

А. О. Андреева

$$y = \frac{e^x}{e^x + 2}$$

$$y = \frac{(e^x + 2)^{-1}}{e^x + 2}$$

Доказательство тождества:

$$\frac{\cos(3\pi - 2\alpha)}{2\sin^2(\frac{5}{4}\pi + \alpha)} = \operatorname{tg}(\alpha - \frac{5}{4}\pi)$$

Доказательство тождества: Упростим левую часть:

$$\frac{\cos(3\pi - 2\alpha)}{2\sin^2(\frac{5}{4}\pi + \alpha)} = \frac{\cos(\pi - 2\alpha)}{2\sin^2(\pi + (\frac{5}{4}\pi + \alpha))} = \frac{-\cos 2\alpha}{2\sin^2(\frac{9}{4}\pi + \alpha)} =$$

$$\frac{(-\cos 2\alpha)}{2(-\cos 2\alpha)} = \frac{-\cos 2\alpha}{-2\cos 2\alpha} = \frac{-\cos 2\alpha}{-2\cos 2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{2\cos 2\alpha} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}{2(\cos \alpha - \sin \alpha)^2} =$$

$$= \frac{-\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}{2(\cos \alpha - \sin \alpha)^2}$$

# ЕГЭ по математике

## Практическая подготовка

- 560 заданий для подготовки к ЕГЭ
- Все темы от В1 до С3 с последними изменениями
- Теоретическая справка: формулы, определения, теоремы, преобразования, табличные данные
- Ответы и решения

Доказательство тождества: Упростим правую часть:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \frac{5}{4}\pi) = -\operatorname{tg}(\pi + \frac{\pi}{4} - \alpha) = -\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \alpha) =$$
$$= -\frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = -\frac{(\cos \alpha - \sin \alpha) \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)} = -\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$$

Введем в правую часть тождества.

$$\frac{dy}{dx} = y \left[ \frac{-\cos x}{\sin x} - \sin x \ln(1 + \tan x) \right]$$
$$\ln(\tan x) = \ln\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \ln \sin x - \ln \cos x$$

А. О. Андреева

# **ЕГЭ** по математике

## Практическая подготовка

Санкт-Петербург

«БХВ-Петербург»

2014

УДК 373:51  
ББК 22.1я72  
А65

**Андреева А. О.**

**А65** ЕГЭ по математике. Практическая подготовка. — СПб.: БХВ-Петербург, 2014. — 256 с.: ил.

ISBN 978-5-9775-0813-1

Пособие предназначено для целевой подготовки к сдаче экзамена по математике в формате ЕГЭ.

Первая часть содержит краткую теорию в виде формул, таблиц, теорем по необходимым на экзамене темам: формулы сокращенного умножения, преобразование степеней и корней, квадратное уравнение, парабола, логарифмы, табличные значения тригонометрических функций, тригонометрические формулы, обратные тригонометрические функции, площади фигур, объемы и площади поверхностей фигур, необходимые теоремы геометрии, правила дифференцирования производных, производные элементарных функций, уравнение касательной функции. Во второй части даны блоки заданий от В1 до С3, содержащие разобранный типовой пример и от 5-и до 15-и заданий для самостоятельного решения. Приводятся ответы.

*Для образовательных учреждений*

УДК 373:51  
ББК 22.1я72

### **Группа подготовки издания:**

Главный редактор	<i>Екатерина Кондукова</i>
Зам. главного редактора	<i>Людмила Еремеевская</i>
Зав. редакцией	<i>Григорий Добин</i>
Компьютерная верстка	<i>Татьяны Олоновой</i>
Корректор	<i>Наталья Периакова</i>
Дизайн и оформление обложки	<i>Марины Дамбиевой</i>

Подписано в печать 29.11.13.

Формат 60×90<sup>1/16</sup>. Печать офсетная. Усл. печ. л. 16.

Доп. тираж 1500 экз. Заказ № 1264

"БХВ-Петербург", 191036, Санкт-Петербург, Гончарная ул., 20.

Первая Академическая типография "Наука"  
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12/28

ISBN 978-5-9775-0813-1

© Андреева А. О., 2012, 2014  
© Оформление, издательство "БХВ-Петербург", 2012, 2014

# Содержание

Благодарности.....	5
<b>1. Теория.....</b>	<b>7</b>
Формулы сокращенного умножения.....	9
Преобразование степеней и корней.....	10
Квадратное уравнение. Парабола.....	11
Логарифмы.....	13
Табличные значения тригонометрических функций.....	14
Тригонометрические формулы.....	15
Обратные тригонометрические функции.....	18
Площади фигур.....	20
Объемы и площади поверхностей фигур.....	25
Необходимые теоремы геометрии.....	29
Правила дифференцирования производных.....	36
Производные элементарных функций. Уравнение касательной функции.....	37
<b>2. Практика.....</b>	<b>39</b>
B1.....	41
B2.....	44
B3.....	56
B4.....	63
B5.....	75
B6.....	88
B7.....	93
B8.....	101
B9.....	123
B10.....	131
B11.....	136
B12.....	143
B13.....	154

В14.....	161
С1.....	164
С2.....	186
С3.....	213
<b>Ответы</b> .....	<b>230</b>
<b>Список используемой литературы</b> .....	<b>245</b>

Ягубов.РФ

# Благодарности

Хочется выразить особую благодарность прекрасным учителям математики, профессионалам своего дела: методисту по математике Калининского района, учителю математики Бестужевской гимназии № 159 *Елене Владимировне Шаковой*, учителю математики школы-интерната № 9 *Алле Владимировне Цветковой*, учителю математики Бестужевской гимназии № 159 *Маргарите Александровне Смирновой*, учителю школы с углубленным изучением математики № 139 *Юлии Валерьевне Бунтовой*, учителю математики Бестужевской гимназии № 159 *Анне Сергеевне Ивановой*, а также учителям русского языка Бестужевской гимназии № 159 *Валерии Герасимовне Смирновой* и *Ольге Львовне Тупицы*.

Выражаю благодарность моей семье, и особенно мужу Борису и дочери Софье за моральную поддержку.

Автор с удовольствием ответит на все вопросы по заданиям и решениям: [ege\\_matematika@mail.ru](mailto:ege_matematika@mail.ru).



**Теория**

ЯгубоуРф

## Формулы сокращенного умножения



1. Разность квадратов:  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

2. Квадрат суммы:  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

3. Квадрат разности:  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

4. Сумма кубов:  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

5. Разность кубов:  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

6. Куб суммы:  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

7. Куб разности:  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

## Преобразование степеней и корней



$$1. a^0 = 1$$

$$2. a^1 = a$$

$$3. a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$4. a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$5. a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

$$6. a^{m \cdot n} = \frac{a^m}{a^n}$$

$$7. (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$8. (ab)^m = a^m \cdot b^m$$

$$9. \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$10. \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$11. \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$12. \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$13. \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$14. \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$15. \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$16. \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

# Квадратное уравнение. Парабола



Квадратное уравнение — уравнение вида  $ax^2 + bx + c = 0$ , где  $a \neq 0$ .

Чтобы решить квадратное уравнение, нужно:

1. Найти дискриминант по формуле:  $D = b^2 - 4ac$ .

Если  $D > 0$ , то уравнение имеет 2 корня,  
если  $D = 0$ , то уравнение имеет 1 корень,  
если  $D < 0$ , то уравнение не имеет корней.

2. Найти корни уравнения:

Если  $D > 0$ , то корни уравнения находятся по формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Если  $D = 0$ , то корень уравнения находится по формуле:

$$x = \frac{-b}{2a}.$$

**Теорема Виета:**

По теореме Виета корни уравнения находим по формулам:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

**Разложение квадратного трехчлена на множители:**

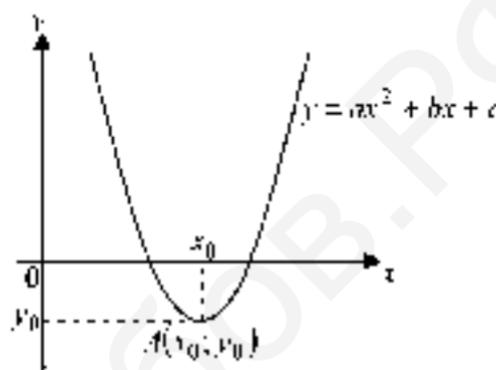
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Если сумма коэффициентов квадратного уравнения  $a + b + c = 0$ ,

то  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = -\frac{c}{a}$ .

Если выражение  $a - b + c = 0$ , то  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = -\frac{c}{a}$ .

**Уравнение параболы:**  $y = ax^2 + bx + c$  при  $a \neq 0$ .



Точка  $A(x_0; y_0)$  — вершина параболы.

Координаты вершины параболы находим по формулам:

$$x_0 = -\frac{b}{2a};$$

$$y_0 = a(x_0)^2 + bx_0 + c.$$

Если  $a > 0$ , то ветви параболы направлены вверх; если  $a < 0$ , то ветви параболы направлены вниз.

# Логарифмы



**Логарифм** числа  $b$  по основанию  $a$  — показатель степени, в которую нужно возвести  $a$ , чтобы получилось  $b$ .

Получаем  $\log_a b = c \Rightarrow a^c = b$ .

**Натуральный логарифм** — логарифм числа  $b$  по основанию  $e$  (экспонента  $e = 2,71828\dots$ ):  $\ln b$ .

**Десятичный логарифм** — логарифм числа  $b$  по основанию 10:  $\lg b$

Логарифм  $\log_a b$  имеет смысл при условиях: 
$$\begin{cases} a > 0; \\ a \neq 1; \\ b > 0. \end{cases}$$

## Формулы логарифмов

1.  $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$

6.  $a^{\log_a b} = b$

2.  $\log_{a^d} b = \frac{1}{d} \cdot \log_a b$

7.  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

3.  $\log_{a^c} b^c = \frac{c}{c} \cdot \log_a b$

8.  $\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$

4.  $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$

9.  $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$

5.  $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$

# Табличные значения тригонометрических функций



$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	-	0
$\operatorname{ctg} x$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	0	-

# Тригонометрические формулы



## Основные тригонометрические формулы

$$1. \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$2. 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$3. 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

## Формулы сложения и вычитания аргументов

$$1. \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$2. \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$3. \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$4. \sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$5. \operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

$$6. \operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

$$7. \operatorname{ctg}(x + y) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} x}$$

$$8. \operatorname{ctg}(x - y) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y + 1}{\operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg} x}$$

**Формулы двойного угла**

1.  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
2.  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$
3.  $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$
4.  $\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}$

**Формулы понижения степени**

1.  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$
2.  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

**Формулы тройного угла**

1.  $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$
2.  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$
3.  $\operatorname{tg} 3x = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}$
4.  $\operatorname{ctg} 3x = \frac{3 \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{ctg}^2 x}$

**Формулы преобразования суммы и разности функций**

1.  $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$
2.  $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$
3.  $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

$$4. \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$5. \quad \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$$

$$6. \quad \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$$

$$7. \quad \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y}$$

$$8. \quad \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{-\sin(x-y)}{\sin x \sin y}$$

#### Формулы преобразования произведений функций

$$1. \quad \sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$2. \quad \sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x+y) + \sin(x-y))$$

$$3. \quad \cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

## Обратные тригонометрические функции



Арксинус числа  $x$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , называется такое число  $\alpha$ ,  
 $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ; синус которого равен  $x$ .

$\arcsin x = \alpha$ , если  $\sin \alpha = x$ ;

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$ .

При решении уравнений типа:  $\sin \alpha = x$  получим общее решение:

□ при  $x > 0$ :

$$\alpha = (-1)^k \arcsin x + \pi k; k \in \mathbb{Z};$$

□ при  $x < 0$ :

$$\alpha = (-1)^{k-1} \arcsin |x| + \pi k; k \in \mathbb{Z}.$$

Арккосинус числа  $x$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , называется такое число  $\alpha$ ,  
 $0 \leq \alpha \leq \pi$ , косинус которого равен  $x$ .

$\arccos x = \alpha$ , если  $\cos \alpha = x$ ;

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ .

При решении уравнений типа:  $\cos \alpha = x$  получим общее решение:

□ при  $x > 0$ :

$$\alpha = \pm \arccos x + 2\pi k; k \in \mathbb{Z};$$

□ при  $x < 0$ :

$$\alpha = \pm (\pi - \arccos |x|) + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}.$$

**Арктангенс** числа  $x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , называется такое число  $\alpha$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , тангенс которого равен  $x$

$\operatorname{arctg} x = \alpha$ , если  $\operatorname{tg} \alpha = x$ .

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$$

При решении уравнений типа:  $\operatorname{tg} \alpha = x$ , получим общее решение:

□ при  $x > 0$ :

$$\alpha = \operatorname{arctg} x + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z};$$

□ при  $x < 0$ :

$$\alpha = -\operatorname{arctg}|x| + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Арккотангенс** числа  $x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , называется такое число  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < \pi$ , котангенс которого равен  $x$ .

$\operatorname{arccotg} x = \alpha$ , если  $\operatorname{ctg} \alpha = x$ ;

$$\operatorname{arccotg}(-x) = -\operatorname{arccotg} x$$

При решении уравнений типа:  $\operatorname{ctg} \alpha = x$ , получим общее решение:

□ при  $x > 0$ :

$$\alpha = \operatorname{arccotg} x + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z};$$

□ при  $x < 0$ :

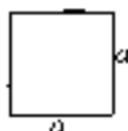
$$\alpha = -\operatorname{arccotg}|x| + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

# Площади фигур



## 1. Площадь квадрата:

$S = a^2$ , где  $a$  — сторона квадрата



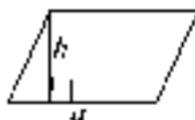
## 2. Площадь прямоугольника:

$S = ab$ , где  $a$ ,  $b$  — стороны прямоугольника

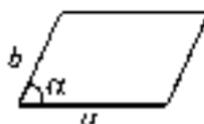


## 3. Площадь параллелограмма:

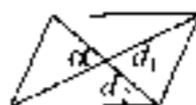
□  $S = ah$ , где  $a$  — сторона;  $h$  — высота параллелограмма;



□  $S = ab \sin \alpha$ , где  $a$ ,  $b$  — стороны;  $\alpha$  — угол между сторонами параллелограмма

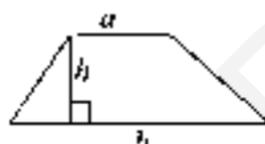


- $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$ , где  $d_1, d_2$  — диагонали;  $\alpha$  — угол между диагоналями параллелограмма



#### 4. Площадь трапеции:

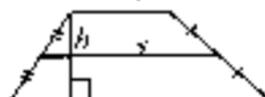
- $S = \frac{a + b}{2} h$ , где  $a, b$  — основания;  $h$  — высота трапеции



- $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$ , где  $d_1, d_2$  — диагонали;  $\alpha$  — угол между диагоналями трапеции



- $S = sh$ , где  $s$  — средняя линия трапеции,  $h$  — высота трапеции

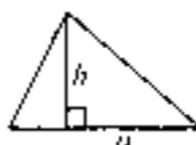


**Площадь равнобедренной трапеции:**  $S = \frac{4r^2}{\sin \alpha}$ , где  $r$  — радиус вписанной окружности;  $\alpha$  — угол при основании трапеции

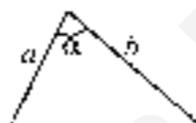


## 5. Площадь треугольника:

□  $S = \frac{1}{2} ah$ , где  $a$  — сторона;  $h$  — высота треугольника



□  $S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$ , где  $a, b$  — стороны;  $\alpha$  — угол между сторонами  $a$  и  $b$  треугольника

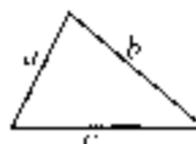


□  $S = rp$ , где  $r$  — радиус вписанной окружности;  $p = \frac{a+b+c}{2}$  — полупериметр треугольника



**Формула Герона:**  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ , где

$p = \frac{a+b+c}{2}$  — полупериметр;  $a, b, c$  — стороны треугольника



**Площадь прямоугольного треугольника:**  $S = \frac{1}{2}ab$ , где  $a$ ,  
 $b$  — катеты треугольника

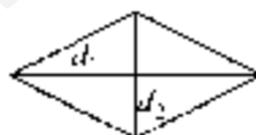


**Площадь равностороннего треугольника:**  $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ , где  
 $a$  — сторона треугольника



**6. Площадь ромба:**

□  $S = \frac{d_1d_2}{2}$ , где  $d_1, d_2$  — диагонали ромба



□  $S = ah$ , где  $a$  — сторона;  $h$  — высота ромба



▮  $S = a^2 \sin \alpha$ , где  $a$  — стороны,  $\alpha$  — угол между сторонами ромба



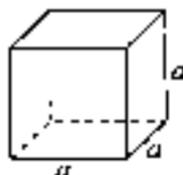
7. Площадь круга:  $S = \pi r^2$ , где  $r$  — радиус круга



## Объемы и площади поверхностей фигур



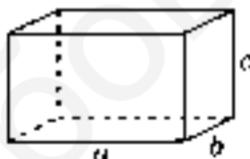
### 1. Куб:



Объем куба:  $V = a^3$ , где  $a$  — ребро куба.

Площадь поверхности куба:  $S = 6a^2$ .

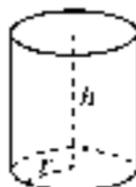
### 2. Прямоугольный параллелепипед:



Объем прямоугольного параллелепипеда:  $V = abc$ , где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — ребра прямоугольного параллелепипеда.

Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда:  $S = 2(ab + bc + ac)$ .

### 3. Цилиндр:



Объем цилиндра:  $V = S_{\text{осн}} h = \pi r^2 h$ , где  $r$  — радиус основания цилиндра;  $h$  — высота цилиндра.

Площадь боковой поверхности цилиндра:  $S_{\text{бок}} = 2\pi rh$ .

Площадь полной поверхности цилиндра:  $S_{\text{полн}} = 2\pi r(h+r)$ .

#### 4. Конус:



Объем конуса:  $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ , где  $r$  — радиус основания конуса;  $h$  — высота конуса.

Площадь боковой поверхности конуса:  $S_{\text{бок}} = \pi rl$ , где  $l$  — образующая конуса.

Площадь полной поверхности конуса:  $S_{\text{полн}} = \pi r(r+l)$ .

#### 5. Усеченный конус:



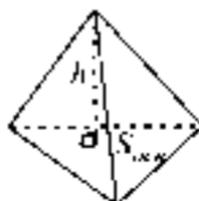
Объем усеченного конуса:  $V = \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$ , где  $r_1$ ,  $r_2$  — радиусы оснований усеченного конуса,  $h$  — высота усеченного конуса.

Площадь боковой поверхности усеченного конуса:  $S_{\text{бок}} = \pi (r_1 + r_2) l$ , где  $l$  — образующая усеченного конуса.

Площадь полной поверхности усеченного конуса:

$$S_{\text{полн}} = \pi (r_1 + r_2) l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$

## 6. Пирамида:

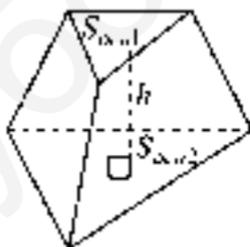


**Объем пирамиды:**  $V = \frac{1}{3} S_{осн} h$ , где  $S_{осн}$  — площадь основания пирамиды;  $h$  — высота пирамиды.

**Площадь полной поверхности пирамиды:**  $S_{пол} = S_{осн} + S_{бок}$ , где  $S_{осн}$  — площадь основания пирамиды;  $S_{бок}$  — площадь боковой поверхности пирамиды.

**Площадь боковой поверхности правильной пирамиды:**  $S_{бок} = \frac{1}{2} P h_{бок}$ , где  $P$  — периметр основания пирамиды;  $h_{бок}$  — высота боковой грани.

## 7. Усеченная пирамида



**Объем усеченной пирамиды:**

$$V = \frac{1}{3} h (S_{осн1} + \sqrt{S_{осн1} S_{осн2}} + S_{осн2}),$$

где  $S_{осн1}$ ,  $S_{осн2}$  — площади оснований усеченной пирамиды;  $h$  — высота усеченной пирамиды

**Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды:**  $S_{бок} = \frac{1}{2} (P_1 + P_2) h_{бок}$ , где  $P_1$ ,  $P_2$  — периметры оснований;  $h_{бок}$  — высота боковой грани.

## 8. Шар



**Объем шара:**  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ , где  $R$  — радиус шара.

**Площадь поверхности:**  $S = 4\pi R^2$

**Объем шарового сегмента:**  $V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3R - h)$ , где  $h$  — высота шарового сегмента;  $R$  — радиус шара.



**Объем шарового сектора:**  $V = \frac{2}{3} \pi R^2 h$ .

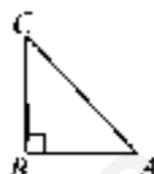


# Необходимые теоремы геометрии



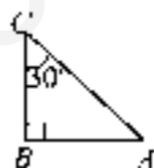
## 1. Теорема Пифагора.

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.



$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

## 2. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в $30^\circ$ , равен половине гипотенузы.



$$AB = \frac{1}{2} AC.$$

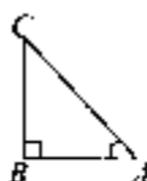
## 3. Синус, косинус, тангенс и котангенс угла прямоугольного треугольника.

**Синус угла** — отношение противолежащего катета к гипотенузе.

**Косинус угла** — отношение прилежащего катета к гипотенузе.

**Тангенс угла** — отношение противолежащего катета к прилежащему.

**Котангенс угла** — отношение прилежащего катета к противолежащему.

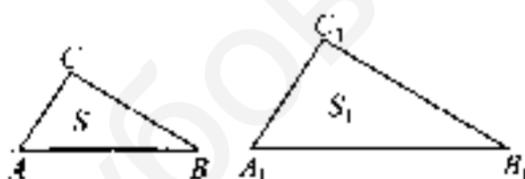


$$\sin \angle A = \frac{BC}{AC}; \quad \cos \angle A = \frac{AB}{AC};$$

$$\operatorname{tg} \angle A = \frac{BC}{AB}; \quad \operatorname{ctg} \angle A = \frac{AB}{BC}.$$

4. Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

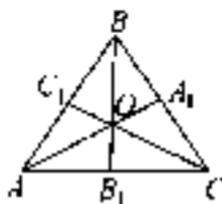
$$\Delta ABC \sim \Delta A_1 B_1 C_1; \quad \frac{AB}{A_1 B_1} = \frac{AC}{A_1 C_1} = \frac{BC}{B_1 C_1} = k.$$



$$\frac{S}{S_1} = k^2.$$

5. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершин.

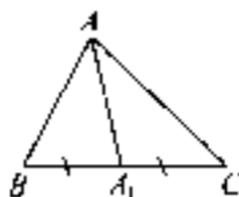
$AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  — медианы треугольника  $ABC$ .



$$AO = 2OA_1; \quad BO = 2OB_1; \quad CO = 2OC_1.$$

## 6. Теорема о медиане.

$AA_1$  — медиана треугольника  $ABC$ .



$$AA_1^2 = \frac{AB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}.$$

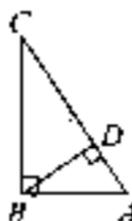
## 7. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное для отрезков, на которые делится гипотенуза этой высотой.

$BD$  — высота прямоугольного треугольника  $ABC$ .



$$BD = \sqrt{CD \cdot DA}.$$

## 8. Катет прямоугольного треугольника — среднее пропорциональное гипотенузы и отрезка гипотенузы, заключенного между катетом и высотой, проведенной из вершины прямого угла.



$$AB = \sqrt{AC \cdot AD}.$$

9. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла к гипотенузе, равна половине этой гипотенузы и является радиусом описанной окружности около этого треугольника.

$CD$  — медиана прямоугольного треугольника  $ABC$

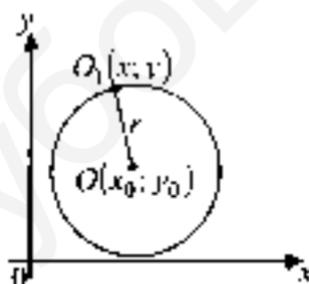


$$CD = \frac{1}{2} AB.$$

$$AD = DB = CD = r.$$

где  $r$  — радиус описанной окружности.

10. Уравнение окружности.



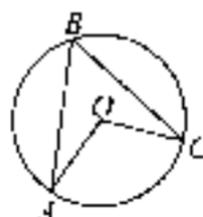
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

11. Теорема о вписанном угле.

Если вписанный и центральный углы опираются на одну и ту же дугу, то вписанный угол равен половине центрального угла и равен половине дуги, на которую он опирается.

$\angle ABC$  — вписанный угол;

$\angle AOC$  — центральный угол.

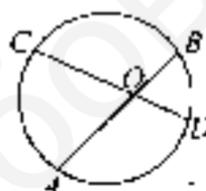


$$\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC;$$

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC.$$

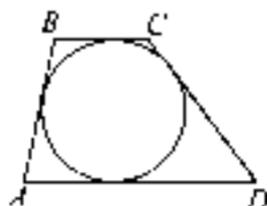
12. Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

$AB, CD$  — хорды.



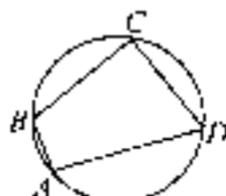
$$AO \cdot OB = CO \cdot OD.$$

13. В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.



$$AB + CD = BC + AD.$$

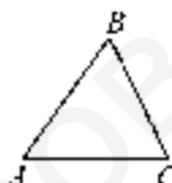
14. В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна  $180^\circ$ .



$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ.$$

15. Теорема синусов.

Стороны треугольника пропорциональны синусам противоположных углов.

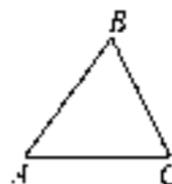


$$\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{AC}{\sin \angle B} = \frac{BC}{\sin \angle A} = 2R,$$

где  $R$  — радиус описанной окружности.

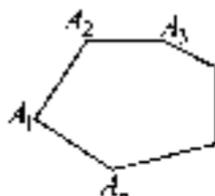
16. Теорема косинусов.

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.



$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle B.$$

17. Сумма углов выпуклого  $n$ -угольника равна  $(n-2) \cdot 180^\circ$ .



$$\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 + \dots + \angle A_n = (n-2) \cdot 180^\circ.$$

18. Вычисление площади правильного многоугольника, стороны многоугольника и радиуса вписанной окружности.

$S$  — площадь правильного  $n$ -угольника;

$a$  — сторона правильного  $n$ -угольника;

$P$  — периметр правильного  $n$ -угольника;

$r$  — радиус вписанной окружности;

$R$  — радиус описанной окружности;



$$S = \frac{1}{2} P r;$$

$$a = 2R \sin \frac{180^\circ}{n};$$

$$r = R \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

## Правила дифференцирования производных



1.  $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
2.  $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$
3.  $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
4.  $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
5.  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
6.  $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ : сложная функция · функция от функции  $F(x) = f(g(x))$
7.  $(f(x)^{g(x)})' = f(x)^{g(x)} \left( f'(x) \cdot \frac{g(x)}{f(x)} + g'(x) \ln f(x) \right)$ , при  $f(x) > 0$



## Производные элементарных функций. Уравнение касательной функции

### Производные элементарных функций

Производная константы:

$$(C)' = 0.$$

Производная степенной функции:

$$(x)' = 1;$$

$$(x^p)' = p \cdot x^{p-1}.$$

Производная логарифмической функции:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Производная показательной функции:

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

$$(e^x)' = e^x.$$

Производные тригонометрических функций:

$$(\sin x)' = \cos x,$$

$$(\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

**Производные обратных тригонометрических функций:**

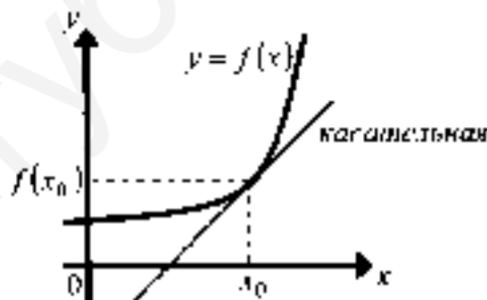
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

**Уравнение касательной функции**



$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$



# Практика

Ягубов.РФ

**Пример:**

Шоколадка стоила 20 рублей, потом подешевела на 10%. Какое максимальное количество шоколадок можно купить на 100 рублей?

**Решение:**

Найдем стоимость шоколадки после снижения цены:

$\frac{20 \text{ рублей}}{x \text{ рублей}}$	$\frac{100\%}{100\% - 10\% = 90\%}$
--	-------------------------------------

Перемножим по пропорции:

$$20 \cdot 90 = x \cdot 100;$$

$$x = 18.$$

Определим сколько шоколадок можно купить на 100 руб.:

$$100 : 18 = 5 \frac{10}{18}.$$

Видим, что мы можем купить на 100 рублей 5 шоколадок и 10 рублей у нас останется.

Ответ: 5.

1. Билет стоил 35 рублей, потом цена уменьшилась на 14%. Сколько можно купить билетов на 250 рублей?
2. Мороженое стоило 25 рублей, затем цена увеличилась на 4%. Сколько мороженого можно купить на 150 рублей?
3. Телевизор стоил 5000 рублей. Затем цена увеличилась на 10%, потом уменьшилась на 5%. Найти разницу между конечной и начальной ценой телевизора.

4. Чайник стоил 100 рублей. Потом цена увеличилась на 20%, затем увеличилась еще на 5%. Найти разницу между конечной и начальной ценой чайника.
5. Табуретка стоила 300 рублей. Потом цена уменьшилась на 10%, затем увеличилась на 3%. Найти разницу между начальной и конечной ценой табуретки.
6. Катя купила набор из 20 воздушных шариков за 200 рублей. Маша купила 20 шариков по 12 рублей за каждый шарик. Сколько рублей сэкономила Катя?
7. Вася купил набор из 20 тетрадей за 250 рублей. Коля купил 20 разных тетрадей по 14 рублей за каждую тетрадь. Сколько рублей сэкономил Вася?
8. Какое максимальное количество роз можно купить на 1400 рублей, если одна роза стоит 150 рублей?
9. Какое максимальное количество тетрадей можно купить на 530 рублей, если одна тетрадь стоит 22 рубля?
10. Коробка конфет стоила 200 рублей. Сначала цена увеличилась на 20%, затем снизилась на 20%. Найти новую стоимость коробки конфет.

**Пример:**

Коробка конфет стоила 100 рублей. Сначала цена увеличилась на 5%, затем снизилась на 5%. Найти новую стоимость коробки конфет.

**Решение:**

Найдем стоимость коробки конфет после увеличения цены на 5%:

$$100 + 0,05 \cdot 100 = 105 \text{ (руб.)}$$

Теперь найдем стоимость коробки конфет после снижения цены на 5%:

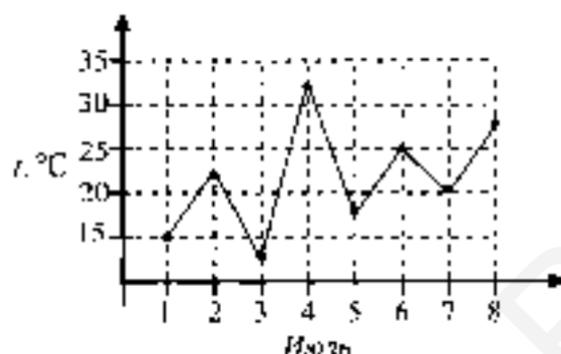
$$105 - 0,05 \cdot 105 = 99,75 \text{ (руб.)}$$

Ответ: 99,75.

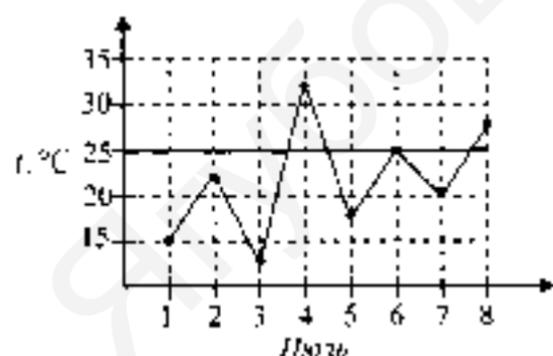
11. Тарелка стоила 70 рублей. Потом цена уменьшилась на 10%, затем увеличилась на 10%. Найти новую стоимость тарелки.
12. Печенье стоило 80 рублей. Затем цена уменьшилась на 10%, затем уменьшилась еще на 10%. Найти новую стоимость печенья.
13. Игрушка стоила 400 рублей. Потом цена уменьшилась на 20%, затем увеличилась на 20%. Найти разницу между начальной и конечной ценой.
14. Диск стоил 150 рублей. Потом цена уменьшилась на 15%, затем увеличилась на 15%. Найти разницу между начальной и конечной ценой.
15. Книга стоила 250 рублей. Потом цена увеличилась на 10%, затем уменьшилась на 10%. Найти разницу между начальной и конечной ценой.
16. Игрушка стоила 20 рублей. После повышения цены она стала стоить 24 рубля. На сколько процентов повысилась цена?
17. Компьютер стоил 25000 рублей. После снижения цены он стал стоить 23000 рублей. На сколько процентов понизилась цена?
18. Первоначальную цену мягкой игрушки увеличили на 12% и она стала стоить 448 рублей. Сколько стоила игрушка первоначально?
19. Первоначальную цену товара увеличили на 15% и он стал стоить 575 рублей. Сколько стоил товар первоначально?
20. Первоначальную цену товара уменьшили на 14% и он стал стоить 1333 рубля. Сколько стоил товар первоначально?

**Пример:**

На рисунке жирными точками показана температура  $^{\circ}\text{C}$  с 1 по 8 июля. Определить какого числа температура была равна  $25^{\circ}\text{C}$ .

**Решение:**

Проведем горизонтальную линию на уровне  $25^{\circ}\text{C}$ .

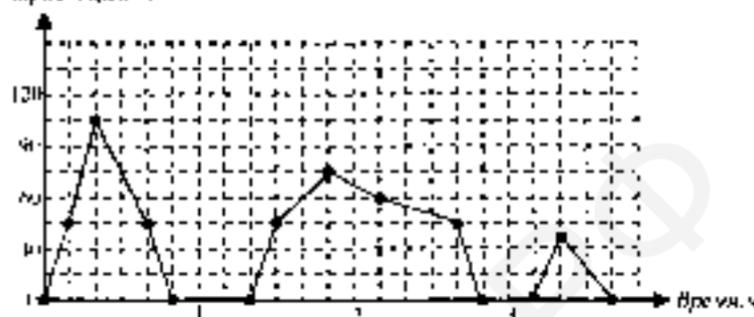


Видим, что температура равнялась  $25^{\circ}\text{C}$  6 июля.

Ответ: 6.

