2015
2016

Подготовка к ЕГЭ по математике 2016

Теория для решения Задач 9

Наталья и Александр Крутицких
www.matematikalegko.ru
2015 2016

Уважаемые друзья! Статьи с подробными решениями заданий ЕГЭ по математике вы можете найти на сайте

http://matematikalegko.ru

На блоге имеются рубрики:

Векторы

Вероятность

Вписанный угол

Графики и диаграммы

Движение

Координатная плоскость

Площади фигур

Преобразование выражений

Производная и первообразная

Прогрессия

Уравнения

Проценты

Работа

Физические задачи

И другое…

Делитесь с коллегами и друзьями.

Рекомендую!

Материалы для подготовки к ЕГЭ по математике ЕГЭ-Студия.

Материалы для учителей и учеников Портал Инфоурок.

Подготовка к ЕГЭ по математике – блог Инны Фельдман.

Портал Дмитрия Тарасова Видеоуроки в Интернет.

Подготовка к ЕГЭ и ОГЭ (ГИА) КУРС Видеорепетитор.

Обучение онлайн – ЕГЭ, ОГЭ, олимпиады Библиотека курсов Фоксворд

Что необходимо знать для решения заданий? Это:

1. Формулы сокращѐнного умножения
2. Свойства показателей степени
3. Свойства корней
4. Основное логарифмическое тождество и свойства логарифмов
5. Основное тригонометрическое тождество и следствия из него; формулы тангенса, котангенса; синуса и косинуса суммы и разности двух аргументов, формулы синуса и косинуса двойного аргумента
6. Знаки тригонометрических функций
7. Чѐтность и нечѐтность тригонометрических функций
8. Периодичность тригонометрических функций
9. Значения тригонометрических функций
10. Формулы приведения

Необходимо уметь оперировать действиями с дробями (сокращение дроби, нахождение общего знаменателя) и переводить градусную меру угла в радианную и наоборот.

Итак, формулы сокращѐнного умножения:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Степени и корни:

$$a^0 = 1$$

Нулевая степень любого числа равна единице.

* * *

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a \neq 0 \quad n - \text{натуральное число}$$

Суть данного свойства заключается в том, что при переносе числителя в знаменатель и наоборот, знак показателя степени меняется на противоположный. Например:

$$\frac{x^7}{y^{-2}} = \frac{y^2}{x^{-7}}$$

Следствие из данного свойства $a^{-1} = \frac{1}{a}$

* * *

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

* * *

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание остаѐтся прежним, а показатели степеней складываются.

* * *

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad m > n, \qquad a \neq 0$$

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание остаѐтся прежним, а показатели степеней вычитаются.

* * *

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

При возведении степени в степень основание остаѐтся прежним, а показатели перемножаются.

* * *

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

При возведении в степень произведения в эту степень возводится каждый множитель.

* * *

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

При возведении в степень дроби, в эту степень возводится и числитель и знаменатель.

* * *

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$$

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)}$$

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} \qquad (m > 0)}$$

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}} \quad (k > 0)}$$

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \quad \text{если} \quad m \leq 0, \text{то} \quad a \neq 0}$$

Логарифм

Логарифмом числа a по основанию b называется показатель степени, в который нужно возвести b, чтобы получить a.

$$\log_b a = x \qquad b^x = a \quad (a > 0,\ b > 0,\ b \neq 1)$$

Например:

$$\log_3 9 = 2 \text{ ,так как } 3^2 = 9$$

Основное логарифмическое тождество:

$$b^{\log_b a} = a$$

Свойства логарифмов:

$$\log_a a^x = x$$

$$\log_x(ab) = \log_x a + \log_x b$$

$$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$$

$$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \cdot \log_a b$$

Тригонометрические формулы

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \qquad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \qquad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\sin \alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}; \quad \cos \alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

