2015

2016

Подготовка к ЕГЭ по математике 2016

Теория для решения задач (3 и 6)

Планиметрия.

Наталья и Александр Крутицких
www.matematikalegko.ru

2015

Уважаемые друзья! Статьи с подробными решениями заданий ЕГЭ по математике вы можете найти на сайте

http://matematikalegko.ru

На блоге имеются рубрики:

Векторы

Вероятность

Вписанный угол

Графики и диаграммы

Движение

Координатная плоскость

Площади фигур

Преобразование выражений

Производная и первообразная

Прогрессия

Уравнения

Проценты

Работа

Физические задачи

И другое…

Делитесь с коллегами и друзьями.

Рекомендую!

Материалы для подготовки к ЕГЭ по математике ЕГЭ-Студия.

Материалы для учителей и учеников Портал Инфоурок.

Подготовка к ЕГЭ по математике – блог Инны Фельдман.

Портал Дмитрия Тарасова Видеоуроки в Интернет.

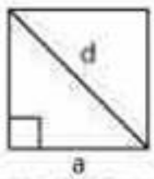
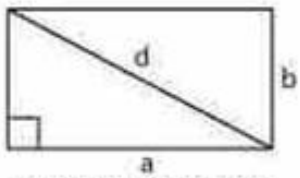
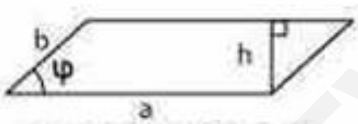
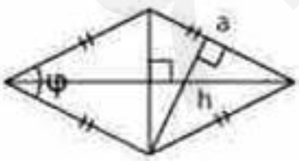
Подготовка к ЕГЭ и ОГЭ (ГИА) КУРС Видеорепетитор.

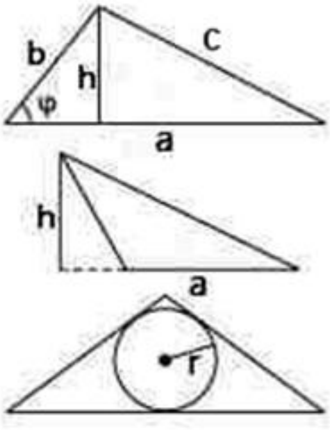
Обучение онлайн – ЕГЭ, ОГЭ, олимпиады Библиотека курсов Фоксворд

Необходимо знать все фигуры планиметрии. А также следующие понятия, формулы и теоремы:

- формулы площадей фигур (квадрат, прямоугольник, треугольник, трапеция, параллелограмм, четырѐхугольник, круг, сектор круга)
- теорему Пифагора
- теорему косинусов
- теорему о сумме углов треугольника
- теорему о внешнем угле треугольника
- понятие синуса, косинуса, тангенса и котангенса в прямоугольном треугольнике
- процесс решения квадратного уравнения (формулы дискриминанта и корней)
- формулы связи радиусов вписанной и описанной окружности с его площадью
- формулу для нахождения длины отрезка на координатной плоскости
- формулу для нахождения координат середины отрезка
- понятие вектора, координаты вектора
- понятие модуля вектора, формулу длины вектора
- скалярное произведение векторов
- уравнение прямой, угловой коэффициент
- формулу уравнения прямой походящей через две данные точки
- формулу Пика (знать необязательно, но желательно)
- виды треугольников
- понятие биссектрисы, медианы, высоты
- основное тригонометрическое тождество
- теорему косинусов
- тригонометрические функции и их значения
- формулы приведения
- признаки подобия треугольников
- свойства вписанных в окружность углов
- свойства четырехугольников вписанных в окружность и описанных около неѐ
- параллельные прямые

Формулы площадей фигур (квадрат, прямоугольник, треугольник, трапеция, параллелограмм, четырѐхугольник, круг, сектор круга)

ПЛОЩАДЬ	
 квадрат	$S = a^2 \quad P = 4a \quad d = a\sqrt{2}$ P – сумма сторон фигуры d – длина диагонали
 прямоугольник	$S = a \cdot b \quad d = \sqrt{a^2 + b^2} \quad P = 2a + 2b$ P – сумма сторон прямоугольника d – длина диагонали
 параллелограмм	$S = a \cdot h$ $S = a \cdot b \cdot \sin\varphi$ $\quad h$ – высота $P = 2a + 2b$ $\quad P$ – сумма сторон
 ромб	$S = a \cdot h \quad P = 4a$ $\quad P$ – периметр $S = a^2 \cdot \sin\varphi$ $\quad h$ – высота $S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$ $\quad d_1$ и d_2 – диагонали



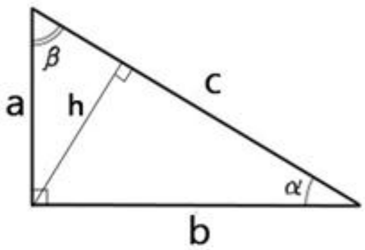
треугольник

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h \qquad S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \varphi$$

$$S = p \cdot r \qquad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} - \text{полупериметр}$$

r – радиус вписаной окружности



$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$$

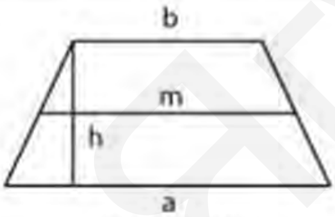
$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$



трапеция

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

a и b – основания

h – высота

$$m = \frac{a+b}{2} \quad - \quad \text{средняя линия}$$

круг

$S = \pi R^2$ $\qquad$ $L = 2\pi R = \pi D$

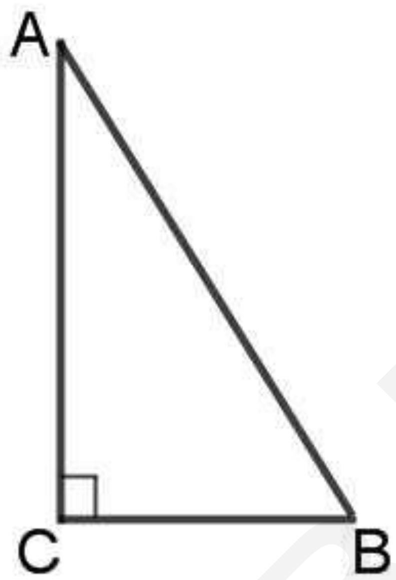
D – диаметр $\qquad$ L – длина окружности

$S_{\text{сектора}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n$ $\qquad$ где n – центральный угол

Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

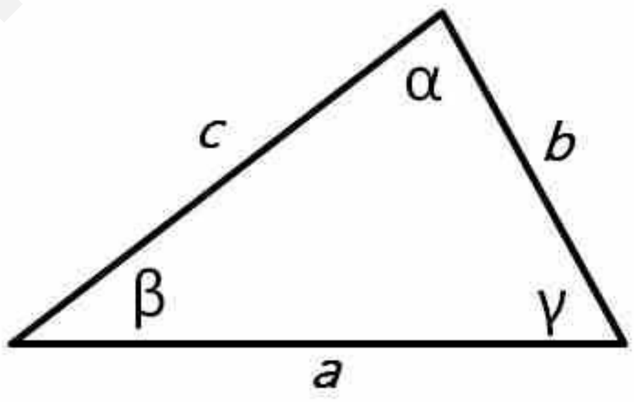
$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$



Зная любые две стороны, мы можем найти третью сторону треугольника.

