сфера с центром O . Докажите, что плоскость, проходящая через точки касания сферы с гранями, перпендикулярна прямой OS .

29. Докажите, что сумма квадратов длин проекций всех ребер куба с ребром a на любую плоскость не зависит от взаимного расположения куба и плоскости и равна $8a^2$.

30. Докажите, что сумма квадратов длин проекций всех ребер правильного тетраэдра с ребром a на любую плоскость не зависит от взаимного расположения тетраэдра и плоскости и равна $4a^2$.

31. Каждая из боковых граней треугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол в 60° . Стороны основания равны 10, 10 и 12. Найдите объем пирамиды.

32. Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 6 и 8. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно 6. Найдите расстояние между этим ребром и скрещивающейся с ним диагональю основания, а также боковую поверхность пирамиды.

33. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром, равным a . Найдите расстояние между прямыми а) AA_1 и BD_1 ; б) BD_1 и DC_1 ; в) $A_1 D$ и $D_1 C$. В каждом случае постройте общий перпендикуляр к указанным прямым.

34. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Через прямую BD_1 проведена плоскость, параллельная прямой AC . Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания параллелепипеда, если $AB = a$, $BC = b$, $CC_1 = c$.

35. Основанием пирамиды $SABCD$ является равнобедренная трапеция $ABCD$, в которой $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Плоскости граней SAB и SCD перпендикулярны плоскости основания пирамиды. Найдите высоту пирамиды, если высота грани SAD , проведенная из вершины S , равна $2a$.

36. На сфере радиуса 11 расположены точки A , A_1 , B , B_1 , C и C_1 . Прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке M , отстоящей от центра сферы на расстояние $\sqrt{59}$. Найдите длину отрезка AA_1 , если известно, что длина отрезка BB_1 равна 18, а точка M делит отрезок CC_1 в отношении $(8 + \sqrt{2}) : (8 - \sqrt{2})$.

37. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром, равным a . Точка E — середина ребра AD . Вершины M и N правильного тетраэдра $MNPQ$ лежат на прямой ED_1 , а вершины P и Q — на прямой, проходящей через точку A_1 и пересекающей прямую BC в точке R . Найдите

а) отношение $BR : BC$;

б) расстояние между серединами отрезков MN и PQ .

38. В основании призмы лежит равносторонний треугольник ABC со стороной $\sqrt{3}$. Боковые ребра AD , BE и CF перпендикулярны основанию. Сфера радиуса $7/2$ касается плоскости ABC и продолжений отрезков AE , BF и CD за точки A , B и C соответственно. Найдите длину боковых ребер призмы.

39. Катеты прямоугольного треугольника расположены в гранях некоторого острого двугранного угла и образуют с его ребром углы α и β соответственно. Найдите величину двугранного угла.

40. Прямоугольные проекции плоского четырехугольника на две взаимно перпендикулярные плоскости являются квадратами со сторонами, равными 2. Найдите периметр четырехугольника, зная, что одна из его сторон равна $\sqrt{5}$.

41. В треугольной пирамиде все плоские углы при вершине прямые. Докажите, что вершина пирамиды, точка пересечения медиан и центр описанного около пирамиды шара лежат на одной прямой.

42. В тетраэдре $ABCD$ известно, что $AD \perp BC$. Докажите, что высоты тетраэдра, проведенные из вершин B и C , пересекаются, причем точка их пересечения лежит на общем перпендикуляре скрещивающихся прямых AD и BC .

43. Известно, что в тетраэдре $ABCD$ ребро AB перпендикулярно ребру CD , а ребро BC перпендикулярно ребру AD . Докажите, что ребро AC перпендикулярно ребру BD .

44. Докажите, что если в тетраэдре противоположные ребра попарно перпендикулярны, то

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2.$$

Верно ли обратное?

45. Высота треугольной пирамиды $ABCD$, опущенная из вершины D , проходит через точку пересечения высот треугольника ABC . Кроме того, известно, что $DB = b$, $DC = c$, $\angle BDC = 90^\circ$. Найдите отношение площадей граней ADB и ADC .