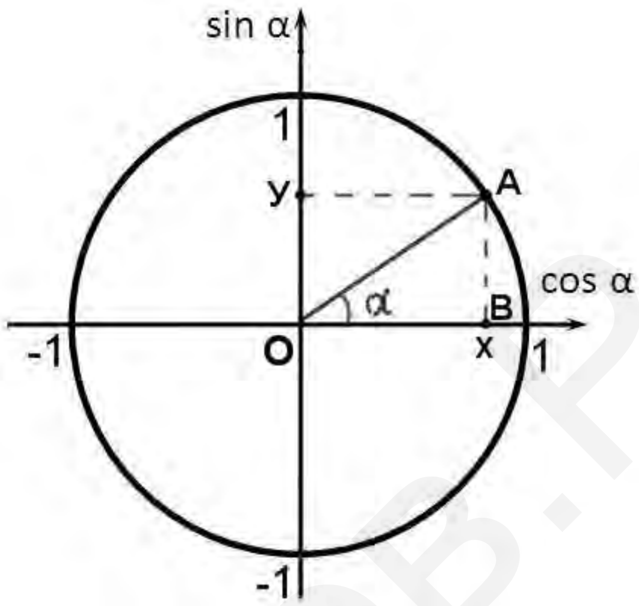
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

Знаки тригонометрических функций

Построим тригонометрическую окружность; радиус-вектор, повернутый на произвольный угол от 0 до 90 градусов; обозначим абсциссу и ординату точки пересечения радиус-вектора и единичной окружности соответственно x и y:



OA – это радиус-вектор

A – точка пересечения радиус-вектора и тригонометрической окружности

α – угол, на который поворачивается радиус-вектор

y – ордината точки A

x – абсцисса точки A

Рассмотрим прямоугольный треугольник OBA, по определению синуса в прямоугольном треугольнике:

$$\sin\alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{y}{1} = y$$

По определению косинуса в прямоугольном треугольнике:

$$\cos\alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{x}{1} = x$$

Тангенс:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$$

Котангенс:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$

Кстати, один из выводов:

Известно, что по теореме Пифагора $OA^2 = x^2 + y^2$ то есть $1 = x^2 + y^2$

Так как выше мы получили:

$$\sin\alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{x}{1} = x$$

ЗНАЧИТ

$$\boxed{1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$$

ЭТО ОСНОВНОЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ТОЖДЕСТВО

Понимание «природы» этой формулы, а также знание информации, которую даѐт нам тригонометрическая окружность определяет ваш успех в разделе курса «Тригонометрия» .

Определение

Синусом угла α называется ордината (координата y) точки на тригонометрической окружности, которая возникает при повороте радиус-вектора на угол α.

Определение

Косинусом угла α называется абсцисса (координата х) точки на тригонометрической окружности, которая возникает при повороте радиус-вектора на угол α.

Тангенс угла α — это отношение синуса к косинусу. Или, по-другому: отношение координаты y к координате x.

Предлагаем запомнить:

СИНУС ЭТО ОСЬ ОРДИНАТ

КОСИНУС ЭТО ОСЬ АБСЦИСС

(таких определений нет, это условный «штамп», но в голове он быть должен)

Определения синуса, косинуса и тангенса указанные выше знакомы из курса алгебры старших классов. А теперь следствия из них, которые возникают на тригонометрической окружности:

Значения синусов углов лежащих в первой и второй четверти положительны, а лежащих в третьей и четвёртой четверти отрицательны.

Значения косинусов углов лежащих в первой и четвёртой четверти положительны, а лежащих во второй и третьей четверти отрицательны.

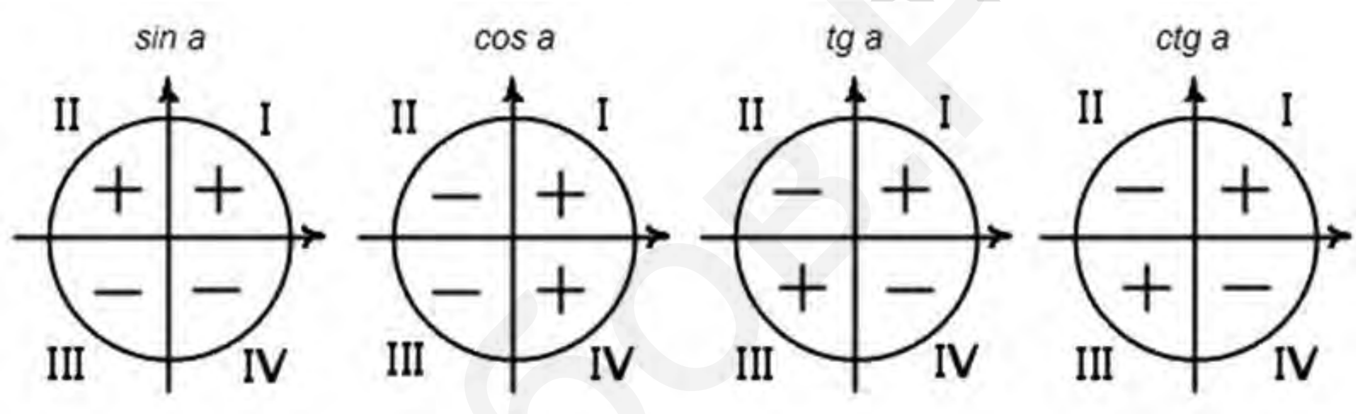
Знак тангенса определяется просто, в каждой четверти определяем знак синуса и косинуса и делим синус на косинус по определению:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Анлогично знак котангенса:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