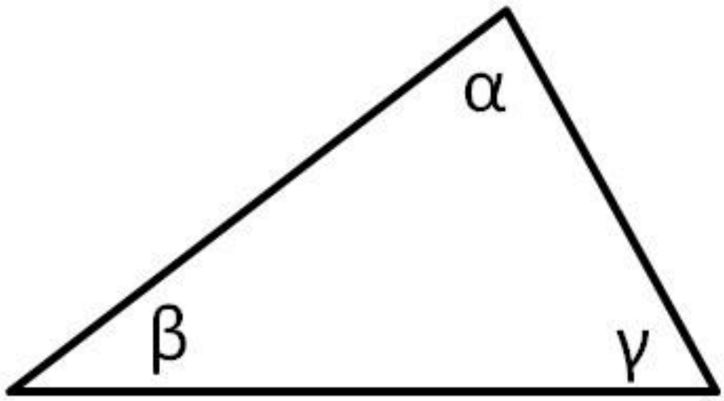
Теорема косинусов

<u>Теорема:</u> ***квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.***



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

Сумма углов треугольника



<u>**Теорема**</u>***: сумма углов треугольника равна 180 градусам.***

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Вывод: если нам будут известны любые два угла в треугольнике, то мы всегда сможем найти третий угол.

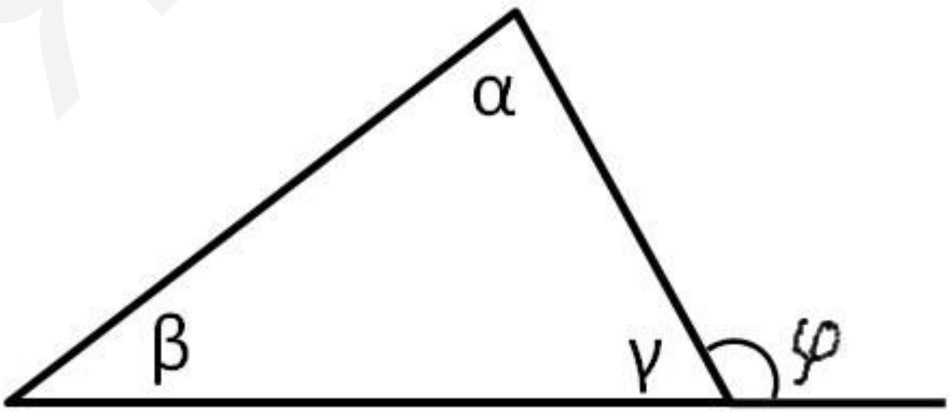
Теорема о внешнем угле треугольника

Теорема: *внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов не смежных с ним.*

Рассмотрим произвольный треугольник с углами

α (альфа), β(бетта), γ (гамма).

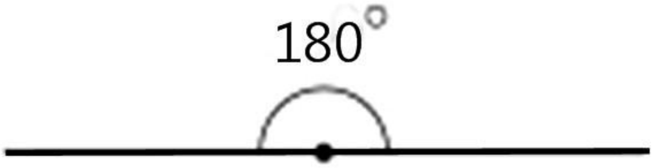
Обозначим внешний угол как φ (фи):



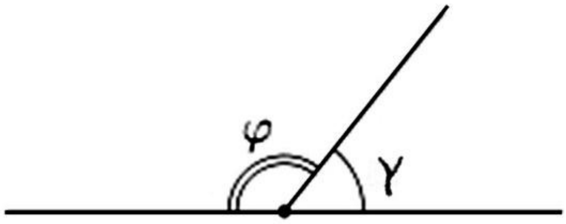
Значит по теореме: $\varphi = \alpha + \beta$

Доказательство:

Напомним что такое развѐрнутый угол, чему он равен и что такое смежные углы:



Развёрнутый угол



Смежные углы

Углы φ и γ — это смежные углы,

их сумма равна $180°$, то есть $\gamma + \varphi = 180°$ (1)

По теореме о сумме углов треугольника: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Из неѐ следует, что $180° - \gamma = \alpha + \beta$.

Из (1)следует, что $180° - \gamma = \varphi$

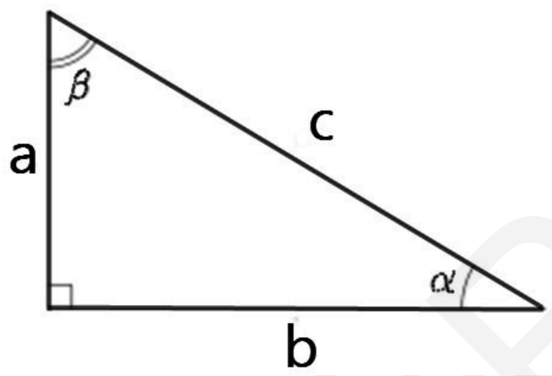
Получили $\varphi = \alpha + \beta$.

Теорема доказана.

Конечно же, данная теорема скорее следствие из теоремы о сумме углов треугольника, чем «самостоятельная» теорема.

Понятие синуса, косинуса, тангенса и котангенса в прямоугольном треугольнике

Гипотенуза прямоугольного треугольника — это сторона, лежащая напротив прямого угла. **Катеты** — стороны, лежащие напротив острых углов.



Катет a, лежащий напротив угла α, называется **противолежащим** (по отношению к углу α). Другой катет b, который лежит на одной из сторон угла α, называется **прилежащим**.

Синус острого угла в прямоугольном треугольнике — это отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Косинус острого угла в прямоугольном треугольнике — отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике — отношение противолежащего катета к прилежащему:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Другое (равносильное) определение – тангенсом острого угла называется отношение синуса угла к его косинусу:

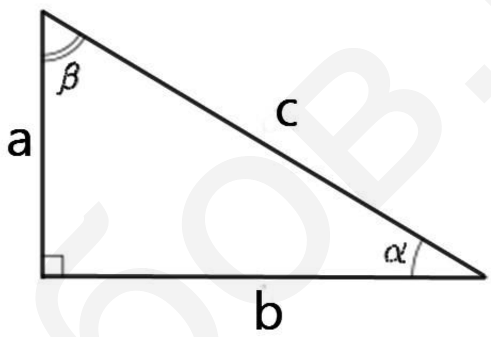
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Котангенс острого угла в прямоугольном треугольнике — это отношение прилежащего катета к противолежащему (или, что то же самое, отношение косинуса к синусу):

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Основные соотношения для синуса, косинуса, тангенса и котангенса приведены ниже, они пригодятся при решении задач:



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} \qquad \alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\cos\alpha = \sin\beta$$

$$\sin\alpha = \cos\beta$$

Таким образом, зная два-три элемента в прямоугольном треугольнике мы всегда сможем найти все остальные его элементы (углы и стороны).