46. Высоты, проведенные из вершин B и C тетраэдра $ABCD$, пересекаются. Докажите, что $AD \perp BC$.

47. Тетраэдр называется ортоцентрическим, если его высоты (или их продолжения) пересекаются в одной точке. Докажите, что тетраэдр $ABCD$ ортоцентрический тогда и только тогда, когда две пары его противоположных ребер перпендикулярны, т. е. $AB \perp CD$ и $AD \perp BC$ (в этом случае ребра третьей пары также перпендикулярны, т. е. $AC \perp BD$).

48. Противоположные ребра тетраэдра попарно перпендикулярны. Докажите, что общие перпендикуляры каждой пары противоположных ребер пересекаются в одной точке.

49. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре общие перпендикуляры каждой пары противоположных ребер пересекаются в одной точке.

50. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре точки пересечения медиан, высот и центр описанной сферы лежат на одной прямой (прямая Эйлера ортоцентрического тетраэдра).

51. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , боковое ребро образует с плоскостью основания угол 45° . Найдите:

- а) объем пирамиды;
- б) угол боковой грани с основанием;
- в) расстояние между скрепляющимися ребрами;
- г) угол между боковыми гранями;
- д) радиус описанного шара;
- е) радиус вписанного шара;
- ж) угол апофемы с соседней боковой гранью.

52. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a , боковая грань образует с плоскостью основания угол 60° . Найдите:

- а) объем пирамиды;
- б) угол бокового ребра с основанием;
- в) расстояние между диагональю основания и скрепляющимся с ней боковым ребром;
- г) угол между противоположными боковыми гранями;
- д) угол между соседними боковыми гранями;
- е) радиус вписанного шара;
- ж) радиус описанного шара;
- з) угол апофемы с соседней боковой гранью.

53. Сторона основания и высота правильной шестиугольной пирамиды равны a . Найдите:

- а) угол бокового ребра с основанием;
- б) угол боковой грани с основанием;
- в) плоский угол при вершине пирамиды;
- г) угол между соседними боковыми гранями;
- д) радиус вписанного шара;
- е) радиус описанного шара.

54. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — единичный куб. Найдите объем общей части пирамид $ACB_1 D_1$ и $A_1 C_1 B D$.

55. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно b , а плоский угол при вершине равен α . Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

56. Найдите радиус шара, касающегося всех ребер правильного тетраэдра с ребром, равным a .

57. Из точки в пространстве выходят четыре луча, образующие друг с другом равные углы. Найдите эти углы.

58. Двугранный угол при основании правильной n -угольной пирамиды равен α . Найдите двугранный угол между соседними боковыми гранями.

59. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна a , боковые ребра равны $2a$. Рассматриваются отрезки с концами на ребрах AD и SC , параллельные плоскости SAB .

а) Один из этих отрезков проведен через точку M ребра AD такую, что $AM : AD = 3 : 4$. Найдите его длину.

б) Найдите наименьшую длину рассматриваемых отрезков.

60. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ угол между боковым ребром SA и плоскостью основания $ABCD$ равен углу между ребром SA и плоскостью SBC . Найдите этот угол.

61. Все грани параллелепипеда — равные ромбы со стороной, равной a , и острым углом 60° . Найдите объем параллелепипеда.

62. Рассматривается фигура, полученная в пересечении правильного тетраэдра с его образом при центральной симметрии относительно середины высоты. Найдите объем этой фигуры, если ребро тетраэдра равно a .

63. В правильном тетраэдре точки M и N — середины противоположных ребер. Ортогональной проекцией тетраэдра на плоскость, параллельную прямой MN , является четырехугольник площади S , один из углов которого равен 60° . Найдите площадь поверхности тетраэдра.

64. Две противоположные вершины единичного куба совпадают с центрами оснований цилиндра, а остальные вершины расположены на боковой поверхности цилиндра. Найдите высоту и радиус основания цилиндра.

