Задача 17

В профильном ЕГЭ 2015 года модель задачи 17 (ранее – задача С3) претерпела изменения по сравнению с прошлым годом. Вместо системы неравенств была предложена задача: решить «одиночное» неравенство.

Задача 17 предполагала:

- умение использовать метод введения вспомогательной переменной для решения неравенств;
- умение применять метод интервалов;
- владение тождественными преобразованиями рациональных выражений, а также показательных и логарифмических выражений и умения оценить равносильность этих преобразований;
- владение понятием области допустимых значений неравенства, системы неравенств, совокупности неравенств, в данном случае связанной со свойствами дробно-рациональной функции;
- знание свойств показательной и логарифмической функций;
- понимание смысла системы неравенств как логической операции «конъюнкции» и совокупности неравенств как логической операции «дизъюнкция» и др.

Приведем один из примеров задачи 17 из варианта 579:

«Решите неравенство: $\frac{2}{8^x-10} \geq \frac{4}{8^x-8}$».

Участниками ЕГЭ 2015 года были предложены несколько различных способов решения, в том числе отличные от предложенных разработчиками. Основные: метод интервалов с предварительной заменой и так называемый логический, предполагавший рассмотрение случаев неотрицательности дроби (частного).

Ниже на рисунках 12.1 и 12.2 приведены примеры работ учащихся с безошибочными решениями задачи №17 описанными способами.

Пример 1.

17. $\frac{2}{8^x-10} \geq \frac{4}{8^x-8}$; Пусть $t = 8^x - 8$, тогда $\frac{2}{t-2} \geq \frac{4}{t}$;

$\frac{2t-4\cdot(t-2)}{t(t-2)} \geq 0$; $\frac{-2t+8}{t(t-2)} \geq 0$, отсюда имеем $t \neq 0$ и $t \neq 2$, и $t = 4$. Найдем такие t, при которых выполнение неравенство , $t \in (-\infty; 0) \cup (2; 4]$.

Обратная замена

$8^x - 8 < 0$ и $2 < 8^x - 8 \leq 4$

$8^x < 8$ $\quad 10 < 8^x \leq 12$

$x < 1$. $\quad \log_8 10 < x \leq \log_8 12$

Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup (\log_8 10; \log_8 12]$.

Рис. 12.1

Пример 2.

17. $\frac{2}{3^x-9} \geq \frac{8}{3^x-3}$

$\frac{2}{3^x-9} - \frac{8}{3^x-3} \geq 0$

$\frac{2(3^x-3)-8(3^x-9)}{(3^x-9)(3^x-3)} \geq 0$

Рассмотрим 2 случая:

I $\begin{cases} 2(3^x-3)-8(3^x-9) \geq 0 \ (1) \\ (3^x-9)(3^x-3) > 0 \ (2) \end{cases}$ или II $\begin{cases} 2(3^x-3)-8(3^x-9) \leq 0 \ (4) \\ (3^x-9)(3^x-3) < 0 \ (5) \end{cases}$

Решим I систему:

1) $2(3^x-3)-8(3^x-9) \geq 0$

$2\cdot 3^x - 6 - 8\cdot 3^x + 72 \geq 0$

$-6\cdot 3^x+66\geqslant 0$

$-6\cdot 3^x\geqslant -66$

$3^x\leqslant 11$

$\log_3 3^x\leqslant \log_3 11$

$x\leqslant \log_3 11$

2) $(3^x-9)(3^x-3)>0$

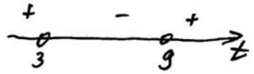
$3^{2x}-9\cdot 3^x+27-3\cdot 3^x>0$

$3^{2x}-12\cdot 3^x+27>0$

Пусть $3^x=t$

$t^2-12t+27>0$

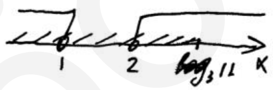
$(t-9)(t-3)>0$



$\left[\begin{array}{l} t>9 \\ t<3 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} 3^x>9 \\ 3^x<3 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<1 \end{array}\right.$

Учтём, что: $2<\log_3 11<3$

3) $\begin{cases} x\leqslant \log_3 11 \\ \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<1 \end{array}\right. \end{cases}$



$\left[\begin{array}{l} x<1 \\ 2<x\leqslant \log_3 11 \end{array}\right.$

Решим систему II исходя из решения системы I:

4) $x\geqslant \log_3 11$

5) $1<x<2$

6) $\begin{cases} x\geqslant \log_3 11 \\ 1<x<2 \end{cases}$

Система II не имеет решения.