При делении положительного числа на положительное, получаем положительное число; при делении положительного числа на отрицательное получаем отрицательное число. При делении отрицательного числа на положительное, получаем отрицательное число; при делении отрицательного числа на отрицательное получаем положительное число. Как вы поняли знаки тангенса и котангенса во всех четвертях одинаковы.



Чѐтность и нечѐтность тригонометрических функций

Запомните как факт то, что функции:

синус – нечѐтная $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

косинус – чѐтная $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

тангенс – нечѐтная $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

котангенс – нечѐтная $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$

(для тех, кому этого факта недостаточно, загляните в курс алгебры «чѐтность-нечѐтность тригонометрических функций»)

Периодичность тригонометрических функций

Суть понятия «периодичность функции» заключается в том, что значения функции через определѐнный период равны. Тригонометрические функции: синус, косинус, тангенс и котангенс периодичны. Период синуса и косинуса равен 2π $(360°)$, тангенса и котангенса равен π $(180°)$. Нагляднее всего это можно увидеть по графику. Мы покажем формальное выражение периодичности:

$$\sin(\alpha \pm 360°n) = \sin\alpha$$

$$\text{Например:}\quad \sin 750° = \sin(30° + 360° \cdot 2) = \sin 30° = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\alpha \pm 360°n) = \cos\alpha$$

$$\text{Например:}\quad \cos 480° = \cos(120° + 360°) = \cos 120° =$$

$$= \cos(90° + 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$$

Здесь мы использовали ещѐ и формулу приведения (о них смотрите ниже).

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm 180°n) = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm 180°n) = \operatorname{ctg}\alpha$$

Таким образом, используя свойство периодичности можно значительно упрощать данные выражения, и производить дальнейшие вычисления. Не знание и не понимание, предоставленной в этом пособии теоретического материала (и вообще данной теории из курса алгебры), приведѐт к невозможности решения нескольких заданий на ЕГЭ.

Тригонометрические уравнения попадают далеко не многим, но неизвестно, какие изменения ожидает ЕГЭ в будущем.

Значения тригонометрических функций

Перед вами табличные значения

sin, cos, tg, ctg острых углов

которые необходимо выучить и помнить.

Аргумент	Функция			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
$0°$ (0)	0	1	0	не определен
$30°$ $\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$45°$ $\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60°$ $\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$90°$ $\left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	не определен	0

Знание этих значений необходимо, это «азбука», без которой невозможно будет справиться с множеством заданий. Отлично, если память хорошая, вы легко выучили и запомнили эти значения. Что делать, если этого сделать не получается, в голове путаница, да просто вы именно при сдаче экзамена сбились. Обидно будет потерять бал из-за того, что вы запишите при расчѐтах неверное значение.

Предлагаем алгоритм, благодаря которому вы легко, в течение минуты восстановите в памяти все вышеуказанные значения:

1. Записываем в строчку углы от 0 до 90 градусов.

$$0° \quad 30° \quad 45° \quad 60° \quad 90°$$

2. Записываем слева в столбик синус и косинус аргумента:

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$					
$\cos\alpha$					

3. Напротив синуса пишем числа от нуля до четырѐх (под значениями углов). Напротив косинуса от 4 до 0.

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	1	2	3	4
$\cos\alpha$	4	3	2	1	0

4. Далее извлекаем корень

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	$\sqrt{0}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$
$\cos\alpha$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{0}$

5. Делим на 2

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

6. Вычисляем

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Мы получили значения синуса и косинуса углов от 0 до 90 градусов. Тренируйтесь, проработайте данный алгоритм раз семь, процесс займѐт минут десять.