65. Даны скрещивающиеся прямые a и b и плоскость α , перпендикулярная прямой a и пересекающая ее в точке A . Докажите, что расстояние между прямыми a и b равно расстоянию от точки A до ортогональной проекции b' прямой b на плоскость α , а угол между прямыми b и b' дополняет до 90° угол между прямыми a и b .

66. Дан единичный куб $ABCA_1B_1C_1D_1$, M — середина BB_1 . Найдите угол и расстояние между прямыми AB_1 и CM . В каком отношении общий перпендикуляр этих прямых делит отрезок CM ?

67. В правильном тетраэдре $ABCD$ с ребром, равным 1, M — середина AB , N — середина BC . Найдите угол и расстояние между прямыми CM и DN . В каком отношении общий перпендикуляр этих прямых делит отрезок DN ?

68. Дан единичный куб $ABCA_1B_1C_1D_1$. Прямая l , параллельная его диагонали AC_1 , равноудалена от прямых BD , A_1D_1 и CB_1 . Найдите расстояния от прямой l до этих прямых.

69. Докажите, что около пирамиды можно описать сферу тогда и только тогда, когда около основания этой пирамиды можно описать окружность.

70. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром, равным a . Точки M и K — середины ребер AB и CD соответственно. Найдите радиус сферы, проходящей через точки M , K , A_1 и C_1 .

71. Известно, что в некоторую пирамиду можно вписать шар. Докажите, что объем пирамиды равен $1/3$ произведения радиуса шара на полную поверхность пирамиды.

72. Две грани треугольной пирамиды — равносторонние треугольники со стороной, равной a . Две другие грани — равнобедренные прямоугольные треугольники. Найдите радиус вписанного в пирамиду шара.

73. Шар радиуса r касается всех боковых граней треугольной пирамиды в серединах сторон ее основания. Отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром шара, делится пополам точкой пересечения с основанием пирамиды. Найдите объем пирамиды.

74. В треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро SC равно ребру AB и наклонено к плоскости основания ABC под углом 60° . Известно, что вершины A , B , C и середины боковых ребер пирамиды расположены на сфере радиуса 1. Докажите, что центр этой сферы лежит на ребре AB и найдите высоту пирамиды.

75. В треугольной пирамиде $PABC$ боковое ребро PB перпендикулярно плоскости основания ABC , $PB = 6$, $AB = BC = \sqrt{15}$, $AC = 2\sqrt{3}$. Сфера, центр O которой лежит на грани ABP , касается плоскостей остальных граней пирамиды. Найдите расстояние от центра O сферы до ребра AC .

76. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Сфера касается прямых AC , $B_1 C$, AB_1 и продолжения ребра BB_1 за точку B . Найдите радиус сферы, если длины ребер куба равны 1, а точка касания с прямой AC принадлежит грани куба.

77. Четырехугольная пирамида $SABCD$ вписана в сферу, центр которой лежит в плоскости основания $ABCD$. Диагонали AC и BD основания пересекаются в точке H , причем SH — высота пирамиды. Найдите CS и CD , если $CH = 4$, $AS = 3,75$, $AD = 3$, $AB = BS$.

78. Сфера касается ребер AS , BS , BC и AC треугольной пирамиды $SABC$ в точках K , L , M и N соответственно. Найдите KL , если $MN = 7$, $NK = 5$, $LN = 2\sqrt{29}$ и $KL = LM$.

79. Сфера радиуса $3/8$ вписана в четырехугольную пирамиду $SABCD$, у которой основанием служит ромб $ABCD$ такой, что $\angle BAD = 60^\circ$; высота пирамиды, равная 1, проходит через точку K пересечения диагоналей ромба. Докажите, что существует единственная плоскость, пересекающая ребра основания AB и AD в некоторых точках M и N таких, что $MN = 4\sqrt{3}/5$, касающаяся сферы в точке, удаленной на равные расстояния от точек M и N , и пересекающая

продолжение отрезка SK за точку K в некоторой точке E . Найдите длину отрезка SE .