Решение квадратного уравнения

(формулы дискриминанта и корней)

Квадратное уравнение (общий вид):

$$ax^2 + bx + c = 0$$

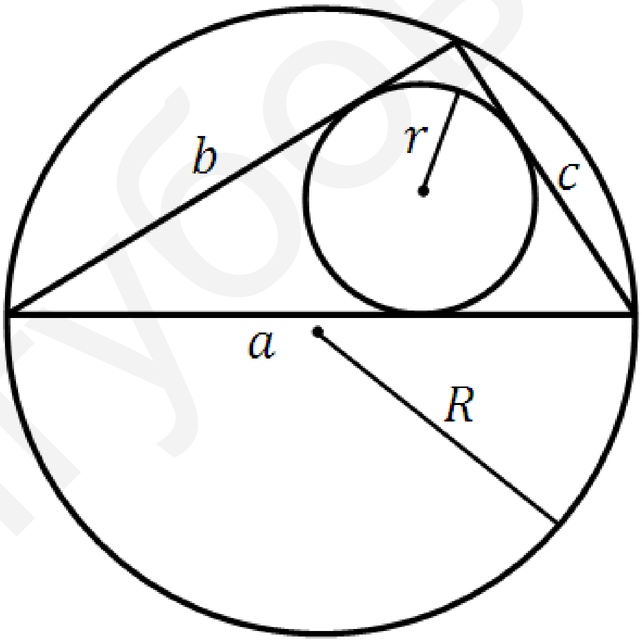
Находим дискриминант: $D = b^2 - 4ac$.

Находим корни уравнения по формулам:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Формулы площади треугольника



$S = r \cdot \dfrac{a + b + c}{2}$ где $r -$ радиус вписанной окружности

$S = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4R}$ где $R -$ радиус описанной окружности

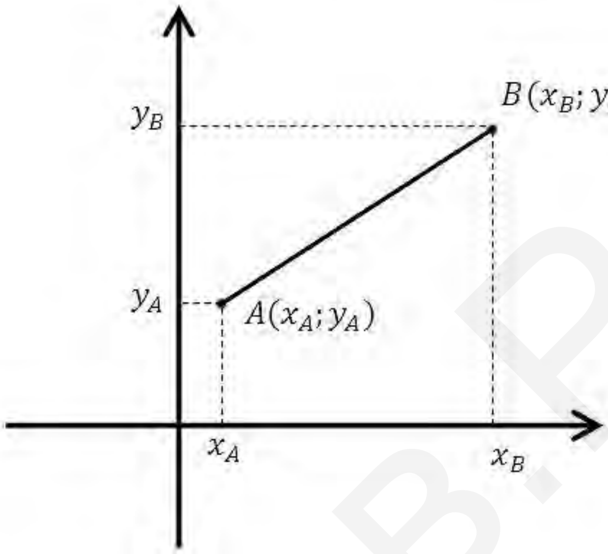
$a, b, c -$ стороны треугольника

Формула длины отрезка на координатной плоскости

Формула для определения длины отрезка, если известны координаты его концов:

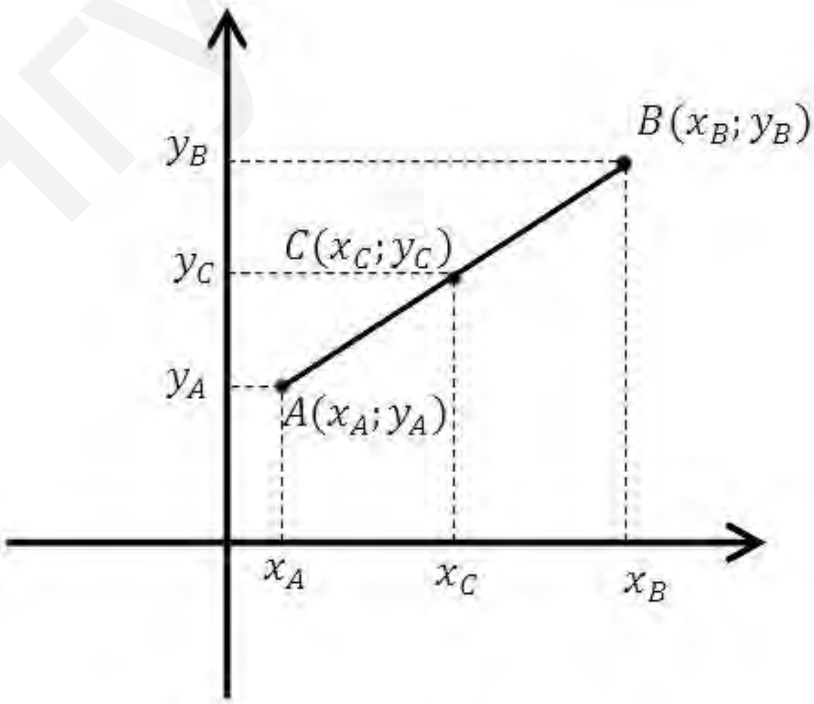
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

где $A(x_A; y_A)$ $B(x_B; y_B)$



Формула координат середины отрезка

Пусть точка C является серединой отрезка AB.



Формула для нахождения координат середины отрезка:

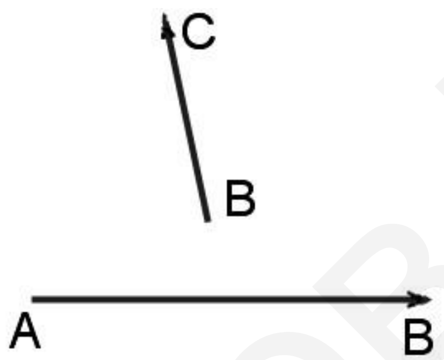
$$C\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}; \quad y_c = \frac{y_A + y_B}{2}$$

где $A(x_A; y_A)$ $B(x_B; y_B)$

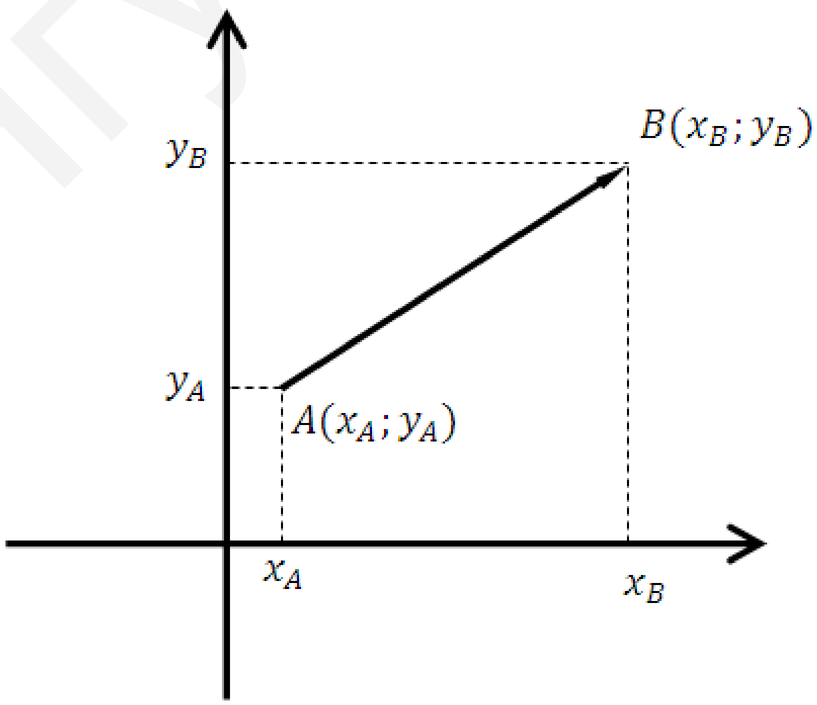
Понятие вектора, координаты вектора.