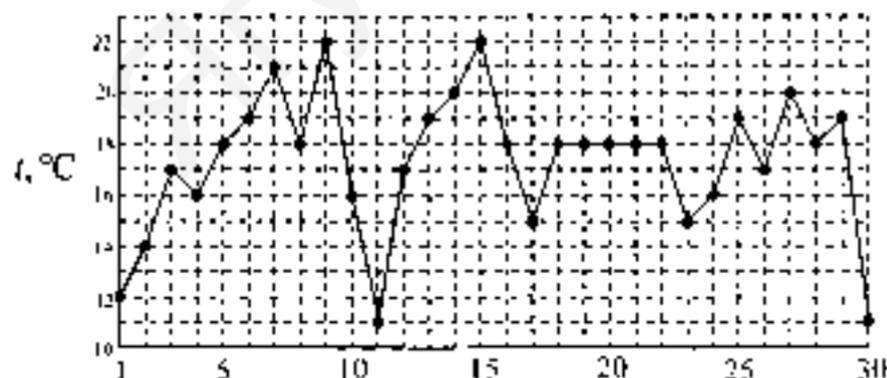
1. На рисунке показано изменение скорости автомобиля на пути из города *A* в город *B*. Сколько времени в течение пути скорость автомобиля была не меньше 45 км/ч. Ответ записать в минутах.

Скорость, км/ч



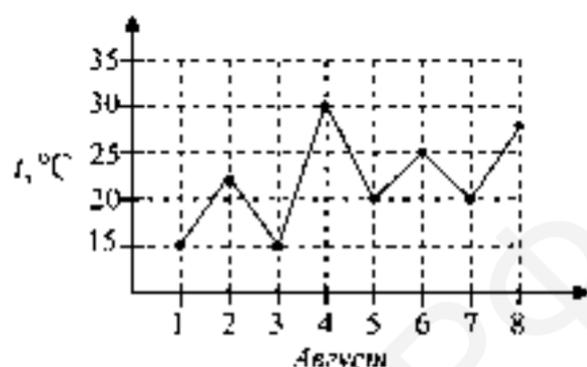
2. На рисунке показан график среднесуточной температуры города *A* в июне 2011 г. Определите по графику наименьшую температуру за период 01.06.11–30.06.11.

Среднесуточная температура города *A*  
в июне 2011 г.



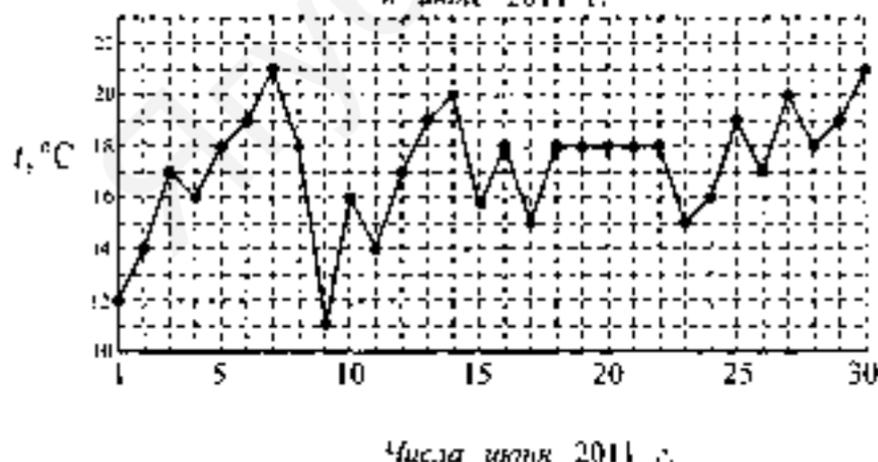
Числа июня 2011 г.

3. На рисунке жирными точками показана температура  $^{\circ}\text{C}$  с 1 по 8 августа. Определить разницу между наибольшей и наименьшей температурой с 4 по 7 августа включительно.



4. На рисунке показан график среднесуточной температуры города А в июне 2011 г. Определите по графику разницу между наибольшей и наименьшей температурой за период 01.06.11 – 30.06.11.

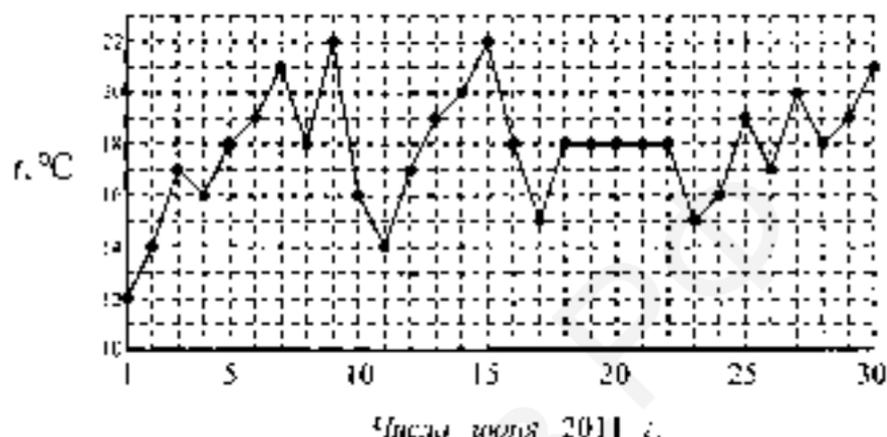
*Среднесуточная температура города А  
в июне 2011 г.*



5. На рисунке показан график среднесуточной температуры города А в июне 2011 г. Определите по графику сколько дней

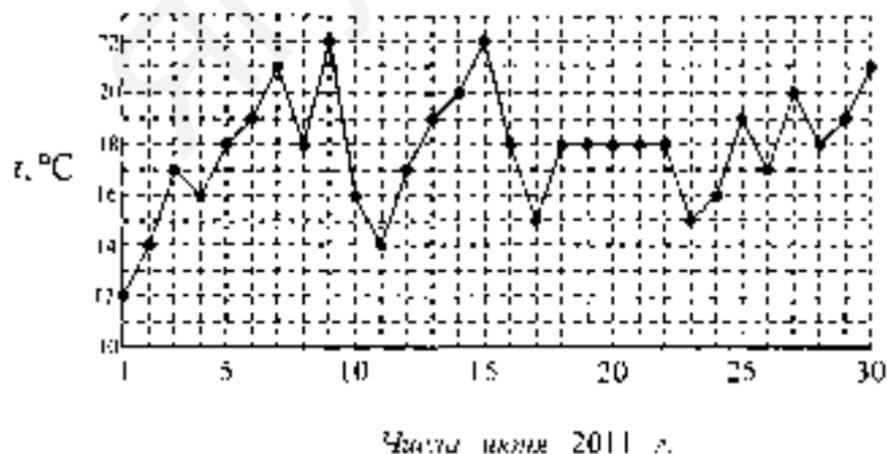
температура была выше 20 градусов за период 01.06.11–30.06.11.

Среднесуточная температура города А  
в июне 2011 г.



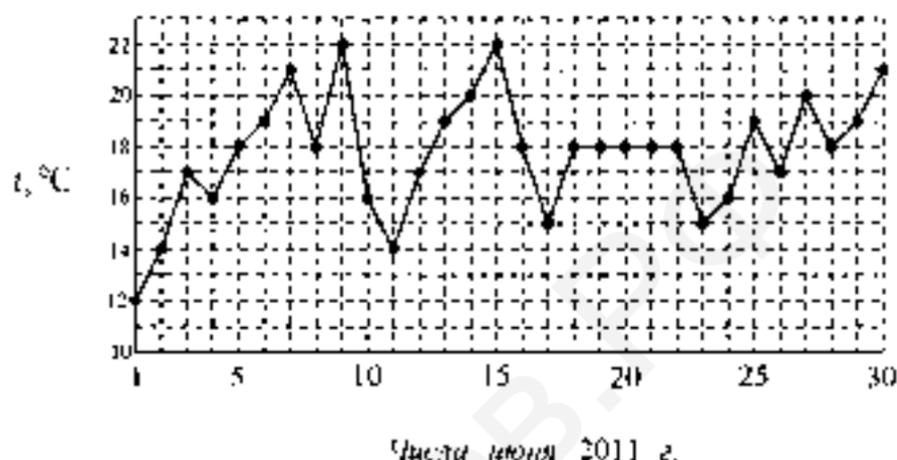
6. На рисунке показан график среднесуточной температуры города А в июне 2011 г. Определите по графику сколько дней температура была не ниже 20 градусов за период 01.06.11–30.06.11.

Среднесуточная температура города А  
в июне 2011 г.



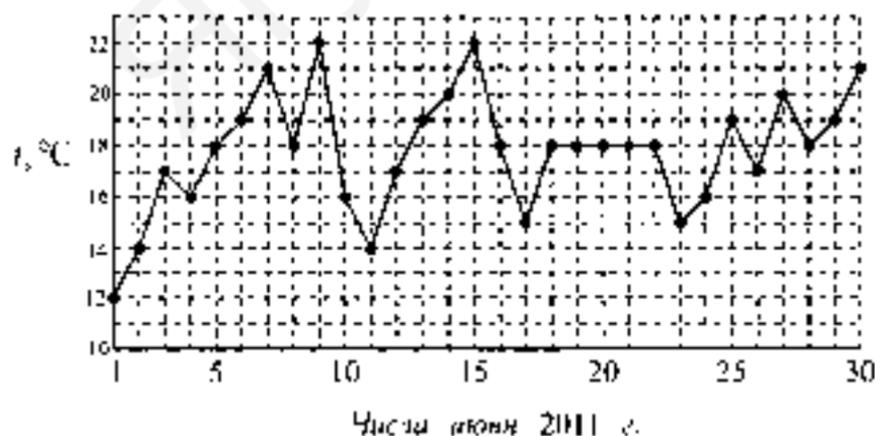
7. На рисунке показан график среднесуточной температуры города А в июне 2011 г. Определите по графику сколько дней температура была ниже 20 градусов за период 01.06.11–30.06.11.

*Среднесуточная температура города А  
в июне 2011 г.*



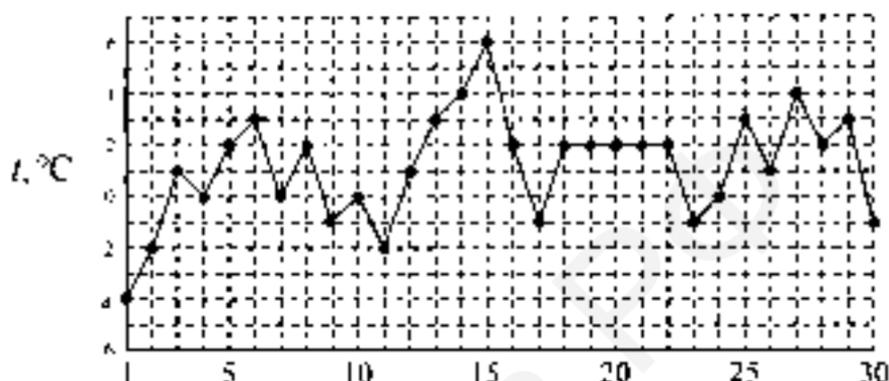
8. На рисунке показан график среднесуточной температуры города А в июне 2011 г. Определите по графику наименьшую температуру за период 15.06.11–30.06.11.

*Среднесуточная температура города А  
в июне 2011 г.*



9. На рисунке показан график среднесуточной температуры города *A* в ноябре 2011 г. Определите по графику сколько дней температура была положительной за период 01.11.11–30.11.11

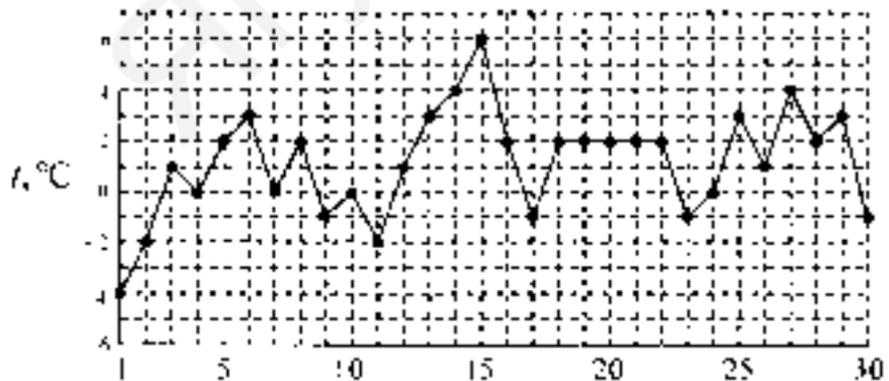
*Среднесуточная температура города A  
в ноябре 2011 г.*



*Число ноября 2011 г.*

10. На рисунке показан график среднесуточной температуры города *A* в ноябре 2011 г. Определите по графику сколько дней температура была неутрицательной за период 01.11.11–30.11.11.

*Среднесуточная температура города A  
в ноябре 2011 г.*



*Число ноября 2011 г.*

**Пример:**

В таблице представлены данные наблюдений температуры воздуха в течение 5 лет. Среднесуточная температура находится как среднее арифметическое данных за 5 лет. Определите наибольшую среднесуточную температуру за данный период.

	2007	2008	2009	2010	2011
<b>1 февраля</b>	-7	-8	-6	-7	-4
<b>2 февраля</b>	-6	-8	-4	-8	-5
<b>3 февраля</b>	-8	-9	-7	-10	-9

**Решение:**

Определим среднее арифметическое данных за 5 лет за 1, 2 и 3 февраля:

$$1 \text{ февраля: } \frac{-7-8-6-7-4}{5} = -6,4,$$

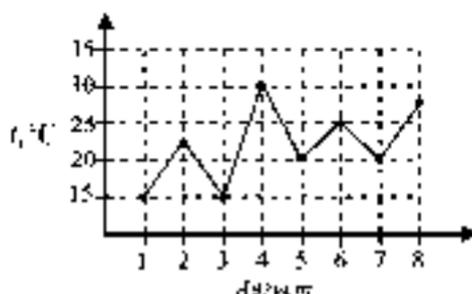
$$2 \text{ февраля: } \frac{-6-8-4-8-5}{5} = -6,2;$$

$$3 \text{ февраля: } \frac{-8-9-7-10-9}{5} = -8,6$$

Выберем наибольшую среднесуточную температуру за данный период:  $-6,2$ .

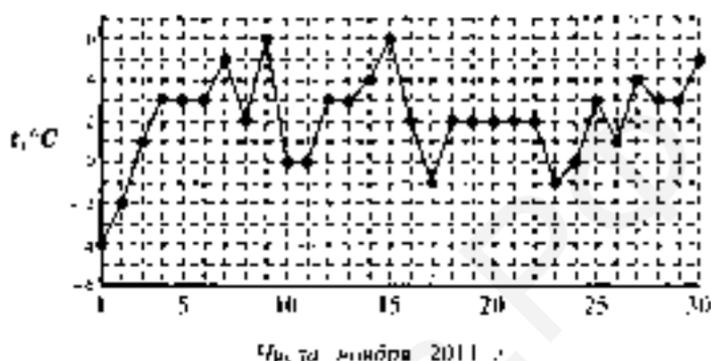
Ответ:  $-6,2$ .

11. На рисунке жирными точками показана температура  $^{\circ}\text{C}$  с 1 по 8 августа. Определить наименьшую температуру с 4 по 8 августа включительно.



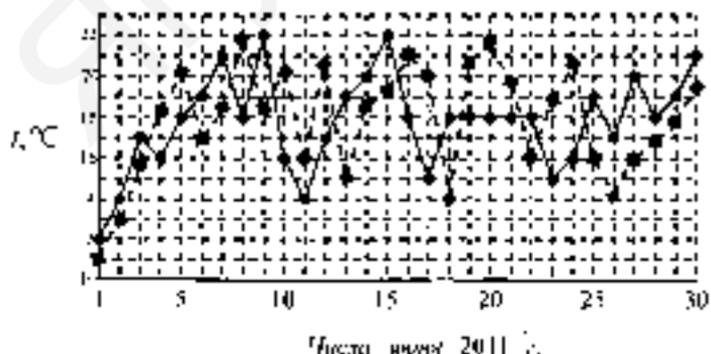
12. На рисунке показан график среднесуточной температуры города  $A$  в ноябре 2011 г. Определите по графику сколько дней температура не изменялась по сравнению с предыдущим днем за период 01.11–30.11.

Среднесуточная температура города  $A$   
в ноябре 2011 г.



13. На рисунке показаны графики среднесуточной температуры города  $A$  в июне 2011 г. и нормальной температуры июня по многолетним наблюдениям. Определите по графику сколько дней среднесуточная температура превышала нормальную в течение периода 01.06.11–30.06.11.

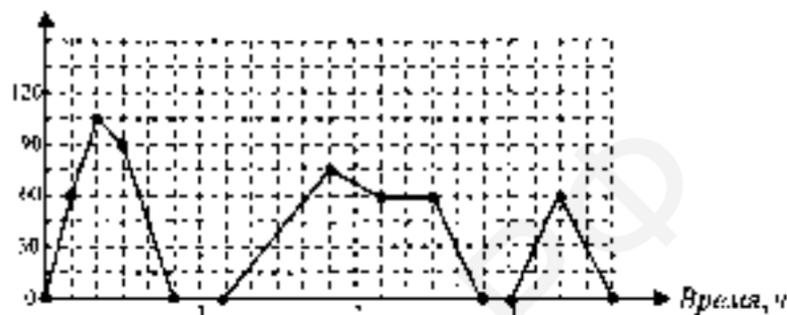
Среднесуточная температура города  $A$   
в июне 2011 г.



- ◊ среднесуточная температура
- ◼ нормальная температура

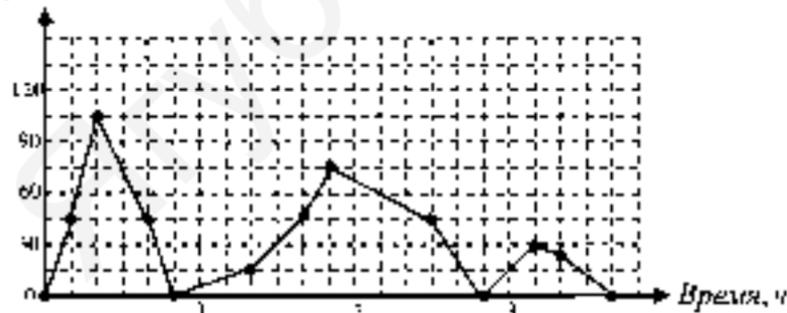
14. На рисунке показано изменение скорости автомобиля на пути из города *A* в город *B*. Сколько времени в течение пути автомобиль не двигался. Ответ записать в минутах.

Скорость, км/ч



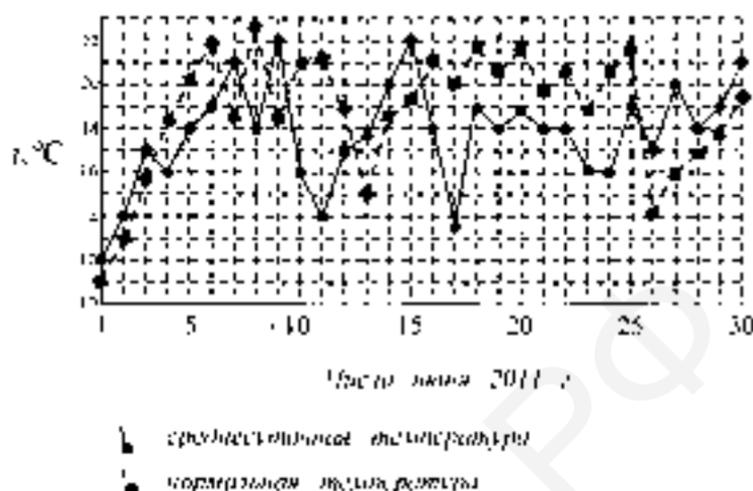
15. На рисунке показано изменение скорости автомобиля на пути из города *A* в город *B*. Сколько времени в течение пути скорость автомобиля была не меньше  $45 \text{ км/ч}$ . Ответ записать в минутах.

Скорость, км/ч



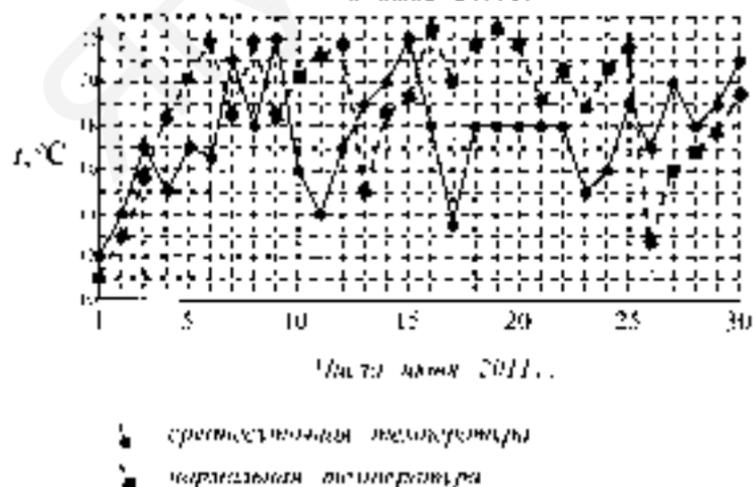
16. На рисунке показаны графики среднесуточной температуры города *A* в июне 2011 г. и нормальной температуры июня по многолетним наблюдениям. Определите по графику сколько дней нормальная температура превышала среднесуточную более, чем на  $4$  градуса в течение периода 01.06.11 – 30.06.11.

Среднесуточная температура воздуха А  
в июне 2011 г.



17. На рисунке показаны графики среднесуточной температуры воздуха А в июне 2011 г. и нормальной температуры июня по многолетним наблюдениям. Определите по графику сколько дней нормальная температура превышала среднесуточную менее, чем на 2 градуса в течение периода 01.06.11 – 30.06.11.

Среднесуточная температура воздуха А  
в июне 2011 г.



18. В таблице представлены данные наблюдений температуры воздуха в течение 5 лет. Среднесуточная температура находится как среднее арифметическое данных за 5 лет. Определите наименьшую среднесуточную температуру за данный период.

	2007	2008	2009	2010	2011
1 февраля	-8	-8	-4	-7	-6
2 февраля	-7	-4	-8	-9	-5
3 февраля	-6	-5	-9	-4	-8

19. В таблице представлены данные наблюдений температуры воздуха в течение 5 лет. Среднесуточная температура находится как среднее арифметическое данных за 5 лет. Определите наибольшую среднесуточную температуру за данный период.

	2007	2008	2009	2010	2011
1 февраля	-9	-6	-7	-8	-12
2 февраля	-10	-5	-6	7	-10
3 февраля	11	8	4	9	-8

20. В таблице показана стоимость акций за период 06.06.11-10.06.11. Найти наименьшее снижение стоимости акции по

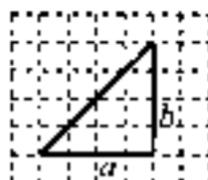
сравнению с предыдущим днем. Ответ запишите в копейках.

<b>Дата</b>	<b>Цена акции (руб.)</b>
06.06.11	23,01
07.06.11	22,99
08.06.11	22,9
09.06.11	23,4
10.06.11	23,1

## В3

### Пример:

Найти площадь фигуры, изображенной на рисунке. Сторона каждой клетки равна 1.

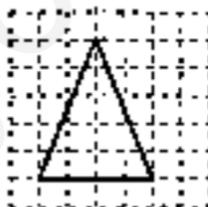


### Решение:

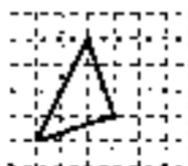
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$$

Ответ: 8.

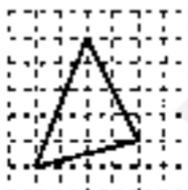
- 
1. Найти площадь фигуры, изображенной на рисунке. Сторона каждой клетки равна 1.



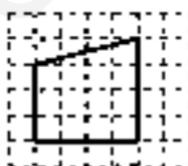
2. Найти площадь фигуры, изображенной на рисунке. Сторона каждой клетки равна 1.



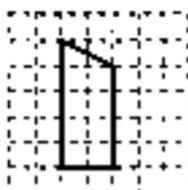
3. Найти площадь фигуры, изображенной на рисунке. Сторона каждой клетки равна 1.



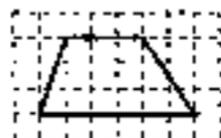
4. Найти площадь фигуры, изображенной на рисунке. Сторона каждой клетки равна 1.



5. Найти площадь фигуры, изображенной на рисунке. Сторона каждой клетки равна 1.



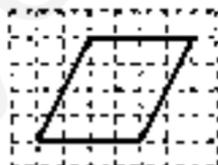
6. Найдите площадь фигуры, изображенной на рисунке. Сторона каждой клетки равна 1.



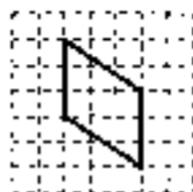
7. Найдите площадь фигуры, изображенной на рисунке. Сторона каждой клетки равна 1.



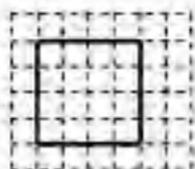
8. Найдите площадь фигуры, изображенной на рисунке. Сторона каждой клетки равна 1.



9. Найдите площадь фигуры, изображенной на рисунке. Сторона каждой клетки равна 1.



10. Найти площадь фигуры, изображенной на рисунке. Сторона каждой клетки равна 1.



**Пример:**

Найти площадь фигуры, изображенной на рисунке. Сторона каждой клетки равна 1.



**Решение:**

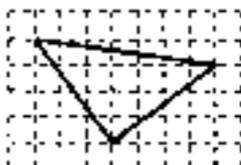
Чтобы найти площадь данного треугольника, найдем площадь выделенного прямоугольника и вычтем площади трех прямоугольных треугольников:



$$S_A = 3 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 9.$$

Ответ: 9

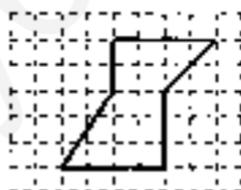
11. Найти площадь фигуры, изображенной на рисунке. Сторона каждой клетки равна 1.



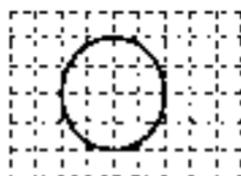
12. Найти площадь фигуры, изображенной на рисунке. Сторона каждой клетки равна 1.



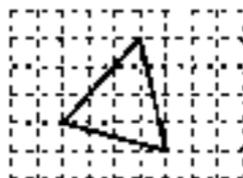
13. Найти площадь фигуры, изображенной на рисунке. Сторона каждой клетки равна 1.



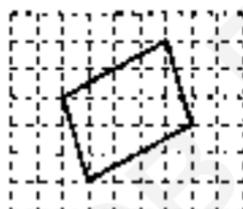
14. Найти площадь фигуры, изображенной на рисунке. Сторона каждой клетки равна 1.



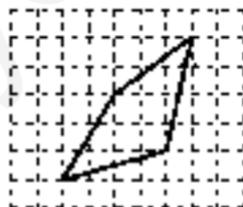
15. Найти площадь фигуры, изображенной на рисунке. Сторона каждой клетки равна 1.



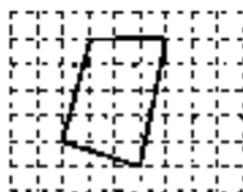
16. Найти площадь фигуры, изображенной на рисунке. Сторона каждой клетки равна 1.



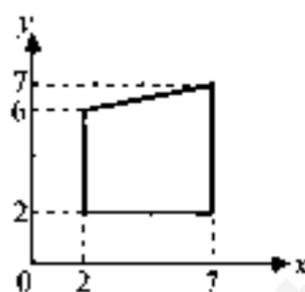
17. Найти площадь фигуры, изображенной на рисунке. Сторона каждой клетки равна 1.



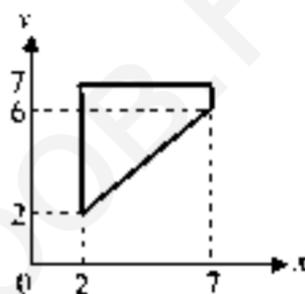
18. Найти площадь фигуры, изображенной на рисунке. Сторона каждой клетки равна 1.



19. Найти площадь фигуры, изображенной на рисунке.



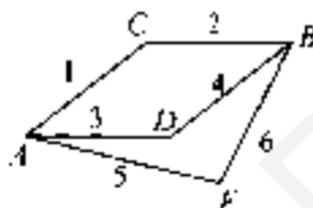
20. Найти площадь фигуры, изображенной на рисунке.



## В4

### Пример:

Груз нужно доставить из города  $A$  в город  $B$ . Дороги между городами платные. На рисунке указаны возможные маршруты, в таблице указаны длина каждого участка и стоимость 1 км на каждом участке. Сколько будет стоить наиболее выгодный вариант?



Участок	1	2	3	4	5	6
Длина участка (км)	22	10	15	9	14	11
Стоимость 1 км (руб.)	3	4	6	5	5	3

### Решение:

$$\text{участок 1} + \text{участок 2} = 22 \cdot 3 + 10 \cdot 4 = 106,$$

$$\text{участок 3} + \text{участок 4} = 15 \cdot 6 + 9 \cdot 5 = 135;$$

$$\text{участок 5} + \text{участок 6} = 14 \cdot 5 + 11 \cdot 3 = 103.$$

Видим, что наиболее выгодный вариант стоит 103 рубля.

Ответ: 103.

1. Нужно доставить груз из точки *A* в точку *B*, расстояние между которыми 5,5 км. Мы можем заказать доставку и погрузочно-разгрузочные работы в одной из трех фирм. Сколько будет стоить самый выгодный вариант?

Фирма	Минимальный заказ	Стоимость каждого следующего км (руб.)	Погрузочно-разгрузочные работы
1	30 км — 200 рублей	5	При заказе больше чем на 400 рублей — работы бесплатно / если меньше 400 рублей — работы стоят 150 рублей
2	35 км — 250 рублей	5,2	При заказе больше чем на 300 рублей — работы бесплатно / если меньше 300 рублей — работы стоят 100 рублей
3	25 км — 180 рублей	4,5	При заказе больше чем на 700 рублей — работы бесплатно / если меньше 700 рублей — работы стоят 200 рублей

2. Нужно доставить груз из точки *A* в точку *B*, расстояние между которыми 70 км. Можно заказать доставку и погрузочно-разгрузочные работы в одной из трех фирм. Сколько будет стоить самый выгодный вариант?

Фирма	Минимальный заказ	Стоимость каждого следующего км (руб.)	Погрузочно-разгрузочные работы
1	40 км — 300 рублей	6	При заказе больше чем на 500 рублей — работы бесплатно / если меньше 500 рублей — работы стоят 200 рублей
2	45 км — 350 рублей	7	При заказе больше чем на 520 рублей — работы бесплатно / если меньше 520 рублей — работы стоят 150 рублей
3	50 км — 400 рублей	8	При заказе больше чем на 600 рублей — работы бесплатно / если меньше 600 рублей — работы стоят 100 рублей

3. Нужно купить семена для клумбы. В наличии семена трех видов цветов. Чтобы сделать красивую клумбу нужно купить семена цветов в определенном сочетании. В таблице приведены различные варианты:

Вариант	Семена 1 вида (уп.)	Семена 2 вида (уп.)	Семена 3 вида (уп.)
1	12	11	
2	14	—	12
3	—	8	15

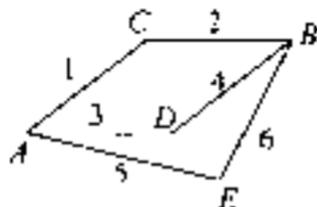
В следующей таблице указаны цены за одну упаковку каждого вида семян:

Семена 1 вида	6 рублей/упаковку
Семена 2 вида	7 рублей/упаковку
Семена 3 вида	8 рублей/упаковку

На каждые 5 упаковок семян нужно купить одну упаковку удобрений (частями упаковки не продаются) — по 48 рублей за упаковку.

Сколько будет стоить самый недорогой вариант?

4. Груз нужно доставить из города  $A$  в город  $B$ . Дороги между городами платные. На рисунке указаны возможные маршруты, в таблице указаны длина каждого участка и стоимость 1 км на каждом участке. Сколько будет стоить наиболее выгодный вариант?



Участок	1	2	3	4	5	6
Длина участка (км)	17	19	14	12	11	16
Стоимость 1 км (руб.)	2	3	4	1	2	3

5. Нужно сделать ящики. Для этого потребуется 50 досок площадью по  $0,72 \text{ м}^2$ . Также все доски с одной стороны изначально нужно покрыть лаком. На каждые  $5 \text{ м}^2$  нужна одна упаковка лака. Заказ можно сделать в одной из трех фирм. В какую цену обойдется самый выгодный вариант?

Фирма	Стоимость $1 \text{ м}^2$ (руб.)	Стоимость одной упаковки лака (руб.)
1	130	35
2	125	28
3	140	23

6. Нужно сделать ящики. Для этого потребуется 40 досок площадью по  $0,56 \text{ м}^2$ . Также все доски с одной стороны изначально нужно покрыть лаком. На каждые  $4 \text{ м}^2$  нужна одна упаковка лака. Заказ можно сделать в одной из трех фирм. В какую цену обойдется самый выгодный вариант?

Фирма	Стоимость $0,8 \text{ м}^2$ (руб.)	Стоимость одной упаковки лака (руб.)
1	88	56
2	92	51
3	96	43

7. Нужно покрасить куб  $5 \times 5 \times 5$ , состоящий из 125 кубиков  $1 \times 1 \times 1$ . Если возможно покрасить 3 стороны кубика  $1 \times 1 \times 1$ , то эти 3 стороны красят синим цветом; если возможно покрасить 2 стороны кубика  $1 \times 1 \times 1$ , то эти 2 стороны красят красным цветом; если возможно покрасить только одну сторону кубика  $1 \times 1 \times 1$ , то эту сторону красят желтым цветом. В таблице приведена стоимость краски, затраченной на одну сторону  $1 \times 1$  кубика  $1 \times 1 \times 1$ :

Синий цвет	2 рубля
Красный цвет	3 рубля
Желтый цвет	4 рубля

Сколько будет затрaчено средств на покраску всего куба?

8. Нужно приготовить десерт на вечеринку. Имеется три ингредиента: ингредиент 1, ингредиент 2, ингредиент 3. Стоимость каждого ингредиента:
- ингредиент 1 — 35 рублей/кг;  
 ингредиент 2 — 47 рублей/кг;  
 ингредиент 3 — 53 рублей/кг.

Из трех ингредиентов можно приготовить три разных десерта. Сколько будет стоить самый экономичный вариант десерта?

Десерт	Ингредиент 1 (кг)	Ингредиент 2 (кг)	Ингредиент 3 (кг)
1	2	3	5
2	4	6	3
3	5	4	4

9. Нужно приготовить десерт на вечеринку. Имеется три ингредиента: ингредиент 1, ингредиент 2, ингредиент 3. Стоимость каждого ингредиента:

ингредиент 1 — 55 рублей/кг.

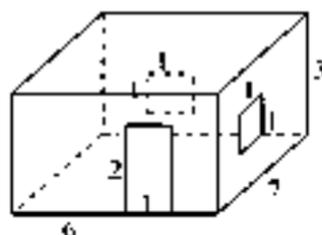
ингредиент 2 — 59 рублей/кг.

ингредиент 3 — 63 рублей/кг.

Из трех ингредиентов можно приготовить три разных десерта. Сколько будет стоить самый экономичный вариант десерта?

Десерт	Ингредиент 1 (кг)	Ингредиент 2 (кг)	Ингредиент 3 (кг)
1	3	4	5
2	2	3	6
3	4	3	7

10. Нужно покрасить внешние стены дома. Размеры указаны на рисунке. Стоимость одной банки краски — 115 рублей. Одной банки хватает, чтобы покрасить  $5 \text{ м}^2$ . Сколько будет стоить покраска?



