Задача 21

В профильном ЕГЭ 2015 года задач 21 (ранее – задача С6) традиционно высокого уровня сложности.

На этот раз задача 21 предполагала наличие как обобщенных, так и некоторых частных умений в области математики, а также наличия опыта решения нестандартных задач. Перечислим некоторые из предполагавшихся знаний и умений:

- умение строить и исследовать простейшие математические модели;
- умение различать логическую структуру утверждений с квантором существования и с квантором общности, знание способов доказательства истинности и ложности утверждений с различными кванторами; знание так называемых кванторных законов и умение переформулировать утверждение с помощью этих законов, сохраняя его смысл;
- владение понятием натурального числа;
- наличие представления о числовых множествах, отличных от множества натуральных чисел;
- знание геометрических фактов, таких как условие существования треугольника, теоремы Пифагора и др.

Приведем один из примеров задачи 21 и вариант еѐ решения, предложенный разработчиками:

«Три числа назовѐм *хорошей* тройкой, если они могут быть длинами сторон треугольника.

Три числа назовѐм *отличной* тройкой, если они могут быть длинами сторон прямоугольного треугольник.

а) Даны 8 различных натуральных чисел. Может ли оказаться, что среди них не найдѐтся ни одной хорошей тройки?

б) Даны 4 различных натуральных числа. Может ли оказаться, что среди них можно найти три отличных тройки?

в) Даны 12 различных чисел (не обязательно натуральных). Какое наибольшее количество отличных троек могло оказаться среди них?».

а) Если числа равны 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 и 128, то никакие три из них не образуют хорошую тройку.

б) Если одно из чисел является длиной гипотенузы для двух треугольников, то какое-то из оставшихся трѐх чисел является длиной катета для этих двух треугольников, а тогда треугольники окажутся равными по гипотенузе и катету. Значит, каждое число может быть длиной гипотенузы не более чем одного треугольника. При этом два самых маленьких числа не могут являться длиной гипотенузы треугольника. Значит, среди четырѐх чисел можно найти не более одной отличной тройки.

в) Упорядочим числа по возрастанию. Самое большое из них может быть длиной гипотенузы не более чем в четырѐх треугольниках (в противном случае одно из оставшихся 11 чисел будет длиной катета в двух треугольниках с данной гипотенузой, а тогда эти треугольники будут равны по гипотенузе и катету). Аналогично, второе по величине число может быть длиной гипотенузы не более чем в пяти треугольниках, третье и четвѐртое — в четырѐх, пятое и шестое — в трѐх, седьмое и восьмое — в двух, девятое и десятое — в одном. Итого, отличных троек может получиться не более 30.

Тридцать отличных троек найдѐтся, например, для следующего набора чисел: 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, …, $\sqrt{12}$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 30.

Типичные ошибки в решениях задачи 21

1. Одним из распространенных вариантов записей «решения» задачи 21 в 2015 году было отсутствие каких-либо пояснений к ответу.

Пример1.

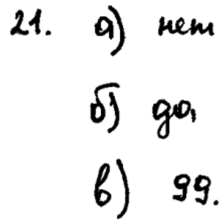

21. а) нет
б) да
в) 99.

Рис. 16.1.

Комментарий: На ненулевой балл решение, согласно критериям, могло претендовать, если верный ответ *получен* хотя бы в одном из пунктов. Проиллюстрированное в примере 1 решение не описывает процесс *получения* верного ответа ни для одного из пунктов.

2.Многие участники ЕГЭ 2015 года, приступившие к решению задачи №21, ограничились пунктом а), приведя пример обосновывающий существование необходимого количества натуральных чисел, не содержащих ни одной хорошей тройки.

Пример2.

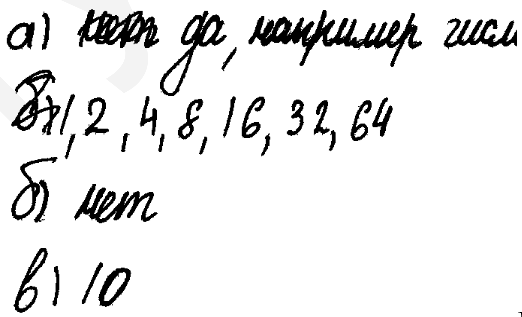

а) ~~нет~~ да, например числ
~~8~~: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64
б) нет
в) 10

Рис. 16.2.

Комментарий: С точки зрения формальной логики приведение примера доказывает утверждение с квантором существования. Именно таким утверждением надо считать вопрос пункта а). Однако формальное следование критериям оценивания заданий с развѐрнутым ответом 2015 году требует оценки 0 баллов за приведѐнное в примере 2 решение, поскольку процесс *получения* верного ответа не описан.

Приведѐм вариант верного решения пункта а), в котором не используется пример, явно подтверждающий существование требуемой последовательности чисел.

Пример3.