Ответ: $(-\infty;1);(2;\log_3 11]$

Рис. 12.2

Комментарии: Решение, согласно критериям, оценено максимальным баллом, не смотря на нерациональное решение неравенства (2).

Типичные ошибки в решениях задачи 17

1. Самые распространѐнные ошибки, сделанных учащимися, приступившими к решению задачи №17 в 2015 году, связаны с формальным перенесением методов и приѐмов решения уравнений на неравенства того же типа. Это в частности проявилось в умножение неравенства на выражение с переменной без учѐта знака этого выражения и в применении к неравенству свойства пропорции. Следующие примеры иллюстрируют указанные ошибки.

Пример 3.

17. $\frac{2}{8^x-10} \geq \frac{4}{8^x-8}$

домножим каждую дробь

$2(8^x-8) \geq 4(8^x-10)$

$2\cdot 8^x-16 \geq 4\cdot 8^x-40$

$2\cdot 8^x-16-4\cdot 8^x+40 \geq 0$

$8^x-10 \neq 0$

$8^x \neq 10$

$8^x \neq \log_8 10$

$8^x-8 \neq 0$

$8^x \neq 8$

$8^x \neq \log_8 8$

$8^x \neq 1$

$8^x = t$

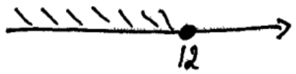
$2t - 16 - 4t + 40 \geq 0$

$-2t + 24 \geq 0$

$-2t \geq -24$

$2t \leq 24$

$t \leq 12$



$(-\infty;\ 12]$.

$0 \leq 8^x \leq 12$

$0 \leq 8^x \leq \log_8 12$

Ответ: $[0;\ \log_8 12]$.

Рис. 12.3

Комментарии: Автором этого решения, представленного на рис. 12.3 применено неравносильное преобразование, а именно: умножение неравенства на выражение с переменной, знак которого зависит от значения этой переменной. Согласно критериям, оценка – 0 баллов. Заметим также, что в последнем переходе, видимо, ученик допустил описку, вместо x записав 8^x. Учитывая эту погрешность, можно констатировать, что автор этого решения не знает также, что неравенство $8^x \geq 0$ верно при всех значениях переменной. Заметим, что последнее замечание, к сожалению, не редко встречалось и в других работах.

Пример 4.

17) $\dfrac{2}{8^x-10} \ge \dfrac{4}{8^x-8}$

Пусть $8^x = y$, $\dfrac{2}{y-10} \cancel{\ge} \dfrac{4}{y-8}$

$4y-40 \ge 2y-16$

$2y \ge 24$

$y \ge 12$

$8^x \ge 12$ $\quad x \in [2;+\infty)$

Ответ: $[2;+\infty)$

Рис. 12.4

Комментарии: Автор этого решения неправомерно применил для неравенства свойство пропорции («крест-накрест»), что проиллюстрировал соответствующим знаком. Имеется также ошибка вычислительного характера в последнем переходе решения. Оценка, согласно критериям, 0 баллов.

2. ***Также очень распространѐнной ошибкой надо считать переход от дробно-рационального неравенства к неравенству, связывающему числители («отбрасывание» знаменателя). В следующем примере представлена именно такая ошибка.***

Пример 5.

№17. $\dfrac{2}{3^x-9}^{\backslash 3^x-3} \ge \dfrac{8}{3^x-3}^{\backslash 3^x-9}$ $\qquad \dfrac{2(3^x-3)-8(3^x-9)}{(3^x-3^2)(3^x-3)} \ge 0$

~~функция~~ $\dfrac{2(3^x-3)-8(3^x-9)}{(3^x-3^2)(3^x-3)}$ ~~возрастает~~ убывает ~~на всей области определения~~.

