2015
2016

Подготовка к ЕГЭ по математике 2016

Теория для решения задач 5

Наталья и Александр Крутицких
www.matematikalegko.ru
2015 2016

Уважаемые друзья! Статьи с подробными решениями заданий ЕГЭ по математике вы можете найти на сайте

http://matematikalegko.ru

На блоге имеются рубрики:

Векторы

Вероятность

Вписанный угол

Графики и диаграммы

Движение

Координатная плоскость

Площади фигур

Преобразование выражений

Производная и первообразная

Прогрессия

Уравнения

Проценты

Работа

Физические задачи

И другое…

Делитесь с коллегами и друзьями.

Рекомендую!

Материалы для подготовки к ЕГЭ по математике ЕГЭ-Студия.

Материалы для учителей и учеников Портал Инфоурок.

Подготовка к ЕГЭ по математике – блог Инны Фельдман.

Портал Дмитрия Тарасова Видеоуроки в Интернет.

Подготовка к ЕГЭ и ОГЭ (ГИА) КУРС Видеорепетитор.

Обучение онлайн – ЕГЭ, ОГЭ, олимпиады Библиотека курсов Фоксворд

Проверка навыков умения решать уравнения. Чаще встречаются логарифмические, квадратные (рациональные и иррациональные, которые сводятся к квадратным) и показательные уравнения, реже тригонометрические. Будьте внимательны, записывая ответ. В любом случае, ОБЯЗАТЕЛЬНО делайте проверку, много времени это не займѐт, а вас избавит от ошибок. Помните, что ответ это целое число или конечная десятичная дробь.

Обратите внимание:

- решая уравнения, в которых получается больше одного корня, выбирайте правильный ответ, в вопросе всегда указывается, какое значение требуется найти.
- вы можете знать, как решать, но не дорешать, иногда из-за спешки выпускники записывают какой-либо промежуточный результат. Например, в уравнении $\log_4(3x+4)=2$ записывают в ответе 16.

Итак, задачи включают в себя:

Линейные и квадратные уравнения

Рациональные уравнения

Иррациональные уравнения

Показательные уравнения

Логарифмические уравнения

Тригонометрические уравнения

Знание нижеуказанных формул и свойств необходимо для решения заданий данной группы:

Формулы сокращѐнного умножения:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Степени и корни:

$$a^0 = 1$$

Нулевая степень любого числа равна единице.

* * *

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a \neq 0 \quad n - \text{натуральное число}$$

Суть данного свойства заключается в том, что при переносе числителя в знаменатель и наоборот, знак показателя степени меняется на противоположный. Например:

$$\frac{x^7}{y^{-2}} = \frac{y^2}{x^{-7}}$$

Следствие из данного свойства $a^{-1} = \frac{1}{a}$

* * *

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

* * *

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание остаѐтся прежним, а показатели степеней складываются.

* * *

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad m > n, \qquad a \neq 0$$

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание остаѐтся прежним, а показатели степеней вычитаются.

***

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

При возведении степени в степень основание остаѐтся прежним, а показатели перемножаются.

***

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

При возведении в степень произведения в эту степень возводится каждый множитель.

***

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

При возведении в степень дроби, в эту степень возводится и числитель и знаменатель.

***

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{ab}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}} \cdot \sqrt[n]{\boldsymbol{b}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}} = \frac{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}}{\sqrt[n]{\boldsymbol{b}}} \quad (\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0})$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{\boldsymbol{a}}} = \sqrt[nm]{\boldsymbol{a}} \quad (\boldsymbol{m} > \boldsymbol{0})$$

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}} = \sqrt[nk]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{mk}}} \quad (\boldsymbol{k} > \boldsymbol{0})$$

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}} = \left(\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}\right)^{\boldsymbol{m}} \quad \textbf{если } \boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{0}, \textbf{ то } \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$$