**Пример:**

Нужно заказать ужин в одном из трех ресторанов на 10 человек. Сколько будет стоить самый экономичный вариант?

Ресторан	Стоимость ужина на одного человека (руб.)	Стоимость аренды (руб.)	Дополнительные условия
1	500	2000	Если стоимость ужина $>6000$ руб., аренда входит в стоимость заказа
2	450	2500	Если стоимость ужина $>4500$ руб., аренда входит в стоимость заказа
3	420	3000	Если стоимость ужина $>4000$ руб., аренда входит в стоимость заказа

**Решение:**

Рассчитаем все три варианта и выберем самый дешевый:

$$1. 10 \cdot 500 = 5000$$

Так как стоимость ужина  $<6000$  руб., то мы к стоимости ужина должны прибавить еще стоимость аренды:

$$5000 + 2000 = 7000.$$

$$2. 10 \cdot 450 = 4500.$$

Так как стоимость ужина =  $4500$  руб., то мы к стоимости ужина должны прибавить еще стоимость аренды:

$$4500 + 2500 = 7000.$$

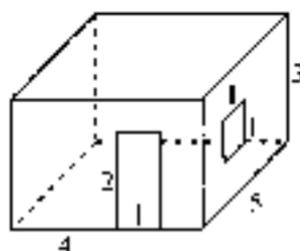
$$3. 10 \cdot 420 = 4200.$$

Так как стоимость ужина  $>4000$  руб., то аренда входит в стоимость заказа

Видим, что самый экономичный вариант стоит  $4200$  руб.

Ответ:  $4200$ .

11. Нужно поклеить обои в комнате. Размеры указаны на рисунке. Площадь обоев в одном рулоне —  $20 \text{ м}^2$ . На два рулона нужна одна упаковка клея. Мы можем купить обои и клей в трех разных магазинах. Сколько будет стоить самый дешевый вариант?



Магазин	Стоимость одного рулона (руб.)	Стоимость одной упаковки клея (руб.)
1	230	57
2	210	63
3	225	58

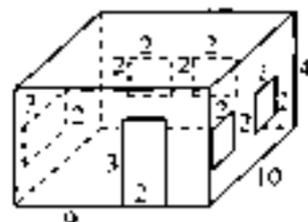
12. Нужно заказать ужин в одном из трех ресторанов на 20 человек. Сколько будет стоить самый экономичный вариант?

Ресторан	Стоимость ужина на одного человека (руб.)	Стоимость аренды (руб.)	Дополнительные условия
1	800	7000	Если стоимость ужина $> 16\ 100$ руб., аренда входит в стоимость заказа
2	750	6000	Если стоимость ужина $> 15\ 500$ руб., аренда входит в стоимость заказа
3	830	5000	Если стоимость ужина $> 14\ 200$ руб., аренда входит в стоимость заказа

13. Нужно заказать ужин в одном из трех ресторанов на 15 человек. Сколько будет стоить самый экономичный вариант?

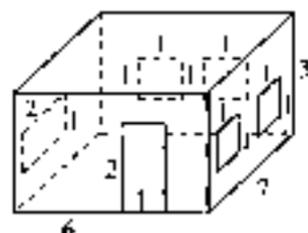
Ресторан	Стоимость ужина на одного человека (руб.)	Стоимость аренды (руб.)	Дополнительные условия
1	500	5000	Если стоимость ужина >7700 руб., аренда входит в стоимость заказа
2	550	5500	Если стоимость ужина >8000 руб., аренда входит в стоимость заказа
3	620	6200	Если стоимость ужина >7500 руб., аренда входит в стоимость заказа

14. Нужно покрасить внешние стены дома. Размеры указаны на рисунке. Краску нужно покупать с запасом 15%. Одной банки краски хватит, чтобы покрасить 4 м<sup>2</sup>. Одна банка краски стоит 76 рублей. Сколько будет стоить покраска дома?



15. Нужно покрасить внешние стены дома. Размеры указаны на рисунке. Краску нужно покупать с запасом 10%. Одной банки

краски хватит, чтобы покрасить  $3 \text{ м}^2$ . Одна банка краски стоит 55 рублей. Сколько будет стоить покраска дома?



16. Для украшения гостиной нужно купить 100 больших цветочных горшков и 150 среднего размера. Горшки можно купить у трех поставщиков:

Поставщик	Стоимость 1 большого горшка (руб.)	Стоимость 1 среднего горшка (руб.)	Стоимость доставки (руб.)
А	100	70	1000
Б	110	65	1500
В	120	60	Бесплатно

Сколько будет стоить самый выгодный вариант?

17. Нужно доставить груз из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 60 км. Заказать данные услуги можно в одной из трех фирм, занимающихся перевозками

Поставщик	Минимальный заказ (км/руб.)	Стоимость каждого следующего км (руб.)	Стоимость погрузки/разгрузки
1	30/850	9	400
2	35/880	10	450
3	42/940	8	500

Сколько будет стоить самый выгодный вариант?

18. Нужно доставить груз из пункта *A* в пункт *B*, расстояние между которыми 80 км. Заказать данные услуги можно в одной из трех фирм, занимающихся перевозками.

Поставщик	Минимальный заказ (км/руб.)	Стоимость каждого следующего км (руб.)	Стоимость погрузки/разгрузки
1	50/780	9	700 (при заказе более чем на 1040 — бесплатно)
2	55/830	8	750
3	60/910	7	850 (при заказе более чем на 1055 — бесплатно)

Сколько будет стоить самый выгодный вариант?

19. Нужно купить 70 саженцев деревьев и 100 цветков в горшках для оформления летнего сада ресторана. Заказ можно сделать в одной из трех фирм. Сколько будет стоить самый выгодный вариант?

Поставщик	Стоимость 1-го саженца дерева (руб.)	Стоимость 1 цветка в горшке (руб.)	Дополнительные условия
1	320	210	Скидка 4% при заказе более чем на 43 200 руб.
2	330	200	—
3	340	190	Скидка 2% при заказе более чем на 42 800 руб.

20. Школа хочет приобрести для своих учеников 150 наборов учебников и 150 наборов школьных принадлежностей. Заказ можно сделать в одной из трех фирм. Найти разницу между самым дорогим и самым дешевым вариантом.

Поставщик	Стоимость одного набора учебников (руб.)	Стоимость одного набора принадлежностей (руб.)	Дополнительные условия
1	560	260	Скидка 10% при заказе более чем на 120 000 руб.
2	540	250	
3	770	За каждый набор учебников – набор принадлежностей в подарок	Скидка 5% при заказе более чем на 116 000 руб.

## B5

**Пример:**

Решите уравнение:  $\log_3(5 - 2x) = 2$ .

**Решение:**

ОДЗ:  $5 - 2x > 0$ ;  $x < 2,5$ .

Решим уравнение:

$$\log_3(5 - 2x) = \log_3 3^2;$$

$$5 - 2x = 9;$$

$$x = -2.$$

Ответ:  $-2$ .

---

1. Решите уравнение:  $\log_2(1 - 4x) = 4$ .
2. Решите уравнение:  $1 - \log_4(2 + x) = 2$ .
3. Решите уравнение:  $\log_2 x - \log_2(3x - 3)$ .
4. Решите уравнение:  $\log_3(x + 1) = \log_3(2x - 3)$ .
5. Решите уравнение:  $\log_3 x = \log_3 \left( \frac{1}{x^2} \right)$ .
6. Решите уравнение:  $\log_2(x + 1) = 1 + \log_2 x$ .
7. Решите уравнение:  $\log_3(2x + 1) = 2 - \log_3 2$ .
8. Решите уравнение:  $2^{3 \log_3 x} = 8$ .

9. Решите уравнение:  $\frac{1}{\log_{x+2} 2} = \log_2 3x$

10. Решите уравнение:  $\log_2 x \cdot \log_x (x+1) = \frac{1}{\log_{(0,5)(x+1)} 2}$

**Пример:**

Решите уравнение:  $\log_2 (x-3) + 3 = \log_2 (x+4)$ .

**Решение:**

ОДЗ:  $\begin{cases} x-3 > 0; \\ x+4 > 0; \end{cases} \begin{cases} x > 3; \\ x > -4; \end{cases} (3; +\infty)$

$$\log_2 (x-3) + \log_2 2^3 = \log_2 (x+4);$$

$$\log_2 (8(x-3)) = \log_2 (x+4);$$

$$8x - 24 = x + 4;$$

$$x = 4$$

Ответ: 4.

11. Решите уравнение:  $\log_4 x + \log_4 (x+4) = 2,5$ .

12. Решите уравнение:  $\log_3 (x+1) + 2 = \log_3 (x+25)$ .

13. Решите уравнение:  $1 - \log_5 x = \log_5 (x-4)$ .

14. Решите уравнение:  $\log_2 x = \log_4 x + 1$ .

15. Решите уравнение:  $\log_3 x + 1 = 2\log_4 (x+6)$ .

16. Решите уравнение:  $3^{\log_3 (x+1)} = 27$ .

17. Решите уравнение:  $2\log_2 x = \log_2 (x+2)$ .

18. Решите уравнение:  $\log_2 \left( \frac{x+1}{2} \right) + \frac{1}{\log_2 3} = 4^{2 \log_2 x^3} - 1$ .

19. Решите уравнение.  $2 \ln x \cdot \log_3 e^3 = x + 2$ .

20. Решите уравнение.  $4 \lg x \cdot \log_2 1000 - 3 = x^2$ .

**Пример:**

Решите неравенство:  $\frac{x^2(x-1)(x-3)(x+1)^4}{x-2} \geq 0$ .

**Решение:**

Приравняем каждый множитель числителя и знаменателя к «0». Если множитель в четной степени, поставим рядом с полученным значением «!»;

$$x^2 = 0; x = 0; !$$

$$x - 1 = 0; x = 1;$$

$$x - 3 = 0; x = 3,$$

$$(x + 1)^4 = 0; x = -1; !$$

$$x - 2 = 0; x = 2.$$

Поставим получившиеся значения на ось  $x$ .

□ Рассмотрим получившиеся значения  $x$ , стоящие в числителе (0; 1; 3; -1):

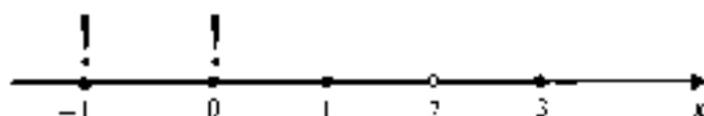
- если знак неравенства нестрогий (« $\geq$ »; « $\leq$ »), то на ось ставим «жирные точки»;
- если знак неравенства строгий (« $>$ »; « $<$ »), то на ось ставим «выколотые точки».

□ Рассмотрим получившиеся значения  $x$ , стоящие в знаменателе (2):

- значения знаменателя всегда обозначаются «выколотыми точками»



Если у каких-либо значений стояли «!», то их также ставим на ось:



Возьмем любое число в самом правом промежутке (в данном случае:  $[3; +\infty)$ )

например: 1000.

Подставим 1000 в неравенство и определим знаки каждого множителя числителя и знаменателя:

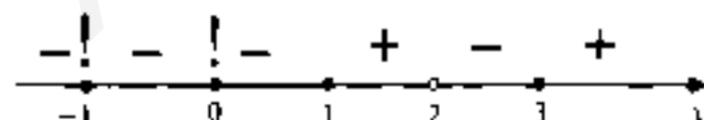
$$\frac{1000^2(1000-1)(1000-3)(1000+1)^4}{1000-2};$$

$$\frac{+(+)(+)(+)}{+}$$

Общий знак получается «+», значит, на этом промежутке на оси ставим знак «+»:



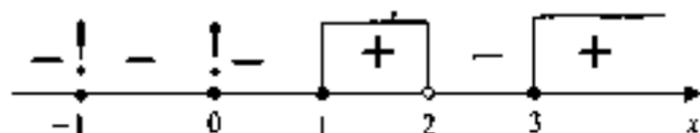
Далее, если нет «!» над числом, знаки чередуются, если стоит «!» — знаки не изменяются:



Смотрим на знак неравенства:

- если знак " $\geq$ " или " $>$ ", то решениями являются те промежутки, над которыми стоит «+»;
- если знак " $\leq$ " или " $<$ ", то решениями являются те промежутки, над которыми стоит «-».

В данном задании знак неравенства "≥", значит, решениями являются те промежутки, над которыми стоит «+».



Если имеются «жирные» точки на оси, не входящие в промежутки, то они также являются решениями неравенства.

В данном случае имеем две точки: 1 и 0.

Получаем решение:  $\{-1\}; \{0\}; [1; 2); [3; +\infty)$ .

Ответ:  $\{-1\}; \{0\}; [1; 2); [3; +\infty)$ .

21. Решите неравенство:  $x(x+1)(x-2) \leq 0$ .

22. Решите неравенство:  $\frac{(x-1)^2(x-3)}{x-2} \leq 0$ .

23. Решите неравенство:  $\frac{(2-x)(x-6)}{x-8} > 0$ .

24. Решите неравенство:  $\frac{(7-x)(x-1)^2(x-2)}{x-3} < 0$ .

25. Решите неравенство:  $\frac{-x^2(x+1)(x-3)}{x+2} \geq 0$ .

26. Решите неравенство:  $\frac{x(x-1)(x+2)}{(x+2)^2} < 0$ .

27. Решите неравенство:  $\frac{(1-x)(x-3)^2(4-x)}{7-x} > 0$ .

28. Решите неравенство:  $\frac{(4-x)(1-x)(3-x)^2}{x+2} < 0$ .

29. Решите неравенство:  $\frac{|x-3|(4-x)(x-2)^2}{(x+1)(x+2)^2} > 0$ .

30. Решите неравенство:  $\frac{(x-2)(1-x)(x-3)^2}{(x+3)(x+4)} \geq 0$ .

**Пример:**

Решить уравнение:  $\sqrt{x+3} = x+1$ .

**Решение:**

ОДЗ:  $x+3 \geq 0$ ;  $x \geq -3$ .

Доп. условие:  $x+1 \geq 0$ ;  $x \geq -1$ .

Возведем правую и левую части в квадрат:

$$(\sqrt{x+3})^2 = (x+1)^2,$$

$$x+3 = x^2 + 2x + 1;$$

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

$x_1 = -2$  — не подходит по доп. условию;

$x_2 = 1$

Ответ: 1.

31. Решить уравнение:  $\sqrt{2x+1} = x-1$ .

32. Решить уравнение:  $\sqrt{3x+1} = 2x$ .

33. Решить уравнение:  $\sqrt{3x-2} = 4x-3$ .

34. Решить уравнение:  $\sqrt{x+6} = 2x-3$ .

35. Решить уравнение:  $\sqrt{x+5} = x-1$ .

**Пример:**Решить уравнение:  $2^{x+4} + 2^{x+1} = 72$ .**Решение:**

$$2^{x+4} + 2^{x+1} = 72;$$

$$2^x(2^4 + 2^1) = 72;$$

$$2^x \cdot 18 = 72;$$

$$2^x = 4;$$

$$2^x = 2^2;$$

$$x = 2.$$

Ответ: 2.

36. Решить уравнение:  $3^{x^2+x} = 27$ .37. Решить уравнение:  $3^{x-2} + 3^x = 90$ .38. Решить уравнение:  $2^{x+3} - 2^x = 56$ .39. Решить уравнение:  $5^{3x} - 5^{2x+1} = -4$ .40. Решить уравнение:  $6^x + 6^{x-1} = 42$ .**Пример:**Решить неравенство:  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \geq \frac{1}{4}$ .**Решение:**

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Снимаем основание по следующему правилу:

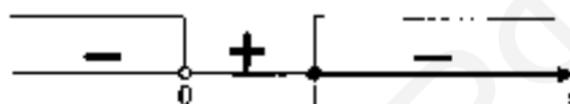
Имеем  $a^x > a^y$ :□ если  $a > 1$ , то  $x > y$ ;□ если  $0 < a < 1$ , то  $x < y$ .

Основания  $< 1$ , поэтому, снимая их, мы должны поменять знак неравенства:

$$\frac{x+1}{x} \leq 2;$$

$$\frac{x+1-2x}{x} \leq 0;$$

$$\frac{1-x}{x} \leq 0.$$



Получаем  $(-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$ .

Ответ:  $(-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$ .

41. Решить неравенство:  $3^{x+2} \geq 27$ .

42. Решить неравенство:  $4^{\frac{x^2-x}{-2x+4}} \leq \frac{1}{4}$ .

43. Решить неравенство:  $\left(\frac{1}{49}\right)^{x-2} \leq \left(\frac{1}{7}\right)^{x^2+3x-6}$ .

44. Решить неравенство:  $3^{\frac{x-1}{x+1}} < \left(\frac{1}{9}\right)^{x-3}$ .

45. Решить неравенство:  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{x-1}} \geq 8$ .

**Пример:**

Решить уравнение:  $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4} = 0$ .

**Решение:**

ОДЗ:  $x^2 - 5x + 4 \geq 0$ ;  $(x-1)(x-4) \geq 0$ .

Получаем:  $(-\infty; 1]$ ;  $[4; +\infty)$ .

Чтобы произведение множителей равнялось 0, нужно, чтобы хотя бы один из множителей равнялся 0:

$$1) x - 3 = 0;$$

$x = 3$  — не подходит по ОДЗ;

$$2) x^2 - 5x + 4 = 0;$$

$$\begin{cases} x = 1; \\ x = 4. \end{cases}$$

Ответ: 1; 4.

$$46. \text{ Решить уравнение: } (x^2 - 2x - 3)\sqrt{x} = 0.$$

$$47. \text{ Решить уравнение: } \frac{x^2 + x}{\sqrt{x+1}} = 0.$$

$$48. \text{ Решить уравнение: } (x^2 - 3x - 4)\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 0.$$

$$49. \text{ Решить уравнение: } x\sqrt{x^2 - 2x} = 0.$$

$$50. \text{ Решить уравнение: } (x^2 - 4x)\sqrt{-x^2 + 4x - 4} = 0.$$

**Пример:**

Решить уравнение:  $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$ .

**Решение:**

$$3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$$

Сделаем замену.

$$t = 3^x; t > 0;$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

 $t_1 = -1$  — не подходит, так как  $t > 0$ . $t_2 = 3$ .Вернемся к переменной  $x$ :

$$3^x = 3;$$

$$x = 1$$

**Ответ:** 1.51. Решить уравнение:  $4^x + 2^{x+2} - 5 = 0$ .52. Решить уравнение:  $3^{2y} - 3^x = 0$ .53. Решить уравнение:  $25^x + 5^{x+1} - 6 = 0$ .54. Решить уравнение:  $4^x - 7 \cdot 2^y - 8 = 0$ 55. Решить уравнение:  $9^x - 3^{x+\log_3 8} - 9 = 0$ .**Пример:**Решите уравнение:  $|x + 6| = 3$ . Если уравнение имеет несколько корней, в ответ запишите наименьший корень.**Решение:**

$$x + 6 = 3 \text{ или } x + 6 = -3;$$

$$x = -3 \text{ или } x = -9.$$

**Ответ:** 956. Решите уравнение:  $|x + 5| = 1$ . Если уравнение имеет несколько корней, в ответ запишите наименьший корень.

57. Решите уравнение:  $|2x - 3| = 5$ . Если уравнение имеет несколько корней, в ответ записать наименьший корень.
58. Решите уравнение:  $|-2x - 4| = 2$ . Если уравнение имеет несколько корней, в ответ записать наименьший корень.
59. Решите уравнение:  $|4x + 2| = 6$ . Если уравнение имеет несколько корней, в ответ записать наибольший корень.
60. Решите уравнение:  $|x - 7| = 9$ . Если уравнение имеет несколько корней, в ответ записать наибольший корень.

**Пример:**

Решить уравнение:  $|2x - 3| = x$ . Если уравнение имеет несколько корней, в ответ записать наибольший корень.

**Решение:**

Так как  $|2x - 3| \geq 0$  при  $x \in \mathbb{R}$ , значит,  $x \geq 0$ ;

$$\begin{cases} 2x - 3 = x, & \begin{cases} x = 3, \\ x = 1. \end{cases} \\ 2x - 3 = -x; \end{cases}$$

Выбираем наибольший корень: 3.

Ответ: 3.

61. Решить уравнение:  $|2x + 2| = 4x$ . Если уравнение имеет несколько корней, в ответ записать наименьший корень.
62. Решить уравнение:  $|x - 6| = 2x$ . Если уравнение имеет несколько корней, в ответ записать наименьший корень.
63. Решить уравнение:  $|4 - x| = x$ . Если уравнение имеет несколько корней, в ответ записать наибольший корень.
64. Решить уравнение:  $|3 - 2x| = x + 6$ . Если уравнение имеет несколько корней, в ответ записать наибольший корень.

6.5. Решить уравнение:  $|6 - 2x| = 6 - x$ . Если уравнение имеет несколько корней, в ответ записать наибольший корень.

**Пример:**

Решить уравнение:  $|x - x - 1| = 1$ .

**Решение:**

Уравнения, в которых имеется несколько отдельных модулей, будем решать следующим способом.

1. Каждое подмодульное выражение приравняем к 0:
  - $x = 0$ ;
  - $x + 1 = 0$ ,  $x = -1$ .
2. Нанесем полученные точки на ось.
3. Над каждым полученным промежуток поставим «+» или «-» для каждого подмодульного выражения.
4. В зависимости от знаков на каждом промежутке снимем модули (если на промежутке знак «-», тогда знаки в подмодульном выражении меняются; если на промежутке знак «+», тогда знаки в подмодульном выражении не меняются).

$x$	-	-	+
$x + 1$	-	+	+
	-1	0	
$x < -1$	$-1 < x < 0$	$x \geq 0$	
$-x - x - 1 = 1$	$-x + x + 1 = 1$	$x + x + 1 = 1$	
$-2x = 2$	$0x = 0$	$2x = 0$	
$x = -1$ — видим, что полученный корень не принадлежит промежутку $(-\infty; -1)$	$x$ — любое число; так как данный промежуток $[-1; 0)$ и $x$ — любое число, то окончательный ответ: $[-1; 0)$	$x = 0$ — видим, что полученный корень принадлежит промежутку $[0; +\infty)$	

Объединяем ответы на промежутках и получаем общий ответ:

$$[-1; 0]$$

Ответ:  $[-1; 0]$ .

---

5. Решить уравнение:  $|x| + |x + 2| = 4$ .

6. Решить уравнение:  $|-x| + |x + 3| = 5$ .

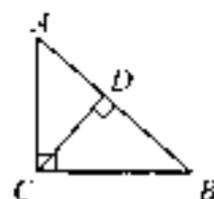
7. Решить уравнение:  $|x + 1| + |x + 2| = 3$ .

8. Решить уравнение:  $|2 - x| + |t - x| = 5$ .

9. Решить уравнение:  $|x| + |y - 5| = 7$ .

**B6****Пример:**

Дано:



$$\sin \angle B = \frac{1}{3}.$$

$$AC = 12.$$

Найти  $AD$ .**Решение:**

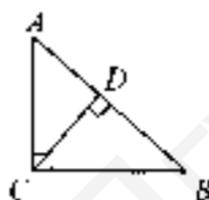
$$\sin \angle B = \cos(90^\circ - \angle B) = \cos \angle A = \frac{1}{3}.$$

$$\cos \angle A = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{12} = \frac{1}{3}.$$

$$AD = 4.$$

Ответ: 4.

1. Дано:

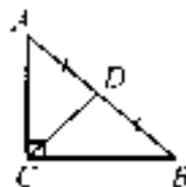


$$\cos \angle A = \frac{1}{4}.$$

$$AD = 4.$$

Найти  $AB$ .

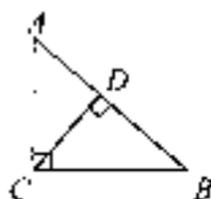
2. Дано:



$$\angle A = 35^\circ$$

Найти  $\angle ADC$

3. Дано:

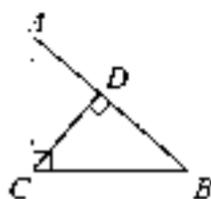


$$AD = 5.$$

$$CD = 2\sqrt{5}.$$

Найти  $DB$ .

4. Дано:

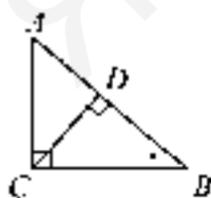


$$DB = 2.$$

$$CH = \sqrt{10}$$

Найти  $AD$ .

5. Дано:

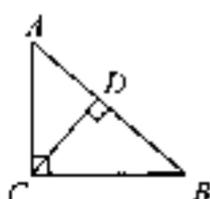


$$CB = 2\sqrt{5}.$$

$$\cos \angle B = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Найти  $AD$ .

6. Дано:

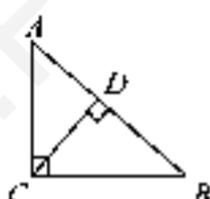


$$AD = 3.$$

$$AB = 12.$$

Найти  $AC$ .

7. Дано:

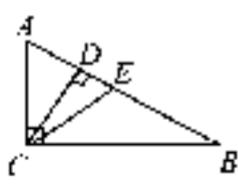


$$AC = \sqrt{41}.$$

$$CD = 5.$$

Найти  $DB$ .

8. Дано:

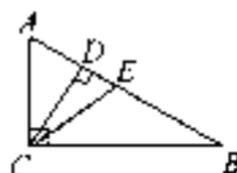


$$\angle DCE = 10^\circ.$$

$$AE = EB.$$

Найти  $\angle A$ .

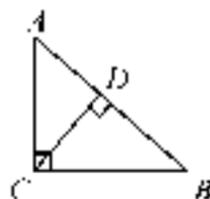
9. Дано.



$$\angle A = 56^\circ,$$

$$AE = EB.$$

Найти  $\angle DCE$ .



$$AD = 9,$$

$$CB = \sqrt{58}$$

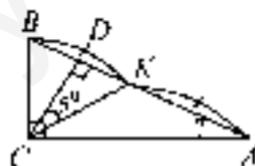
Найти  $DB$ .

10. Дано:

**Пример:**

В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с прямым углом  $C$  проведены медиана  $CK$  и высота  $CD$ , причем точка  $D$  лежит на отрезке  $BK$ ,  $\angle DCK = 5^\circ$ . Найти  $\angle A$ .

**Решение:**



$\angle DKC = \angle KCA + \angle KAC$  (по теореме о внешнем угле).

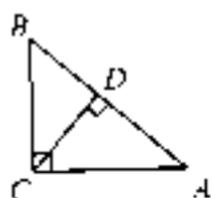
$\angle KCA = \angle KAC$  ( $BK = KA \Rightarrow \{ \cdot \} K$  — центр описанной окружности  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow BK = KA = CK \Rightarrow \triangle CKA$  — равносторонний  $\Rightarrow \angle KCA = \angle KAC$ )  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle DKC = 2\angle KAC$ .

$$\angle DKC = 180^\circ - \angle KDC - \angle KCD = 180^\circ - 90^\circ - 5^\circ = 85^\circ.$$

$$\text{Получим: } 85^\circ = 2\angle KAC: \angle KAC = 42,5^\circ.$$

Ответ: 42,5.

11. Дано:

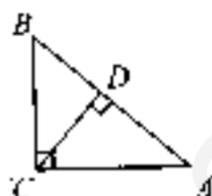


$$CD = \frac{3\sqrt{15}}{8}$$

$$\sin \angle A = \frac{1}{4}$$

Найти  $AB$ .

12. Дано:

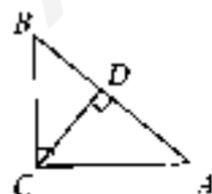


$$AC = 6.$$

$$AD = 3.$$

Найти  $AB$ .

13. Дано

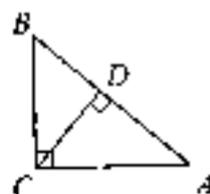


$$BD = 2.$$

$$AB = 8.$$

Найти  $BC$ .

14. Дано:

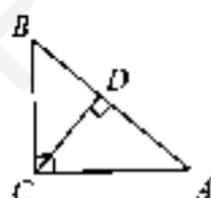


$$BD = 12.$$

$$AD = 3.$$

Найти  $CD$ .

15. Дано.



$$CD = 8.$$

$$AD = 4.$$

Найти  $BD$ .

16. Катеты  $AC:BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $C$  относятся как  $5:12$ .  $AB = 26$ . Найти катет  $BC$ .
17. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с прямым углом  $C$  проведены медиана  $CK$  и высота  $CD$ , причем точка  $D$  лежит на отрезке  $BK$ .  $\angle DCK = 7^\circ$ . Найти  $\angle A$ .
18. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с прямым углом  $C$  проведены медиана  $CK$  и высота  $CD$ , причем точка  $D$  лежит на отрезке  $BK$ .  $\angle DCK = 4^\circ$ . Найти  $\angle A$ .
19. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с прямым углом  $C$  синус угла  $A$  равен  $\frac{2}{3}$ . К гипотенузе проведена высота  $CD$ .  $AD = \frac{10}{3}$ . Найти  $AB$ .
20. Гипотенуза  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  равна  $45$ .  $CD$  — высота треугольника.  $AD = 5$ . Найти  $AC$ .

**Пример:**

Дано:  $\cos x = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ;  $x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ . Найти  $\sin x$ .

**Решение:**

Из основного тригонометрического тождества получим:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x;$$

$$\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}.$$

Из условия  $x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$  получаем, что  $x$  лежит в четвертой четверти, а в этой четверти  $\sin x < 0$ .

Получим:

$$\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x};$$

$$\sin x = -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2};$$

$$\sin x = -\frac{1}{4}.$$

Ответ:  $-0,25$ .

1. Дано:  $\sin x = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ;  $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ . Найти  $\operatorname{tg} x$ .
2. Дано:  $\cos x = \frac{3}{5}$ ;  $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ . Найти  $\sin x$ .
3. Дано:  $\sin x = -\frac{5}{13}$ ;  $x \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$ . Найти  $\operatorname{ctg} x$ .
4. Дано:  $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{15}}$ ;  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ . Найти  $\sin x$ .
5. Дано:  $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2\sqrt{6}}$ ;  $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ . Найти  $\cos x$ .

**Пример:**

Вычислить:  $\frac{2 \sin 22,5^\circ \cdot \cos 22,5^\circ}{\cos^2 22,5^\circ - \sin^2 22,5^\circ}$ .

**Решение:**

$$\frac{2 \sin 22,5^\circ \cos 22,5^\circ}{\cos^2 22,5^\circ - \sin^2 22,5^\circ} = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$

Ответ: 1.

6. Вычислить:  $4 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + 4 \cos^4\left(\frac{x}{2}\right) - 4 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1$ .

7. Вычислить.

$$16 \sin 22,5^\circ \cos 22,5^\circ \cos 45^\circ (\cos^2 45^\circ - 4 \sin^2 22,5^\circ \cos^2 22,5^\circ)$$

8. Вычислить:  $\cos 10^\circ \sin 30^\circ \cos 50^\circ - \sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ$ .

9. Вычислить:  $(\cos^2 40^\circ - 2 \sin^2 15^\circ + \sin^2 40^\circ)^2$ .

10. Вычислить:  $\sin 15^\circ \cos 30^\circ \sin 45^\circ + \cos 15^\circ \sin 30^\circ \sin 45^\circ$ .

**Пример:**Вычислить:  $\sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ$ .**Решение:**

$$\sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ = \sin^2 35^\circ + \sin^2 (90^\circ - 35^\circ) = \sin^2 35^\circ + \cos^2 35^\circ = 1$$

Ответ: 1.

11. Вычислить:  $\sin^2 15^\circ \cdot \sin^2 75^\circ$ .12. Вычислить:  $\sin(90^\circ - x)$ , где  $\cos x = 0,11$ .13. Вычислить:  $\cos(270^\circ + x)$ , где  $\cos x = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .14. Вычислить:  $\sin^2 16^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 74^\circ + \cos^2 74^\circ$ .15. Вычесть:  $(\operatorname{tg}^2 x + 1)(1 - \sin^2 x)$ .**Пример:**Вычислить:  $\frac{12 \sin 25^\circ}{\cos 65^\circ}$ .**Решение:**

Для решения этого задания воспользуемся формулами приведения:

$$\frac{12 \sin 25^\circ}{\cos 65^\circ} = \frac{12 \sin 25^\circ}{\cos(90^\circ - 25^\circ)} = \frac{12 \sin 25^\circ}{\sin 25^\circ} = 12.$$

Ответ: 12.

16. Вычислить:  $\frac{16 \sin 3^\circ \cos 3^\circ}{\cos 84^\circ}$ .

17. Вычислить:  $\frac{\cos^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ}{2 \sin 50^\circ}$ .

18. Вычислить:  $\frac{\cos 5^\circ \cos 6^\circ - \sin 5^\circ \sin 6^\circ}{4 \sin 79^\circ}$ .

19. Вычислить:  $15 \lg 3^\circ \lg 87^\circ$ .

20. Вычислить:  $\frac{25 \sin 10^\circ \lg 18^\circ}{\cos 80^\circ \operatorname{ctg} 72^\circ}$ .

21. Вычислить:  $\frac{\cos^2 10^\circ - \sin^2 10^\circ}{1 - 2 \sin^2 10^\circ}$ .

22. Вычислить:  $\frac{(4 \cos^2 19^\circ - 2)^2}{1 - \sin^2 38^\circ}$ .

23. Вычислить:  $\operatorname{tg}^2 11^\circ \cdot \sin^2 79^\circ + \cos^2 11^\circ$ .

24. Вычислить:  $3 \operatorname{ctg}^2 5^\circ \cdot \cos^2 85^\circ + 3 \sin^2 5^\circ$ .

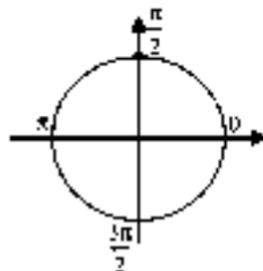
25. Вычислить:  $\frac{5 \operatorname{ctg} 14^\circ}{\operatorname{tg} 256^\circ}$ .

**Пример:**

Решить уравнение:  $\sin 2x = 1$ .

**Решение:**

Определим значения, при которых синус равен единице:



$$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \quad k \in Z;$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k; \quad k \in Z.$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z.$

26. Решить уравнение:  $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

27. Решить уравнение:  $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

28. Решить уравнение:  $\cos x = 1.$

29. Решить уравнение:  $\cos 3x = -\frac{1}{2}.$

30. Решить уравнение:  $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$

31. Решить уравнение:  $\operatorname{tg} 4x = -1.$

32. Решить уравнение:  $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 5.$

33. Решить уравнение:  $\operatorname{ctg} x = -4.$

34. Решить уравнение:  $2 \sin x \cos x = \frac{1}{3}.$

35. Решить уравнение:  $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{4}.$

**Пример:**

Вычислить:  $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}.$

**Решение:**

Разложим подкоренные выражения по формулам «квадрат разности» и «квадрат суммы»:

$$\begin{aligned} \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} &= \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1+\sqrt{2}| - |1-\sqrt{2}| = \\ &= 1+\sqrt{2} - (\sqrt{2}-1) = 1 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} + 1 = 2. \end{aligned}$$

Ответ: 2.

36. Вычислить:  $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ .

37. Вычислить:  $\sqrt{14+6\sqrt{5}} + \sqrt{14-6\sqrt{5}}$ .

38. Вычислить:  $\sqrt{7+2\sqrt{6}} - \sqrt{7-2\sqrt{6}}$ .