ОДЗ

$3^x-3^2 \ne 0 \quad x \ne 2$

$3^x-3 \ne 0 \quad x \ne 1$

$$\frac{2(3^x-3)-8(3^x-9)}{(3^x-3^2)(3^x-3)}\geq 0$$

$$(3^x-3)-\overset{4}{8}(3^x-9)\geq 0$$

$$3^x-3\geq 4\cdot 3^x-36$$

$$33\geq 4\cdot 3^x-3^x$$

$$33\geq \cancel{4}3\cdot 3^x$$

$$11\geq 3^x$$

$$\log_3 11\geq x$$

Ответ: $x \in \cancel{(-\infty}\ (-\infty;1)\cup(2;\log_3 11]$

Рис. 12.5.

Комментарии: нарушена равносильность в определѐнный момент решения. Можно предположить, что ученик использовал в общем случае неверное утверждение о том, что «дробь неотрицательна при неотрицательном числителе». Согласно критериям, 0 баллов.

Заметим также, что в этой работе наблюдается ещѐ одна достаточно распространѐнная ошибка: аналитическое и графическое представления ответа не соответствуют друг другу, описывая различные числовые множества. Если бы эта ошибка была единственной, то, согласно критериям, решение могло претендовать на 1 балл.

3. Ряд учащихся вместо неравенства решали уравнение. Соответствующий пример ниже.

Пример 6.

17. $$\frac{2}{8^x-10} \geqslant \frac{4}{8^x-8}$$

$$\frac{2}{8^x-10} = \frac{4}{8^x-8}$$

$$2(8^x-8)=4(8^x-10)$$

$$2\cdot 8^x-16=4\cdot 8^x-40$$

$$2\cdot 8^x-4\cdot 8^x=-40+16$$

$$2\cdot 8^x=24$$

$$8^x=\frac{24}{2}$$

$$8^x=12$$

Рис. 12.6.

Комментарии: Учащийся решал задачу, отличную от сформулированной в КИМ. Согласно критериям, 0 баллов.

4. Как уже отмечалось выше, учащиеся, приступившие к решению задачи №17 и получившие ненулевой балл за эту задачу, применяли в основном метод интервалов, предварительно введя вспомогательную переменную.

С применением метода интервалов и введением вспомогательной переменной связан ряд достаточно распространѐнных ошибок. Отдельные из них, согласно критериям, могут расцениваться как вычислительные (ошибка при определении знаков на промежутках, неверное расположение чисел на числовой прямой), другие – принципиальные, связанные с пропуском шагов алгоритма или неверным их выполнением, не могут быть оценены ненулевым баллом. Приведѐм примеры.

Пример 7.

№17. $\dfrac{3}{6^x-6} \geqslant \dfrac{4}{6^x-5}$

ОДЗ: $\begin{cases} 6^x-6 \neq 0 \\ 6^x-5 \neq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 6^x \neq 6 \\ 6^x \neq 5 \end{cases}$; $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq \log_6 5 \end{cases}$

$\dfrac{3}{6^x-6}^{\backslash 6^x-5} - \dfrac{4}{6^x-5}^{\backslash 6^x-6} \geqslant 0$

$\dfrac{3(6^x-5)-4(6^x-6)}{(6^x-6)(6^x-5)} \geqslant 0$

Пусть $6^x = t$, тогда

$\dfrac{3(t-5)-4(t-6)}{(t-6)(t-5)} \geqslant 0$

$\dfrac{3t-15-4t+24}{t^2-5t-6t+30} \geqslant 0$

$\dfrac{-t+9}{t^2-11t+30} \geqslant 0$

$f(x) = \dfrac{-t+9}{t^2-11t+30}$

$D(f)$: $t^2-11t+30 \neq 0$

$D = 121-120 \neq 1$

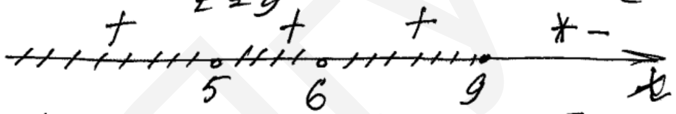
$t_1 \neq \frac{11+1}{2} = \frac{12}{2} \neq 6$