Вектор это направленный отрезок.



Все векторы, имеющие одинаковое направление и равные по длине являются равными.

Координаты вектора.



Чтобы найти координаты вектора, нужно из координат конца вычесть соответствующие координаты начала:

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A), \text{где } A(x_A; y_A) \text{ и } B(x_B; y_B)$$

Понятие модуля вектора, длина вектора, скалярное произведение векторов

Модулем вектора называется его длина, определяется по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad \text{где} \quad \vec{a}(a_1; a_2)$$

Формула для определения длины вектора, если известны координаты его начала и конца:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Формулы скалярного произведения векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot cos\, \widehat{\vec{a}\vec{b}}$$

То есть скалярное произведение векторов равно произведению его длин на косинус угла между ними.

Если известны координаты векторов, можем найти угол между векторами:

$$cos\, \widehat{\vec{a}\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$$

$$cos\, \widehat{\vec{a}\vec{b}} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

Уравнение прямой, угловой коэффициент

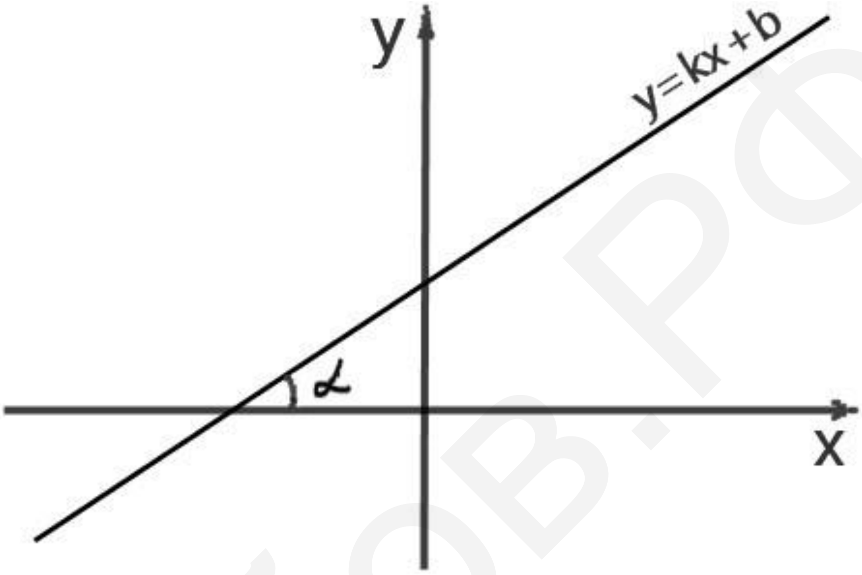
Уравнение прямой на координатной плоскости имеет вид:

$y = kx + b,$ где k это и есть угловой коэффициент прямой

$k = tg\ \alpha,$ где α это угол между прямой и осью ox

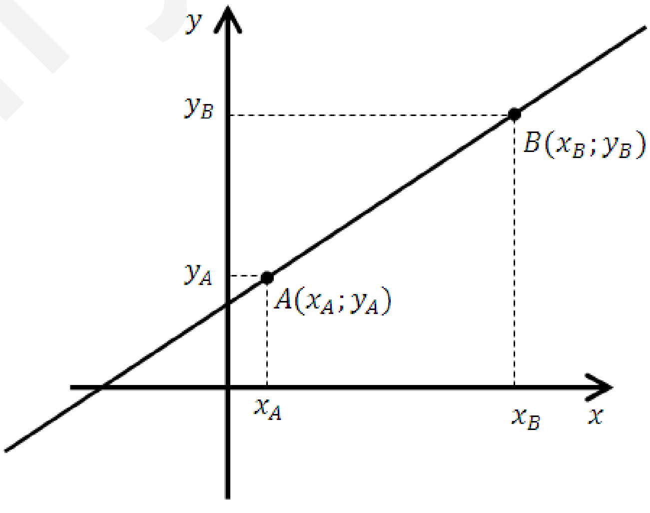
он лежит в пределах от 0 до 180 градусов

Покажем этот угол:



Уравнения прямой походящей через две данные точки

Формула уравнения прямой походящей через две данные точки имеет вид:



$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$ где $(x_A; y_A)$ и $(x_B; y_B)$ – координаты точек

ФОРМУЛА ПИКА (ПРИМЕР)

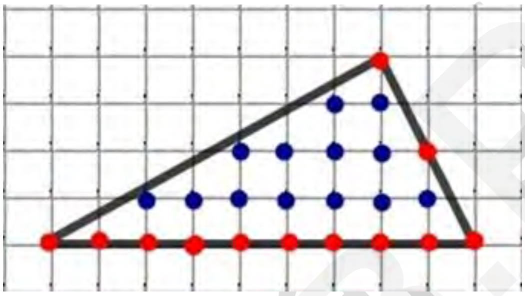
Площадь искомой фигуры (в данном случае рассмотрим треугольник) можно найти по формуле:

$$S = \frac{M}{2} + N - 1$$

где $M -$ количество узлов на границе треугольника

(на сторонах и вершинах)

$N -$ количество узлов внутри треугольника



$M = 12$(красный цвет)

$N = 13$(синий цвет)

1 клетка = 1 см

$$S = \frac{12}{2} + 13 - 1 = 18 \text{ см}^2$$

Если один из углов треугольника прямой (равен 90°), то треугольник называется **прямоугольным.** Две стороны, образующие прямой угол, называются катетами, а сторона, противолежащая прямому углу, называется гипотенузой (рисунок 1).

Если все углы треугольника острые, то треугольник называется **остроугольным** (рисунок 2).

Если один из углов треугольника тупой (больше 90°), то треугольник называется **тупоугольным** (рисунок 3).

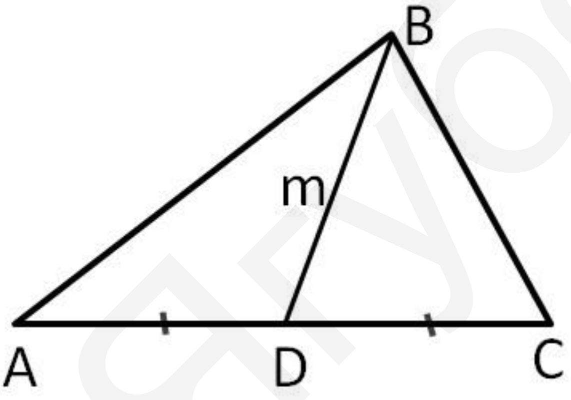
Равносторонним называется треугольник, у которого все три стороны равны. В равностороннем треугольнике все углы равны 60°, а центры вписанной и описанной окружностей совпадают (рисунок 4).