Логарифм

Логарифмом числа a по основанию b называется показатель степени, в который нужно возвести b, чтобы получить a.

$$\log_b a = x \qquad b^x = a \quad (a > 0,\ b > 0,\ b \neq 1)$$

Например:

$$\log_3 9 = 2 \text{ , так как } 3^2 = 9$$

Основное логарифмическое тождество:

$$b^{\log_b a} = a$$

Свойства логарифмов:

$$\log_a a^x = x$$

$$\log_x(ab) = \log_x a + \log_x b$$

$$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$$

$$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Частные случаи логарифмов:

$$\ln x = \log_{\mathrm{e}} x - \textit{натуральный}$$

$$\lg x = \log_{10} x - \textit{десятичный}$$

***

Тригонометрические уравнения.

Решение простейших тригонометрических уравнений (в итоге к ним сводятся все тригонометрические уравнения):

$$\sin x = a$$

$$\text{имеет решение при} \quad -1 \le a \le 1$$

Решением являются два корня $(Z -$ целое число):

$$x_1 = \arcsin\ a + 2\pi n, \quad n \in Z$$

$$x_2 = \pi - \arcsin\ a + 2\pi n, \quad n \in Z$$

Обе формулы можем объединить в одну:

$$x = (-1)^k \arcsin\ a + \pi k, \quad k \in Z$$

***

$$\cos x = a$$

$$\text{имеет решение при} \quad -1 \le a \le 1$$

Решением являются два корня:

$$x_1 = \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$$

$$x_2 = -\arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$$

Обе формулы можем объединить в одну:

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$$

Если получите $\cos x = 7$ или $\sin x = -\frac{10}{7}$

Знайте, решения у данных уравнений нет, так как значения лежат за пределами интервала $[-1; 1]$.

***

$$\operatorname{tg} x = a$$

имеет решение при любом a

Решением является корень:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in Z$$

***

$$\operatorname{ctg} x = a$$

имеет решение при любом a

Решением является корень:

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in Z$$

Итак, формулы для решения простейших тригонометрических уравнений:

Уравнение	Решения
$\sin x = a,\ \lvert a\rvert \leqslant 1$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z$
$\cos x = a,\ \lvert a\rvert \leqslant 1$	$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z$

Значения $\sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{ctg}$ острых углов от $0°$ до $90°$,

которые необходимо помнить:

Аргумент	Функция			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
$0°$ (0)	0	1	0	не определен
$30°$ $\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$45°$ $\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60°$ $\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$90°$ $\left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	не определен	0

Знание этих значений необходимо, это «азбука», без которой невозможно будет справиться с множеством заданий. Отлично, если память хорошая, вы легко выучили и запомнили эти значения. Что делать, если этого сделать не получается, в голове путаница, да просто вы именно при сдаче экзамена сбились. Обидно будет потерять бал из-за того, что вы запишите при расчѐтах неверное значение.

Используйте алгоритм, благодаря которому вы легко, в течение минуты восстановите в памяти все вышеуказанные значения:

1. Записываем в строчку углы от 0 до 90 градусов.

$$0° \qquad 30° \qquad 45° \qquad 60° \qquad 90°$$

2. Записываем слева в столбик синус и косинус аргумента:

$$0° \qquad 30° \qquad 45° \qquad 60° \qquad 90°$$

$\sin\alpha$

$\cos\alpha$

3. Напротив синуса пишем числа от нуля до четырѐх (под значениями углов). Напротив косинуса от 4 до 0.

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	1	2	3	4
$\cos\alpha$	4	3	2	1	0

4. Далее извлекаем корень

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	$\sqrt{0}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$
$\cos\alpha$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{0}$

5. Делим на 2

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

6. Считаем

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Мы получили значения синуса и косинуса углов от 0 до 90 градусов. Далее, зная формулы тангенса и котангенса:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

вы сможете найти значения для указанных углов.

Например:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

И так для любого угла.