80. Основание четырехугольной пирамиды $SABCD$ — прямоугольник $ABCD$. Известно, что $AS = 7$, $BS = 2$, $CS = 6$, $\angle SAD = \angle SBD = \angle SCD$. Найдите ребро DS .

81. Через вершину нижнего основания единичного куба проведена плоскость, касающаяся вписанного в куб шара. Эта плоскость отсекает от верхнего основания треугольник площади S . Найдите площадь сечения куба этой плоскостью.

82. Боковые ребра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны и равны a , b и c . Найдите радиус описанной сферы.

83. Пусть V — объем тетраэдра, a и b — его противоположные ребра, c — расстояние между ними, α — угол между ними. Докажите, что

$$V = \frac{1}{6} abc \cdot \sin \alpha.$$

84. В треугольной пирамиде $ABCD$ известно, что $CD = a$, а перпендикуляр, опущенный из середины ребра AB на CD , равен b и образует равные углы α с гранями ACD и BCD . Найдите объем пирамиды.

85. Сферы с центрами в точках O_1 и O_2 радиусов 3 и 1 соответственно касаются друг друга. Через точку M , удаленную от O_2 на расстояние 3, проведены две прямые, каждая из которых касается обеих сфер, причем точки касания лежат на прямых по одну сторону от точки M . Найдите угол между касательными, если известно, что одна из них образует с прямой O_1O_2 угол 45° .

86. В треугольной пирамиде противоположные ребра попарно равны. Докажите, что центры описанной и вписанной сфер совпадают.

87. Докажите, что все грани тетраэдра равны тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

а) отрезки, соединяющие середины противоположных ребер, попарно перпендикулярны;

б) площади всех граней равны;

в) точка пересечения медиан и центр описанной сферы совпадают.

88. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Скрещивающиеся ребра AC и BD этой пирамиды перпендикулярны. Также перпендикулярны скрещивающиеся ребра AD и BC , а $AB = CD$. Все ребра этой пирамиды касаются шара радиуса r . Найдите площадь грани ABC .

89. Сфера с центром в точке O проходит через вершины A , B и C треугольной пирамиды $ABCD$ и пересекает прямые AD , BD и CD в точках K , L и M соответственно. Известно, что $AD = 10$,

$BC : BD = 3 : 2$ и $AB : CD = 4\sqrt{3} : 11$. Проекциями точки O на плоскости ABD , BCD и CAD являются середины ребер AB , BC и AC соответственно. Расстояние между серединами ребер AB и CD равно 13. Найти периметр треугольника KLM .

90. Ребро правильного тетраэдра равно a . Через вершину тетраэдра проведено сечение, являющееся треугольником. Докажите, что периметр P сечения удовлетворяет неравенствам

$$2a < P \leq 3a.$$

91. В треугольной пирамиде $SABC$ суммы трех плоских углов при каждой из вершин B и C равны 180° и $SA = CB$. Найдите объем пирамиды, если площадь грани SBC равна 100, а расстояние от центра описанного шара до плоскости основания ABC равно 3.

92. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром, равным 4. На середине ребра BC взята точка M , а на ребре $A_1 D_1$ на расстоянии 1 от вершины A_1 взята точка N . Найдите длину кратчайшего пути между точками M и N по поверхности куба.

93. Если поверхность тетраэдра $ABCD$ разрезать вдоль ребер AD , BD и CD , то его разверткой на плоскость ABC будет квадрат со стороной, равной a . Найдите объем тетраэдра.

94. Основание пирамиды $ABCS$ — равносторонний треугольник ABC со стороной $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и равно 2. Найдите угол и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC , а другая проходит через точку C и середину ребра AB .

95. Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$. В каком отношении плоскость, проведенная через прямую AD и середину ребра SC , делит объем этой пирамиды?

96. На ребре DC треугольной пирамиды $ABCD$ взята точка N , причем $CN = 2DN$. На продолжении ребра CA за точку A и на продолжении ребра CB за точку B расположены точки K и M соответственно, причем $AC = 2AK$ и $BM = 2BC$. В каком отношении плоскость MNK делит объем пирамиды $ABCD$?

97. Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Точка N — середина ребра AS , точка K — середина медианы SP треугольника BSC , точка M расположена на ребре SB , причем $SM = 5MB$. В каком отношении плоскость MNK делит объем пирамиды $ABCD$?

98. На ребрах BC и DC треугольной пирамиды $ABCD$ расположены точки N и K соответственно, причем $CN = 2BN$ и $DK : KC = 3 : 2$; M — точка пересечения медиан треугольника ABD . В каком отношении плоскость MNK делит объем пирамиды $ABCD$?

99. Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$. На ребрах AB и SC расположены точки K и M соответственно, причем $AK : KB = CM : MS = 1 : 2$. В каком отношении плоскость, проходящая через точки K и M параллельно прямой BD , делит объем пирамиды $SABCD$?

100. Докажите, что из боковых граней четырехугольной пирамиды, основание которой является параллелограммом, можно составить треугольную пирамиду, причем ее объем вдвое меньше объема исходной пирамиды.

101. Докажите, что биссекторная плоскость двугранного угла при ребре тетраэдра делит противоположащее ребро на отрезки, пропорциональные площадям граней, образующих этот угол.

102. Докажите, что плоскость, проходящая через середины двух противоположных ребер треугольной пирамиды, делит ее объем пополам.

103. Точки M и N — середины соответственно ребер AA_1 и CC_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Прямые $A_1 C$, $B_1 M$ и BN попарно перпендикулярны. Найдите объем параллелепипеда, если $A_1 C = a$, $B_1 M = b$, $BN = c$.

104. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. На продолжении его ребер AB , AA_1 , AD за точки B , A_1 и D соответственно отложены отрезки BP , $A_1 Q$ и DR , равные $3AB/2$, $3AA_1/2$ и $3AD/2$. В каком отношении плоскость PQR делит объем параллелепипеда?

105. В каком отношении делит объем куба плоскость, перпендикулярная его диагонали и делящая диагональ в отношении а) $2 : 1$, б) $3 : 1$?

106. Две плоскости, параллельные противоположным ребрам AB и CD тетраэдра $ABCD$, делят ребро BC на три равные части. Какая часть объема тетраэдра заключена между этими плоскостями?

107. Отношение длин двух скрещивающихся ребер тетраэдра равно k . Параллельно этим ребрам проведена плоскость, причем в сечении получился ромб. В каком отношении эта плоскость делит объем тетраэдра?

108. Три шара попарно касаются друг друга внешним образом, а также касаются некоторой плоскости в вершинах прямоугольного треугольника с катетом, равным 1, и противоположащим углом в 30° . Найдите радиусы шаров.

109. Сфера радиуса r касается всех ребер треугольной пирамиды, центр этой сферы лежит на высоте пирамиды. Докажите, что пирамида правильная, и найдите ее высоту, если известно, что центр сферы удален от вершины пирамиды на расстояние $r\sqrt{3}$.

110. В трехгранный угол, все плоские углы которого равны α , помещена сфера так, что она касается всех ребер трехгранного угла. Грани

трехгранного угла пересекают сферу по окружностям радиуса R . Найдите радиус сферы.

111. Докажите, что в параллелепипед можно вписать сферу тогда и только тогда, когда все грани параллелепипеда равновелики.

112. Три конуса, радиусы оснований которых равны R и составляют $3/4$ их высоты, расположены по одну сторону от плоскости α , а их основания лежат в этой плоскости. Окружности оснований каждого двух из этих конусов касаются. Найдите радиус шара, лежащего между конусами и касающегося как плоскости α , так и боковых поверхностей всех трех конусов.

113. В правильной пирамиде $SABC$ сторона основания ABC равна a , боковое ребро — $2a$. Точки S , B и C лежат на боковой поверхности конуса, имеющего вершину в точке A . Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

114. Все вершины правильной пирамиды $SABCD$ лежат на боковой поверхности цилиндра, ось которого перпендикулярна плоскости SAB . Найдите радиус основания цилиндра, если $AB = a$.

115. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна a , боковое ребро — $5a/2$. Одно основание цилиндра лежит в плоскости SAB , другое вписано в сечение пирамиды. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

116. Высота цилиндра равна $3r$. Внутри цилиндра расположены три сферы радиуса r так, что каждая сфера касается двух других и боковой поверхности цилиндра. Две сферы касаются нижнего основания цилиндра, а третья сфера — верхнего основания. Найдите радиус основания цилиндра.

117. В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина каждого ребра равна a . Вершины A и A_1 лежат на боковой поверхности цилиндра, плоскость BCC_1 касается этой поверхности. Ось цилиндра параллельна прямой B_1C . Найдите радиус основания цилиндра.

118. На сфере, радиус которой равен 2, расположены три окружности радиуса 1, каждая из которых касается двух других. Найти радиус окружности меньшей, чем данная, которая также расположена на данной сфере и касается каждой из данных окружностей.

119. Одна вершина правильного тетраэдра расположена на оси цилиндра, а другие вершины — на боковой поверхности этого цилиндра. Найдите ребро тетраэдра, если радиус основания равен R .

120. Вершина A основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ совпадает с вершиной конуса, вершины B, D лежат на его боковой поверхности, вершина S — на окружности основания этого конуса, а вершина C — в плоскости его основания. Найдите отношение объема конуса к объему пирамиды.

121. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 60° . Внутри конуса расположены три сферы радиуса 1. Каждая сфера касается двух других, основания конуса и его боковой поверхности. Найдите радиус основания конуса.

122. Четыре сферы радиуса 1 попарно касаются друг друга. Найдите:

- а) радиус сферы, касающейся всех четырех сфер;
- б) высоту цилиндра, содержащего эти сферы так, что три из них касаются одного основания и боковой поверхности, а четвертая — другого основания цилиндра;
- в) высоту конуса, содержащего эти сферы так, что все они касаются боковой поверхности, а три из них — основания конуса.

123. В конус помещены пять равных шаров. Четыре из них лежат на основании конуса, причем каждый из этих четырех шаров касается двух других, лежащих на основании, и боковой поверхности конуса. Пятый шар касается боковой поверхности конуса и остальных четырех шаров. Найдите объем конуса, если радиус каждого шара равен r .

124. Можно ли точку в пространстве заслонить четырьмя шарами?

125. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса, если известно, что на его поверхности можно провести три попарно перпендикулярные образующие.

126. Два равных конуса с общей вершиной, с высотами, равными 2, и радиусами оснований, равными 1, касаются по некоторой образующей, а также касаются боковой поверхностью некоторой плоскости. Пусть l — прямая, по которой пересекаются плоскости основания конусов. Найдите угол между прямой l и плоскостью α .

127. Два равных конуса имеют общую вершину и касаются по общей образующей. Угол в осевом сечении каждого из конусов равен 60° . Найдите угол между двумя плоскостями, каждая из которых касается конусов, но не проходит через общую образующую.

128. На плоскости лежат три равных конуса с общей вершиной. Каждый из них касается двух рядом лежащих. Найдите угол при вершине каждого конуса.

129. Два равных конуса с общей вершиной D расположены по разные стороны от плоскости α и касаются этой плоскости по образующим DE и DF соответственно. Известно, что угол DEF равен γ , а угол

между прямой пересечения оснований конусов и плоскостью α равен β . Найдите угол между высотой и образующей каждого конуса.

130. Два конуса имеют общую вершину, и образующая первого конуса является высотой второго. Угол при вершине осевого сечения первого конуса равен $\arccos(1/3)$, а второго — $2\pi/3$. Найдите угол между образующими, по которым пересекаются боковые поверхности конусов.

131. Три равных конуса с углом α ($\alpha < 2\pi/3$) при вершине осевого сечения имеют общую вершину и касаются друг друга внешним образом по образующим k, l, m . Найдите угол между l и k .