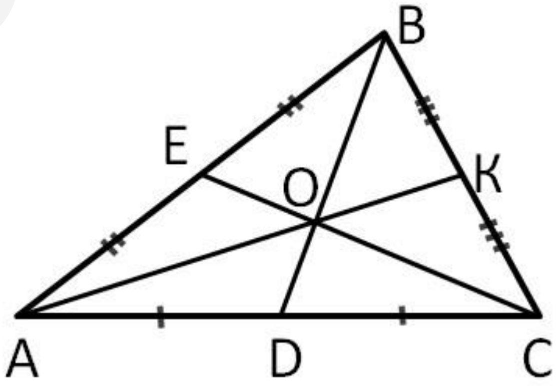
Равнобедренным называется треугольник, у которого две стороны равны. Эти стороны называются боковыми, третья сторона называется основанием. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны (рисунок 5).

Разносторонним называется треугольник, у которого длины трѐх сторон попарно различны (рисунок 6).

Биссектриса, медиана, высота.

Медианой треугольника, проведѐнной из данной вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой противолежащей стороны (основанием медианы). Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка пересечения делит каждую медиану в отношении 1:2 считая от основания медианы (этот факт следует помнить).



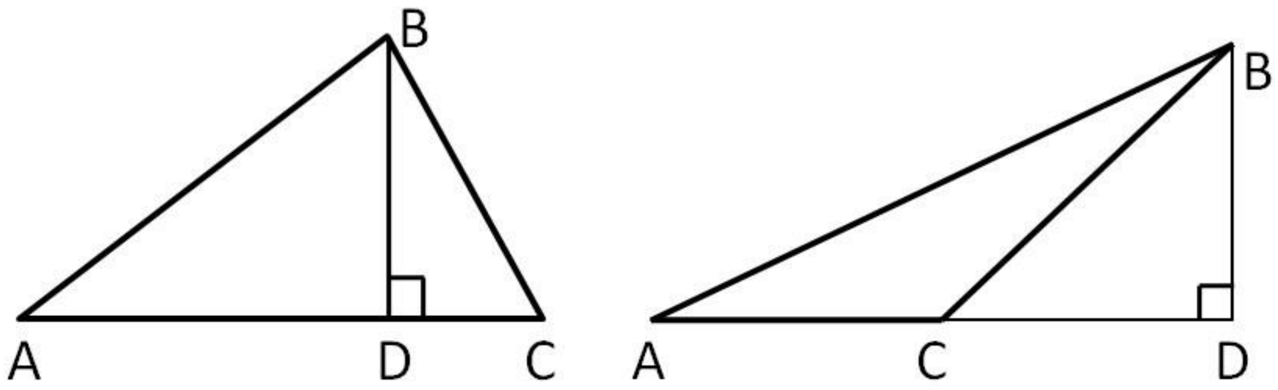


m *– медиана* $AD = DC$ $\qquad$ AK, CE, BD *– медианы*

$$AO = 2 \cdot OK \quad CO = 2 \cdot OE \quad BO = 2 \cdot OD$$

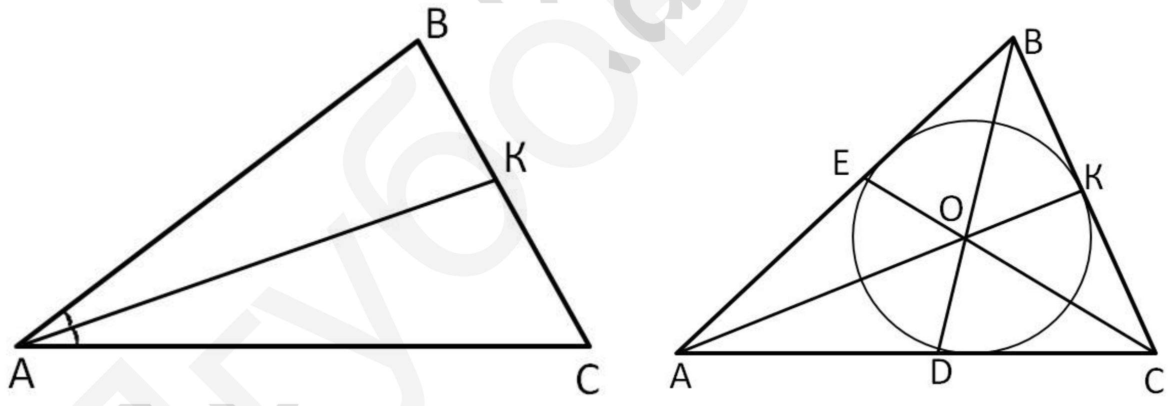
$$AE = EB \qquad BK = KC \qquad AD = DC$$

Высотой треугольника, проведѐнной из данной вершины, называется перпендикуляр, опущенный из этой вершины на противоположную сторону или еѐ продолжение.



$BD -$ *высота опущенная на сторону* AC

Биссектрисой треугольника, проведѐнной из данной вершины, называют отрезок, соединяющий эту вершину с точкой на противоположной стороне и делящий угол при данной вершине пополам. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, и эта точка совпадает с центром вписанной окружности.



$AK, CE, BD -$ *биссектрисы*

$$\angle BAK = \angle KAC \quad \angle ADB = \angle CBD \quad \angle ACE = \angle BCE$$

$O -$ *цетр вписанной окружности*

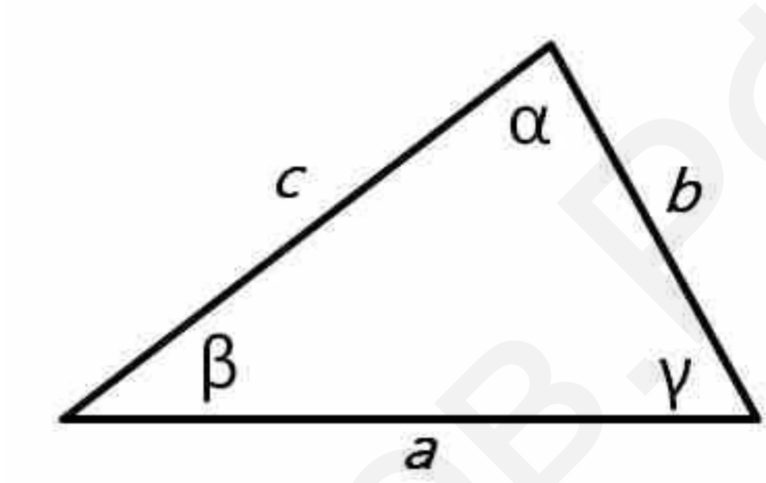
В равнобедренном треугольнике биссектриса, медиана и высота, проведѐнные к основанию, совпадают. Верно и обратное: если биссектриса, медиана и высота, проведѐнные из одной вершины, совпадают, то треугольник равнобедренный.

Основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Теорема косинусов

<u>**Теорема:**</u> ***квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.***



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

Значения тригонометрических функций

Аргумент	Функция			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
$0°$ (0)	0	1	0	не определен
$30°$ $\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$45°$ $\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60°$ $\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$90°$ $\left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	не определен	0

Знание этих значений необходимо, это «азбука», без которой невозможно будет справиться с множеством заданий. Отлично, если память хорошая, вы легко выучили и запомнили эти значения. Что делать, если этого сделать не получается, в голове путаница, да просто вы именно при сдаче экзамена сбились. Обидно будет потерять бал из-за того, что вы запишите при расчётах неверное значение.

Посмотрите алгоритм, благодаря которому вы легко, в течение минуты восстановите в памяти все вышеуказанные значения:

1. Записываем в строчку углы от 0 до 90 градусов.

$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$

2. Записываем слева в столбик синус и косинус аргумента:

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$					
$\cos\alpha$					

3. Напротив синуса пишем числа от нуля до четырёх (под значениями углов). Напротив косинуса от 4 до 0.

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	1	2	3	4
$\cos\alpha$	4	3	2	1	0

4. Далее извлекаем корень:

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	$\sqrt{0}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$
$\cos\alpha$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{0}$

5. Делим на 2

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

6. Вычисляем:

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Мы получили значения синуса и косинуса углов от 0 до 90 градусов. Тренируйтесь, проработайте данный алгоритм раз семь, процесс займѐт немного времени. В будущем это вам пригодится!

Далее, зная формулы тангенса и котангенса:

$$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad ctg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

вы сможете найти значения всех вышеуказанных углов.

Например:

$$tg\,30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Формулы приведения

Выражение Формулы «Приведения» означает приводить к простейшему виду. Ниже представлены все формулы и правила приведения. Но в задачах по планиметрии вам понадобятся только те формулы, в которых фигурируют углы 90 и 180 градусов. Тем неменее, важен сам принцип, потому здесь представлена полная информация по формулам приведения.

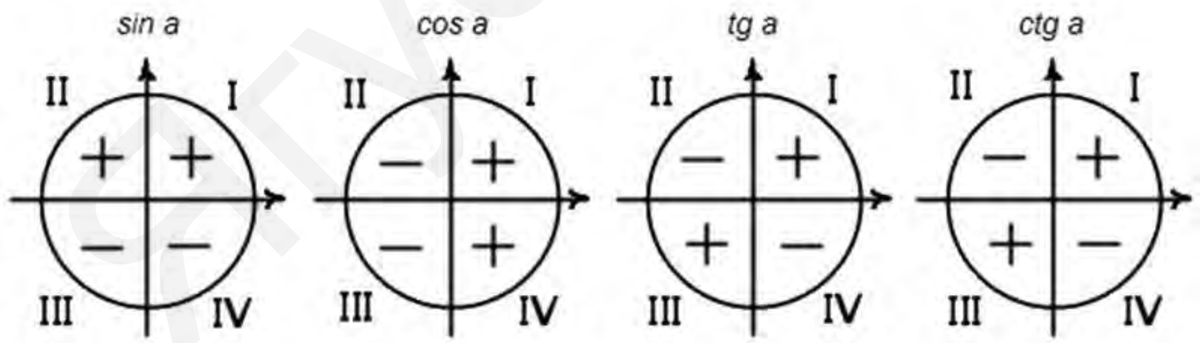
Табличная форма выражающая формулы приведения:

Функция / угол в рад.	$\pi/2-\alpha$	$\pi/2+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$3\pi/2-\alpha$	$3\pi/2+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
sin	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
ctg	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
Функция / угол в °	$90°-\alpha$	$90°+\alpha$	$180°-\alpha$	$180°+\alpha$	$270°-\alpha$	$270°+\alpha$	$360°-\alpha$	$360°+\alpha$

Вам не нужно учить таблицу и запоминать эти формулы. Необходимо уяснить «закон», который здесь работает:

1. Необходимо определить знак функции в соответствующей четверти.

Напомним знаки тригонометрических функций:



2. При $90°$ и $270°$ функция изменяется на кофункцию (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс)

   При $180°$ и $360°$ функция на кофункцию не изменяется.

Теперь запишем формальный вид (все формулы приведения):

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha \qquad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha \qquad \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha \qquad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha \qquad \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos\alpha \qquad \cos(270^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\sin(270^\circ + \alpha) = -\cos\alpha \qquad \cos(270^\circ + \alpha) = \sin\alpha$$

$$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\alpha \qquad \cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\sin(360^\circ + \alpha) = \sin\alpha \qquad \cos(360^\circ + \alpha) = \cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}(90^\circ - \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha \qquad \mathrm{ctg}(90^\circ - \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$$

$$\mathrm{tg}(90^\circ + \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha \qquad \mathrm{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$\mathrm{tg}(180^\circ - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha \qquad \mathrm{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$$

$$\mathrm{tg}(180^\circ + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha \qquad \mathrm{ctg}(180^\circ + \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha$$

$$\mathrm{tg}(270^\circ - \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha \qquad \mathrm{ctg}(270^\circ - \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$$

$$\mathrm{tg}(270^\circ + \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha \qquad \mathrm{ctg}(270^\circ + \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$\mathrm{tg}(360^\circ - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha \qquad \mathrm{ctg}(360^\circ - \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$$

$$\mathrm{tg}(360^\circ + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha \qquad \mathrm{ctg}(360^\circ + \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha$$

В рамку заключены те формулы, которые используются в задачах.

Приведѐм таблицу соответствия радиан градусам (от 0 до 180 градусов):

0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Признаки равенства и подобия треугольников

Признаки равенства треугольников.

Равными называют треугольники, у которых соответствующие стороны равны.

Первый признак равенства треугольников:

Если две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника, то такие треугольники равны.

Второй признак равенства треугольников:

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Третий признак равенства треугольников:

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Признаки подобия треугольников.

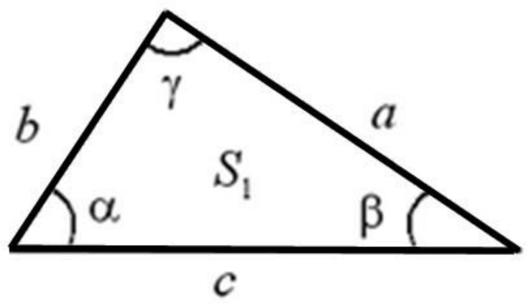
Подобными называются треугольники, у которых углы равны, а сходственные стороны пропорциональны:

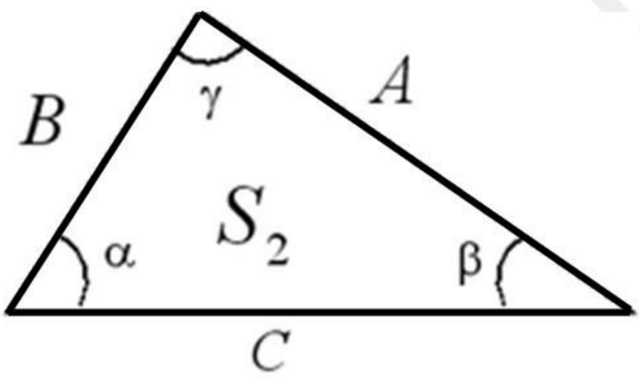
$$\alpha = \beta = \gamma$$

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = k$$

где k – коэффициент подобия

То есть $A = ka \quad B = kb \quad C = kc$





I признак подобия треугольников:

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то эти треугольники подобны.