39. Вычислить:  $\sqrt{11+4\sqrt{7}} - \sqrt{11-4\sqrt{7}}$ .

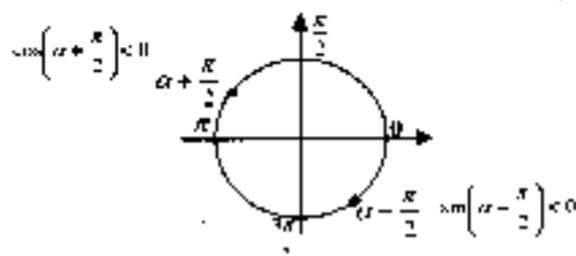
40. Вычислить:  $\sqrt{18+8\sqrt{2}} + \sqrt{18-8\sqrt{2}}$ .

**Пример:**

Вычислить  $\begin{cases} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \\ \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ , если  $\operatorname{ctg} \alpha = -0,3$ .

**Решение:**

Вспользуемся формулами приведения:



$$\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha = -1,3.$$

Ответ:  $-0,3$ .

41. Вычислить  $\frac{\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)}{\sin(\alpha + \pi)}$ .

42. Вычислить  $\frac{\sin(\alpha - \pi)}{\cos(\alpha + 2\pi)}$ , если  $\operatorname{tg}\alpha = -3$ .

43. Вычислить  $2\sin(\alpha + \pi)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ , если  $\sin 2\alpha = 0,5$ .

44. Вычислить  $\frac{\operatorname{tg}(3\pi + 3\alpha)}{\cos\left(3\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)}$ , если  $\cos 3\alpha = 0,2$ .

45. Вычислить  $\frac{\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)}$ .

**Пример:**

Найти значение выражения:  $\frac{x^7 \cdot x^{-1} \cdot x^3}{x^6 \cdot x^{-1}}$ , если  $x = 3$ .

**Решение:**

Упростим выражение по формулам  $\left(x^a \cdot x^b = x^{a+b}; \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}\right)$ :

$$\frac{x^7 \cdot x^{-1} \cdot x^3}{x^6 \cdot x^{-1}} = x^{7-1-6+1+3} = x^2;$$

$$x^2 = 3^2 = 9$$

Ответ: 9

46. Найти значение выражения:  $\frac{x^3 \cdot x^7 \cdot x^3}{x^5 \cdot x^{-3}}$ , если  $x = 2$ .

47. Найти значение выражения:  $\frac{x^2 \cdot x^{-2} \cdot x^3}{x^3 \cdot x^{-3}}$ , если  $x = 2$ .

48. Найти значение выражения:  $\frac{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x^5}}{\sqrt[3]{y^2} \cdot \sqrt[3]{y} \cdot y}$ , если  $y = 4$ .

49. Найти значение выражения:  $x^3 \cdot \sqrt[3]{8x^2} \cdot \sqrt{12x} \cdot \sqrt{3x^3}$ , если  $x = 0,5$ .

50. Найти значение выражения:  $x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{6}{4}} \cdot x^{-\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[4]{8y^3} \cdot \sqrt[4]{2y^4} \cdot x^3$ , если  $x = 20$ .

51. Найти значение выражения:  $x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x^{-2} \cdot \sqrt{x}$ .

52. Найти значение выражения:  $x^5 \cdot x^5 \cdot x^{-\frac{8}{5}} \cdot x^{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt[5]{32x^3}$ , если  $x = 11$ .

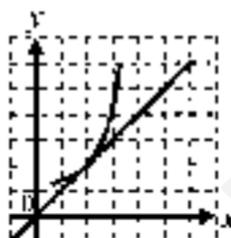
53. Найти значение выражения:  $\frac{9x^4 \cdot x^4 \cdot x^{-4} \cdot x^4 \cdot x^5}{\sqrt[4]{81x^1}}$ , если  $x = 5$ .

54. Найти значение выражения:  $x^3 \cdot x^3 \cdot x^{-3} \cdot x^3 \cdot x^{-3}$ , если  $x = 6$ .

55. Найти значение выражения:  $\frac{4x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt{x^4}}{\sqrt{8x} \cdot \sqrt{2x^5}}$

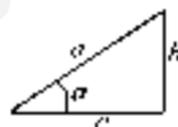
**Пример:**

На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику в точке, абсцисса которой равна 2. Найти значение производной функции  $y = f(x)$  в точке 2.

**Решение:**

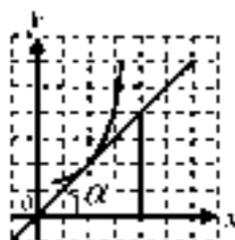
Известно, что тангенс угла наклона касательной в точке равен производной функции в этой точке:  $y'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ .

Тангенс угла наклона равен отношению противолежащего катета к прилежащему в прямоугольном треугольнике.



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{c}.$$

Найдем такой треугольник, чтобы гипотенузой являлась нивга касательная:

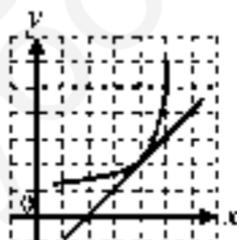


Из полученного треугольника находим тангенс угла наклона касательной к положительному направлению оси  $x$ .

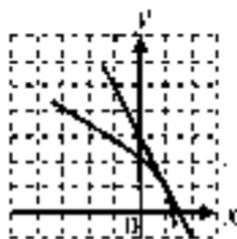
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{4} = 1$ , значит, производная в точке  $x = 2$  равна 1.

Ответ: 1

1. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику в точке, абсцисса которой равна 4. Найти значение производной функции  $y = f(x)$  в точке 4.



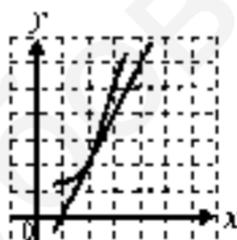
2. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику в точке, абсцисса которой равна 1. Найти значение производной функции  $y = f(x)$  в точке 1.



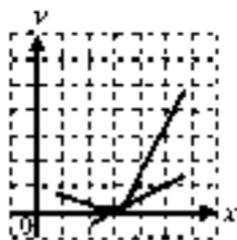
3. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику в точке, абсцисса которой равна 3. Найти значение производной функции  $y = f(x)$  в точке 3.



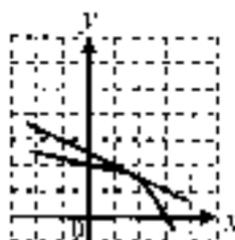
4. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику в точке, абсцисса которой равна 2. Найти значение тангенса угла наклона касательной функции  $y = f(x)$  в точке 2.



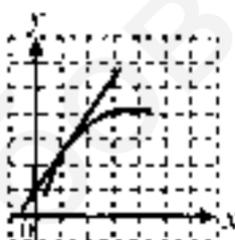
5. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику в точке, абсцисса которой равна 3. Найти значение тангенса угла наклона касательной функции  $y = f(x)$  в точке 3.



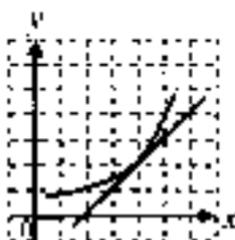
6. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику в точке, абсцисса которой равна 2. Найти значение производной функции  $y = f(x)$  в точке 2.



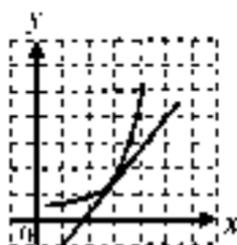
7. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику в точке, абсцисса которой равна 1. Найти угловой коэффициент касательной функции  $y = f(x)$  в точке 1.



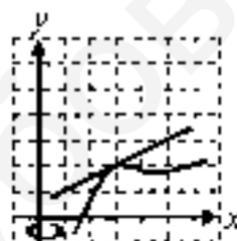
8. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику в точке, абсцисса которой равна 4. Найти значение тангенса угла наклона касательной функции  $y = f(x)$  в точке 4



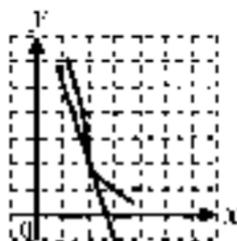
9. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику в точке, абсцисса которой равна 3. Найти угловой коэффициент касательной функции  $y = f(x)$  в точке 3.



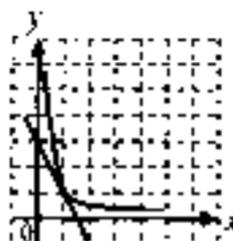
10. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику в точке, абсцисса которой равна 3. Найти угловой коэффициент касательной функции  $y = f(x)$  в точке 3.



11. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику в точке, абсцисса которой равна 2. Найти угловой коэффициент касательной функции  $y = f(x)$  в точке 2.



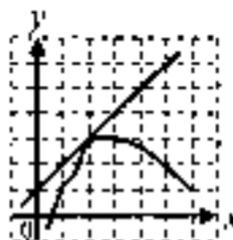
12. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику в точке, абсцисса которой равна 1. Найти угловой коэффициент касательной функции  $y = f(x)$  в точке 1.



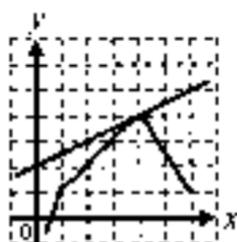
13. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику в точке, абсцисса которой равна 2. Найти угловой коэффициент касательной функции  $y = f(x)$  в точке 2.



14. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику в точке, абсцисса которой равна 2. Найти угловой коэффициент касательной функции  $y = f(x)$  в точке 2.

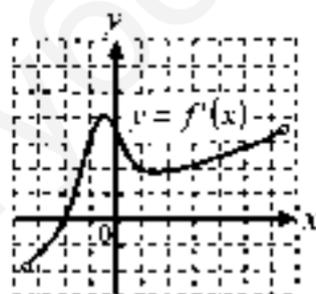


15. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику в точке, абсцисса которой равна 4. Найти угловой коэффициент касательной функции  $y = f(x)$  в точке 4.



**Пример:**

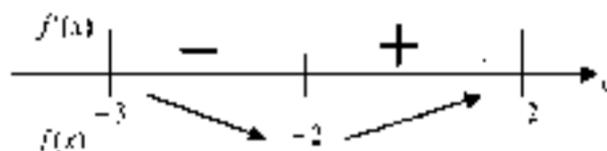
На рисунке изображен график производной функции  $y = f'(x)$ . При каком значении  $x$  эта функция принимает свое наименьшее значение на отрезке  $[-3; 2]$ ?



**Решение:**

Нам известно, что функция убывает, когда производная функции отрицательна, и функция возрастает, когда производная функции положительна.

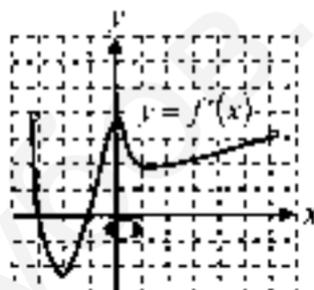
Из графика видно, что на отрезке  $[-3; 2]$  производная отрицательна на промежутке  $[-3; -2]$  и производная положительна на промежутке  $(-2; 2]$ .



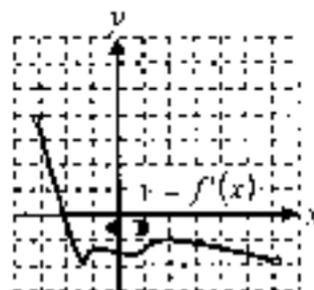
Из рисунка видно, что график сначала убывал, а начиная с  $x = -2$  начал возрастать. И получаем наименьшее значение функции в точке  $x = -2$ .

Ответ:  $-2$ .

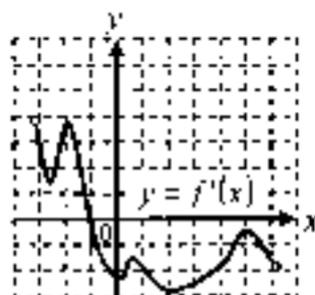
16. На рисунке изображен график производной функции  $y = f'(x)$ . При каком значении  $x$  эта функция принимает свое наибольшее значение на отрезке  $[-1; 4]$ ?



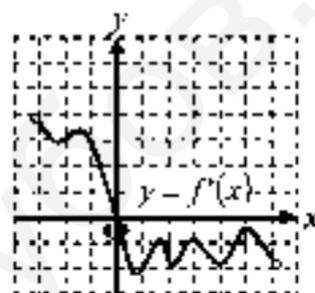
17. На рисунке изображен график производной функции  $y = f'(x)$ . При каком значении  $x$  эта функция принимает свое наименьшее значение на отрезке  $[-1; 4]$ ?



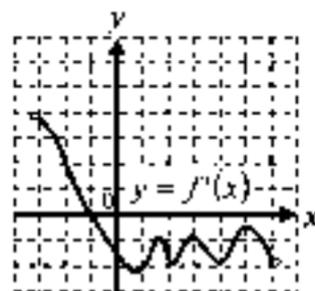
18. На рисунке изображен график производной функции  $y = f'(x)$ . При каком значении  $x$  эта функция принимает свое наименьшее значение на отрезке  $[-1; 5]$ ?



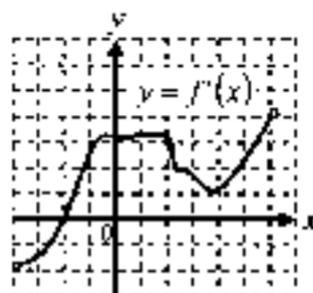
19. На рисунке изображен график производной функции  $y = f'(x)$ . При каком значении  $x$  эта функция принимает свое наибольшее значение на отрезке  $[-2; 3]$ ?



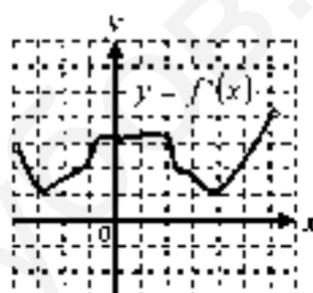
20. На рисунке изображен график производной функции  $y = f'(x)$ . При каком значении  $x$  эта функция принимает свое наибольшее значение на отрезке  $[-2; 5]$ ?



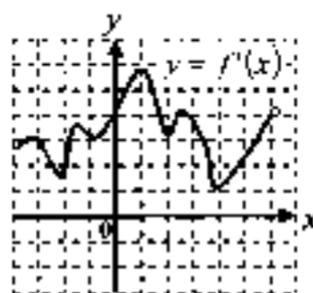
21. На рисунке изображен график производной функции  $y = f'(x)$ . При каком значении  $x$  эта функция принимает свое наименьшее значение на отрезке  $[-3; 5]$ ?



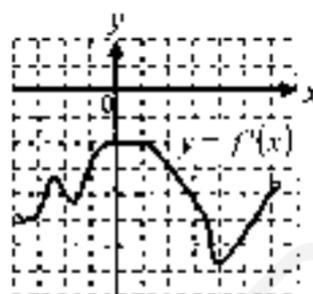
22. На рисунке изображен график производной функции  $y = f'(x)$ . При каком значении  $x$  эта функция принимает свое наименьшее значение на отрезке  $[-3; 3]$ ?



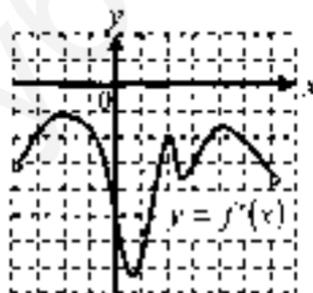
23. На рисунке изображен график производной функции  $y = f'(x)$ . При каком значении  $x$  эта функция принимает свое наибольшее значение на отрезке  $[-2; 4]$ ?



24. На рисунке изображен график производной функции  $y = f'(x)$ . При каком значении  $x$  эта функция принимает свое наибольшее значение на отрезке  $[ -3; 5 ]$ ?

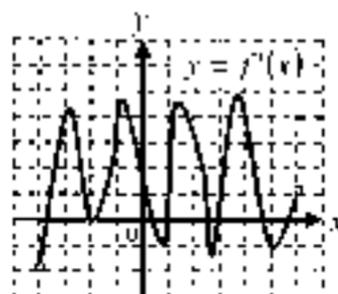


25. На рисунке изображен график производной функции  $y = f'(x)$ . При каком значении  $x$  эта функция принимает свое наибольшее значение на отрезке  $[ -1; 3 ]$ ?



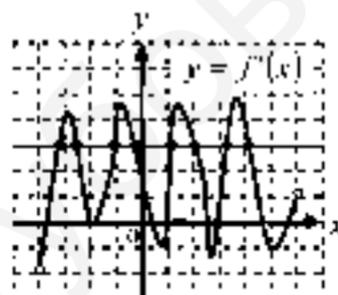
### Пример:

На рисунке изображен график производной функции  $f'(x)$ , определенной на интервале  $(-4; 6)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции  $y = f(x)$  параллельна прямой  $y = 3x + 8$  или совпадает с ней.



**Решение:**

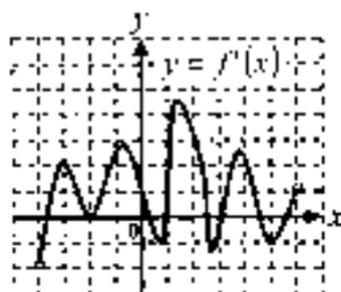
Угловый коэффициент прямой  $y = 3x + 8$  равен 3. Мы знаем, что угловой коэффициент касательной в точке равен производной функции в этой точке. Чтобы прямая была параллельна другой прямой или совпадала с ней, нужно, чтобы у них совпадали угловые коэффициенты. Поэтому смотрим на графике в скольких точках наша производная принимает значение  $y = f'(x) = 3$ .



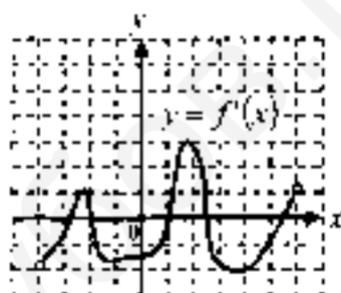
Видим, что наша производная равна 3 в 8 точках, а, значит, будет 8 прямых, параллельных  $y = 3x + 8$  или совпадающих с ней.

Ответ: 8.

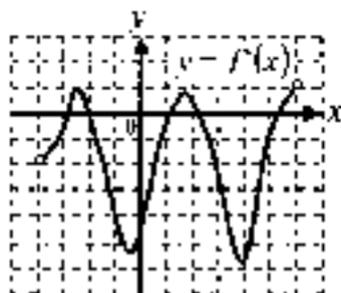
26. На рисунке изображен график производной функции  $f'(x)$ , определенной на интервале  $(-4; 6)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции  $y = f(x)$  параллельна прямой  $y = 4x + 1$  или совпадает с ней.



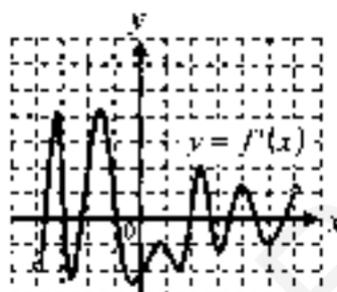
27. На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-4; 6)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции  $y = f(x)$  параллельна прямой  $y = 2x - 100$  или совпадает с ней.



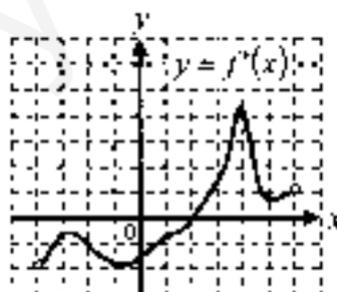
28. На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-4; 6)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции  $y = f(x)$  параллельна прямой  $y = 3$  или совпадает с ней.



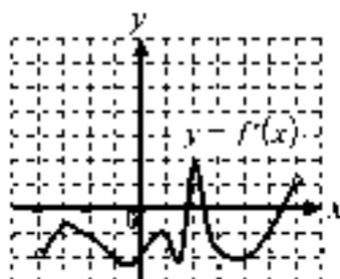
29. На рисунке изображен график производной функции  $f'(x)$ , определенной на интервале  $(-4; 6)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции  $y = f(x)$  параллельна прямой  $y = 2$  или совпадает с ней.



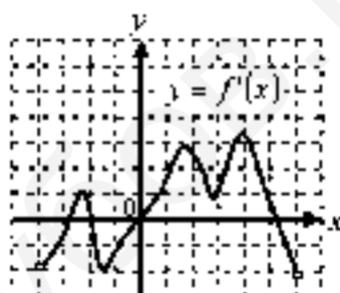
30. На рисунке изображен график производной функции  $f'(x)$ , определенной на интервале  $(-4; 6)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции  $y = f(x)$  параллельна прямой  $y = 0$  или совпадает с ней.



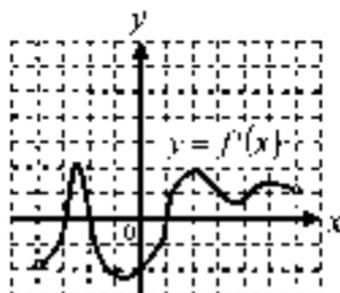
31. На рисунке изображен график производной функции  $f'(x)$ , определенной на интервале  $(-4; 6)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции  $y = f(x)$  параллельна прямой  $y = 1000$  или совпадает с ней.



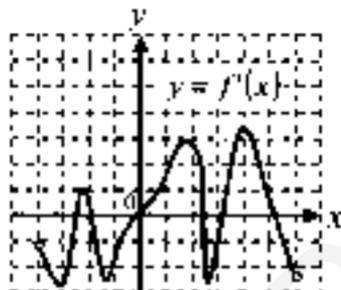
32. На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-4; 6)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции  $y = f(x)$  параллельна прямой  $y = -x + 7$  или совпадает с ней.



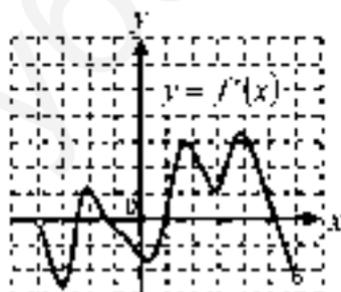
33. На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-4; 6)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции  $y = f(x)$  параллельна прямой  $y = 15$  или совпадает с ней.



34. На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-4; 6)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции  $y = f(x)$  параллельна прямой  $y = -2x - 4$  или совпадает с ней.

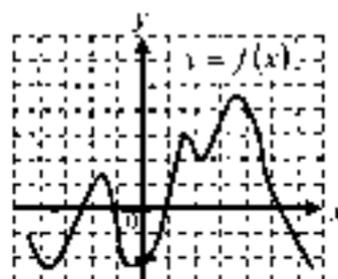


35. На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-4; 6)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции  $y = f(x)$  параллельна прямой  $y = -x + 2$  или совпадает с ней.



**Пример:**

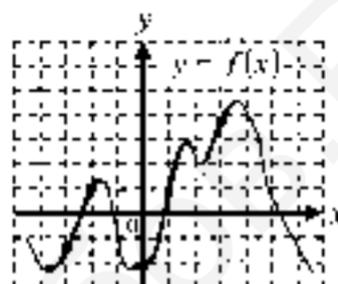
На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ . Найдите количество целых точек на отрезке  $[-4, 6]$ , в которых производная функции положительна.



**Решение:**

Когда производная положительна, сама функция возрастает.

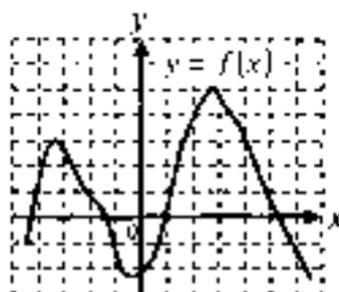
Посчитаем количество целых точек, которые принадлежат возрастаниям промежуткам функции:



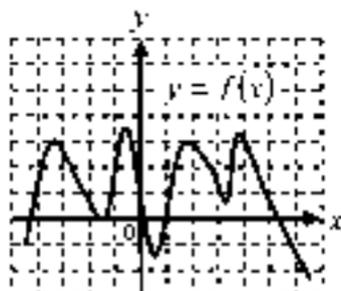
Видим, что таких точек 5.

Ответ: 5.

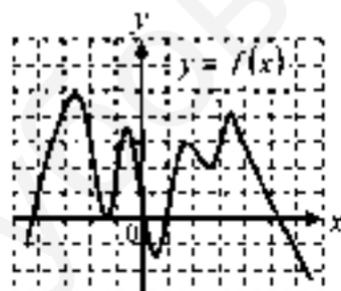
36. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ . Найти количество целых точек на отрезке  $[-4; 6]$ , в которых производная функции положительна.



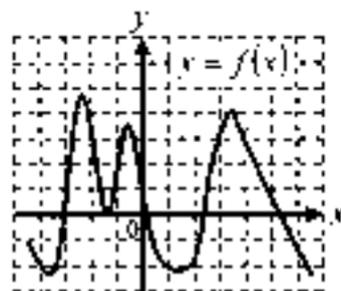
37. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ . Найти количество целых точек на отрезке  $[-4; 6]$ , в которых производная функции положительна.



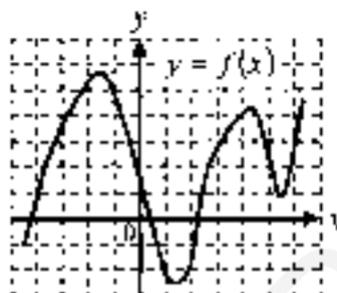
38. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ . Найти количество целых точек на отрезке  $[-4; 6]$ , в которых производная функции отрицательна.



39. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ . Найти количество целых точек на промежутке  $(-4; 6)$ , в которых производная функции отрицательна.

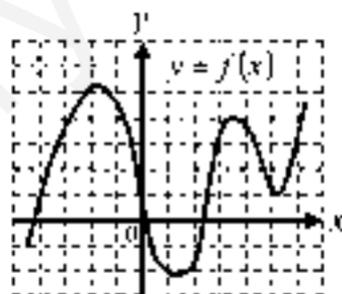


40. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ . Найти количество целых точек на промежутке  $[-4; 6]$ , в которых производная функции положительна.



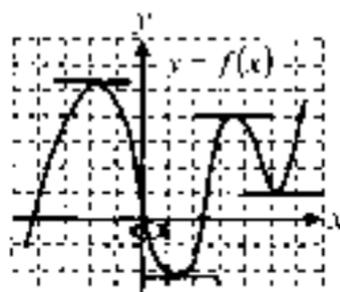
**Пример:**

- На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ . Найти количество точек на отрезке  $[-4; 6]$ , в которых касательная к графику функции параллельна прямой  $y = 1$  или совпадает с ней.



**Решение:**

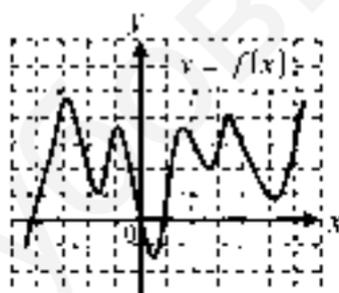
- Прямая  $y = 1$  параллельна оси  $Ox$ , значит, и касательные должны быть параллельны оси  $Ox$ . Касательные будут параллельны оси  $Ox$  в точках максимума и минимума.



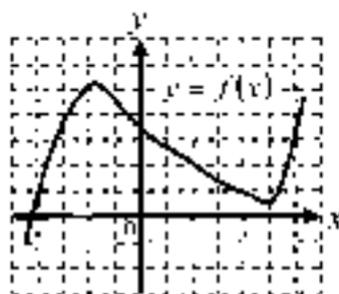
Видим, что таких касательных 4.

Ответ: 4.

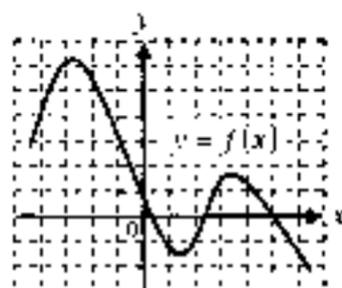
41. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ . Найти количество точек на отрезке  $[-4; 6]$ , в которых касательная к графику функции параллельна прямой  $y = 0$  или совпадает с ней.



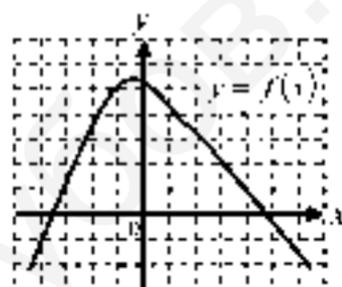
42. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ . Найти количество точек на отрезке  $[-4; 6]$ , в которых касательная к графику функции параллельна прямой  $y = 100$  или совпадает с ней.



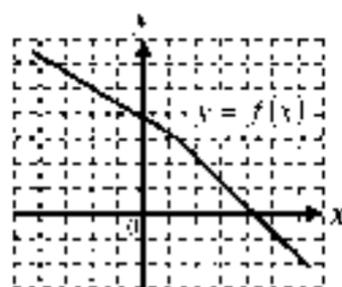
43. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ . Найти количество точек на отрезке  $[-4; 6]$ , в которых касательная к графику функции параллельна прямой  $y = 5$  или совпадает с ней.



44. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ . Найти количество точек на отрезке  $[-4; 6]$ , в которых касательная к графику функции параллельна прямой  $y = 25$  или совпадает с ней.



45. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ . Найти количество точек на отрезке  $[-4; 6]$ , в которых касательная к графику функции параллельна прямой  $y = 7$  или совпадает с ней.



**Пример:**

Прямая  $y = x + 4$  параллельна касательной к графику функции  $y = x^2 - 5x + 25$ . Найти абсциссу точки касания.

**Решение:**

Так как прямая  $y = x + 4$  параллельна касательной к графику функции  $y = x^2 - 5x + 25$ , то производная данной функции  $y = x^2 - 5x + 25$  равна угловому коэффициенту прямой  $y = x + 4$ :

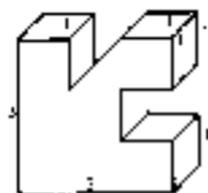
$$\begin{aligned} y' = (x^2 - 5x + 25)' &= 2x - 5 = 1; \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Ответ: 3.

46. Прямая  $y = 2x$  параллельна касательной к графику функции  $y = x^2 - 6x + 3$ . Найти абсциссу точки касания.
47. Прямая  $y = 3x + 3$  параллельна касательной к графику функции  $y = x^2 - 7x + 12$ . Найти абсциссу точки касания.
48. Прямая  $y = 5x + 1000$  параллельна касательной к графику функции  $y = 3x^2 - 31x + 100$ . Найти абсциссу точки касания.
49. Прямая  $y = 2$  параллельна касательной к графику функции  $y = x - x^2$ . Найти абсциссу точки касания.
50. Прямая  $y = 5$  параллельна касательной к графику функции  $y = 2 - x^{10}$ . Найти абсциссу точки касания.

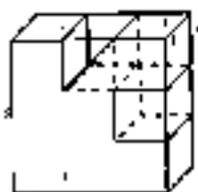
**B9****Пример:**

Дано:



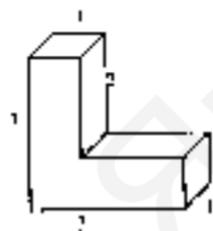
Найти объем фигуры.

Ответ: 7,5.

**Решение:**

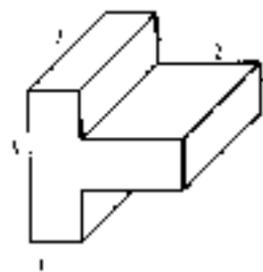
$$V = 3 \cdot 3 \cdot 1 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 7,5.$$

1. Дано:



Найти объем фигуры.

2. Дано:



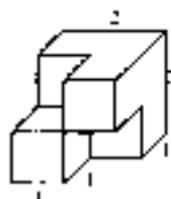
Найти объем фигуры.

3. Дано:



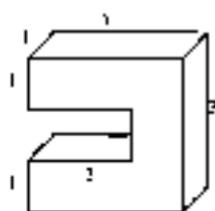
Найти объем фигуры.

4. Дано:



Найти объем фигуры.

5. Дано:



Найти объем фигуры

**Пример:**

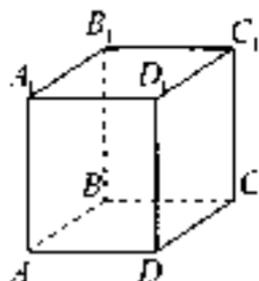
Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямоугольный параллелепипед:

$$DC = 2;$$

$$AD = 1;$$

$$DD_1 = \sqrt{11}.$$



Найти диагональ прямоугольного параллелепипеда.

Решение:

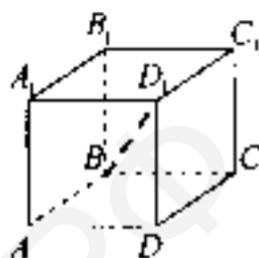
$$AC_1 = \sqrt{AD^2 + DC^2 + DD_1^2} = 4.$$

Ответ: 4.

6. Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб;

$$BD_1 = 4\sqrt{3}.$$



Найти  $AB$ .

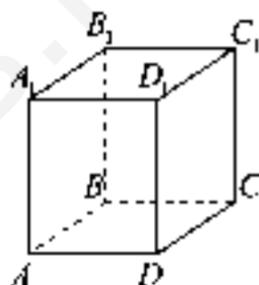
7. Дано.

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямоугольный параллелепипед;

$$AD = 2;$$

$$DC = \sqrt{5};$$

$$DD_1 = 4.$$



Найти диагональ прямоугольного параллелепипеда.

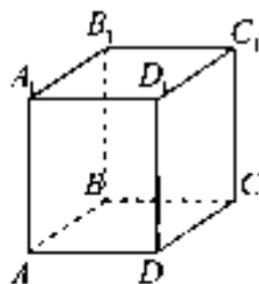
8. Дано.

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямоугольный параллелепипед;

$$AD = 2;$$

$$DC = 3;$$

$$DD_1 = 4.$$



Найти площадь всей поверхности прямоугольного параллелепипеда.

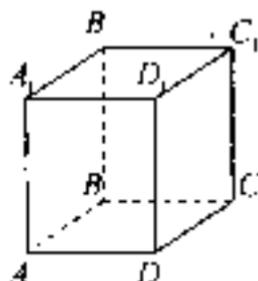
9. Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямоугольный параллелепипед;

$$AD = 3;$$

$$DC = 4;$$

$$DD_1 = 5.$$



Найти объем прямоугольного параллелепипеда.

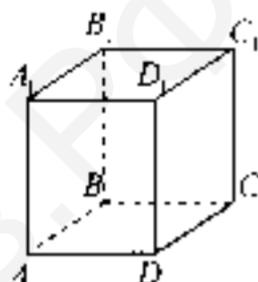
10. Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямоугольный параллелепипед:

$$AD = 2;$$

$$DC = 3;$$

$$DD_1 = 4.$$



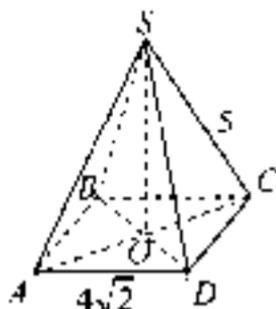
Найти диагональ наибольшей грани прямоугольного параллелепипеда.

**Пример:**

Дана правильная четырехугольная пирамида  $SABCD$ . Сторона основания пирамиды равна  $4\sqrt{2}$ . Боковое ребро равно 5. Найти объем пирамиды.