132. В правильной четырехугольной пирамиде расположены два одинаковых шара радиуса r , центры которых находятся на оси симметрии пирамиды. Один из шаров касается всех боковых граней пирамиды, а второй — основания пирамиды и первого шара. Найдите высоту пирамиды, при которой объем пирамиды наименьший.

133. Сторона основания ABC правильной пирамиды $PABC$ равна a , боковое ребро равно b . На каком расстоянии от прямой BC следует провести сечение пирамиды, параллельное ребрам BC и PA , чтобы площадь его была наибольшей из возможных?

134. Ребро AB тетраэдра $ABCD$ является диагональю основания четырехугольной пирамиды, ребро CD параллельно другой диагонали этого основания, и концы его лежат на боковых ребрах пирамиды. Найдите наименьший возможный объем пирамиды, если объем тетраэдра равен V .

135. Дана правильная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Сторона ее основания $ABCD$ имеет длину $2a$, боковое ребро — длину a . Рассматриваются отрезки с концами на диагонали AD_1 грани $AA_1 D_1 D$ и диагонали DB_1 призмы, параллельные плоскости $AA_1 B_1 B$.

а) Один из таких отрезков проведен через точку M диагонали AD_1 такую, что $AM : AD_1 = 2 : 3$. Найдите его длину.

б) Найдите наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

136. Докажите, что площадь любой грани тетраэдра меньше суммы площадей трех остальных его граней.

137. Докажите, что проекция правильного тетраэдра на плоскость будет иметь наибольшую площадь, когда эта плоскость параллельна двум скрещивающимся ребрам тетраэдра.

138. Докажите, что сумма углов пространственного четырехугольника не превосходит 360° .

139. Докажите, что сумма внутренних двугранных углов трехгранного угла больше π и меньше 3π .

140. Теорема косинусов для трехгранного угла. Если α, β, γ — плоские углы трехгранного угла, а A, B, C — противолежащие им двугранные углы, то

$$\cos A = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}.$$

141. Пусть MC — перпендикуляр к плоскости треугольника ABC . Верно ли, что $\angle AMB < \angle ACB$?

142. Докажите, что сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360° .

143. Теорема косинусов для тетраэдра. Квадрат площади каждой грани тетраэдра равен сумме квадратов площадей трех остальных граней без удвоенных попарных произведений площадей этих граней на косинусы двугранных углов между этими плоскостями, т. е.

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - 2S_1S_2 \cos \alpha_{12} - 2S_1S_3 \cos \alpha_{13} - 2S_2S_3 \cos \alpha_{23}.$$

144. В тетраэдре $ABCD$ все плоские углы при вершине A равны 60° . Докажите, что $AB + AC + AD \leq BC + CD + DB$.

145. Основание пирамиды $ABCD$ — правильный треугольник ABC . Известно, что $\angle BAD = \angle CBD = \angle ACD$. Докажите, что пирамида — правильная.

146. Принцип Кавальери. Если два геометрических тела можно разместить в пространстве так, что в сечении этих тел любой плоскостью, параллельной некоторой фиксированной плоскости, получаются равновеликие плоские фигуры, то данные тела равновелики. Выведите с помощью принципа Кавальери формулу объема шара.

147. Один выпуклый многогранник лежит внутри другого. Докажите, что площадь поверхности внешнего многогранника больше площади поверхности внутреннего.

148. Докажите, что сферическая поверхность шарового слоя (части шара, заключенной между двумя параллельными секущими плоскостями) равна $2\pi Rh$, где R — радиус шара, h — высота шарового слоя (расстояние между секущими плоскостями).