Далее, зная формулы тангенса и котангенса

$$\mathrm{t}g\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \mathrm{ct}g\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

вы сможете найти значения всех вышеуказанных углов.

Например:

$$\mathrm{t}g\ 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

И так для любого угла.

Формулы приведения

Функция / угол в рад.	π/2 – α	π/2 + α	π – α	π + α	3π/2 – α	3π/2 + α	2π – α	2π + α
sin	cos α	cos α	sin α	– sin α	– cos α	– cos α	– sin α	sin α
cos	sin α	– sin α	– cos α	– cos α	– sin α	sin α	cos α	cos α
tg	ctg α	– ctg α	– tg α	tg α	ctg α	– ctg α	– tg α	tg α
ctg	tg α	– tg α	– ctg α	ctg α	tg α	– tg α	– ctg α	ctg α
Функция / угол в °	90° – α	90° + α	180° – α	180° + α	270° – α	270° + α	360° – α	360° + α

Вам не нужно учить таблицу и запоминать эти формулы. Необходимо уяснить «закон», который здесь работает:

1. Необходимо определить знак функции в соответствующей четверти.
2. При $90°$ и $270°$ функция изменяется на кофункцию (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс)

   При $180°$ и $360°$ функция на кофункцию не изменяется. Всѐ.

Рассмотрим примеры:

Пример 1: $\cos(90° - \alpha)$

Косинус в первой четверти положителен, меняем функцию на кофункцию. Значит $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$

Пример 2: $\cos(270° - \alpha)$

Косинус в третьей четверти отрицателен, меняем функцию на кофункцию. Значит $\cos(270° - \alpha) = -\sin\alpha$

Пример 3: $\sin(270° - \alpha)$

Синус в третьей четверти отрицателен, меняем функцию на кофункцию. Значит $\sin(270° - \alpha) = -\cos\alpha$

Запишем формальный вид (все формулы приведения):

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$
$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$
$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$
$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$
$\sin(270° - \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(270° - \alpha) = -\sin\alpha$
$\sin(270° + \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(270° + \alpha) = \sin\alpha$
$\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$
$\sin(360° + \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(360° + \alpha) = \cos\alpha$

$$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}(90° + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}(90° + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}(180° + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}(180° + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}(270° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}(270° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}(270° + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}(270° + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}(360° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}(360° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{tg}(360° + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}(360° + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$$

Перевод градусной меры угла в радианную и наоборот

В курсе алгебры углы рассматриваются в двух мерах: градусах и радианах. Для тех, кто затрудняется производить вычисления в радианной мере, рекомендуем все вычисления производить в градусной мере (то есть переводить радианы, если они есть в условии, в градусы). Здесь всѐ предельно просто, нужно уяснить раз и на всегда: π радиан это 180 градусов, то есть 3,14 радиан это 180 градусов.

Примеры перевода радианной меры в градусную, гогда в выражении угла имеется число Пи:

$$\frac{5\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{5 \cdot 180}{6} = 150°$$

$$\frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{180}{6} = 30°$$

$$\frac{9\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{9 \cdot 180}{4} = 405°$$

Если же радианы заданы в целых, дробных числах либо целым числом с дробной частью, тогда составляется пропорция.

Примеры перевода градусной меры в радианную.

Переведём 450, 300, 210 и 480 градусов. Составляем пропорции:

$$\begin{matrix} \pi \text{ рад} & - & 180^\circ \\ x \text{ рад} & - & 450^\circ \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi \cdot 450}{180} = \frac{\pi \cdot 5}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

$$\begin{matrix} \pi \text{ рад} & - & 180^\circ \\ x \text{ рад} & - & 300^\circ \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi \cdot 300}{180} = \frac{\pi \cdot 5}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

$$\begin{matrix} \pi \text{ рад} & - & 180^\circ \\ x \text{ рад} & - & 210^\circ \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi \cdot 210}{180} = \frac{\pi \cdot 7}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

$$\begin{matrix} \pi \text{ рад} & - & 180^\circ \\ x \text{ рад} & - & 480^\circ \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi \cdot 480}{180} = \frac{\pi \cdot 8}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

Приведём таблицу соответствия радиан градусам (от 0 до 360 градусов):

0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

Советуем вам распечатать теорию, предоставленную выше или иметь перед собой справочник формул. Просмотра и понимания теории недостаточно, важна практика. Только она способна закрепить знания в вашей способной голове.