**Решение:**

Сделаем рисунок:



Формула объема пирамиды:  $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h$ , где  $S_{\text{осн}}$  — площадь основания пирамиды;  $h$  — высота пирамиды.

Найдем  $S_{\text{осн}}$ :

$$S_{\text{осн}} = AD^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32.$$

Найдем высоту пирамиды  $SO$ :

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = 8;$$

$$OC = \frac{AC}{2} = 4.$$

По теореме Пифагора:  $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = 3.$

Получаем:  $V_{SABCD} = \frac{1}{3} \cdot 32 \cdot 3 = 32.$

Ответ: 32.

11. Дана пятиугольная пирамида  $SABCD$ . Площадь основания пирамиды равна 6. Объем пирамиды равен 12. Найти высоту пирамиды.
12. Дана пятиугольная пирамида  $SABCD$ . Площадь основания пирамиды равна 5. Высота пирамиды равна 9. Найти объем пирамиды.
13. Дана правильная четырехугольная пирамида  $SABCD$ . Сторона основания пирамиды равна 5. Объем пирамиды равен 50. Найти высоту пирамиды.
14. Дана правильная четырехугольная пирамида  $SABCD$ . Высота пирамиды равна 3. Объем пирамиды равен 8. Найти диагональ основания пирамиды.
15. Дана правильная треугольная пирамида  $SABC$ . Сторона основания равна 4. Высота пирамиды равна  $3\sqrt{3}$ . Найти объем пирамиды.

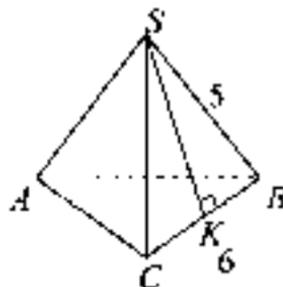
16. Дана пирамида  $SABC$ .  $SA \perp (ABC)$ . Основание пирамиды — прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $A$ .  $AB = 3$ ;  $AC = 2$ ;  $SA = 3$ . Найти объем пирамиды.
17. Дана пирамида  $SABC$ .  $SA \perp (ABC)$ . Основание пирамиды — прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $A$ .  $AB = 5$ ;  $AC = 2$ . Объем пирамиды равен 10. Найти высоту пирамиды.
18. Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$ . Высота пирамиды равна  $3\sqrt{3}$ . Сторона основания равна 5. Найти объем пирамиды.
19. Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$ . Объем пирамиды равен  $12\sqrt{3}$ . Сторона основания пирамиды равна 2. Найти высоту пирамиды.
20. Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$ . Объем пирамиды равен  $18\sqrt{3}$ . Сторона основания пирамиды равна 3. Найти боковое ребро пирамиды.

**Пример:**

Дана правильная треугольная пирамида  $SABC$ . Сторона основания равна 6. Боковое ребро равно 5. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

**Решение:**

Сделаем рисунок:



Найдем площадь треугольника  $SCB$ .

Проведем высоту  $SK$  к стороне  $CB$  в треугольнике  $SCB$ .

$KB = 3$  (так как высота в р'б треугольнике, проведенная к основанию, является медианой ( $SK$  — высота р'б треугольника  $CSB$ ))

$$SK = \sqrt{SB^2 - KB^2} = 4;$$

$$S_{SCB} = \frac{1}{2} \cdot SK \cdot CB = 12.$$

Теперь найдем площадь боковой поверхности пирамиды  $SABC$ :

$$S_{\text{бок}} = 3S_{SCB} = 36.$$

Ответ: 36.

21. Дана правильная треугольная пирамида  $SABC$ . Сторона основания равна 4. Боковое ребро равно  $\sqrt{29}$ . Найти площадь боковой поверхности пирамиды.
22. Площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды  $SABC$  равна  $4\sqrt{3} + 24\sqrt{2}$ . Сторона основания равна 4. Найти боковое ребро пирамиды.
23. Площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды  $SABC$  равна  $27 + 9\sqrt{3}$ . Сторона основания равна 6. Найти высоту боковой грани пирамиды.
24. Дана пирамида  $SABC$ .  $SA \perp (ABC)$ . Основание пирамиды — прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $A$ .  $AB = AC = AS = 4$ . Найти  $S_{\text{пол}}$ .  $8\sqrt{3}$ .
25. Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$ .  $AD = 12$ . Боковое ребро пирамиды равно 5. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.
26. Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ . Сторона основания равна 6. Боковое ребро призмы равно  $2\sqrt{3}$ . Найти объем призмы.

27. Дана правильная треугольная призма  $ABC_1B_1C_1$ . Сторона основания равна 5. Боковое ребро призмы равно 3. Найти площадь боковой поверхности призмы.
28. Дана прямоугольная призма  $ABC_1A_1B_1C_1$ ,  $AB = 4$ ;  $BC = 7$ ;  $\angle B = 30^\circ$ . Боковое ребро призмы равно 4. Найти площадь  $S_{ABC} + S_{AA_1B_1B}$ .
29. Объем прямоугольного параллелепипеда  $ABCD_1A_1B_1C_1D_1$  равен 12. Найти объем пирамиды  $B_1ABCD$ .
30. Объем прямоугольного параллелепипеда  $ABCD_1A_1B_1C_1D_1$  равен 12. Найти объем пирамиды  $B_1ABC$ .

**Пример:**

Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 5, 6, 7 и 8 так, чтобы цифры в числе не повторялись?

**Решение:**

На место сотен мы можем вставить одну из четырех данных нам цифр (5, 6, 7, 8). На место десятков мы можем поставить только одну из трех цифр, так как одна уже занимает место сотен, а цифры повторяться не могут. А на место единиц мы можем поставить только одну из двух цифр, так как две цифры занимают место сотен и десятков.

$$\begin{array}{ccc} \overline{A \ B \ C} \\ 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \end{array}$$

Получаем:  $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$  ;

Ответ: 24.

1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3 и 4 (цифры повторяться могут)?
2. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3 (цифры повторяться не могут)?
3. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 (цифры повторяться могут)?
4. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4, 6 (цифры повторяться могут)?
5. Сколько двухзначных чисел можно составить из цифр 0, 7, 8 (цифры повторяться могут)?

**Пример:**

На карточках написаны числа от 1 до 20. Какова вероятность того, что не глядя вытянут карточку с числом 15?

**Решение:**

Это простая задача, не требующая каких-либо специальных знаний.

Если какое-либо событие произойдет в любом случае, тогда вероятность такого события равна 1. Если какое-либо событие не произойдет никогда, тогда вероятность такого события равна 0. Если событие может произойти, а может и не произойти, тогда вероятность такого события лежит на интервале  $(0;1)$ .

Итак, мы можем вытащить любую из 20 карточек с числами с одинаковой вероятностью, то есть имеем 20 вариантов. Нам нужно вытащить одну определенную карточку (с числом 15),

значит, получим, что вероятность такого события равна  $\frac{1}{20}$

(делим количество нужных нам вариантов на общее количество вариантов).

Ответ: 0,05.

6. На карточках написаны числа от 1 до 50. Какова вероятность того, что не глядя вытянут карточку с числом 32?
7. На карточках написаны числа от 1 до 50. Какова вероятность того, что не глядя вытянут карточку с числом 17 или с числом 18?
8. На карточках написаны числа от 1 до 50. Какова вероятность того, что не глядя вытянут карточку с числом, делящимся на 3?
9. На карточках написаны числа от 1 до 50. Какова вероятность того, что не глядя вытянут карточку с числом, делящимся на 4?
10. На карточках написаны числа от 1 до 50. Какова вероятность того, что не глядя вытянут карточку с числом, не делящимся на 5?

11. На карточках написаны числа от 1 до 50. Какова вероятность того, что не глядя вытянут карточку с числом, делящимся на 7 и (или) на 11?
12. На карточках написаны числа от 1 до 50. Какова вероятность того, что не глядя вытянут карточку с числом, делящимся на 3 и (или) на 8?
13. На карточках написаны числа от 1 до 50. Какова вероятность того, что не глядя вытянут карточку с числом, не делящимся на 9?
14. На карточках написаны числа от 1 до 50. Какова вероятность того, что не глядя вытянут карточку с числом, находящимся в промежутке от 10 до 20 включительно?
15. На карточках написаны числа от 1 до 50. Какова вероятность того, что не глядя вытянут карточку с числом, находящимся в промежутке от 21 до 32 включительно?

### Пример:

Какова вероятность того, что из всех «доминошек» не глядя вытянут «доминошку» вида: 

•	
---	--

? Ответ округлить до третьего знака после запятой.

### Решение:

Всего в игре «Домино» 28 «доминошек». Мы можем вытянуть каждую из 28 «доминошек» с одинаковой вероятностью, а нам нужно найти вероятность того, что мы вытянем одну определенную «доминошку». Нужно найти отношение количества нужных нам вариантов ко всем возможным вариантам  $\frac{1}{28}$ .

В десятичной записи получим:  $\frac{1}{28} = 0,035714$ .

Чтобы округлить число до третьего знака после запятой, нужно

- посмотреть на четвертый знак после запятой.
- если это число больше четырех, то значение третьего знака увеличивается на единицу; если меньше или равно четырем, то третий знак остается таким же.

Видим, что в нашем случае четвертый знак — 7, значит, третий знак становится на единицу больше, то есть  $5 + 1 = 6$ .

Получаем: 0,036.

Ответ: 0,036.

16. Какова вероятность того, что из всех «доминошек» не глядя вытянут «доминошку» вида: 

●	●
---	---

? Ответ округлить до третьего знака после запятой.
17. Какова вероятность того, что из всех «доминошек» не глядя вытянут «доминошку» вида: 

●	●
---	---

 или 

●	●●
---	----

? Ответ округлить до третьего знака после запятой.
18. Какова вероятность того, что из всех «доминошек» не глядя вытянут «доминошку», сумма очков которой равна 5? Ответ округлить до третьего знака после запятой.
19. Какова вероятность того, что из всех «доминошек» не глядя вытянут «доминошку», сумма очков которой равна 8? Ответ округлить до третьего знака после запятой.
20. Какова вероятность того, что из всех «доминошек» не глядя вытянут «доминошку», сумма очков которой меньше 4? Ответ округлить до третьего знака после запятой.

### Пример:

Бросаю игральную кость. Какова вероятность того, что выпадет два очка.

**Решение:**

При бросании игральной кости может выпасть шесть различных значений. Нам нужно найти вероятность того, что выпадет два очка. Получаем, что нужно найти отношение количества нужных нам вариантов ко всем возможным вариантам:  $\frac{1}{6}$ .

Ответ:  $\frac{1}{6}$ .

---

21. Бросают игральную кость. Какова вероятность того, что выпадет три очка? Ответ округлить до второго знака после запятой.
22. Бросают игральную кость. Какова вероятность того, что выпадет меньше трех очков? Ответ округлить до второго знака после запятой.
23. Бросают игральную кость. Какова вероятность того, что выпадет не меньше трех очков? Ответ округлить до второго знака после запятой.
24. Бросают две игральные кости. Какова вероятность того, что суммарно выпадет четыре очка? Ответ округлить до второго знака после запятой.
25. Бросают две игральные кости. Какова вероятность того, что на обеих костях выпадет одинаковое количество очков? Ответ округлить до второго знака после запятой.

**Пример:**

Имеются два цилиндра, причем у первого из них радиус в 2 раза меньше, а высота в 4 раза меньше, чем у второго. Во сколько раз объем второго цилиндра больше, чем объем первого?

**Решение:**

$V_1 = \pi r_1^2 h_1$     объем первого цилиндра;

$V_2 = \pi r_2^2 h_2$     объем второго цилиндра;

$r_2 = 2r_1$     у первого цилиндра радиус в 2 раза меньше, чем у второго;

$h_2 = 4h_1$     у первого цилиндра высота в 4 раза меньше, чем у второго.

Получаем:

$$V_2 = \pi(2r_1)^2(4h_1) = 16\pi r_1^2 h_1.$$

Найдем отношение объемов:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{16\pi r_1^2 h_1}{\pi r_1^2 h_1} = 16.$$

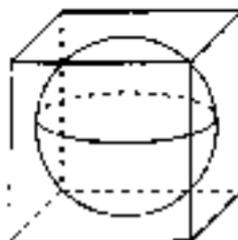
Ответ: 16

1. Имеются два цилиндра, причем у первого из них радиус в 2 раза меньше, а высота в 4 раза больше, чем у второго. Во сколько раз объем второго цилиндра больше, чем объем первого?

2. Имеются два цилиндра, причем у первого из них радиус в 3 раза, а высота в 2 раза больше, чем у второго. Во сколько раз объем первого цилиндра больше, чем объем второго?
3. Имеются два конуса, причем у первого из них радиус и высота в 2 раза меньше, чем у второго. Во сколько раз объем второго конуса больше, чем объем первого?
4. Имеются два конуса, причем у первого из них радиус в 5 раз, а высота в 3 раза больше, чем у второго. Во сколько раз объем первого конуса больше, чем объем второго?
5. Все стороны куба увеличили в 3 раза. Во сколько раз увеличился объем?
6. Все стороны куба уменьшили в 2 раза. Во сколько раз уменьшился объем?
7. Площадь основания исходной пирамиды увеличили в 2 раза. Во сколько раз увеличился объем?
8. Высоту исходной пирамиды уменьшили в 4 раза. Во сколько раз уменьшился объем?
9. Радиус исходного шара увеличили в 3 раза. Во сколько раз увеличился объем шара?
10. Радиус исходного шара уменьшили в 4 раза. Во сколько раз уменьшился объем шара?

**Пример:**

Шар вписан в куб. Сторона куба равна  $\frac{6}{\sqrt{\pi}}$ . Найдите объем шара.



**Решение:**

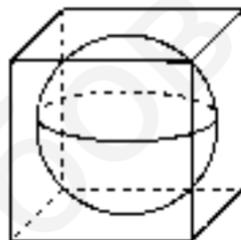
Пусть:  $a = \frac{6}{\sqrt[3]{\pi}}$  — сторона куба;

$a = 2R$ , где  $R$  — радиус шара, значит,  $R = \frac{a}{2} = \frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}$ ;

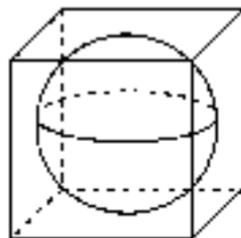
$$V_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{27}{\pi} = 36.$$

Ответ: 36.

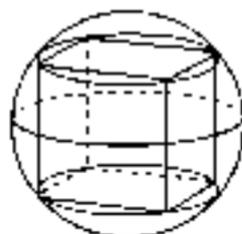
11. Шар вписан в куб. Сторона куба равна  $\frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}$ . Найдти объем шара.



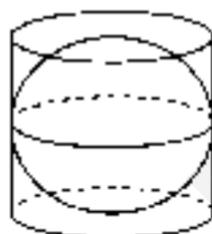
12. Шар вписан в куб. Радиус шара равен 2. Найдти объем куба.



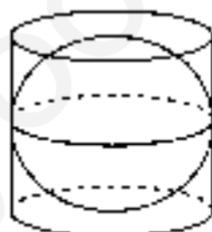
13. Шар описан около прямоугольного параллелепипеда. Стороны параллелепипеда равны 2, 3 и  $\sqrt{3}$ . Найдти радиус шара.



14. Шар вписан в цилиндр. Объем цилиндра равен  $16\pi$ . Найдите диаметр шара.

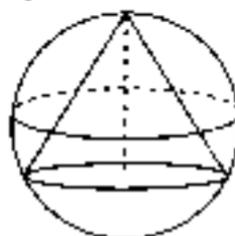


15. Шар вписан в цилиндр. Радиус шара равен  $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ . Найдите объем цилиндра.



**Пример:**

- Конус вписан в шар. Образующая конуса равна 6, высота конуса равна 4. Найдите радиус шара.



**Решение:**

Сделаем дополнительные построения:



$AD$  — диаметр шара;  $AO_1 - O_1D = R$  радиусы шара;

$\angle ABD = 90^\circ$  (так как опирается на диаметр)  
 $\Rightarrow \angle ABO + \angle OBD = 90^\circ$ ;

$\triangle ABO$  — прямоугольный  $\Rightarrow \angle BAO + \angle ABO = 90^\circ$ ;

Получим:

$$\begin{cases} \angle BAO + \angle ABO = 90^\circ; \\ \angle ABO + \angle OBD = 90^\circ; \end{cases} \quad \begin{cases} \angle BAO - \angle OBD = 0; \\ \angle ABO + \angle OBD = 90^\circ. \end{cases}$$

$$\angle BAO = \angle OBD \Rightarrow \angle ADB = \angle ABO;$$

$$\sin \angle ABO = \frac{AO}{AB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3};$$

$$\sin \angle ADB = \frac{AB}{AD} = \frac{6}{2R}.$$

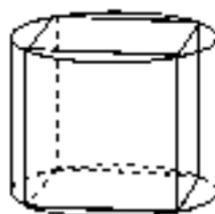
Получим

$$\frac{6}{2R} = \frac{2}{3};$$

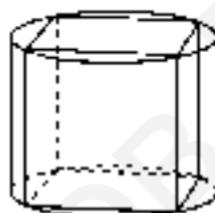
$$R = 4,5.$$

Ответ: 4,5.

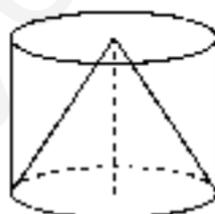
16. В цилиндр вписана правильная четырехугольная призма. Объем цилиндра равен 16л. Высота цилиндра равна 4. Найдите объем призмы.



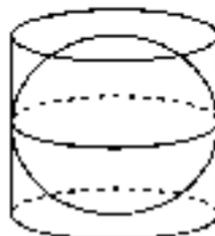
17. В цилиндр вписан куб. Объем цилиндра равен  $12\sqrt{3}$ л. Найдите диагональ куба.



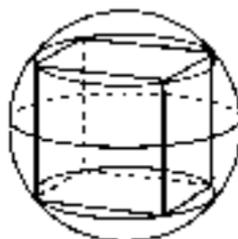
18. В цилиндр вписан конус. Объем конуса равен 20. Найдите объем цилиндра



19. Шар вписан в цилиндр. Во сколько раз объем цилиндра больше объема шара?



20. Шар вписан около куба. Сторона куба равна  $\sqrt{3}$ . Найти радиус шара.



21. В цилиндр вписан конус. Объем конуса равен 3. Найти объем цилиндра.
22. Шар вписан в цилиндр, объем которого равен 15. Найти объем шара.
23. В цилиндр вписан конус. Объем цилиндра равен 18. Найти объем конуса.
24. В цилиндр вписан куб. Объем цилиндра равен 4л. Найти сторону куба.
25. В цилиндр вписан куб. Объем цилиндра равен  $10\sqrt{3}\pi$ . Найти объем куба.

**Пример:**

Предприятие задолжало своим поставщикам 4 млн рублей. Эта задолженность постепенно уменьшалась по формуле:  $A(t) = B - \log_3(t+3)$ , где  $A(t)$  — оставшаяся задолженность (млн руб.);  $B$  — постоянный параметр;  $t$  — число месяцев с начала погашения задолженности. Через сколько месяцев задолженность станет не более 2 млн рублей?

**Решение:**

Сначала найдем постоянный параметр  $B$ :

В начале периода ( $t = 0$ ) задолженность  $A(t)$  была равна 4 млн рублей;

$$4 = B - \log_3(0+3);$$

$$B = 5.$$

Теперь подставим значение  $B = 5$  и  $A(t) = 2$  и найдем через сколько месяцев задолженность станет не более 2 млн рублей:

$$2 = 5 - \log_3(t+3);$$

$$\log_3(t+3) = \log_3 3^4;$$

$$t = 24.$$

Ответ: 24.

1. Предприятие задолжало своим поставщикам 10 млн рублей. Эта задолженность постепенно изменялась по формуле:  $A(t) = B - \log_2(t+4)$ , где  $A(t)$  — оставшаяся задолженность (млн руб.);  $B$  — постоянный параметр;  $t$  — число месяцев с

- начала погашения задолженности. Через сколько месяцев задолженность станет не более 4 млн рублей?
2. Предприятие задолжало своим поставщикам 15 млн рублей. Эта задолженность постепенно уменьшалась по формуле:  $A(t) = B \cdot t^2 - 1$ , где  $A(t)$  — оставшаяся задолженность (млн руб.);  $B$  — постоянный параметр,  $t$  — число месяцев с начала погашения задолженности. Через сколько месяцев задолженность станет не более 6 млн рублей?
  3. Предприятие задолжало своим поставщикам. Эта задолженность постепенно изменялась по формуле:  $A(t) = -5t + B - \log_2(t + 2)$ , где  $A(t)$  — оставшаяся задолженность (млн руб.);  $B$  — постоянный параметр;  $t$  — число месяцев с начала погашения задолженности. За 14 месяцев предприятие рассчиталось с долгами полностью. Найти первоначальную задолженность (млн руб.).
  4. Предприятие задолжало своим поставщикам. Эта задолженность постепенно уменьшалась по формуле:  $A(t) = B - t^2 - 10$ , где  $A(t)$  — оставшаяся задолженность (млн руб.);  $B$  — постоянный параметр;  $t$  — число месяцев с начала погашения задолженности. За 7 месяцев предприятие рассчиталось с долгами полностью. Найти первоначальную задолженность (млн руб.).
  5. Предприятие задолжало своим поставщикам. Эта задолженность постепенно уменьшалась по формуле:  $A(t) = B - t^3 + 2$ , где  $A(t)$  — оставшаяся задолженность (млн руб.);  $B$  — постоянный параметр;  $t$  — число месяцев с начала погашения задолженности. За 4 месяца предприятие рассчиталось с долгами полностью. Найти первоначальную задолженность (млн руб.).

**Пример:**

Материальная точка движется прямолинейно по закону:  $S(t) = t^2 - 3t - 5$ , где  $S$  — расстояние от начальной точки (м);

$t$  — время (с). Через сколько секунд после начала движения скорость материальной точки будет равна 5 м/с.

**Решение:**

Мы знаем, что производная от пути — это скорость:  $S'(t) = V(t)$ .

Поэтому сначала найдем производную от пути:

$$S'(t) = (t^2 - 3t + 5)' = 2t - 3 = V(t)$$

По условию  $V(t) = 5$ , поэтому получаем:

$$V(t) = 2t - 3 = 5;$$

$$t = 4.$$

Ответ: 4.

6. Материальная точка движется прямолинейно по закону:  $S(t) = t^2 - 6t + 9$ , где  $S$  — расстояние от начальной точки (м);  $t$  — время (с). Через сколько секунд после начала движения скорость материальной точки будет равна 4 м/с.

7. Материальная точка движется прямолинейно по закону:  $S(t) = t^3 - 9t^2 - 12t - 8$ , где  $S$  — расстояние от начальной точки (м);  $t$  — время (с). Через сколько секунд после начала движения скорость материальной точки будет равна 9 м/с.

8. Материальная точка движется прямолинейно по закону:  $S(t) = t^3 - 9t^2 - 12t + 8$ , где  $S$  — расстояние от начальной точки (м);  $t$  — время (с). Через сколько секунд после начала движения ускорение материальной точки будет равно 24 м/с<sup>2</sup>.

9. Материальная точка движется прямолинейно по закону:  $S(t) = \frac{1}{3}t^3$ ; где  $S$  — расстояние от начальной точки (м);  $t$  — время (с). Через сколько секунд после начала движения ускорение материальной точки будет равно 6 м/с<sup>2</sup>.

16. Материальная точка движется прямолинейно по закону:

$$S(t) = \frac{1}{17}t^3, \text{ где } S \text{ — расстояние от начальной точки (м);}$$

$t$  — время (с). Через сколько секунд после начала движения ускорение материальной точки будет равно  $4 \text{ м/с}^2$ .

**Пример:**

Имеется 2 л 20-процентного раствора соли. Затем начали выпаривать воду из этого раствора по закону

$$A(t) = A_0(1 - 0,0234375t), \text{ где } A(t) \text{ — полученный объем воды (л);}$$

$A_0$  — первоначальный объем воды (л),  $t$  — время выпаривания (мин.). Найти концентрацию соли (%) в растворе через 40 минут после начала выпаривания.

**Решение:**

У нас имеется 2 л раствора, причем 20% — содержание соли и 80% в этом растворе составляет вода. Найдём содержание воды в данном растворе:

2	100%
$x$	80%

$$2 \cdot 80 = x \cdot 100,$$

$x = 1,6$  (л) — воды в данном растворе;

$x = 0,4$  (л) — соли в данном растворе.

Подставим в формулу  $A(t) = A_0(1 - 0,0234375t)$  значения:

$$A(t) = 1,6 (1 - 0,0234375 \cdot 40) = 0,1 \text{ (л) — количество воды после выпаривания.}$$

Теперь найдём концентрацию соли (%) в растворе через 40 минут после начала выпаривания:

0,1 (л) — количество воды после выпаривания;

0,1 + 0,4 = 0,5 (л) — общий объем раствора после выпаривания;

0.5	100%
0.4	$x$

$$0,4 \cdot 100 = 0,5x;$$

$$x = 80.$$

Ответ: 80.

11. Имеется 8 л 10-процентного раствора соли. Затем начали выпаривать воду из этого раствора по закону  $A(t) = A_0(1 - 0,04t)$ , где  $A(t)$  — полученный объем воды (л);  $A_0$  — первоначальный объем воды (л);  $t$  — время выпаривания (мин). Найти объем воды в растворе через 10 минут после начала выпаривания.
12. Имеется 9 л 40-процентного раствора соли. Затем начали выпаривать воду из этого раствора по закону  $A(t) = A_0(1 - 0,03t)$ , где  $A(t)$  — полученный объем воды (л);  $A_0$  — первоначальный объем воды (л);  $t$  — время выпаривания (мин). Найти объем воды в растворе через 30 минут после начала выпаривания.
13. Имеется 1 л 20-процентного раствора соли. Затем начали выпаривать воду из этого раствора по закону  $A(t) = A_0(1 - 0,02t)$ , где  $A(t)$  — полученный объем воды (л);  $A_0$  — первоначальный объем воды (л);  $t$  — время выпаривания (мин). Найти концентрацию соли (%) в растворе через 10 минут после начала выпаривания. Ответ округлить до целого.
14. Имеется 5 л 20-процентного раствора соли. Затем начали выпаривать воду из этого раствора по закону  $A(t) = A_0(1 - 0,025t)$ , где  $A(t)$  — полученный объем воды (л);  $A_0$  — первоначальный объем воды (л);  $t$  — время выпаривания (мин). Найти концентрацию соли (%) в растворе через 20 минут после начала выпаривания. Ответ округлить до целого.

15. Имеется 5 л 40-процентного раствора соли. Затем начали выпаривать воду из этого раствора по закону  $A(t) = A_0(1 - 0,01t)$ , где  $A(t)$  — полученный объем воды (л);  $A_0$  — первоначальный объем воды (л);  $t$  — время выпаривания (мин). Найти объем воды в растворе через 30 минут после начала выпаривания.

**Пример:**

Автомобиль, стартуя с места, движется с постоянным ускорением  $2 \text{ м/с}^2$  и через некоторое время достигает скорости  $22 \text{ м/с}$ . Какой путь автомобиль прошел к этому времени? Формулы

для расчета:  $V(t) = V_0 + at$ ;  $S(t) = V_0t + \frac{at^2}{2}$ , где  $S(t)$  — путь (м);

$V_0$  — начальная скорость (м/с);  $V$  — скорость (м/с);  $t$  — время (с);  $a$  — ускорение (м/с<sup>2</sup>).

**Решение:**

Так как по условию автомобиль стартует с места, то начальная скорость  $V_0 = 0$ .

Найдем время, через которое скорость стала равна  $22 \text{ м/с}$ , из формулы  $V(t) = V_0 + at$ :

$$22 = 0 + 2t;$$

$$t = 11.$$

Теперь найдем путь, который прошел автомобиль за  $11 \text{ с}$ , из

формулы  $S(t) = V_0t + \frac{at^2}{2}$ :

$$S(t) = 0 \cdot 11 + \frac{2 \cdot 11^2}{2};$$

$$S(t) = 121$$

Ответ: 121.

16. Автомобиль, стартуя с места, движется с постоянным ускорением  $3 \text{ м/с}^2$  и через некоторое время достигает скорости  $24 \text{ м/с}$ . Какой путь автомобиль прошел к этому времени?

Формулы для расчета:  $V(t) = V_0 + at$ ;  $S(t) = V_0 t + \frac{at^2}{2}$ , где  $S(t)$  — путь (м);  $V_0$  — начальная скорость (м/с);  $V$  — скорость (м/с);  $t$  — время (с);  $a$  — ускорение ( $\text{м/с}^2$ ).

17. Автомобиль движется с постоянным ускорением  $4 \text{ м/с}^2$  и через некоторое время достигает скорости  $32 \text{ м/с}$ . Какой путь автомобиль прошел к этому времени, если  $V_0 = 4 \text{ м/с}$ ? Формулы для расчета.

$V(t) = V_0 + at$ ;  $S(t) = V_0 t + \frac{at^2}{2}$ , где  $S(t)$  — путь (м);  $V_0$  — начальная скорость (м/с);  $V$  — скорость (м/с);  $t$  — время (с);  $a$  — ускорение ( $\text{м/с}^2$ ).

18. Автомобиль, стартуя с места, движется с постоянным ускорением и через  $10 \text{ с}$  достигает скорости  $30 \text{ м/с}$ . Какой путь автомобиль прошел к этому времени? Формулы для расчета:

$V(t) = V_0 + at$ ;  $S(t) = V_0 t + \frac{at^2}{2}$ , где  $S(t)$  — путь (м);  $V_0$  — начальная скорость (м/с);  $V$  — скорость (м/с);  $t$  — время (с);  $a$  — ускорение ( $\text{м/с}^2$ ).

19. Автомобиль, двигаясь с постоянным ускорением, через  $8 \text{ с}$  достигает скорости  $42 \text{ м/с}$ . Какой путь автомобиль прошел к этому времени, если начальная скорость автомобиля равна  $10 \text{ м/с}$ ? Формулы для расчета:

$V(t) = V_0 + at$ ;  $S(t) = V_0 t + \frac{at^2}{2}$ , где  $S(t)$  — путь (м);  $V_0$  — начальная скорость (м/с);  $V$  — скорость (м/с);  $t$  — время (с);  $a$  — ускорение ( $\text{м/с}^2$ ). Ответ записать в км

20. Автомобиль, двигаясь с постоянным ускорением, через  $9 \text{ с}$  прошел  $108 \text{ м}$ . Найти скорость автомобиля к этому времени, если начальная скорость автомобиля равна  $3 \text{ м/с}$ ? Формулы

для расчета  $V(t) = V_0 + at$ ;  $S(t) = V_0t + \frac{at^2}{2}$ , где  $S(t)$  — путь (м);  $V_0$  — начальная скорость (м/с);  $V$  — скорость (м/с);  $t$  — время (с);  $a$  — ускорение (м/с<sup>2</sup>). Ответ записать в км/ч.

21. Автомобиль, двигаясь с постоянным ускорением, через 14 с прошел 462 м. Найти скорость автомобиля к этому времени, если начальная скорость автомобиля равна 12 м/с? Формулы

для расчета:  $V(t) = V_0 + at$ ;  $S(t) = V_0t + \frac{at^2}{2}$ , где  $S(t)$  — путь (м);  $V_0$  — начальная скорость (м/с);  $V$  — скорость (м/с);  $t$  — время (с);  $a$  — ускорение (м/с<sup>2</sup>).

22. Автомобиль, двигаясь с постоянным ускорением, спустя некоторое время достиг скорости 58 м/с и прошел 544 м. Найти ускорение автомобиля, если начальная скорость автомобиля равна 10 м/с? Формулы для расчета:  $V(t) = V_0 + at$ ;

$S(t) = V_0t + \frac{at^2}{2}$ , где  $S(t)$  — путь (м);  $V_0$  — начальная скорость (м/с);  $V$  — скорость (м/с);  $t$  — время (с);  $a$  — ускорение (м/с<sup>2</sup>).

23. Автомобиль, двигаясь с постоянным ускорением, спустя некоторое время достиг скорости 32 м/с и прошел 240 м. Найти ускорение автомобиля, если начальная скорость автомобиля равна 8 м/с? Формулы для расчета:  $V(t) = V_0 + at$ ;

$S(t) = V_0t + \frac{at^2}{2}$ , где  $S(t)$  — путь (м);  $V_0$  — начальная скорость (м/с);  $V$  — скорость (м/с);  $t$  — время (с);  $a$  — ускорение (м/с<sup>2</sup>).

24. Автомобиль, двигаясь с постоянным ускорением, спустя некоторое время достиг скорости 26 м/с и прошел 160 м. Найти это время, если ускорение автомобиля равно 2 м/с<sup>2</sup>? Формулы

для расчета:  $V(t) = V_0 + at$ ;  $S(t) = V_0t + \frac{at^2}{2}$ , где  $S(t)$  —

путь (м);  $V_0$  — начальная скорость (м/с);  $V$  — скорость (м/с);  $t$  — время (с);  $a$  — ускорение (м/с<sup>2</sup>).

25. Автомобиль, двигаясь без начальной скорости с постоянным ускорением, спустя некоторое время достиг скорости 48 м/с и прошел 288 м. Найдите это время. Формулы для расчета:

$V(t) = V_0 + at$ ;  $S(t) = V_0t + \frac{at^2}{2}$ , где  $S(t)$  — путь (м);  $V_0$  — начальная скорость (м/с);  $V$  — скорость (м/с);  $t$  — время (с);  $a$  — ускорение (м/с<sup>2</sup>).

### Пример:

С высоты 550 м кидают груз. Через 5 с скорость груза равна 55 м/с. Найдите время, через которое груз ударится о землю.

Формулы для расчета  $V(t) = V_0 - gt$ ;  $H(t) = V_0t + \frac{gt^2}{2}$ , где  $H(t)$  — высота (м);  $V_0$  — начальная скорость (м/с);  $V$  — скорость (м/с);  $t$  — время (с);  $g = 10$  — ускорение свободного падения (м/с<sup>2</sup>).

### Решение:

Сначала найдем начальную скорость  $V_0$

$$V(t) = V_0 + gt$$

$$55 = V_0 + 10 \cdot 5;$$

$$V_0 = 5$$

Теперь подставим в формулу  $H(t) = V_0t + \frac{gt^2}{2}$  имеющиеся значения и найдем время:

$$550 = 5t + \frac{10t^2}{2};$$

$$t^2 + t - 110 = 0;$$

$t_1 = -11$  — не подходит, так как  $t > 0$ ;

$$t_2 = 10.$$

Ответ: 10.

26. С высоты 352 м кидают груз. Через 3 с скорость груза равна 34 м/с. Найти время, через которое груз ударится о землю.

Формулы для расчета:  $V(t) = V_0 + gt$ ;  $H(t) = V_0 t + \frac{gt^2}{2}$ , где

$H(t)$  — высота (м);  $V_0$  — начальная скорость (м/с);  $V$  — скорость (м/с);  $t$  — время (с);  $g = 10$  — ускорение свободного падения (м/с<sup>2</sup>).