$t_2 \neq \frac{11-1}{2} = \frac{10}{2} \neq 5$

Н.ф.: $-t+9=0$

$-t=-9$

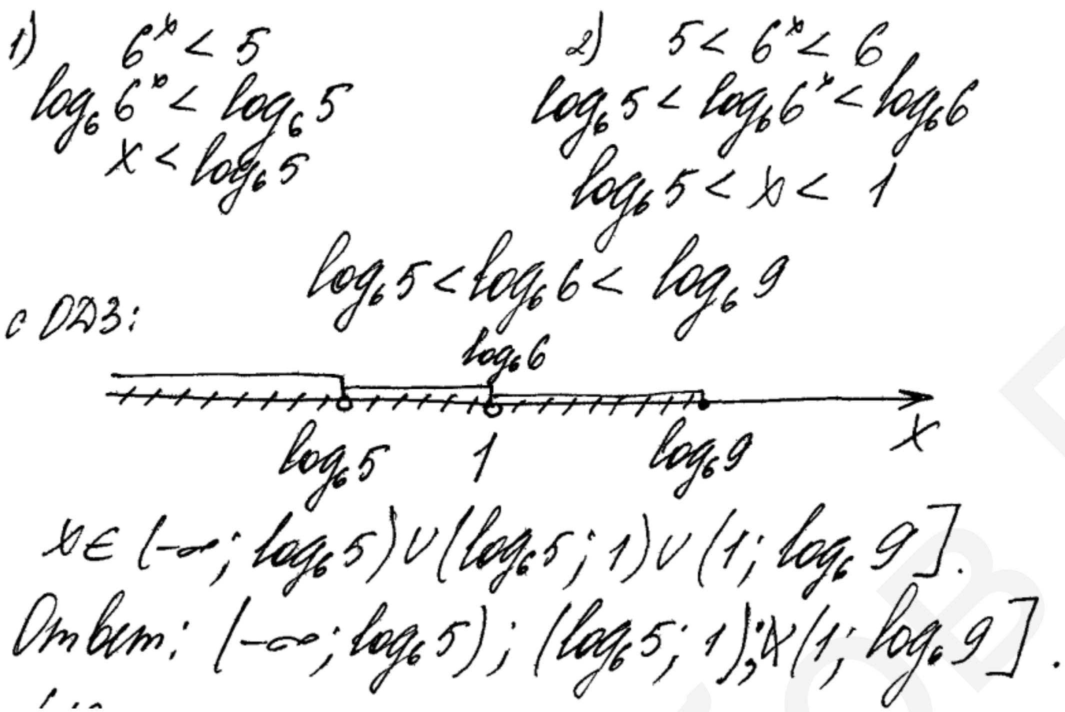
$t=9$



$t \in (-\infty;5)\cup(5;6)\cup(6;9]$.

$\left[\begin{array}{l} t<5 \\ 5<t<6 \\ 6<t\leqslant 9 \end{array}\right.$

(см. на др. стороне).



1) $6^x < 5$
$\log_6 6^x < \log_6 5$
$x < \log_6 5$

2) $5 < 6^x < 6$
$\log_6 5 < \log_6 6^x < \log_6 6$
$\log_6 5 < x < 1$

3) $6 < 6^x \le 9$
$\log_6 6 < \log_6 6^x \le \log_6 9$
$1 < x \le \log_6 9$

$\log_6 5 < \log_6 6 < \log_6 9$

с ОДЗ:

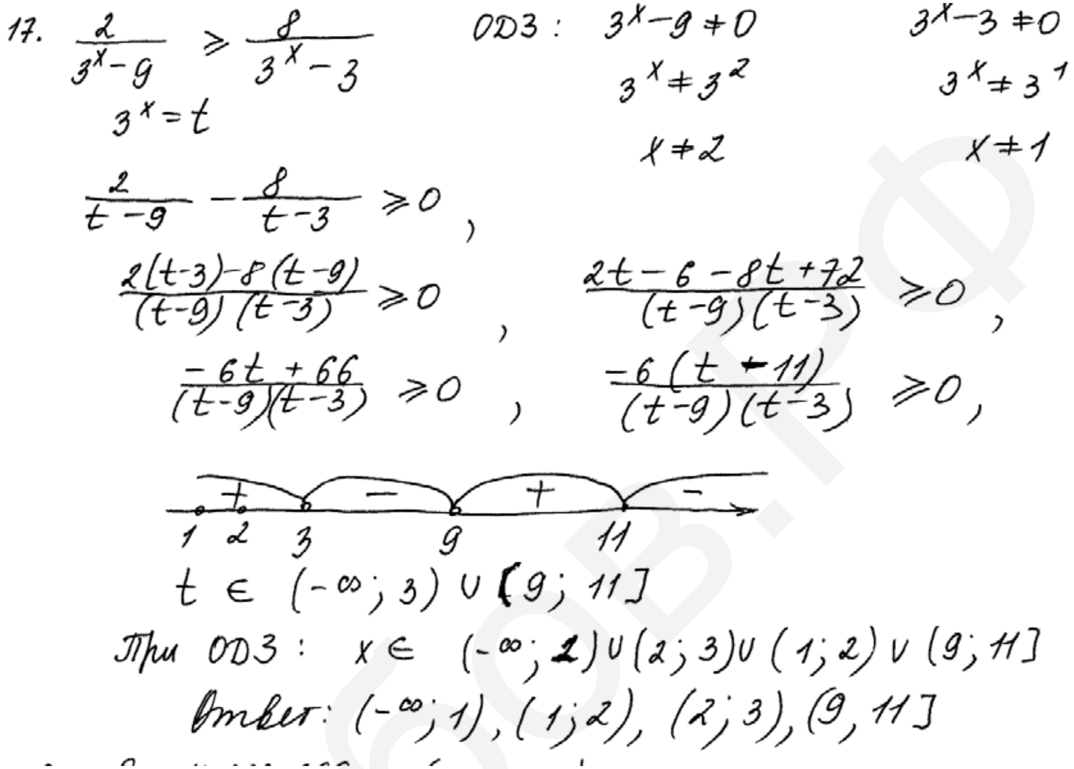
$x \in (-\infty; \log_6 5) \cup (\log_6 5; 1) \cup (1; \log_6 9]$.

Ответ: $(-\infty; \log_6 5)$; $(\log_6 5; 1)$; $(1; \log_6 9]$.

Рис.12.7.

Комментарии: Ошибка в определении знака на одном из интервалов вполне может быть признана вычислительной. Учащийся довѐл решение до конца, продемонстрировав в целом владение методом замены переменных и методом интервалов. Согласно критериям, 1 балл.

Пример 8.



17. $\dfrac{2}{3^x-9} \geqslant \dfrac{8}{3^x-3}$ ОДЗ: $3^x-9\neq 0$, $3^x\neq 3^2$, $x\neq 2$; $3^x-3\neq 0$, $3^x\neq 3^1$, $x\neq 1$

$3^x=t$

$\dfrac{2}{t-9}-\dfrac{8}{t-3}\geqslant 0$,

$\dfrac{2(t-3)-8(t-9)}{(t-9)(t-3)}\geqslant 0$, $\dfrac{2t-6-8t+72}{(t-9)(t-3)}\geqslant 0$,

$\dfrac{-6t+66}{(t-9)(t-3)}\geqslant 0$, $\dfrac{-6(t-11)}{(t-9)(t-3)}\geqslant 0$,

$t\in(-\infty;3)\cup[9;11]$

При ОДЗ: $x\in(-\infty;2)\cup(2;3)\cup(1;2)\cup(9;11]$

Ответ: $(-\infty;1),(1;2),(2;3),(9,11]$

Рис. 12.8.

Комментарии: Не сделана обратная замена – необходимый шаг алгоритма. На числовой прямой отмечены значения исходной и введѐнной переменной. Согласно критериям, 0 баллов.