II признак подобия треугольников:

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

III признак подобия треугольников:

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Следствие: площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия:

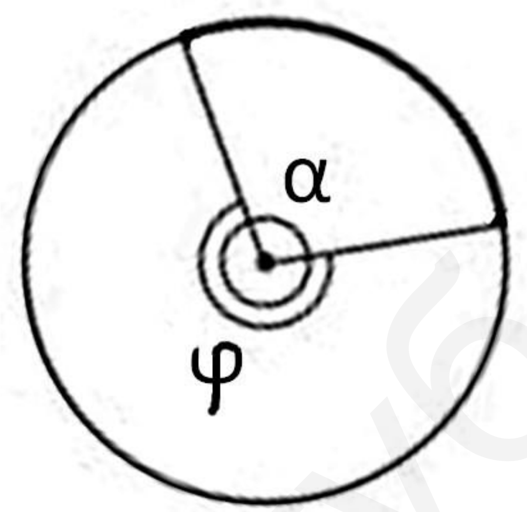
$$\frac{S_2}{S_1} = k^2$$

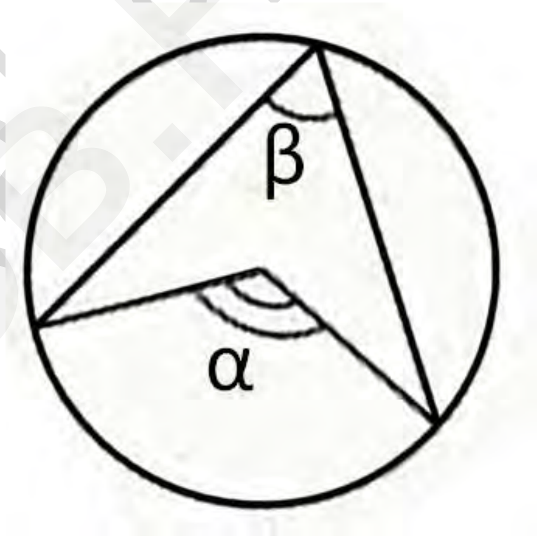
Свойства вписанных в окружность углов

Вспомним, что такое центральный и вписанный угол; хорда, дуга, на которые опираются эти углы.

Центральным углом в окружности называется плоский угол с вершиной в ее центре. Часть окружности, расположенная внутри плоского угла, называется дугой окружности. Градусной мерой дуги окружности называется градусная мера соответствующего центрального угла.

Угол, называется **вписанным** в окружность, если вершина угла лежит на окружности, а стороны угла пересекают эту окружность.





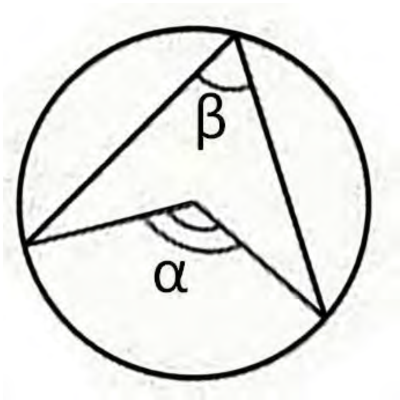
Углы α и φ - центральные, только угол φ опирается на дугу, которая больше 180 градусов. Угол β является вписанным углом.

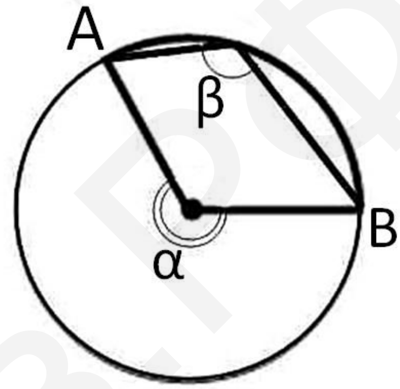
Отрезок соединяющий две точки окружности называется **хордой**. Самая большая хорда проходит через центр окружности и называется **диаметр.**

Для решения задач на вписанные в окружность углы,

вам необходимо знать следующие свойства:

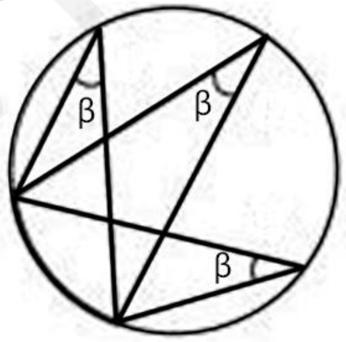
1. Вписанный угол равен половине центрального, опирающегося на ту же дугу:

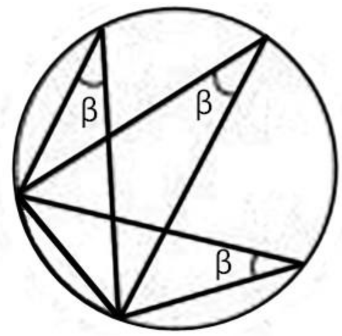




$$\beta = \frac{\alpha}{2}$$

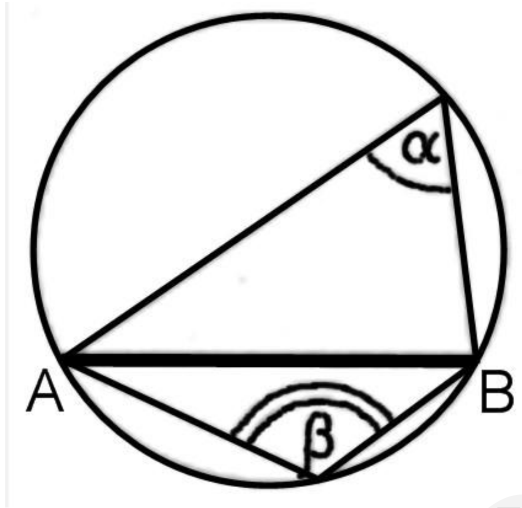
2. Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.
3. Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же хорду, вершины которых лежат по одну сторону от этой хорды, равны.





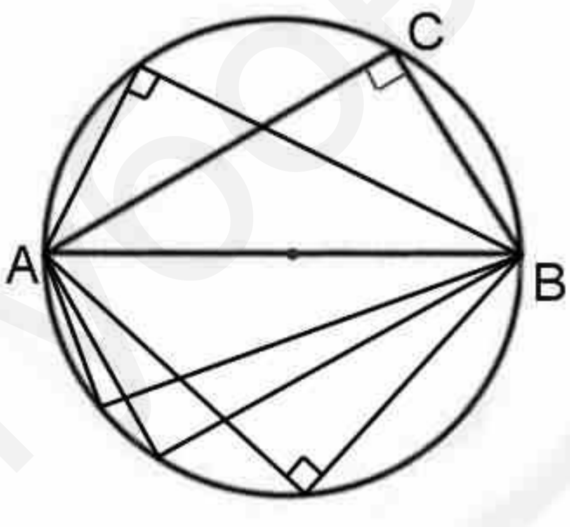
4. Любая пара углов, опирающихся на одну и ту же хорду, вершины которых лежат по разные стороны хорды, составляют в сумме 180°:

$$\alpha + \beta = 180°$$



Следствие: противолежащие углы четырѐхугольника вписанного в окружность в сумме составляют 180 градусов, $(\angle A + \angle B = 180°)$

5. Все вписанные углы, опирающиеся на диаметр, прямые.