27. С высоты 250 м начинает падать груз. На какой высоте (от земли) будет находиться груз через 6 с. Формулы для расчета:

$V(t) = V_0 + gt$ ;  $H(t) = V_0 t + \frac{gt^2}{2}$ , где  $H(t)$  — высота (м);  $V_0$  —

начальная скорость (м/с),  $V$  — скорость (м/с),  $t$  — время (с);  $g = 10$  — ускорение свободного падения (м/с<sup>2</sup>).

28. С высоты 320 м начинает падать груз. На какой высоте (от земли) будет находиться груз через 8 с. Формулы для расчета:

$V(t) = V_0 + gt$ ;  $H(t) = V_0 t + \frac{gt^2}{2}$ , где  $H(t)$  — высота (м);  $V_0$  —

начальная скорость (м/с);  $V$  — скорость (м/с);  $t$  — время (с);  $g = 10$  — ускорение свободного падения (м/с<sup>2</sup>).

29. С высоты кидают груз. Через 8 с груз ударился о землю со скоростью 90 м/с. Найти скорость груза на высоте 325 м.

Формулы для расчета:  $V(t) = V_0 + gt$ ;  $H(t) = V_0 t + \frac{gt^2}{2}$ , где

$H(t)$  — высота (м),  $V_0$  — начальная скорость (м/с);  $V$  —

скорость (м/с);  $t$  — время (с);  $g = 10$  — ускорение свободного падения (м/с<sup>2</sup>).

30. С высоты кидают груз. Через 6 с груз ударился о землю со скоростью 65 м/с. Найдите скорость груза на высоте 180 м.

Формулы для расчета.  $V(t) = V_0 + gt$ .  $H(t) = V_0 t + \frac{gt^2}{2}$ , где

$H(t)$  — высота (м);  $V_0$  — начальная скорость (м/с);  $V$  — скорость (м/с);  $t$  — время (с);  $g = 10$  — ускорение свободного падения (м/с<sup>2</sup>).

## B13

### Пример:

Смешивают 5 литров 12-процентного раствора вещества с 15 литрами 23-процентного раствора вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося вещества?

### Решение:

$\frac{5 \cdot 12}{100} = 0,6$  (л) — количество вещества в первом растворе,

$\frac{15 \cdot 23}{100} = 3,45$  (л) — количество вещества во втором растворе;

$0,6 + 3,45 = 4,05$	$x$
$5 + 15 = 20$	100%

$$20x = 4,05 \cdot 100;$$

$$x = 20,25.$$

Ответ: 20,25.

- 
1. Смешивают 8 литров 15-процентного раствора вещества с 12 литрами 10-процентного раствора вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося вещества?
  2. Смешивают 11 литров 10-процентного раствора вещества с 9 литрами 20-процентного раствора вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося вещества?

3. Смешивают 10 литров 15-процентного раствора вещества с 10 литрами 5-процентного раствора вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося вещества?
4. Смешивают 6 литров 18-процентного раствора вещества с 14 литрами 7-процентного раствора вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося вещества?
5. Смешивают 3 литра 15-процентного раствора вещества с 12 литрами 6-процентного раствора вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося вещества?

**Пример:**

Сколько нужно добавить воды к 25 г сухого киселя с содержанием 10% воды, чтобы получить кисель с содержанием 90% воды?

**Решение:**

$25 \cdot 0,1 = 2,5$  (г) содержится воды в 25 г сухого киселя.

Пусть  $x$  (г) воды — добавили к 25 г сухого киселя.

Получили:

$2,5 + x$  (г) воды содержится в  $25 + x$  (г) всего киселя;

$2,5 + x$	:	90%
$25 + x$	:	100%

$$(2,5 + x) \cdot 100\% = (25 + x) \cdot 90\% ;$$

$$250 + 100x = 2250 - 90x ;$$

$$10x = 2000 ;$$

$$x = 200 .$$

Ответ: 200.

6. Сколько нужно добавить воды к 60 г сухого пире с содержанием 15% воды, чтобы получить пире с содержанием 80% воды?

7. Сколько нужно добавить воды к 20 г детского питания с содержанием 5% воды, чтобы получить детское питание с содержанием 90% воды?
8. Сколько нужно добавить воды к 30 г сухого киселя с содержанием 8% воды, чтобы получить кисель с содержанием 90% воды?
9. Сколько нужно добавить воды к 100 г сухих фруктов с содержанием 10% воды, чтобы получить компот с содержанием 80% воды?
10. Сколько нужно добавить воды к 20 г сухого киселя с содержанием 8% воды, чтобы получить кисель с содержанием 95% воды?

**Пример:**

Трое рабочих работают на производстве. Первый и второй рабочие, работая вместе, выполняют задание за 12 часов. Второй и третий рабочие, работая вместе, выполняют задание за 20 часов. Когда задание выполняют одновременно трое рабочих, то выполнение занимает 10 часов. Сколько часов затратит на выполнение задания второй рабочий, если будет работать один?

**Решение:**

Примем за «1» всю работу.

Пусть:

$x$  — время, которое затратит первый рабочий на выполнение задания, тогда  $\frac{1}{x}$  — производительность первого рабочего;

$y$  — время, которое затратит второй рабочий на выполнение задания, тогда  $\frac{1}{y}$  — производительность второго рабочего;

$z$  — время, которое затратит третий рабочий на выполнение задания, тогда  $\frac{1}{z}$  — производительность третьего рабочего.

Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 12; \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 20; \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{12} = \frac{1}{z}; \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{20}; \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{10} = \frac{1}{z}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{12} - \frac{1}{y}; \\ \frac{1}{z} = \frac{1}{20} - \frac{1}{y}; \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{10} = \frac{1}{z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{12} - \frac{1}{y}; \\ \frac{1}{z} = \frac{1}{20} - \frac{1}{y}; \\ \frac{1}{12} - \frac{1}{y} + \frac{1}{y} + \frac{1}{20} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}. \end{cases}$$

Решим третье уравнение:

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{y} + \frac{1}{y} + \frac{1}{20} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z} - \frac{1}{y};$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{12} + \frac{1}{20} - \frac{1}{10};$$

$$\therefore \frac{1}{y} = \frac{2}{60};$$

$$y = 30.$$

Ответ: 30.

11. Трое рабочих работают на производстве. Первый и второй рабочие, работая вместе, выполняют задание за 6 часов. Вто-

рой и третий рабочие, работая вместе, выполняют задание за 12 часов. Когда задание выполняют одновременно первый и третий рабочие, то выполнение занимает  $8\frac{4}{7}$  часов. Сколько часов затратит на выполнение задания второй рабочий, если будет работать один?

12. Трое рабочих работают на производстве. Первый и второй рабочие, работая вместе, выполняют задание за 3 часа. Второй и третий рабочие, работая вместе, выполняют задание за 3,6 часа. Когда задание выполняют одновременно все рабочие, то выполнение занимает 2,25 часа. Сколько часов затратит на выполнение задания третий рабочий, если будет работать один?
13. Трое рабочих работают на производстве. Первый и второй рабочие, работая вместе, выполнят задание за 4 часа. Второй и третий рабочие, работая вместе, выполнят задание за 3,2 часа. Когда задание выполняют одновременно первый и третий рабочие, то выполнение занимает  $2\frac{2}{7}$  часа. Сколько часов затратит на выполнение задания третий рабочий, если будет работать один?
14. Трое рабочих работают на производстве. Первый и второй рабочие, работая вместе, выполнят задание за 1,2 часа. Второй и третий рабочие, работая вместе, выполняют задание за  $1\frac{1}{3}$  часа. Когда задание выполняют одновременно двое рабочих, то выполнение занимает  $\frac{12}{13}$  часа. Сколько часов затратит на выполнение задания третий рабочий, если будет работать один?
15. Трое рабочих работают на производстве. Первый и второй рабочие, работая вместе, выполняют задание за  $\frac{2}{3}$  часа. Второй и третий рабочие, работая вместе, выполняют задание за 1,2 часа. Когда задание выполняют одновременно двое рабо-

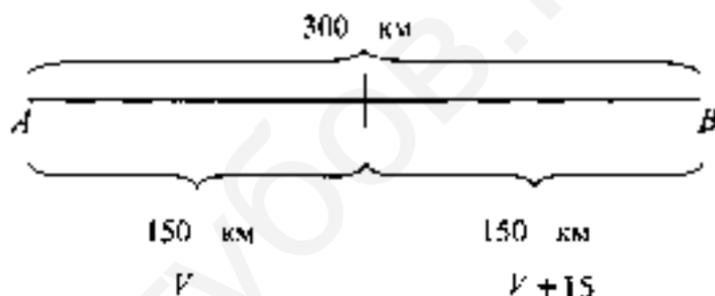
чих, то выполнение занимает  $\frac{6}{11}$  часа. Сколько часов затратит на выполнение задания первый рабочий, если будет работать один?

**Пример:**

Расстояние между городами 300 км. Первую половину пути автомобиль двигался со скоростью на 15 км/ч меньше, чем оставшуюся половину пути. На весь путь было потрачено 4,5 часа. Найти первоначальную скорость автомобиля.

**Решение:**

Сделаем рисунок:



$V$  — скорость автомобиля на первой половине пути;

$V + 15$  — скорость автомобиля на второй половине пути.

Составим уравнение:

$$\frac{150}{V} + \frac{150}{V + 15} = \frac{9}{2};$$

$$2 \cdot 150(V + 15) + 2 \cdot 150V - 9(V + 15)V = 0;$$

$$300V + 4500 + 300V - 9V^2 - 135V = 0;$$

$$3V^2 - 155V - 1500 = 0;$$

$$V_1 = -\frac{50}{6} \text{ — не подходит, так как } V > 0;$$

$$V_2 = 60.$$

Ответ: 60.

---

16. Расстояние между городами 360 км. Первую  $\frac{1}{3}$  пути автомобиль двигался со скоростью на 20 км/ч меньше, чем оставшуюся часть пути. На весь путь было потрачено 5 часов. Найти первоначальную скорость автомобиля.
17. Расстояние между пунктами  $A$  и  $B$  9 км. Первую  $\frac{1}{3}$  пути пешеход двигался со скоростью на 1 км/ч больше, чем оставшуюся часть пути. На весь путь было потрачено 1,7 часа. Найти скорость пешехода на втором участке пути.
18. Расстояние между пунктами  $A$  и  $B$  36 км. Лодка сначала проплыла по течению реки из пункта  $A$  в пункт  $B$ , а потом обратно. На весь путь лодка затратила 5 часов. Скорость течения реки 3 км/ч. Найти скорость лодки в стоячей воде.
19. Расстояние между пунктами  $A$  и  $B$  35 км. Лодка сначала проплыла по течению реки из пункта  $A$  в пункт  $B$ , а потом обратно. На весь путь лодка затратила 6 часов. Скорость течения реки 2 км/ч. Найти скорость лодки в стоячей воде.
20. Расстояние между пунктами  $A$  и  $B$  15 км. Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выехал Вася. Одновременно с ним из пункта  $B$  в  $A$  выбежал Николай. Они встретились на расстоянии 2,5 км от середины между пунктами  $A$  и  $B$  через 1 ч. Найти скорость Васи.

**Пример:**

Найти наименьшее значение функции  $y = x^2 - 4x + 2$  на отрезке  $[1; 3]$ .

**Решение:**

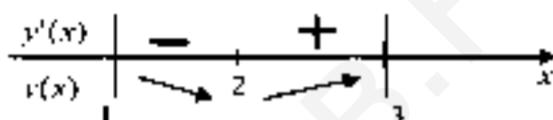
Найдем производную функции:

$$y' = (x^2 - 4x + 2)' = 2x - 4.$$

Приравняем производную к 0:

$$2x - 4 = 0:$$

$$x = 2.$$



Видим, что наименьшее значение функция примет в точке  $x = 2$ .

Найдем наименьшее значение функции:

$$y(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 2 = -2.$$

Ответ:  $-2$ .

1. Найти наименьшее значение функции  $y = x^2 - 6x + 1000$  на отрезке  $[2; 4]$ .
2. Найти наименьшее значение функции  $y = x^3 - 3x^2 - 15$  на отрезке  $[-1; 1]$ .

3. Найти наибольшее значение функции  $y = -2x^3 + 3x^2 + 5$  на отрезке  $[-1; 2]$ .
4. Найти наибольшее значение функции  $y = 3x^4 - 6x^2 + 3$  на отрезке  $[-2; 2]$ .
5. Найти наименьшее значение функции  $y = x^3 - 3x^2 + 3x$  на отрезке  $[0; 2]$ .

**Пример:**

Найти наименьшее значение функции  $y = 4^x - 2^x + 50$  на отрезке  $[-2; 0]$ .

**Решение:**

Найдем производную функции:

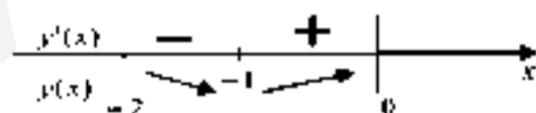
$$y' = (4^x - 2^x + 50)' = 4^x \ln 4 - 2^x \ln 2.$$

Приравняем производную к 0:

$$4^x \ln 4 - 2^x \ln 2 = 0;$$

$$2^x = \log_4 2;$$

$$x = -1.$$



Видим, что наименьшее значение функция примет в точке  $x = -1$ .

Найдем наименьшее значение функции:

$$y(-1) = 4^{-1} - 2^{-1} + 50 = 49,75.$$

Ответ: 49,75.

6. Найти наибольшее значение функции  $y = 3^x + 9^x + 7$  на отрезке  $[-1; 1]$ .
7. Найти наибольшее значение функции  $y = 6^x - 36^x - 216$  на отрезке  $[0; 1]$ .
8. Найти наибольшее значение функции  $y = \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{12}\pi + \frac{1}{2}$  на отрезке  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .
9. Найти наибольшее значение функции  $y = \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}x - 500 - \frac{\sqrt{2}\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{4}$  на отрезке  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .
10. Найти наибольшее значение функции  $y = e^x(x - 2)$  на отрезке  $[0; 2]$ .
11. Найти наибольшее значение функции  $y = e^{x+3}(x - 5) + 1$  на отрезке  $[3; 5]$ .
12. Найти наибольшее значение функции  $y = e^{x-2}(5 - x) + 5$  на отрезке  $[5; 6]$ .
13. Найти точку максимума функции  $y = 6 \ln(x + 1) - 3x$ .
14. Найти точку минимума функции  $y = x^2 - 6x + 5$ .
15. Найти точку максимума функции  $y = 2x^3 - 3x^2$ .

# C1

## Пример:

Решите уравнение  $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ . В ответ записать корни, принадлежащие промежутку  $[0; \pi]$ .

## Решение:

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0.$$

Сделаем замену:

$$t = \sin x; \quad t \in [-1; 1];$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0;$$

$$\begin{cases} t = 1; \\ t = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Вернемся к переменной  $x$ :

$$1. \quad t = 1; \quad \sin x = 1;$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Выберем корни, принадлежащие промежутку  $[0; \pi]$ :

$$k = -1 \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2} \notin [0; \pi];$$

$$\boxed{k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [0; \pi];}$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{2} \notin [0; \pi].$$

Взяв значения  $k$  по порядку  $(-1; 0; 1)$ , получаем, что на промежутке  $[0; \pi]$  имеется только один корень:  $x = \frac{\pi}{2}$ .

$$2. \cos x = \frac{1}{2}; \sin x = \frac{1}{2};$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; k \in Z.$$

Выберем корни, принадлежащие промежутку  $[0; \pi]$ :

$$k = -1 \Rightarrow x = -\frac{7\pi}{6} \notin [0; \pi].$$

$$\boxed{k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \in [0; \pi];}$$

$$\boxed{k = 1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \in [0; \pi];}$$

$$k = 2 \Rightarrow x = \frac{13\pi}{6} \notin [0; \pi].$$

Взяв значения  $k$  по порядку  $(-1; 0; 1; 2)$ , получаем, что на промежутке  $[0; \pi]$  находятся два корня:  $x = \frac{\pi}{6}$ ;  $x = \frac{5\pi}{6}$ .

Ответ:  $x = \frac{\pi}{6}$ ;  $x = \frac{5\pi}{6}$ ;  $x = \frac{5\pi}{6}$ .

1. Решите уравнение  $\sin^2 x - 3 \sin x + 2 = 0$ . В ответ записать корни, принадлежащие промежутку  $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ .

2. Решите уравнение  $\cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 0$ . В ответ записать корни, принадлежащие промежутку  $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ .

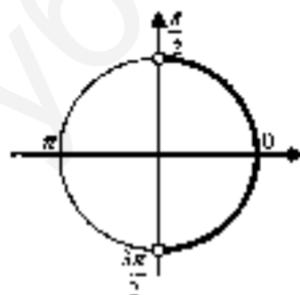
3. Решите уравнение  $\lg^2 x - \lg x = 0$ . В ответ записать корни, принадлежащие промежутку  $\left[ \pi; \frac{3\pi}{2} \right]$ .
4. Решите уравнение  $2 \sin^2 x + \cos^2 x - 2 = 0$ . В ответ записать корни, принадлежащие промежутку  $[-\pi; 0]$ .
5. Решите уравнение  $(\sin x - 1) \left( \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$ . В ответ записать корни, принадлежащие промежутку  $\left[ -2\pi; -\frac{3\pi}{2} \right]$ .

**Пример:**

Решите уравнение.  $\frac{6 \sin^2 x - 5 \sin x + 1}{\sqrt{\cos x}} = 0$ .

**Решение:**

ОДЗ:  $\cos x > 0$ ;



$$\left( -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right); k \in \mathbb{Z}.$$

Возвращаемся к уравнению:

$$\frac{6 \sin^2 x - 5 \sin x + 1}{\sqrt{\cos x}} = 0;$$

$$6 \sin^2 x - 5 \sin x + 1 = 0.$$

Сделаем замену:

$$\sin x = t; \quad t \in [-1; 1].$$

$$6t^2 - 5t + 1 = 0;$$

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2}; \\ t = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

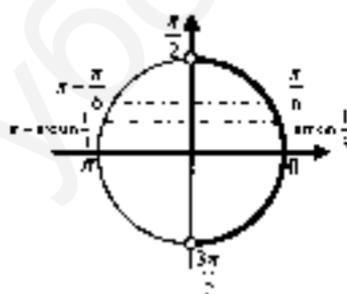
$$1. \quad t = \frac{1}{2}; \quad \sin x = \frac{1}{2};$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$2. \quad t = \frac{1}{3}; \quad \sin x = \frac{1}{3};$$

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Из полученных решений выберем те, которые подходят по ОДЗ:



Из рисунка видим, что нам подходит только часть решений:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \\ x = \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k; \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \quad x = \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k; \quad k \in \mathbb{Z}.$

6. Решите уравнение:  $2\sin^2 x - \frac{\sqrt{3}\sin x}{\sqrt{-\cos x}} = 0$ .

7. Решите уравнение:  $\frac{\cos^2 x - 3\cos x + 2}{\sqrt{-\sin x}} = 0$ .

8. Решите уравнение:  $\frac{\sqrt{2}\cos^2 x - \cos x}{\sqrt{\sin x}} = 0$ .

9. Решите уравнение:  $\frac{3\cos^2 x - 4\cos x + 1}{\sqrt{\sin x}} = 0$ .

10. Решите уравнение:  $\frac{5\cos^2 x - 6\cos x + 1}{\sqrt{\lg x}} = 0$ .

11. Решите уравнение:  $\frac{2\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}} = 0$ .

12. Решите уравнение:  $\sqrt{\sin x}(2\cos^2 x - 3\cos x - 2) = 0$ .

13. Решите уравнение:  $\sqrt{-\sin x}(\cos^2 x - \cos x) = 0$ .

14. Решите уравнение:  $\sqrt{-\operatorname{ctg} x}(2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x) = 0$ .

15. Решите уравнение:  $\sqrt{\sin x}(\cos^2 x + \sin^2 x) = 0$ .

**Пример:**

Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} 9^{\cos x} + 3 \cdot 3^{\cos x} - 4 = 0; \\ \sqrt{y-5} + 4\sin x = 0. \end{cases}$$

**Решение:**

$$\begin{cases} 3^{2\cos x} + 3 \cdot 3^{\cos x} - 4 = 0; \\ \sqrt{y-5} + 4\sin x = 0. \end{cases}$$

Сначала решим первое уравнение с одним неизвестным:

$$3^{2 \cos x} + 3 \cdot 3^{\cos x} - 4 = 0.$$

Сделаем замену:

$$t = 3^{\cos x}; t > 0.$$

Получаем:

$$t^2 + 3t - 4 = 0.$$

$t_1 = -4$  — не подходит, так как  $t > 0$ ;

$$t_2 = 1.$$

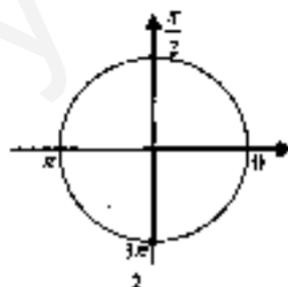
Вернемся к переменной  $x$ :

$$3^{\cos x} = 1;$$

$$3^{\cos x} = 3^0;$$

$$\cos x = 0;$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z}.$$



Получили на круге две точки, в которых значения  $\sin x$  равны значениям «1» и «-1», поэтому рассмотрим два случая и решим второе уравнение  $\sqrt{y+5} + 4 \sin x = 0$ :

$$1. x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z};$$

$$\sqrt{y+5} + 4 \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 0,$$

$$\sqrt{y+5} + 4 \cdot 1 = 0;$$

$$\sqrt{y+5} = -4 \quad \text{корней нет.}$$

$$2. \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k : k \in Z;$$

$$\sqrt{y+5} + 4 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right) = 0;$$

$$\sqrt{y+5} + 4 \cdot (-1) = 0;$$

$$\sqrt{y+5} = 4;$$

$$y+5=16;$$

$$y=11.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k; 11 \right\} : k \in Z.$$

16. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} 3^{2\cos x} - 4 \cdot 3^{\cos x} + 3 = 0; \\ \sqrt{y} + 3 \sin x + 2 = 0. \end{cases}$$

17. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} 4^{2\sin x} + 3 \cdot 4^{\sin x} - 10 = 0; \\ \sqrt{y+1} + 2 \cos x = 0. \end{cases}$$

18. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} 9^{2\log x} + 2 \cdot 9^{\log x} - 3 = 0; \\ \sqrt{y+3} + 2 \cos x = 0. \end{cases}$$

19. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} 4^{2\cos x} - 5 \cdot 4^{\cos x} + 4 = 0; \\ \sqrt{y-2} + 4 \sin x = 0. \end{cases}$$

20. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} 2^{2 \sin x} - 2,5 \cdot 2^{\sin^2 x} + 1 = 0; \\ \sqrt{y-1} + \operatorname{tg} x = 0. \end{cases}$$

**Пример:**

Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} x^2 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 3} = 3x; \\ 2 \sin y = \sqrt{3}x. \end{cases}$$

**Решение:**

Сначала решим первое уравнение с одним неизвестным:

$$x^2 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 3x + 3 - 3x = 0;$$

$$x^2 - 3x + 2\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 3x + 3 = 0.$$

Сделаем замену:  $t = \sqrt{x^2 - 3x + 3}$ ;  $t \geq 0$ ;

$$t^2 = x^2 - 3x + 3;$$

$$t^2 - 3 = x^2 - 3x.$$

Получим:

$$t^2 + 2t - 3 = 0;$$

$t_1 = -3$  — не подходит, так как  $t \geq 0$ ;

$t_2 = 1$ .

Вернемся к переменной  $x$ :

$$\sqrt{x^2 - 3x + 3} = 1;$$

$$x^2 - 3x + 3 = 1;$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0;$$

$$x_1 = 2;$$

$$x_2 = 1.$$

Получили два значения  $x$ , поэтому рассмотрим два случая:

1.  $x = 2$ .

Решим второе уравнение  $2 \sin y = \sqrt{3}x$ :

$$\sin y = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2};$$

$\sin y = \sqrt{3}$  — корней нет, так как  $\sin y \in [-1; 1]$ .

2.  $x = 1$ ;

Решим второе уравнение  $2 \sin y = \sqrt{3}x$ :

$$\sin y = \frac{\sqrt{3} \cdot 1}{2};$$

$$y = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $\left( 1; (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k \right); \quad k \in \mathbb{Z}.$

21. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} x^2 + 3\sqrt{x^2 - x - 1} = x + 5; \\ x \cos y = \sqrt{2}. \end{cases}$$

22. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} x^2 - 8x + 15 = \sqrt{x^2 - 8x + 21}; \\ x \sin y = 3. \end{cases}$$

23. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} x^2 - 4x + 1 = -\sqrt{x^2 - 4x + 7}, \\ \operatorname{tg} y = \sqrt{3}x. \end{cases}$$

24. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} x^2 - 2\frac{2}{3}x + 3\sqrt{x^2 - 2\frac{2}{3}x} = 4; \\ \sin y = x. \end{cases}$$

25. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} x^2 - 5x + 3 + \sqrt{x^2 - 5x + 5} = 0, \\ x \cos y = -2 \end{cases}$$

**Пример:**

Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} 2\sin^2 v - 13\sin v + 6 = 0; \\ \sqrt{v^2 + 2v} - 2\cos v. \end{cases}$$

**Решение:**

Сначала решим первое уравнение с одним неизвестным  $2\sin^2 x - 13\sin x + 6 = 0$ .

Сделаем замену:  $t = \sin x$ ;  $t \in [-1; 1]$ ;

$$2t^2 - 13t + 6 = 0;$$

$$D = 11^2;$$

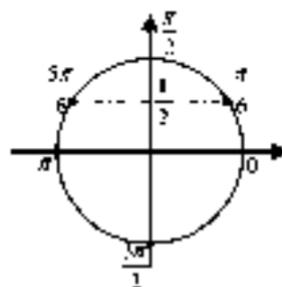
$t_1 = 6$  — не подходит, так как  $t \in [-1; 1]$ ;

$$t_2 = \frac{1}{2}.$$

Вернемся к переменной  $x$ :

$$\sin x = \frac{1}{2};$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Получили на круге две точки, в которых значения  $\cos x$  равны значениям « $\frac{\sqrt{3}}{2}$ » и « $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ », поэтому рассмотрим два случая и решим второе уравнение  $\sqrt{y^2 + 2y} = 2 \cos x$ :

$$1. x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z};$$

$$\sqrt{y^2 + 2y} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right);$$

$$\sqrt{y^2 + 2y} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sqrt{y^2 + 2y} = \sqrt{3};$$

$$y^2 + 2y - 3 = 0;$$

$$y_1 = 1;$$

$$y_2 = -3.$$

$$2. x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z};$$

$$\sqrt{y^2 + 2y} = 2 \cos\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right);$$

$$\sqrt{y^2 + 2y} = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$\sqrt{y^2 + 2y} = -\sqrt{3} \quad \text{корней нет.}$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; 1\right); \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; -3\right); k \in \mathbb{Z}.$$

$$26. \text{ Решить систему уравнений: } \begin{cases} \cos^2 x - 4 \cos x + 3 = 0; \\ \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 5 \sin x + 1. \end{cases}$$

27. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} \sin^2 x - \sqrt{2} \sin x + 0,5 = 0; \\ \sqrt{y^2 + 1} = 2 \cos x. \end{cases}$$

28. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} \sin^2 x - \sin x = 0; \\ \sqrt{y^2 + 1} = 3 \cos x. \end{cases}$$

29. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} \cos x + 1 - \sin^2 x = 0; \\ \sqrt{y^2 + 5} = \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

30. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} 2 \cos^2 x - 9 \cos x + 4 = 0; \\ \sqrt{y^2 - 3} + 2 \sin x = 0. \end{cases}$$

**Пример:**

Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} 9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0; \\ \sin y = \sqrt{x - 1}. \end{cases}$$

**Решение:**

Найдем ОДЗ:

$$x - 1 \geq 0;$$

$$x \geq 1.$$

Сначала решим уравнение с одним неизвестным:

$$9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0.$$

Сделаем замену:

$$t = 3^x; \quad t > 0;$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0.$$

Получаем:

$$\begin{cases} t = 1; \\ t = 3. \end{cases}$$

Вернемся к переменной  $x$ :

1.  $t = 1$ ;

$$3^x = 1;$$

$$3^x = 3^0;$$

$x = 0$  — не подходит по ОДЗ;

2.  $t = 3$ ;

$$3^x = 3;$$

$$3^x = 3^1;$$

$$x = 1$$

Решим второе уравнение:

$$\sin y = \sqrt{x-1};$$

$$\sin y = 0;$$

$$y = \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $\{1; \pi k\}; \quad k \in \mathbb{Z}.$

31. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} 5^{2x} - 26 \cdot 5^x + 25 = 0; \\ \cos y = \sqrt{\frac{x-1}{2}}. \end{cases}$$

32. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} 4^x - 20 \cdot 2^x + 64 = 0; \\ \operatorname{tg} y = \sqrt{x-3} \end{cases}$$

33. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} 4 \cdot 4^{2x} - 9 \cdot 4^x + 2 = 0; \\ \sin y = \sqrt{\frac{|x|}{2}}. \end{cases}$$

34. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} 3^{2x+1} - 28 \cdot 3^x + 9 = 0; \\ \cos y = -\frac{\sqrt{x}}{2}. \end{cases}$$

35. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} 9^{2x} - 10 \cdot 9^x + 9 = 0; \\ \lg y = -\sqrt{x - \frac{2}{3}}. \end{cases}$$

**Пример:**

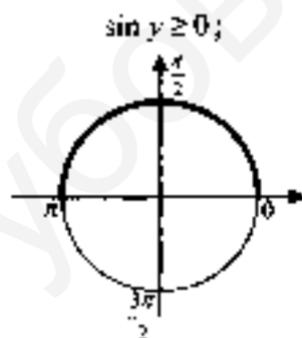
Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} \sqrt{x + \sin^2 y} - 3 = \sin y; \\ x \cos^2 y - 2 \cos y - 1 = 0. \end{cases}$$

**Решение:**

Сначала решим первое уравнение:

$$\sqrt{x + \sin^2 y} - 3 = \sin y.$$

Так как левая часть всегда  $\geq 0$ , то и правая часть должна быть больше 0:



$$[2\pi k; \pi - 2\pi k]; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Возведем правую и левую часть в квадрат:

$$\begin{aligned} x + \sin^2 y - 3 - \sin^2 y; \\ x = 3. \end{aligned}$$

Перейдем ко второму уравнению:

$$\begin{aligned} x \cos^2 y - 2 \cos y - 1 = 0; \\ 3 \cos^2 y - 2 \cos y - 1 = 0. \end{aligned}$$

Сделаем замену:

$$t = \cos y; t \in [-1; 1];$$

$$3t^2 - 2t - 1 = 0;$$

$$\begin{cases} t = 1; \\ t = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Вернемся к переменной  $y$ :

1.  $\cos y = 1$ ;

$$y = 2\pi k; k \in Z.$$

2.  $\cos y = -\frac{1}{3}$ ;

$$y = \pm \left( \pi - \arccos \frac{1}{3} \right) + 2\pi k; k \in Z.$$

Выберем только те значения  $y$ , которые нам подходят по условию  $\sin y \geq 0$ .

Получим:  $\{3; 2\pi k\}; \left\{3; \pi - \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k\right\}; k \in Z.$

Ответ:  $\{3; 2\pi k\}; \left\{3; \pi - \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k\right\}; k \in Z.$

36. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} \sqrt{x-1 + \cos^2 y} = \cos y; \\ x \sin^2 y - \sin y = 0. \end{cases}$$

37. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} \sqrt{x-2 + \sin^2 y} = -\sin y; \\ -x \sin^2 y - \sin y - 1 = 0. \end{cases}$$

38. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} \sqrt{x-1+\cos^2 y} = -\cos y; \\ \cos^2 y - x \cos y = 0. \end{cases}$$

39. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} \sqrt{x-3+\operatorname{tg}^2 y} = \operatorname{tg} y; \\ 6\cos^2 y - x \cos y = 0. \end{cases}$$

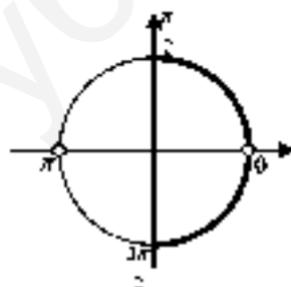
40. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} \sqrt{x-1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\operatorname{ctg} y; \\ x \sin^2 y - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin y = 0. \end{cases}$$

**Пример:**

Решить уравнение:  $\sin x (\operatorname{ctg} x + 1) \sqrt{\cos x} = 0$ .

**Решение:**

ОДЗ: 
$$\begin{cases} \cos x \geq 0; \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$$



$$\left[ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi k \right) \cup \left( 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right]; k \in \mathbb{Z}.$$

Чтобы произведение равнялось 0, нужно, чтобы хотя бы один из множителей равнялся 0:

1.  $\sin x = 0$ ;

$$x = \pi k; k \in \mathbb{Z}.$$

2.  $\operatorname{ctg} x + 1 = 0$ :

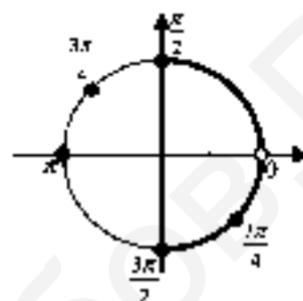
$$\operatorname{ctg} x = -1;$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3.  $\cos x = 0$ ,

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Поставим на круг все полученные решения и выберем те решения, которые подходят по ОДЗ.



Получим:  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ;  $x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$ ;  $k \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ;  $x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$ ;  $k \in \mathbb{Z}$ .

41. Решить уравнение:  $\sin x (\cos 4x - 1) \sqrt{-\sin x} = 0$

42. Решить уравнение:  $\cos 2x (\sin x + 1) (\operatorname{ctg} x - 3) \sqrt{\sin x} = 0$ .

43. Решить уравнение  $(\operatorname{tg} x - 1) \left( \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sqrt{-\cos x} = 0$ .

44. Решить уравнение.  $\left( \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left( \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sqrt{\cos x} = 0$ .

45 Решить уравнение:  $\left(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\cos x - 1)\sqrt{\operatorname{tg} x} = 0$ .

**Пример:**

Решить систему уравнений:  $\begin{cases} 2\cos x + 1 = \cos 2x + 2; \\ \sqrt{y+5} = 2\sin x. \end{cases}$

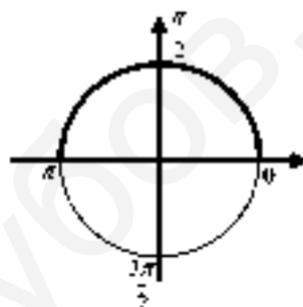
**Решение:**

ОДЗ:  $y + 5 \geq 0$ ;

$y \geq -5$ .