Отдельные учащиеся применили так называемый логический способ решения, осуществив на определѐнном этапе равносильный переход к совокупности двух систем. Пример правильного решения этим способом представлен на рисунке 12.2. С этим способом решения неравенства связаны следующие ошибки. Это рассмотрение только одного случая положительности (отрицательности) дроби, неверное использование логической символики. Приведѐм примеры.

Пример 9.

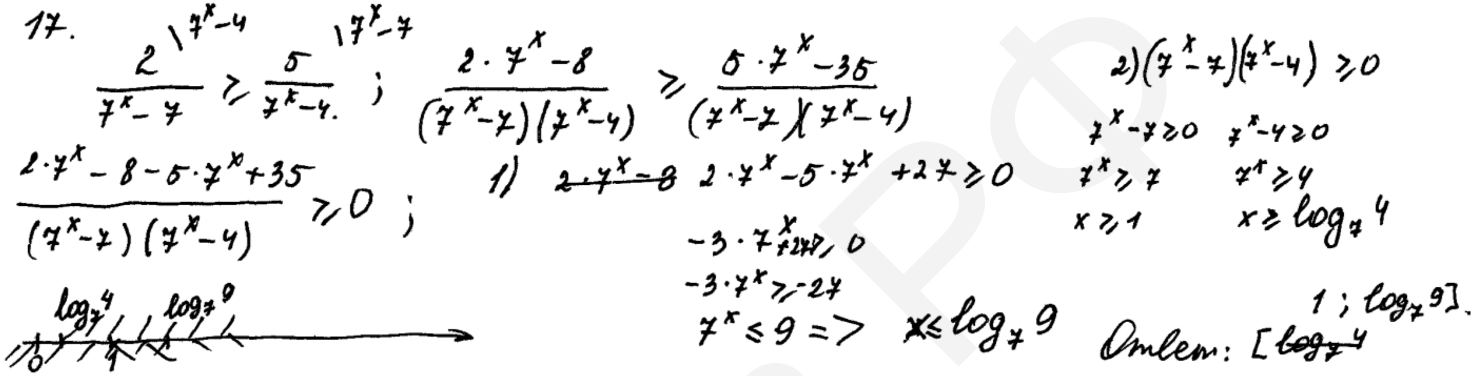
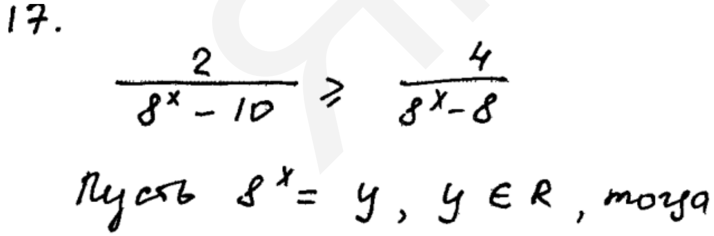


Рис. 12.9.

Комментарии: В решении рассмотрен только один случай неотрицательности дроби. При решении неравенства (2) автор решения делает ещѐ одну ошибку логического характера, рассматривает только один случай неотрицательности произведения. Согласно критериям, 0 баллов.

Пример 10.



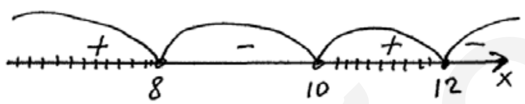
$$\frac{2}{y-10}-\frac{4}{y-8}\geq 0$$

$$\frac{2}{y-10}^{\backslash y-8}-\frac{4}{y-8}^{\backslash y-10}=0$$

$$\frac{2y-16-4y+40}{(y-10)(y-8)}=0$$

$$\frac{-2y+24}{(y-10)(y-8)}=0$$

$$\left[\begin{array}{l}-2y+24=0\\(y-10)(y-8)\neq 0\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}y=12\\y\neq 10 \text{ или } y\neq 8\end{array}\right.$$



$$\left\{\begin{array}{l}y<8\\10<y\leq 12\end{array}\right.$$

Обратная замена:

$$\left\{\begin{array}{l}8^x<8\\10<8^x\leq 12\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}x<1\\\log_8 10<x\leq\log_8 12\end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\begin{array}{l}x<1\\\log_8 10<x\leq\log_8 12\end{array}\right.$