21. Чтобы числа могли быть сторонами треугольника, должны выполняться неравенства: $\begin{cases} a+b>c \\ a+c>b \\ b+c>a \end{cases}$, где a, b и c – стороны треугольника.

а) Да, вполне может оказаться, если числа являются арифметической прогрессией с формулой $a_n = a_{n-2}+a_{n-1}$, где $n>2$ и $n \in Z$. Если же каждое последующее число по возрастанию будет меньше суммы двух предыдущих, то хорошие тройки появятся.

б) Числа должны удовлетворять системам:

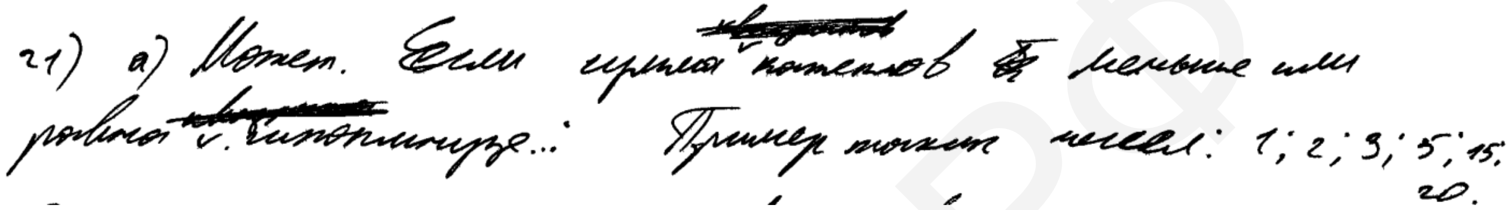
$\begin{cases} a+b>c \\ a+c>b \\ b+c>a \end{cases}$ и $\left[\begin{array}{l} a^2+b^2=c^2 \\ a^2+c^2=b^2 \\ b^2+c^2=a^2 \end{array}\right.$

Ответ: а) Да.

Рис. 16.3

Комментарий: В решении описывается способ получения требуемой последовательности чисел. Согласно критериям за пункт а) 1 балл.

Пример 4.



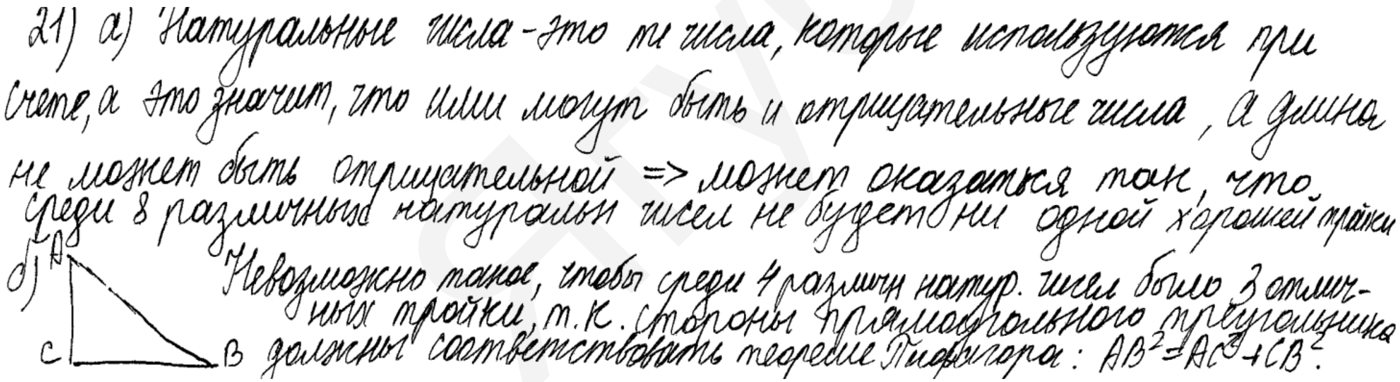
21) а) Может. Если сумма катетов меньше или равна гипотенузе... Пример может чисел: 1; 2; 3; 5; 15; 20.

Рис.16.4.

Комментарий: Приведѐн правильный пример, однако, приведено неверное обоснование. Согласно критериям, 0 баллов.

3.В предложенных в 2015 году решениях задачи № 21 имелись неединичные ошибки, связанные с понятием натурального числа.

Пример 5:



21) а) Натуральные числа - это те числа, которые используются при счете, а это значит, что они могут быть и отрицательные числа, а длина не может быть отрицательной => может оказаться так, что среди 8 различных натуральн чисел не будет ни одной хорошей тройки

б) Невозможно такое, чтобы среди 4 различн натур. чисел было 3 отличных тройки, т.к. стороны прямоугольного треугольника должны соответствовать теореме Пифагора: $AB^2=AC^2+CB^2$.

Рис. 16.5

Комментарий: Решение содержит противоречивые утверждения. Согласно общим методическим рекомендациям разработчиков ЕГЭ, это недопустимо. Оценка 0 баллов.