Дополнительное условие:

$\sin x \geq 0$  (так как левая часть второго уравнения  $\geq 0$ ).



$$[2\pi k; \pi + 2\pi k]; k \in \mathbb{Z}.$$

Сначала решим первое уравнение с одним неизвестным  $2\cos x + 1 = \cos 2x + 2$ .

$$2\cos x + 1 = 2\cos^2 x - 1 + 2,$$

$$2\cos^2 x - 2\cos x - 0;$$

$$2\cos x(\cos x - 1) = 0.$$

Чтобы уравнение равнялось 0, нужно, чтобы хотя бы один из множителей равнялся 0:

1.  $\cos x = 0$ ,

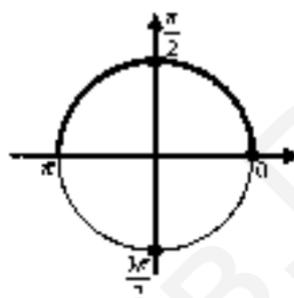
$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z}.$$

2.  $\cos x - 1 = 0;$

$$\cos x = 1;$$

$$x = 2\pi k; k \in \mathbb{Z}.$$

Поставим на круге все полученные решения и выберем те решения, которые подходят по доп. условию:



Получаем:  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; x = 2\pi k; k \in \mathbb{Z}.$

Теперь решим второе уравнение:

1.  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z};$

$$\sqrt{y+5} = 2 \sin x;$$

$$\sqrt{y+5} = 2;$$

$$y = -1.$$

Получаем:  $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; -1\right); k \in \mathbb{Z}.$

2.  $x = 2\pi k; k \in \mathbb{Z};$

$$\sqrt{y+5} = 2 \sin x;$$

$$\sqrt{y+5} = 0;$$

$$y = -5.$$

Получаем:  $(2\pi k; -5)$ ;  $k \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; -1\right)$ ;  $(2\pi k; -5)$ ;  $k \in \mathbb{Z}$ .

46. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} \sin 2x = \cos x; \\ \sqrt{y+7} = -4 \cos x. \end{cases}$$

47. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} \sin^2 x = \sin x \cdot \sin 2x; \\ \sqrt{y+1} = 2 \sin x. \end{cases}$$

48. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} \cos 2x = \sqrt{3} \cos x - 1; \\ \sqrt{y+4} = -3 \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

49. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} \cos 2x + \sin 2x = -2 \sin^2 x; \\ \sqrt{y+4} = 2 \sin x. \end{cases}$$

50. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \operatorname{tg} x = 0, \\ \sqrt{y+6} = -4 \cos x. \end{cases}$$

**Пример:**

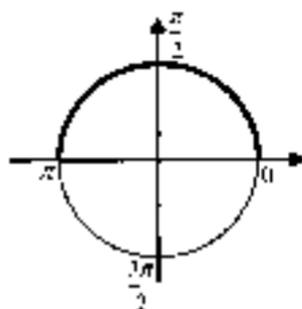
Решить уравнение: 
$$\sqrt{4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} - 4 \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + 3 = 0.$$

**Решение:**

Сначала упростим уравнение: 
$$\sqrt{\left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right)^2} - 4 \sqrt{\sin x} + 3 = 0;$$

$$\sqrt{\sin^2 x} - 4\sqrt{\sin x} + 3 = 0,$$

ОДЗ:  $\sin x \geq 0$ ;



$$[2\pi k; \pi + 2\pi k]; k \in \mathbb{Z}$$

Сделаем замену:

$$t = \sqrt{\sin x}; t \in [0; 1].$$

Получим:

$$t^2 - 4t + 3 = 0;$$

$t_1 = 3$  — не подходит по условию  $t \in [0; 1]$ ;

$t_2 = 1$ .

Вернемся к переменной  $x$ :

$$\sqrt{\sin x} = 1;$$

$$\sin x = 1;$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$ .

51. Решить уравнение:  $4\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x} - \sqrt{\cos^2 2x} - 3 = 0$ .

52. Решить уравнение:  $2\sqrt{1 - \cos^2 x} - 9\sqrt{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} - 4 = 0$ .

53. Решить уравнение:  $\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} + \sqrt{\frac{2 \operatorname{tg}^2 x}{2 - \operatorname{tg}^2 x}} = 0.$

54. Решить уравнение:

$$\sqrt{\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}} + \sqrt{\sin^2 \left( x + \frac{\pi}{4} \right)} - 2 = 0.$$

55. Решить уравнение:  $\sqrt{\operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{ctg} x} + \sqrt{\frac{2 \operatorname{tg}^2 x}{2 - \operatorname{tg}^2 x}} = 0.$

56. Решить уравнение:

$$2 \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}} + (\sqrt{3} + 8) \sqrt{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} + 4\sqrt{3} = 0.$$

57. Решить уравнение:  $3\sqrt{4 \cos^4 x - 4 \cos^2 x + 1} - 10\sqrt{\cos 2x} + 3 = 0.$

58. Решить уравнение:

$$\sqrt{\cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3}} + \sqrt{\cos^2 \left( x - \frac{\pi}{3} \right)} = 0.$$

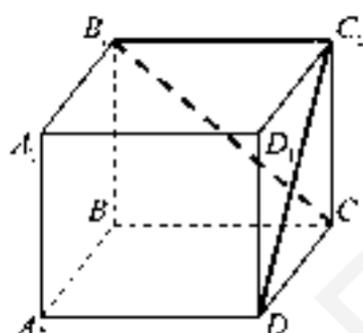
59. Решить уравнение:  $\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x} - 1} + \sqrt{\operatorname{ctg} x} - 2 = 0.$

60. Решить уравнение:

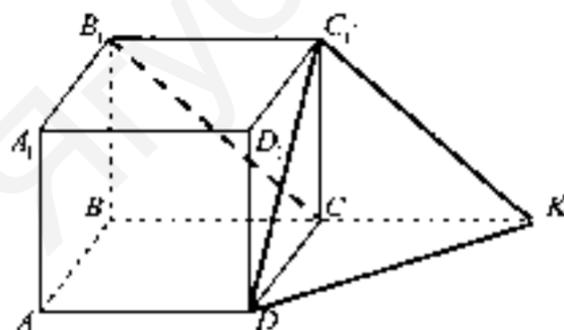
$$\sqrt{\frac{1 - \cos \left( 2x - \frac{\pi}{3} \right)}{2}} + \sqrt{\sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6}} = 0.$$

**Пример:**

Дано:

 $ABCD, A_1B_1C_1D_1$  — куб;Найти угол между прямыми  $DC_1$  и  $CB_1$ .**Решение:**

Перенесем прямую  $CB_1$  параллельно в плоскости  $B_1C_1C$  так, чтобы точка  $B_1$  совпала с точкой  $C_1$ . Получим прямую  $C_1K$ . Соединим точки  $K$  и  $D$ , получим прямую  $KD$ .

 $\angle DC_1K$  — искомый угол.

Так как  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб, то  $CD = CC_1 = CK$ , а значит,  
 $DC_1 = C_1 K = DK \Rightarrow \triangle DC_1 K$  — равносторонний  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle DC_1 K = \angle C_1 K D = \angle C_1 D K = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$ ;

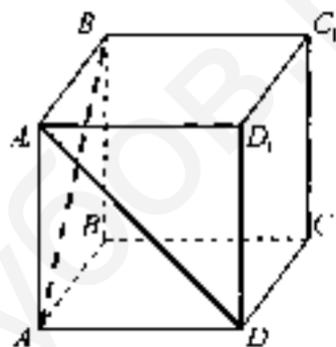
Ответ:  $60^\circ$ .

1. Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямоугольный параллелепипед;

$$AD = DC = 3;$$

$$AA_1 = 4.$$



Найти угол между прямыми  $A_1 D$  и  $AB_1$ .

2. Дано:

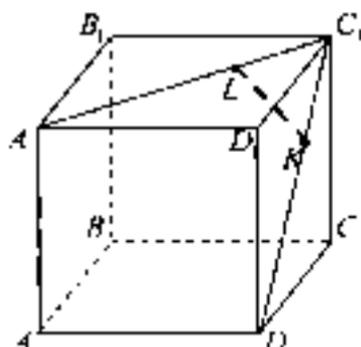
$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямоугольный параллелепипед;

$$AD = DC = 3,$$

$$AA_1 = 4;$$

$$LC_1 = \frac{1}{2} A_1 L;$$

$$C_1 K = \frac{1}{2} KD.$$



Найти  $LK$ .

3. Дано:

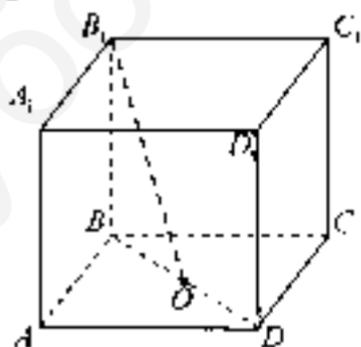
$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямоугольный параллелепипед.

$ABCD$  — квадрат.

$S_{\triangle B_1CD} = 3$ ;

$BB_1 = 4$ ,

$O$  — середина  $BD$ .



Найти  $OB_1$ .

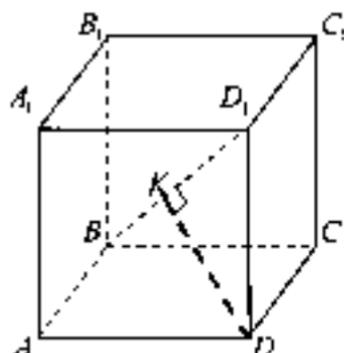
4. Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямоугольный параллелепипед.

$AD = 2$ ;

$DC = 3$ ;

$CC_1 = 4$ .



Найти  $DK$ .

5. Дано:

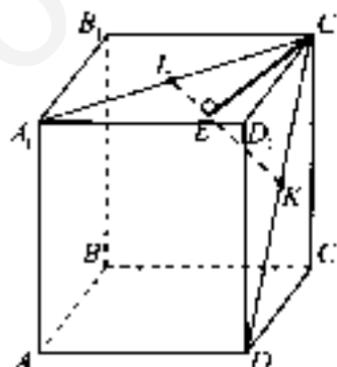
$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямоугольный параллелепипед;

$$AD = DC = 2;$$

$$AA_1 = 4;$$

$$A_1 L = LC_1;$$

$$DK \perp KC_1.$$



Найти  $C_1 E$ .

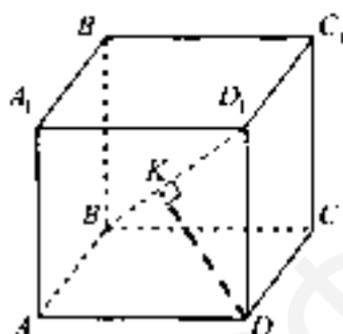
6. Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  - прямоугольный параллелепипед;

$$AD = 1;$$

$DC = 2$ ;

$CC_1 = 3$ .



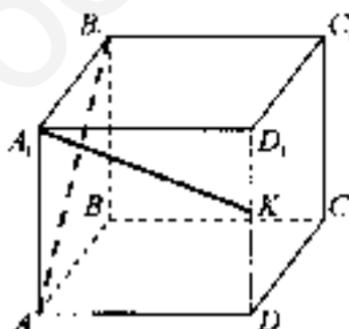
Найти  $DK$ .

7. Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  куб;

$AB = 2$ ;

$D_1 K \perp KD$ .



Найти угол между прямыми  $AB_1$  и  $A_1K$ .

8. Дано:

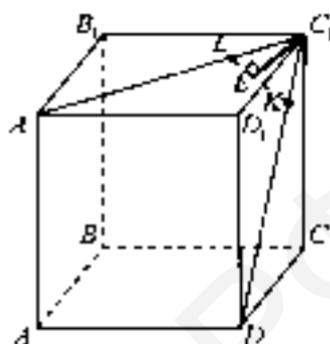
$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямоугольный параллелепипед;

$AD = DC = 3$ ;

$AA_1 = \sqrt{7}$ ;

$$C_1L = \frac{1}{3} A_1C_1;$$

$$C_1K = \frac{1}{4} C_1D.$$



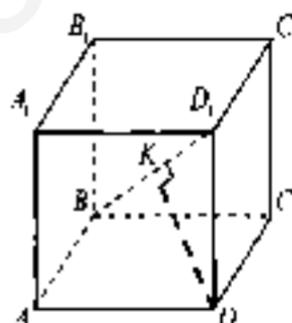
Найти  $C_1E$ .

9. Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямоугольный параллелепипед;

$$AD = 2;$$

$$DC = CC_1 = 4.$$



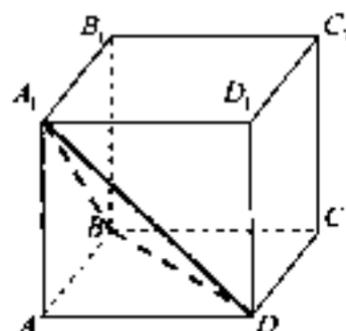
Найти  $DK$ .

10. Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямоугольный параллелепипед;

$$AD = DC = 2;$$

$$CC_1 = 4.$$



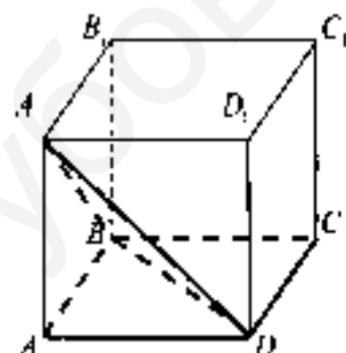
Найти расстояние от точки  $B_1$  до плоскости  $BA_1D$ .

11. Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямоугольный параллелепипед;

$AD = DC = 2$ ;

$CC_1 = 4$ .



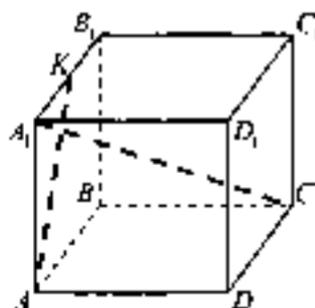
Найти косинус угла между плоскостью  $BA_1D$  и плоскостью основания.

12. Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб;

$AB = 2$ ;

$A_1K = KB_1$ .

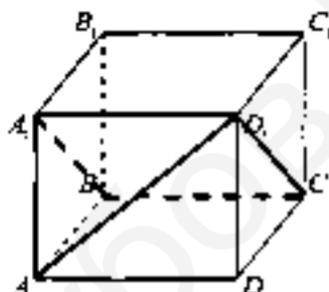


Найти угол между прямыми  $AK$  и  $A_1C$ .

13. Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб;

$AB = 2$ .

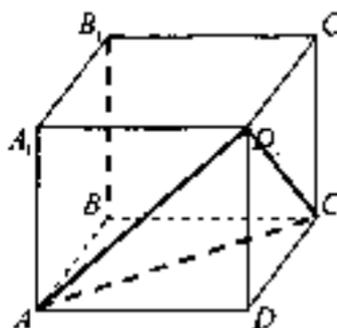


Найти угол между прямой  $AD_1$  и плоскостью  $A_1BC$ .

14. Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб;

$AB = 2$ .

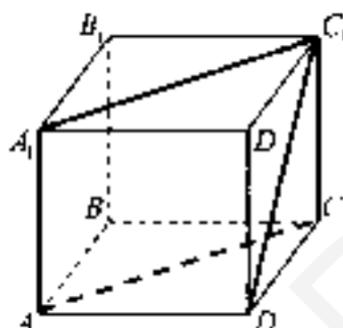


Найти угол между прямой  $BB_1$  и плоскостью  $AD_1C$ .

15. Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб;

$AB = 2$ .



Найти угол между прямой  $DC_1$  и плоскостью  $AA_1C_1$ .

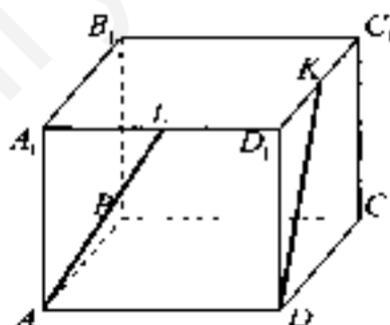
16. Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб;

$AB = 2$ ,

$A_1L = LD_1$ ;

$D_1K = KC_1$ .



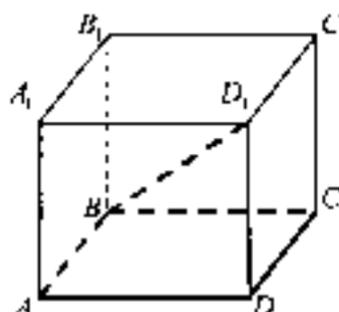
Найти угол между прямыми  $AL$  и  $DK$ .

17. Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — правильная призма;

$$AD = 3;$$

$$DD_1 = 4.$$



Найти тангенс угла между плоскостью основания и прямой  $BD_1$ .

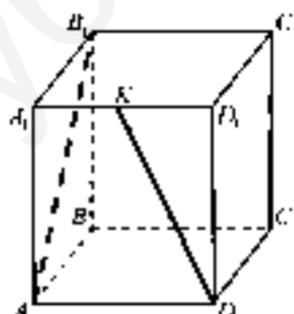
18. Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямоугольный параллелепипед;

$$AD = DC = 2,$$

$$AA_1 = 4;$$

$$A_1 K = KD_1.$$



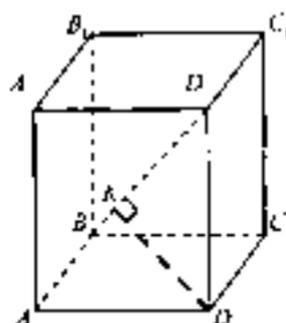
Найти угол между прямыми  $KD$  и  $AB_1$ .

19. Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямоугольный параллелепипед;

$$AD = 2;$$

$$DC - CC_1 = 4.$$

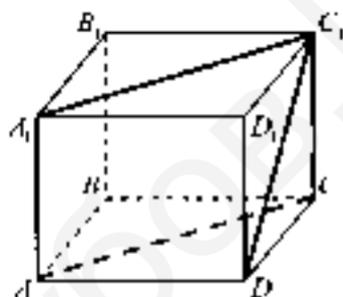


Найти  $DK$ .

20 Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб;

$AB = a$ .

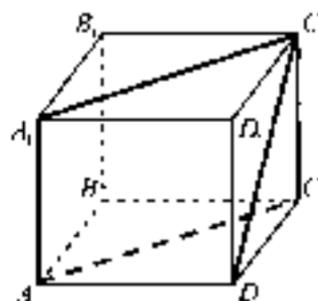


Найти угол между прямой  $DC_1$  и плоскостью  $AA_1C_1$ .

21. Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб;

$AB = a$ .



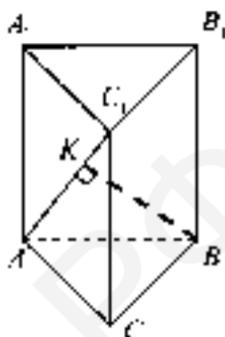
Найти угол между прямой  $DC_1$  и плоскостью  $AA_1C_1$ .

22. Дано:

$ABCA_1B_1C_1$  — правильная призма;

$BC = 3$ ;

$BB_1 = 4$ .



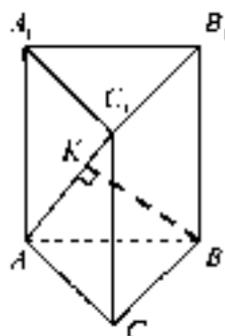
Найти  $BK$ .

23. Дано:

$ABCA_1B_1C_1$  — правильная призма;

$AC = 1$ ;

$CC_1 = 2$ .



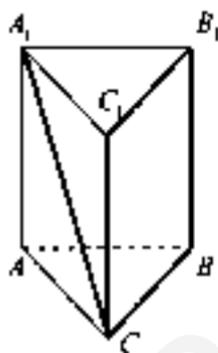
Найти  $BK$ .

24. Дано:

$ABCA_1B_1C_1$  — правильная призма:

$$AC = 2,$$

$$CC_1 = 3.$$



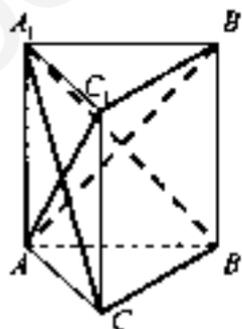
Найти угол между прямой  $A_1C$  и плоскостью  $CC_1B_1$ .

25. Дано:

$ABCA_1B_1C_1$  — правильная призма;

$$AC = 2;$$

$$CC_1 = 4$$



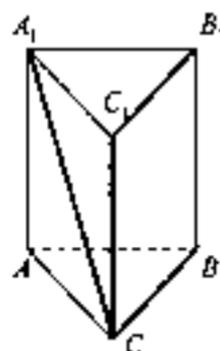
Найти угол между плоскостями  $AB_1C_1$  и  $BA_1C$ .

26. Дано:

$ABCA_1B_1C_1$  — правильная призма;

$$AC = 4;$$

$$CC_1 = 3.$$



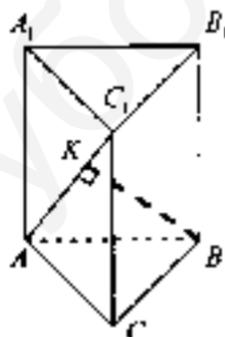
Найти угол между прямой  $A_1C$  и плоскостью  $CC_1B_1$ .

27. Дано:

$ABCA_1B_1C_1$  — правильная призма;

$BC = 1$ ;

$BB_1 = 3$ .



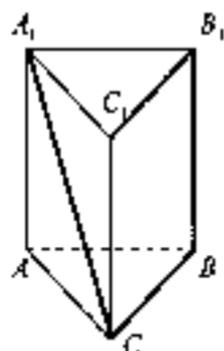
Найти  $BK$ .

28. Дано:

$ABCA_1B_1C_1$  — правильная призма;

$AC = 1$ ;

$CC_1 = 3$ .



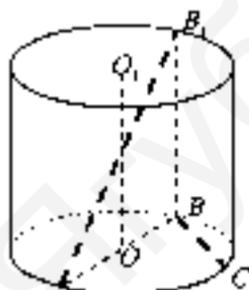
Найти угол между прямой  $A_1C$  и плоскостью  $CC_1B_1$ .

29. Дано:

цилиндр;

$$AB = 6;$$

$$BC = 4;$$



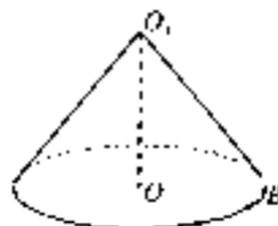
$$BB_1 = 8.$$

Найти угол между прямыми  $AB_1$  и  $BC$ .

30. Дано:

конус;

$$\angle OO_1B = 30^\circ$$



Найти угол между прямой  $O_1B$  и плоскостью основания конуса.

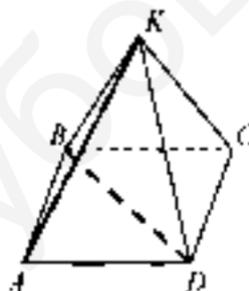
**Пример:**

Дано:

$ABCDK$  — правильная пирамида;

$AB = 4$ ;

$BK = 6$ .



Найти расстояние между прямыми  $BD$  и  $AK$ .

**Решение:**

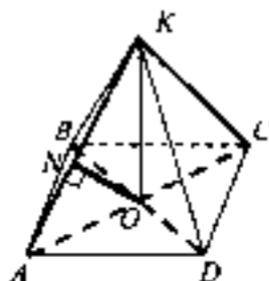
Так как  $ABCDK$  — правильная пирамида, то,  $ABCD$  — квадрат  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow AC \perp BD \Rightarrow (AKC) \perp BD$ .

Проведем перпендикуляр  $ON$  в стороне  $AK$ .

Так как  $(AKC) \perp BD$  и  $ON \in (AKC) \Rightarrow ON \perp BD \Rightarrow$

$\Rightarrow ON$  — расстояние между прямыми  $BD$  и  $AK$ .

$OK$  — высота пирамиды  $ABCDK$ .



$$AO = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \sqrt{AD^2 + DC^2} = 2\sqrt{2};$$

$$AK = BK = 6.$$

$$\triangle AKO \text{ — прямоугольный} \Rightarrow AO = \sqrt{AN \cdot AK}; \quad AN = \frac{AO^2}{AK} = \frac{4}{3};$$

$$\triangle ANO \text{ — прямоугольный} \Rightarrow ON = \sqrt{AO^2 - AN^2} = \sqrt{8 - \frac{16}{9}} = \frac{2\sqrt{14}}{3}.$$

Ответ:  $\frac{2\sqrt{14}}{3}$ .

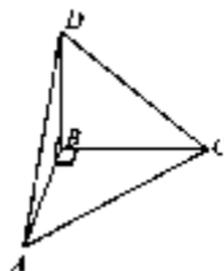
3). Дано:

$ABCD$  — тетраэдр;

$\triangle ABC$  — прямоугольный треугольник;

$DB \perp (ABC)$ ;

$AB = BC$ ;  $AD = R$ ;  $BC = 4$ .



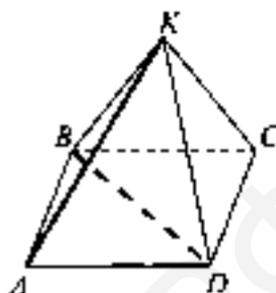
Найти двугранный угол  $DACB$ .

32. Дано:

$ABCDK$  — правильная пирамида;

$AB = 4$ ;

$BK = 5$ .



Найти расстояние между прямыми  $BD$  и  $AK$ .

33. Дано:

$ABCD$  — тетраэдр;

$DB \perp (ABC)$ ;

$AB = BC = 4$ ;

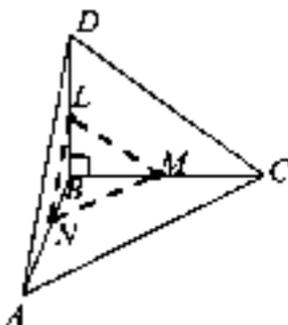
$AC = 6$ ;

$BD = 4$ ;

$BM = MC$ ;

$BN = NA$ ;

$BL = LD$ .

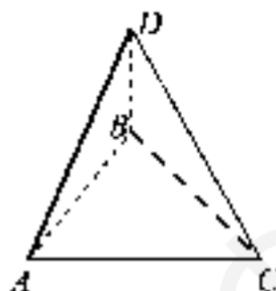


Найти расстояние от точки  $B$  до плоскости  $LMN$ .

34. Дано:

$ABCD$  — правильная пирамида;

$AB = BC = BD = AD = 4$ .



Найти расстояние между прямыми  $BC$  и  $AD$ .

35. Дано:

$SABC$  — пирамида;

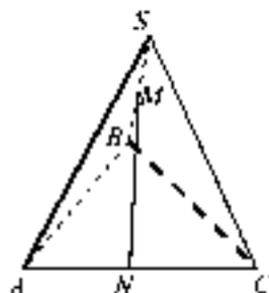
$BM = MS$ ;

$AN = NC$ ;

$AS = 10$ ;

$BC = 12$ ;

$MN = \sqrt{61}$



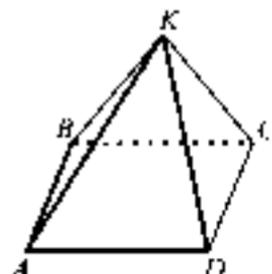
Найти угол между прямыми  $BC$  и  $AS$ .

36. Дано:

$ABCDK$  — правильная пирамида;

$AB = 2$ ;

$BK = 4$ .

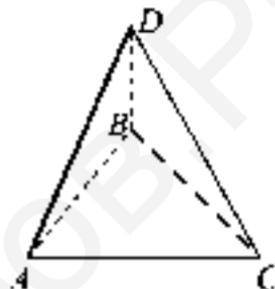


Найти угол между прямой  $AB$  и плоскостью  $AKD$ .

37. Дано:

$ABCD$  — правильная пирамида;

$AB = BC = CD = AD = 6$ .



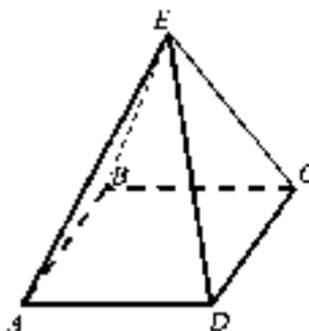
Найти расстояние между прямыми  $BC$  и  $AD$ .

38. Дано:

$ABCDE$  — правильная пирамида;

$AB = 2$ ;

$AE = 4$ .



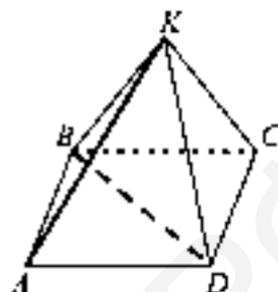
Найти угол между плоскостями  $AED$  и  $ABC$ .

39. Дано:

$ABCDK$  — правильная пирамида;

$AB = 3$ ;

$BK = 5$ .



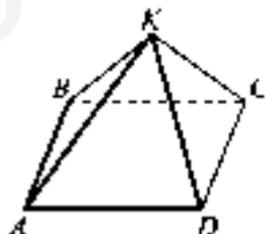
Найти расстояние между прямыми  $BD$  и  $AK$ .

40. Дано:

$ABCDK$  — правильная пирамида;

$AB = 4$ ;

$BK = 6$ .



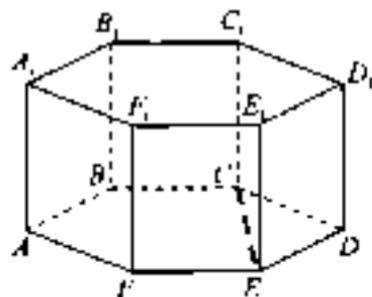
Найти угол между прямой  $AB$  и плоскостью  $AKD$ .

**Пример:**

Дано:

$ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  — правильная призма;

$AB = 4$ .

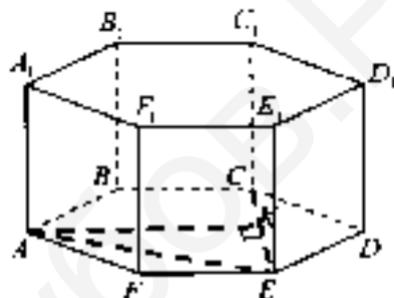


Найти расстояние от точки  $A$  до прямой  $CE$ .

**Решение:**

Проведем перпендикуляр из точки  $A$  к прямой  $CE$

$AK$  — расстояние от точки  $A$  до прямой  $CE$ .



Найдем сторону  $KE$ :

$$CD = ED = 4; \quad \angle CDE = \frac{(6-2) \cdot 180^\circ}{6} = 120^\circ;$$

$$CE^2 = CD^2 + ED^2 - 2CD \cdot ED \cos \angle CDE \quad (\text{по теореме косинусов});$$

$$CE = 4\sqrt{3} \Rightarrow KE = 2\sqrt{3}.$$

Найдем сторону  $AE$ :

$$AF = FE = 4; \quad \angle AFE = \frac{(6-2) \cdot 180^\circ}{6} = 120^\circ;$$

$$AE^2 = AF^2 + FE^2 - 2AF \cdot FE \cos \angle AFE \quad (\text{по теореме косинусов});$$

$$AE = 4\sqrt{3}.$$

Найдем  $AK$  (по теореме Пифагора):

$$AK^2 = AE^2 - KE^2;$$

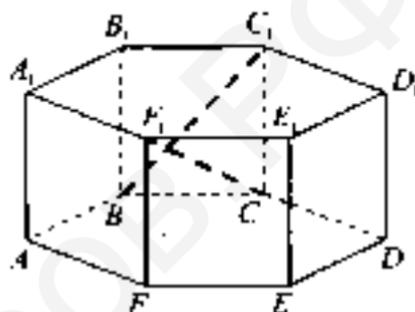
$$AK = 6.$$

Ответ: 6.

41. Дано:

$ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  — правильная призма;

$$AB = AA_1 = 2.$$

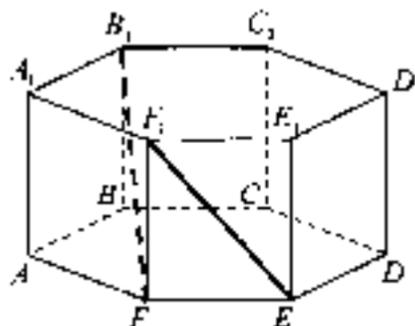


Найти угол между прямыми  $BC_1$  и  $CF_1$ .

42. Дано:

$ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  — правильная призма;

$$AB = AA_1 = 2.$$

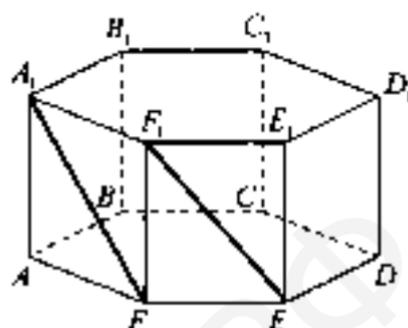


Найти угол между прямыми  $FB_1$  и  $EF_1$ .

43. Дано:

$ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  — правильная призма;

$AB = AA_1 = 2$ .



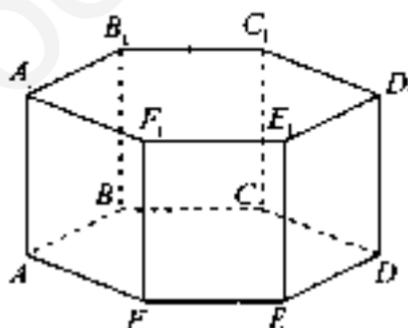
Найти угол между прямыми  $FA_1$  и  $EF_1$ .

44. Дано:

$ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  — правильная призма;

$AB = 2$ ;

$AA_1 = 3$ .



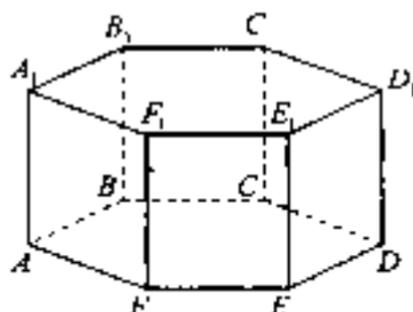
Найти расстояние от точки  $B$  до прямой  $FE$

45. Дано:

$ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  — правильная призма;

$AB = 2$ ;

$AA_1 = 3$ .



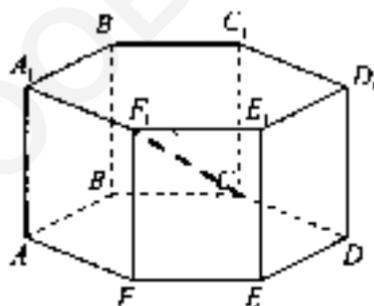
Найти расстояние от точки  $B$  до прямой  $F_1E_1$ .

46. Дано:

$ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  — правильная призма;

$AB = 2$ ;

$AA_1 = 3$ .



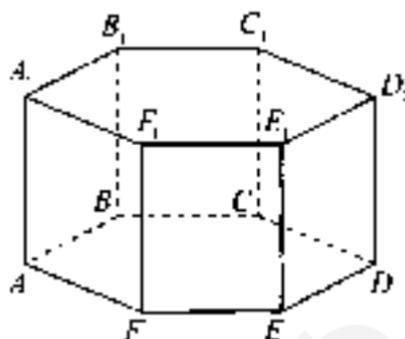
Найти расстояние от точки  $D$  до прямой  $CF_1$ .

47. Дано:

$ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  — правильная призма;

$AB = 2$ ;

$AA_1 = 3$ .



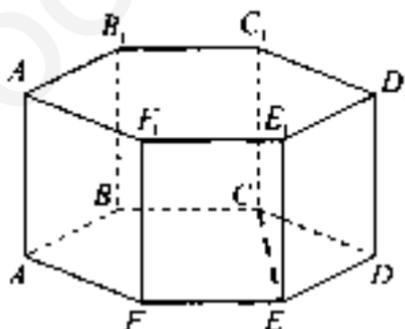
Найти расстояние от точки  $A$  до прямой  $F_1E_1$ .