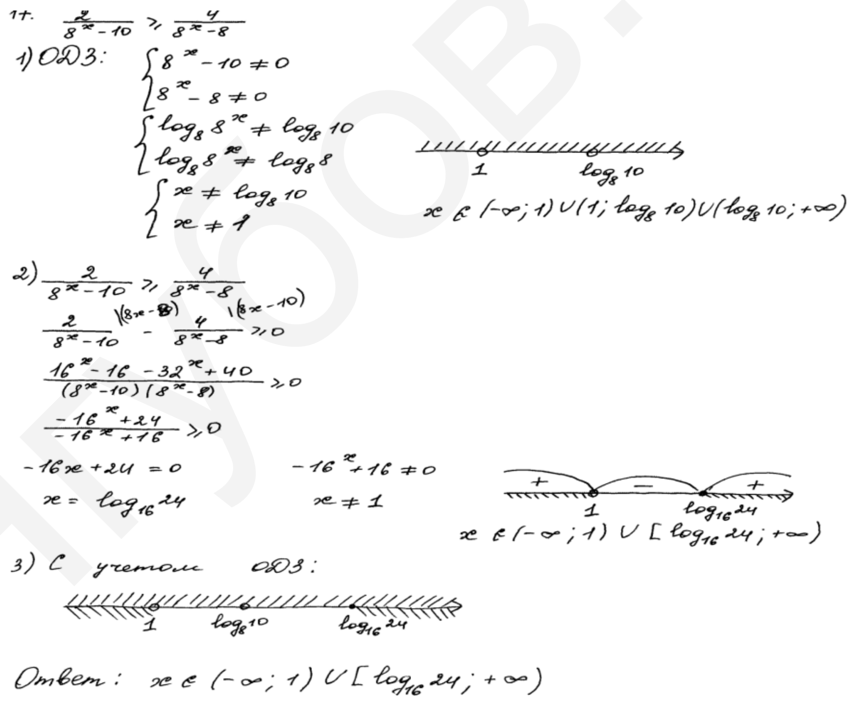
Рис. 12.10.

Комментарии: в представленном выше решении автор многократно неверно использует логическую символику. В явном виде логические операции «конъюнкция» и «дизъюнкция» в школьном курсе математики не изучаются, не изучаются также законы формальной логики. В связи с этим, а также в связи с тем, что имеется верная последовательность всех шагов решения, работа оценена ненулевым баллом, однако, этот балл не максимальный.

5. Необходимым условием решения неравенств повышенной трудности является устойчивые умения тождественных преобразований выражений, в данном случае дробно-рациональных, показательных и логарифмических. Ошибки этого типа, к сожалению, являются распространенными.

Приведѐм пример работы с одной из очень распространѐнных ошибок такого типа.

Пример 11.



17. $\frac{2}{8^x-10} \geq \frac{4}{8^x-8}$

1) ОДЗ: $\begin{cases} 8^x-10 \neq 0 \\ 8^x-8 \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_8 8^x \neq \log_8 10 \\ \log_8 8^x \neq \log_8 8 \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq \log_8 10 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$x \in (-\infty; 1) \cup (1; \log_8 10) \cup (\log_8 10; +\infty)$

2) $\frac{2}{8^x-10} \geq \frac{4}{8^x-8}$

$\frac{2}{8^x-10}^{\backslash(8^x-8)} - \frac{4}{8^x-8}^{\backslash(8^x-10)} \geq 0$

$\frac{16^x-16-32^x+40}{(8^x-10)(8^x-8)} \geq 0$

$\frac{-16^x+24}{-16^x+16} \geq 0$

$-16x+24=0$ $\quad$ $-16^x+16 \neq 0$

$x=\log_{16}24$ $\quad$ $x \neq 1$

$x \in (-\infty; 1) \cup [\log_{16}24; +\infty)$

3) С учетом ОДЗ:

Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup [\log_{16}24; +\infty)$

Рис. 12.11.

Комментарии: автор решения дважды ошибся при выполнении умножения числа на степень. Согласно критериям, 0 баллов.