Вообще, это свойство является следствием из свойства (1), это его частный случай. Посмотрите: центральный угол равен 180 градусам (он построен на хорде, являющейся диаметром), значит по первому свойству вписанный угол равен его половине. Знание данного свойства помогает в решении многих задач и помогает избежать лишних расчѐтов. Запомните его (как и все остальные).

Следствие 1: ***если в окружность вписан треугольник и одна его сторона совпадает с диаметром этой окружности, то треугольник является прямоугольным (вершина прямого угла лежит на окружности).***

Следствие 2: ***центр описанной около прямоугольного треугольника окружности совпадает с серединой его гипотенузы.***

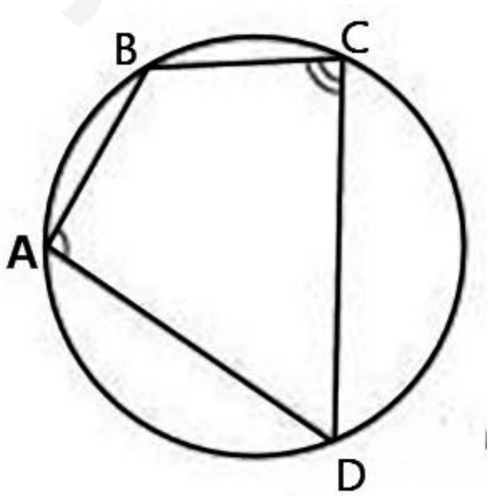
Свойства четырехугольников вписанных в окружность и описанных около неѐ

Вписанный четырехугольник — четырехугольник, все вершины которого лежат на одной окружности.

Очевидно, эта окружность будет называться **описанной** вокруг четырехугольника.

Описанный четырехугольник — такой, что все его стороны касаются одной окружности. В этом случае окружность **вписана** в четырехугольник.

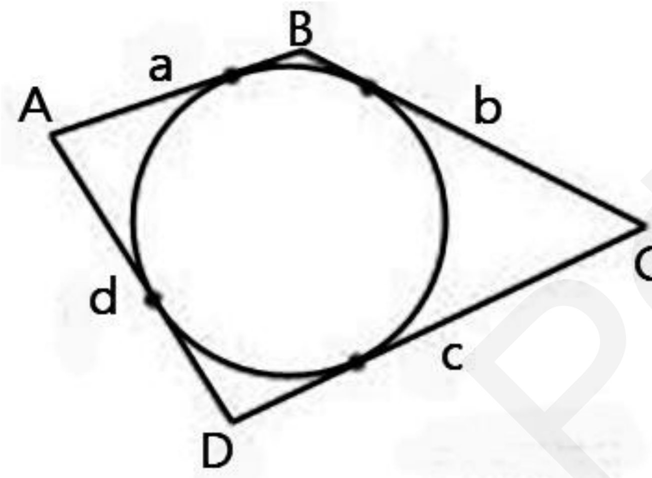
1. Четырехугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов равны 180 градусам.



$$\angle A + \angle C = 180^\circ \qquad \angle B + \angle D = 180^\circ$$

То есть если мы имеем вписанный в окружность четырѐхугольник, то сумма его противоположных углов равна 180 градусам.

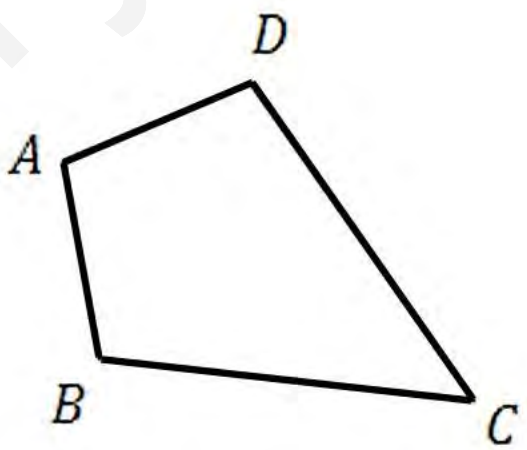
2. Четырѐхугольник можно описать около окружности тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны.



$$\boldsymbol{a + c = b + d}$$

То есть, если мы имеем описанный около окружности четырѐхугольник, то суммы его противоположных сторон равны.

Ещѐ одно свойство четырѐхугольника:

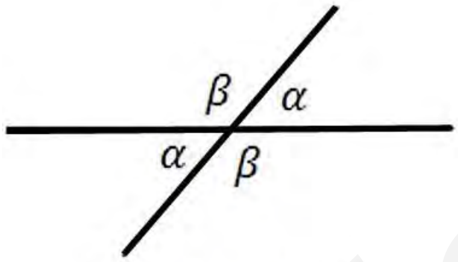


$$A + B + C + D = 360°$$

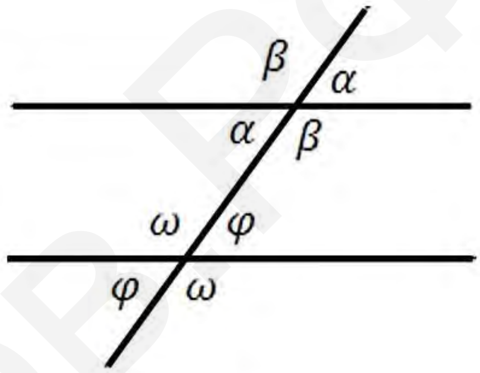
Параллельные прямые

Во многих задачах планиметрии необходимо знание элементарных фактов. Необходимо, например, помнить информацию о свойсвах углов, образованных параллельными прямыми и секущей. Это пригодится при решении задач с параллелограммами, трапециями и других.

1. Соответственные и накрест лежащие углы при параллельных прямых равны.
2. Сумма односторонних углов при параллельных прямых равна 180°.



$\alpha + \beta = 180°$



$\alpha = \varphi \quad \beta = \omega$

Дорогие друзья! Далеко не все при решении прямоугольных треугольников могут быстро с ориентироваться и сразу же найти верный путь к решению. Поэтому для вас некоторые рекомендации:

1. Если в условии даны две стороны прямоугольного треугольника, сразу ищете третью по теореме Пифагора. Зная три стороны, вы всегда сможете найти тригонометрические функции как внутренних, так и внешних углов.
2. Если дано значение одой из тригонометрических функций и сторона треугольника, то используя основное тригонометрическое тождество, понятие синуса, косинуса, тангенса или котангенса ищите значение остальных тригонометрических функций. Далее вы без труда сможете найти все стороны треугольника.