Оглавление

Предисловие	3
Часть 1. Основные сведения из школьной геометрии	5
Планиметрия	5
Задачи на построение с помощью циркуля и линейки	14
Стереометрия	15
Факты, непосредственно связанные с аксиомами	15
Параллельность в пространстве	15
Скрещивающиеся прямые	16
Параллельное проектирование	16
Координаты и векторы в пространстве	17
Перпендикулярность прямой и плоскости	19
Двугранный угол	20
Многогранные углы	20
Сфера. Касательная плоскость. Касающиеся сферы	20
Правильная пирамида	21
Площадь поверхности многогранника	22
Объемы многогранников	22
Объемы и поверхности круглых тел	23
Часть 2. Избранные задачи и теоремы элементарной геометрии . .	24
Планиметрия	24
Задачи на построение	37
Стереометрия	39

Издательство МЦНМО предлагает следующие книги для школьников

В. Г. Болтянский, А. П. Савин. Беседы о математике. Дискретные объекты. — 2002. — 368 с.

Книга вводит читателя в круг идей современной математики. В популярной форме рассказывается о теории множеств, комбинаторике, теории графов, теории вероятностей и других вопросах.

Издание будет интересно учителям математики. Специальная глава посвящена вопросам, связанным с поиском учащимися решений задач.

В то же время эта книга может служить основой курса математики для студентов гуманитарных специальностей, такой курс был прочитан авторами для психологов.

Учащиеся и учителя математических школ, лицеев и гимназий могут использовать издание в качестве учебного пособия.

Р. Курант, Г. Роббинс. Что такое математика? — 3-е изд., испр. и доп. — 2001. — 568 с.

Эта книга, написанная одним из ведущих математиков XX века Р. Курантом вместе с Г. Роббинсом, — одна из лучших научно-популярных книг по математике. Ее замысел выражен в предисловии: «Нет ничего невозможного в том, чтобы, начиная от первооснов, добраться до таких возвышенных точек, с которых можно ясно обозреть самую сущность и движущие силы современной математики».

Многочисленные упражнения разбросаны по всей книге; дополнительное собрание упражнений в конце облегчает ее использование в школьной обстановке. Большинство упражнений не носит чисто формального характера, более трудные отмечены звездочкой. Не надо слишком огорчаться, если вы не сумеете выполнить некоторые из них.

Мы надеемся, что и специалист обнаружит кое-что интересное в элементарных рассуждениях, содержащих в себе зерно более широких идей.

С. Г. Гиндикин. Рассказы о физиках и математиках. — 3-е изд., расширенное. — 2001. — 576 с.

В книге рассказывается о жизни и творчестве двенадцати замечательных математиков и физиков, работы которых в значительной мере определили лицо современной математической науки.

Книга написана на основе статей, публиковавшихся в журнале «Квант» в течение ряда лет. Этим объясняется некоторый элемент случайности в выборе людей и событий, которым посвящены рассказы в книге. Однако нам кажется, что в книге идет речь о принципиальных явлениях в истории науки, достойных внимания любителей математики и физики. Хотя эта книга не дает систематической картины развития математики, она содержит значительный материал для размышления.

Эта книга для всех: от старшеклассников до взрослых. Увлекательно изложенные биографии великих ученых могут заинтересовать самые широкие круги читателей. А те из читателей, кто интересуется математикой, получают удовольствие и пользу от знакомства с конкретными научными достижениями героев книги.

Настоящее издание более чем вдвое расширено по сравнению с предыдущим, вышедшим в 1985 году и успевшим стать библиографической редкостью.

Хотя эта книга не дает систематической картины развития математики, она содержит значительный материал для размышления. Непознанные законы управляют математической модой!

В. В. Прасолов. Задачи по планиметрии. — 4-е изд., доп. — 2001. — 584 с.

В книгу включены нестандартные геометрические задачи несколько повышенного по сравнению со школьными задачами уровня. Сборник содержит около 1500 задач с полными решениями и около 150 задач для самостоятельного решения.

Настоящее издание дополнено по сравнению с предыдущим (3-е изд. — 1995).

Для школьников, преподавателей математики, руководителей математических кружков, студентов пединститутов.

Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер. Прямые и кривые. — 2000. — 128 с.

Не нуждается в специальном представлении книга, ставшая классикой литературы для школьников, интересующихся математикой. Данное издание представляет собой переиздание брошюры серии «Библиотека физико-математического кружка», давно ставшей библиографической редкостью.