48. Дано:

$ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  — правильная призма;

$$AB = 2;$$

$$AA_1 = 3.$$

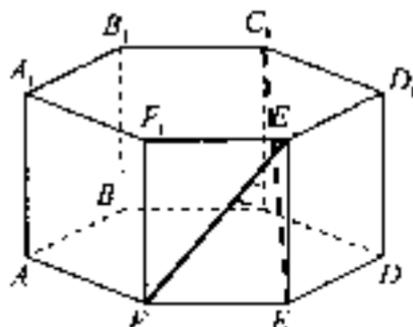


Найти расстояние от точки  $A$  до прямой  $CE$ .

49. Дано:

$ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  — правильная призма;

$$AB = AA_1 = 4.$$



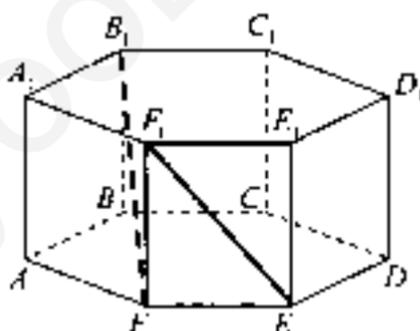
Найти угол между прямыми  $EC_1$  и  $FE_1$ .

50. Дано:

$ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  — правильная призма;

$AB = 2$ ;

$AA_1 = 4$ .



Найти угол между прямыми  $FB$  и  $FE_1$ .

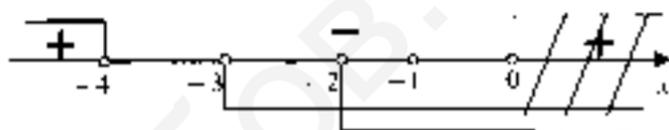
**Пример:**

Решить неравенство:  $\frac{\log_{x+1}(x^2 - 4x)}{\log_{x+2}(x+3)} > 2$ .

**Решение:**

Сначала найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 + 4x > 0; \\ x + 3 > 0; \\ x + 2 > 0; \\ x + 2 \neq 1; \\ \log_{x+2}(x+3) \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x+4) > 0; \\ x > -3; \\ x > -2; \\ x \neq -1; \\ \log_{x+2}(x+3) \neq \log_{x+2} 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x(x+4) > 0; \\ x > -3; \\ x > -2; \\ x \neq -1; \\ x \neq -2. \end{cases}$$



Получаем:  $(0; +\infty)$ .

Теперь упростим неравенство по формуле  $\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$ :

$$\begin{aligned} \log_{x+1}(x^2 + 4x) &> 2, \\ \log_{x+1}(x^2 + 4x) &> \log_{x+1}(x+3)^2. \end{aligned}$$

Получаем два варианта при снятии логарифма:

$$1. 0 < x+3 < 1;$$

$$-3 < x < -2.$$

Получим:

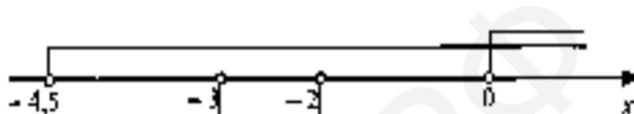
$$x^2 + 4x < (x+3)^2;$$

$$x^2 + 4x < x^2 + 6x + 9;$$

$$2x > -9;$$

$$x > -4,5.$$

С учетом условия  $-3 < x < -2$ , ОДЗ:  $(0; +\infty)$  и  $x > -4,5$ :



Получаем: решений нет.

$$2. \quad x+3 > 1;$$

$$x > -2$$

Получим:

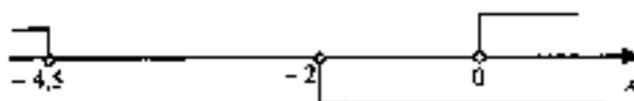
$$x^2 + 4x > (x+3)^2;$$

$$x^2 + 4x > x^2 + 6x + 9;$$

$$2x < -9;$$

$$x < -4,5.$$

С учетом условия  $x > -2$ , ОДЗ:  $(0; +\infty)$  и  $x < -4,5$ :



Получаем: решений нет.

Ответ: решений нет.

1. Решить неравенство:  $\frac{\log_3(x^2 + x)}{\log_x(x-4)} > 1$ .

2. Решить неравенство:  $\frac{\log_{x+1}(x^2 + 4x)}{\log_{x+1}(x+4)} > 1$ .

3. Решить неравенство:  $\frac{\log_{x+3}(x^2 + 5x)}{\log_{x+1}(x+5)} \geq 1$ .

4. Решить неравенство:  $\frac{\log_{x+2}(x^2 - 4x + 3)}{\log_{x+2}(x+1)} > 1$ .

5. Решить неравенство:  $\frac{\log_x(x+1)}{\log_x(2x+4)} < 1$ .

**Пример:**

Решить неравенство:  $\frac{\log_2 x \cdot \log_{256x} 2}{\log_{0,25x} 2} \geq \frac{1}{2}$ .

**Решение:**

Сначала найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0; \\ 256x^2 > 0; \\ 256x^2 \neq 1; \\ 0,25x > 0; \\ 0,25x \neq 1; \end{cases} \begin{cases} x > 0; \\ x \neq 0; \\ x \neq \frac{1}{16}; \\ x > 0; \\ x \neq 4; \end{cases}; \quad x \neq \frac{1}{16}; \quad \left(0; \frac{1}{16}\right); \left(\frac{1}{16}; 4\right); (4; +\infty).$$

Упростим неравенство  $\left(\log_a b = \frac{1}{\log_b a}\right)$ :

$$\frac{\log_2 x \cdot \frac{1}{\log_2 256x^2}}{\frac{1}{\log_2 0,25x}} \geq \frac{1}{2};$$

$$\frac{\log_2 x \cdot \log_2 0.25x}{\log_2 256x^2} \geq \frac{1}{2};$$

$$\frac{\log_2 x \cdot (\log_2 0.25 + \log_2 x)}{\log_2 256 - \log_2 x^2} > \frac{1}{2};$$

$$\frac{\log_2 x \cdot (\log_2 x - 2)}{2 \log_2 x - 8} \geq \frac{1}{2};$$

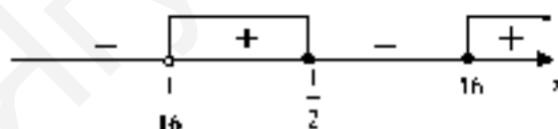
$$\frac{\log_2 x \cdot (\log_2 x - 2)}{\log_2 x - 4} > 1;$$

$$\frac{\log_2^2 x - 2 \log_2 x - 1}{\log_2 x - 4} \geq 0;$$

$$\frac{\log_2^2 x - 2 \log_2 x - \log_2 x - 4}{\log_2 x - 4} \geq 0.$$

$$\frac{\log_2^2 x - 3 \log_2 x - 4}{\log_2 x - 4} \geq 0,$$

$$\frac{(\log_2 x + 1)(\log_2 x - 4)}{\log_2 x - 4} \geq 0.$$



Объединим решение неравенств с ОДЗ  $\left(0; \frac{1}{16}\right); \left(\frac{1}{16}; 4\right); [4; +\infty)$ :



Получаем:  $\left(\frac{1}{16}; \frac{1}{2}\right]; [16; +\infty)$ .

Ответ:  $\left(\frac{1}{16}; \frac{1}{2}\right]; [16; +\infty)$ .

6. Решить неравенство:  $\frac{\log_3 \frac{3}{x}}{5} \cdot \frac{3}{\log_x 3} < 1$ .

7. Решить неравенство:  $\frac{\log_{(x+1)} 4}{\log_x 4 \cdot \log_{\frac{1}{x}} 4} \geq \frac{1}{3}$ .

8. Решить неравенство:  $\frac{\log_{4x^2} 2}{\log_x 2 \cdot \log_{4x} 2} \leq \frac{1}{2}$ .

9. Решить неравенство:  $\frac{\log_{16x} 2}{\log_x 2 \cdot \log_x 2} < \frac{1}{2}$ .

10. Решить неравенство:  $\frac{\log_{4x} 8}{\log_x 3 \cdot \log_x 3} \geq 4$ .

**Пример:**

Решить неравенство:  $\log_{|x|} (x+2) > 1$ .

**Решение:**

Данное задание решим двумя способами.

**Первый способ:**

Найдем ОДЗ.

$$\begin{cases} x+2 > 0; & x > -2; \\ |x| \neq 0; & x \neq 0; \\ |x| \neq 1; & x \neq 1; x \neq -1; \end{cases} \quad ( -2; -1); (-1; 0); (0; 1); (1; +\infty).$$

Снимем модуль в неравенстве:

1.  $x < -1$ ;

$$\begin{aligned} \log_x(x+2) &> 1, \\ \log_x(x+2) &> \log_{-x}(-x); \\ x+2 &> -x; \\ x &> -1. \end{aligned}$$

Получаем: решений нет.

2.  $-1 < x < 0$ ;

$$\begin{aligned} \log_{-x}(x+2) &> 1; \\ \log_x(x+2) &> \log_{-x}(-x); \\ x+2 &< -x; \\ x &< -1. \end{aligned}$$

Получаем: решений нет.

3.  $0 < x < 1$ ;

$$\begin{aligned} \log_x(x+2) &> 1; \\ \log_x(x+2) &> \log_x x; \\ x+2 &< x; \\ 0x &< -2. \end{aligned}$$

Получаем: решений нет

4.  $x > 1$ ;

$$\begin{aligned} \log_x(x+2) &> 1; \\ \log_x(x+2) &> \log_x x; \end{aligned}$$

$$x + 2 > x;$$

$$0x > -2.$$

Получаем:  $x \in \mathbb{R}$ .

С учетом условия  $x > 1$  и ОДЗ:  $(-2; -1); (-1; 0); (0; 1); (1; +\infty)$  получаем:  $(1; +\infty)$ .

Ответ:  $(1; +\infty)$ .

**Второй способом:**

Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} x + 2 > 0; \\ |x| \neq 0; \\ |x| \neq 1; \end{cases} \begin{cases} x > -2; \\ x \neq 0; \\ x \neq 1; x \neq -1; \end{cases} \quad (-2; -1); (-1; 0); (0; 1); (1; +\infty).$$

Сделаем преобразования:  $\log_a b - \log_a c = (a-1)(b-c)$ :

$$\log_{|x|}(x+2) - 1 > 0;$$

$$\log_{|x|}(x+2) - \log_{|x|}|x| > 0;$$

$$(|x| - 1)(x + 2 - |x|) > 0.$$

Снимем модуль:

1.  $x \geq 0$ ;

$$(x-1)(x+2-x) > 0;$$

$$2(x-1) > 0.$$

Получаем:  $x > 1$ .

С учетом условия  $x \geq 0$  и ОДЗ:  $(-2; -1); (-1; 0); (0; 1); (1; +\infty)$  получаем:  $(1; +\infty)$ .

2.  $x < 0$ ;

$$(-x-1)(x+2+x) > 0;$$

$$2(x+1)^2 < 0.$$

Получаем: решений нет.

Ответ:  $(1; +\infty)$ .

11. Решите неравенство:  $\log_x(x+1) > 1$ .

12. Решите неравенство:  $\log_{x+4}(x+2) < 1$ .

13. Решите неравенство:  $\log_{|x+1|}(x+5) \leq 1$ .

14. Решите неравенство:  $\log_{|x+2|}(x+4) > 1$ .

15. Решите неравенство:  $\log_{|x+1|}(x+8) > 1$ .

### Пример:

Решите неравенство:

$$\log_2 \frac{2 \cdot 3^x - 3}{3^x + 12} + \log_2 (3^x + 12) (2 \cdot 3^x - 3) \geq \log_2 (3^x + 12)^2 + \log_2 1.$$

### Решение:

Сначала найдем ОДЗ:

Так как  $\frac{2 \cdot 3^x - 3}{3^x + 12} > 0$  и  $(3^x + 12)(2 \cdot 3^x - 3) > 0$  при  $x \in \mathbb{R}$ , получим:

$$\begin{cases} x^2 \neq 0: & x \neq 0; \\ x^2 \neq 1: & x \neq \pm 1; \quad (-\infty; -1); (-1; 0); (0; 1); (1; +\infty); \\ x^2 \neq 4: & x \neq \pm 2; \end{cases}$$

Упростим неравенство:

$$\log_2 \frac{2 \cdot 3^x + 3}{3^x + 12} + \log_2 (3^x + 12) (2 \cdot 3^x - 3) \geq \log_2 (3^x + 12)^2;$$

$$\log_2 \left( \frac{2 \cdot 3^x + 3}{3^x + 12} \right) (3^x + 12) (2 \cdot 3^x - 3) \geq \log_2 (3^x + 12)^2;$$

$$\log_3(2 \cdot 3^x - 3)^2 \geq \log_2(3^x - 12)^2;$$

$$|2 \cdot 3^x - 3| \geq |3^x + 12|.$$

Так как  $(2 \cdot 3^x + 3) > 0$  и  $(3^x - 12) > 0$  при  $x \in \mathbb{R}$ , получим:

$$2 \cdot 3^x + 3 \geq 3^x + 12;$$

$$3^x \geq 9;$$

$$x \geq 2.$$

С учетом ОДЗ, получим:  $[2; +\infty)$ .

Ответ:  $[2; +\infty)$ .

16. Решите неравенство:

$$\log_2\left(\frac{2 \cdot 5^{-x} + 2,8}{2^x + 17}\right) + \log_3(2 \cdot 5^{-x} + 2,8)^5(2^x + 17) < \frac{1}{\log_{(2^x + 3)^2} 3}.$$

17. Решите неравенство:

$$\lg(4^{-2x+1} + 69) - \frac{1}{\log_{(2^x - 2)} 10} > \\ > \log_2 \log_3 \log_{17,5} (x-5)^4 + \lg(5 \cdot 4^{-2x} + 5)^2.$$

18. Решите неравенство:

$$\log_5(3^{2x} + 7) + \log_5\left(\frac{3^{2x} - 7}{4^x + 5}\right) + \log_5(4^x + 5) \geq \\ \geq \frac{1}{\log_{(2^x + 3)^2} 5} + \log_2 \log_3 \log_{17,5} (x-3)^{16}$$

19. Решите неравенство:

$$\ln(i^{2x-6}) - \frac{1}{\log_{\frac{1}{x^2+6}} e} > \ln \log_{\frac{1}{2x^2-x}}(2x^2-x) + \ln(4 \cdot 9^x + 3)^2.$$

20. Решите неравенство:

$$\begin{aligned} \log_2(2^{x^2+5} + 15) - \frac{1}{2 \log_{\frac{1}{x^2+1}} 2} > \\ > \log_2\left(\frac{5}{4^x} + 7\right)^2 - \log_{\frac{1}{x-1}} \log_{\frac{1}{x-1}}(x-7). \end{aligned}$$

**Пример:**

Решить неравенство:  $\frac{\log_{4^x} x^2}{\log_{4^x} (4x-3)} > 1$ .

**Решение:**

Данное задание решим двумя способами.

**Первый способ:**

ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 > 0; \\ 4x - 3 > 0; \\ 4^x \neq 1; \\ \log_{4^x} (4x - 3) \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x \neq 0; \\ x > \frac{3}{4}; \\ x \neq 0; \\ x \neq 1; \end{cases} \left(\frac{3}{4}; 1\right); (1; +\infty).$$

Упростим неравенство  $\left(\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log b\right)$ :

$$\log_{(4x-3)} x^2 > 1.$$

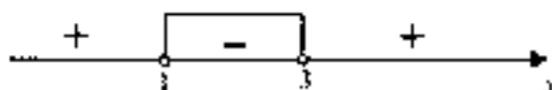
1.  $0 < 4x - 3 < 1$ ,

$$\frac{3}{4} < x < 1;$$

$$\log_{(4x-1)} x^2 > \log_{(4x-1)}(4x-3);$$

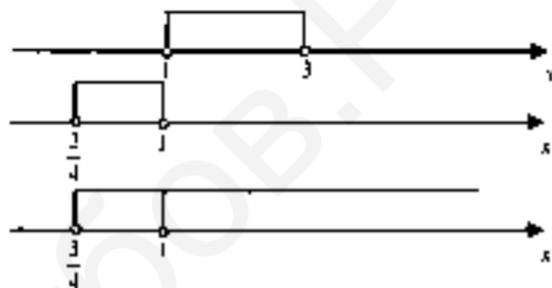
$$x^2 < 4x-3;$$

$$(x-1)(x-3) < 0.$$



Получаем:  $(1; 3)$ .

С учетом условия  $\left(\frac{3}{4}; 1\right)$  и ОДЗ:  $\left(\frac{3}{4}; 1\right); (1; +\infty)$ :



Получаем: решение нет.

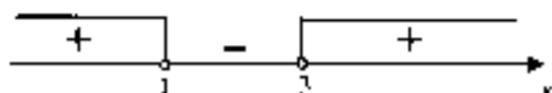
2.  $4x-3 > 1$ :

$$x > 1;$$

$$\log_{(1-x-3)} x^2 > \log_{(4x-3)}(4x-3);$$

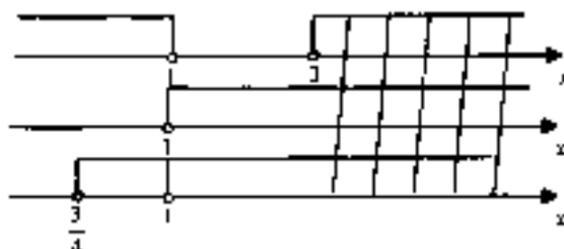
$$x^2 > 4x-3;$$

$$(x-1)(x-3) > 0.$$



Получаем:  $(-\infty; 1); (3; +\infty)$ .

С учетом условия  $(1; +\infty)$  и ОДЗ:  $\left(\frac{3}{4}; 1\right); (1; +\infty)$ :



Получаем:  $(3; +\infty)$ .

Ответ:  $(3; +\infty)$

**Второй способ:**

ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 > 0, & x \neq 0; \\ 4x - 3 > 0; & x > \frac{3}{4}; \\ 4^x \neq 1; & x \neq 0; \\ \log_{4x-3}(4x-3) \neq 0; & x \neq 1; \end{cases} \left(\frac{3}{4}; 1\right); (1; +\infty).$$

Упростим неравенство:

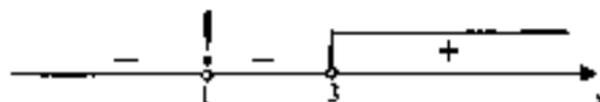
$$\log_{(4x-3)} x^2 > 1;$$

$$\log_{(4x-3)} x^2 - \log_{(4x-3)}(4x-3) > 0.$$

Сделаем равносильную замену  $(\log_a b - \log_a c = (a-1)(b-c))$ :

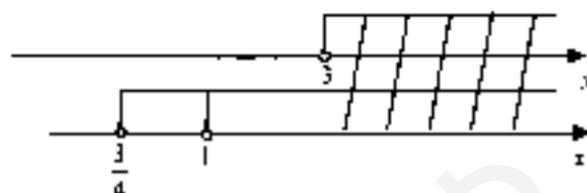
$$(4x-3-1)(x^2-4x+3) > 0;$$

$$4(x-1)^2(x-3) > 0.$$



Получаем:  $(3; +\infty)$ .

С учетом ОДЗ:  $\left(\frac{3}{4}; 1\right) \cup (1; +\infty)$ :



Получим:  $(3; +\infty)$ .

Ответ:  $(3; +\infty)$ .

21. Решить неравенство:  $\frac{\log_6 x^2}{\log_6 (5x-6)} > 1$ .

22. Решить неравенство:  $\frac{\log_7 x^2}{\log_7 (7x-12)} < 1$ .

23. Решить неравенство:  $\frac{\log_{3^{x-5}} (x^2 - 3x)}{\log_{8^x} (x-3)} > 1$ .

24. Решить неравенство:  $\log_{3^{x-2}} x^2 \cdot \log_{6^{x-8}} \left(\frac{3^x}{9}\right) < 1$ .

25. Решить неравенство:  $\frac{\log_{x^2} 4^x}{\log_{(7x-10)} 4^x} < 1$ .

**Пример:**

Решить неравенство  $\log_{|x|} |x+1| > 1$ .

**Решение:**

Решим это задание двумя способами.

**Первый способ:**

ОДЗ:

$$\begin{cases} |x+1| > 0, \\ |x| > 0, \\ |x| \neq 1, \end{cases} \begin{cases} x \neq -1, \\ x \neq 0, \\ x \neq \pm 1. \end{cases}$$

Получаем:  $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$ ;

$$\log_{|x|} |x-1| > \log_{|x|} |x|;$$

$$\log_{|x|} |x-1| - \log_{|x|} |x| > 0.$$

Сделаем равносильную замену  $\log_a b - \log_a c = (a-1)(b-c)$ :

$$(|x|-1)(|x-1|-|x|) > 0.$$

Снимем модули:

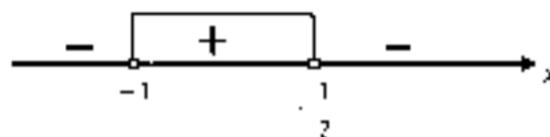
1.  $x < -1$ :

$$\begin{aligned} (-x-1)(-x-1+x) &> 0; \\ x &> -1. \end{aligned}$$

Получаем: решений нет.

2.  $-1 \leq x < 0$ :

$$\begin{aligned} (-x-1)(x-1+x) &> 0; \\ (-x-1)(2x+1) &> 0; \end{aligned}$$



Получаем:  $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ .

С учетом:  $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ ,  $-1 \leq x < 0$  и ОДЗ:  $(-\infty; -1); (-1; 0); (0; 1); (1; +\infty)$ , получим:  $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ .

3.  $x \geq 0$ ,

$$(x-1)(x+1-x) > 0.$$

Получаем:  $x > 1$ .

С учетом:  $x > 1$ ,  $x \geq 1$  и ОДЗ:  $(-\infty; -1); (-1; 0); (0; 1); (1; +\infty)$ , получим:  $(1; +\infty)$ .

Ответ:  $\left(-1; \frac{1}{2}\right); (1; +\infty)$ .

**Второй способ:**

ОДЗ:

$$\begin{cases} |x-1| > 0; \\ |x| > 0; \\ |x| \neq 1; \end{cases} \begin{cases} x \neq -1; \\ x \neq 0; \\ x \neq \pm 1. \end{cases}$$

Получаем:  $(-\infty; -1); (-1; 0); (0; 1); (1; +\infty)$

$$\log_{|x|}|x+1| > 1.$$

1.  $x < -1$ :

$$\log_{-x}(-x-1) > 1;$$

$$\log_{-x}(-x-1) > \log_{-x}(-x);$$

$$-x-1 > -x,$$

$$0x > 1.$$

Получаем: решений нет.

$$2. -1 < x < 0;$$

$$\log_x(x+1) > 1;$$

$$\log_{-x}(x+1) > \log_{-x}(-x);$$

$$x+1 < -x,$$

$$2x < -1.$$

$$\text{Получаем. } x < -\frac{1}{2}.$$

С учетом:  $x < -\frac{1}{2}$ ,  $-1 < x < 0$  и ОДЗ:  $(-\infty; -1); (-1; 0); (0; 1); (1; +\infty)$ , получим:  $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ .

$$3. 0 < x < 1;$$

$$\log_x(x+1) > 1;$$

$$\log_x(x+1) > \log_x x;$$

$$x+1 < x;$$

$$0x < -1.$$

Получаем: решений нет.

$$4. x > 1;$$

$$\log_x(x+1) > 1;$$

$$\log_x(x+1) > \log_x x;$$

$$x+1 > x;$$

$$0x > -1.$$

Получаем:  $(-\infty; +\infty)$ .

С учетом:  $(-\infty; +\infty)$ ,  $x > 1$  и ОДЗ:  $(-\infty; -1); (-1; 0); (0; 1); (1; +\infty)$  получим:  $(1; +\infty)$ .

Ответ:  $\left(-1; -\frac{1}{2}\right); (1; +\infty)$ .

26. Решить неравенство:  $\log_{x+1}|x+3| \geq 1$ .
27. Решить неравенство:  $\log_{x^2}|x-2| < 1$ .
28. Решить неравенство:  $\log_{|x-1|}x - 4 < 1$ .
29. Решить неравенство:  $\log_{|x|}|3-x| > 1$ .
30. Решить неравенство:  $\log_{x+1}|5-x| < 1$ .

# Отвѣты

## B1

1. 8	8. 9	15. 2,5
2. 5	9. 24	16. 20
3. 225	10. 192	17. 8
4. 26	11. 69,3	18. 400
5. 21,9	12. 64,8	19. 500
6. 40	13. 16	20. 1550
7. 30	14. 3,375	

## B2

1. 100	8. 15	15. 80
2. 11	9. 19	16. 5
3. 10	10. 23	17. 1
4. 10	11. 20	18. -6,6
5. 4	12. 9	19. -7,6
6. 6	13. 17	20. 2
7. 24	14. 30	

### B3

1. 10	8. 16	15. 7,5
2. 5	9. 9	16. 14
3. 9	10. 16	17. 10
4. 14	11. 12,5	18. 14
5. 9	12. 14	19. 22,5
6. 13,5	13. 15	20. 15
7. 8	14. $4\pi$	

### B4

1. 354	8. 476	15. 1430
2. 525	9. 665	16. 21000
3. 389	10. 1725	17. 1520
4. 68	11. 756	18. 1050
5. 4724	12. 16600	19. 41664
6. 2800	13. 8250	20. 7800
7. 480	14. 2736	

### B5

1. -3,75	6. 1	11. 4
2. 1,75	7. 1,75	12. 2
3. 1,5	8. 2	13. 5
4. 4	9. 1	14. 4
5. 1	10. 8	15. 3

- |                                       |                                  |
|---------------------------------------|----------------------------------|
| 16.2                                  | 42. $\{-2; -1\}; \{4; +\infty\}$ |
| 17.2                                  | 43. $(-\infty; -2]; [1; 3)$      |
| 18.2                                  | 44. $(-\infty; -3); (-1, 5; -1)$ |
| 19.8                                  | 45. $[0, 75; 1)$                 |
| 20.3                                  | 46. 0 3                          |
| 21. $(-\infty; -1]; [0; 2]$           | 47. 0                            |
| 22. $\{1\}; (2; 3]$                   | 48. $-1 \mid 4$                  |
| 23. $(-\infty; 2]; (6, 8)$            | 49. 0 2                          |
| 24. $(2; 3); (7, +\infty)$            | 50. 2                            |
| 25. $(-\infty; 2]; [-1; 3]$           | 51. 0                            |
| 26. $(-\infty, -2); [0, 1]$           | 52. 0                            |
| 27. $(-\infty; 1]; \{3\}; [4; 7)$     | 53. 0                            |
| 28. $(-\infty; -2); (1; 3); (3; 4)$   | 54. 3                            |
| 29. $(-\infty; -2); (-2; -1); (3; 4)$ | 55. 2                            |
| 30. $(-4; -3); [-2; 1]; \{3\}$        | 56. -6                           |
| 31. 4                                 | 57. 4                            |
| 32. 1                                 | 58. -3                           |
| 33. 1                                 | 59. 1                            |
| 34. 3                                 | 60. 16                           |
| 35. 4                                 | 61. 1                            |
| 36. 1                                 | 62. 6                            |
| 37. 2                                 | 63. 2                            |
| 38. 3                                 | 64. 9                            |
| 39. 0                                 | 65. 4                            |
| 40. 2                                 | 66. -3 1                         |
| 41. $\{3; 5, 5\}$                     | 67. -4 1                         |
|                                       | 68. -3 0                         |
|                                       | 69. -1 4                         |
|                                       | 70. -6 1                         |

## B6

1. 64	8. 50	15. 16
2. 110	9. 22	16. 24
3. 4	10. 7	17. 41,5
4. 3	11. 6	18. 43
5. 8	12. 12	19. 6
6. 6	13. 4	20. 15
7. 6,25	14. 6	

## B7

1. -3	18. 0,25
2. 0,8	19. 15
3. 2,4	20. 25
4. 0,25	21. 1
5. -0,2	22. 4
6. 1	23. 1
7. 0	24. 3
8. 0,25	25. 5
9. 0,75	26. $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$
10. 0,5	27. $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$
11. 0,0625	28. $x = 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$
12. 0,11	29. $x = \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}; k \in \mathbb{Z}$
13. 0,2	30. $x = -\frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$
14. 1	
15. 1	
16. 8	
17. 0,5	

31. $x = -\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}; k \in Z$	43. 0,5
	44. 5
32. $x = \frac{\pi}{3} + \operatorname{arctg} 5 + \pi k; k \in Z$	45. 1
33. $x = -\operatorname{arctg} 4 + \pi k; k \in Z$	46. 0,125
	47. 8
34. $x = \frac{1}{2}(-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \frac{\pi k}{2}; k \in Z$	48. 16
	49. 1,5
35. $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4} + \pi k; k \in Z$	50. 16000
36. 4	51. 1
37. 6	52. 22
38. 2	53. 75
39. 4	54. 36
40. 8	55. 1
41. 1	
42. 3	

## В8

1. 1	11. -3	21. -2
2. -2	12. -2	22. 3
3. -1	13. -1	23. 4
4. 2	14. 1	24. -3
5. 0,5	15. 0,5	25. -1
6. -0,5	16. 4	26. 2
7. 1,5	17. 4	27. 2
8. 1	18. 5	28. 5
9. 1,25	19. 0	29. 9
10. 0,5	20. -1	30. 1

31.3	38.6	45.0
32.4	39.5	46.4
33.3	40.5	47.5
34.7	41.8	48.6
35.5	42.2	49.0,5
36.4	43.3	50.0
37.3	44.1	

## B9

1. 5	11.6	21.30
2. 15	12.15	22.6
3. 18	13.6	23.3
4. 6	14.4	24.24
5. 7	15.12	25.72
6. 4	16.3	26.54
7. 5	17.6	27.45
8. 52	18.112,5	28.23
9. 60	19.6	29.4
10. 5	20.5	30.2

## B10

1. 64	6. 0,02	11.0,22
2. 18	7. 0,04	12.0,4
3. 256	8. 0,32	13.0,9
4. 192	9. 0,24	14.0,22
5. 6	10. 0,8	15.0,24

16. 0,036	20. 0,214	24. 0,08
17. 0,071	21. 0,17	25. 0,17
18. 0,107	22. 0,33	
19. 0,107	23. 0,67	

**B11**

1. 1	10. 64	19. 1,5
2. 18	11. 4,5	20. 1,5
3. 8	12. 64	21. 9
4. 75	13. 2	22. 10
5. 27	14. 4	23. 6
6. 8	15. 2	24. 2
7. 2	16. 32	25. 216
8. 4	17. 6	
9. 27	18. 60	

**B12**

1. 252	11. 4,32	21. 54
2. 3	12. 0,54	22. 3
3. 3	13. 24	23. 2
4. 49	14. 33	24. 10
5. 64	15. 0,3	25. 12
6. 5	16. 96	26. 8
7. 7	17. 126	27. 70
8. 1	18. 150	28. 0
9. 3	19. 0,208	29. 40
10. 2	20. 75,6	30. 25

**B13**

1. 12	8. 246	15. 1
2. 14,5.	9. 350	16. 60
3. 10	10. 348	17. 5
4. 10,3	11. 15	18. 15
5. 7,8	12. 9	19. 12
6. 195	13. 4	20. 5
7. 170	14. 4	

**B14**

1. 991	6. 19	11. 1
2. -19	7. -216	12. 5
3. 10	8. 1	13. 1
4. 27	9. -500	14. 3
5. 0	10. 0	15. 0

**C1**

- $\frac{\pi}{2}$
- $\frac{3\pi}{2}$   $\frac{5\pi}{2}$   $\frac{11\pi}{6}$   $\frac{13\pi}{6}$
- $\pi$   $\frac{5\pi}{4}$

4.  $-\frac{\pi}{2}$

5.  $-\frac{7\pi}{4} - \frac{3\pi}{2}$

6.  $x = \pi + 2\pi k; x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

7. корней нет

8.  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

9.  $x = \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

10.  $x = \arccos \frac{1}{5} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

11.  $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

12.  $x = \pi k; x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

13.  $x = \pi k; x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

14.  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k; x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

15.  $x = \pi k; x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$

16.  $\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k; 1\right); k \in \mathbb{Z}$

17.  $\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; 2\right); k \in \mathbb{Z}$

18.  $(\pi + 2\pi k; 1); k \in \mathbb{Z}$

19.  $\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k; 18\right); \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi k; 10\right); k \in \mathbb{Z}$

20. решений нет

$$21. \left( 2; \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k \right); k \in \mathbb{Z}$$

$$22. \left( k; (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k \right); k \in \mathbb{Z}$$

$$23. \left( 1; \frac{\pi}{3} + \pi k \right); \left( 3; \operatorname{arccos} \sqrt{3} + \pi k \right); k \in \mathbb{Z}$$

$$24. \left( -\frac{1}{3}; (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{3} - \pi k \right); k \in \mathbb{Z}$$

$$25. \left( 4; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \right); k \in \mathbb{Z}$$

$$26. (2\pi k; 1); k \in \mathbb{Z}$$

$$27. \left( \frac{\pi}{4} + 2\pi k; 1 \right); \left( \frac{\pi}{4} + 2\pi k; -2 \right); k \in \mathbb{Z}$$

$$28. (2\pi k; 8); \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi k; -1 \right); k \in \mathbb{Z}$$

$$29. (\pi + 2\pi k; -5); k \in \mathbb{Z}$$

$$30. \left( -\frac{\pi}{3} + 2\pi k; 6 \right); k \in \mathbb{Z}$$

$$31. \left( 2; \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k \right); k \in \mathbb{Z}$$

$$32. \left( 4; \frac{\pi}{4} + \pi k \right); k \in \mathbb{Z}$$

$$33. \left( \frac{1}{2}; (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k \right); k \in \mathbb{Z}$$

$$34. \left( 2; \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \right); k \in \mathbb{Z}$$

$$35. \left( 1; -\frac{\pi}{6} + \pi k \right); k \in \mathbb{Z}$$

$$36. \left(1; 2\pi k\right); \left(1; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right); k \in Z$$

$$37. \left(-2, (-1)^{k-1} \frac{\pi}{6} + \pi k\right); k \in Z$$

$$38. \left(1; \frac{\pi}{2} + \pi k\right); k \in Z$$

$$39. \left(3; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right); k \in Z$$

$$40. \left(1; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right); k \in Z$$

$$41. x = \pi k; x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k; k \in Z$$

$$42. x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k; x = \arctg 3 + 2\pi k; k \in Z$$

$$43. x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k; x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; k \in Z$$

$$44. x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k; x = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in Z$$

$$45. x = \pi k; x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k; k \in Z$$

$$46. \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; -7\right); \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; 5\right); k \in Z$$

$$47. (\pi k; -1); \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; 2\right); k \in Z$$

$$48. \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; -1\right); k \in Z$$

$$49. \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; -2\right); k \in Z$$

$$50. \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi k; 2\right); k \in Z$$

51.  $\pi k; k \in \mathbb{Z}$

52.  $(-1)^k \arcsin \frac{1}{4} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$

53.  $2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

54.  $\frac{\pi}{4} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

55. решений нет

56. решений нет

57.  $\pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{9} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$

58.  $\frac{5\pi}{6} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$

59.  $\frac{\pi}{4} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$

60.  $\frac{\pi}{6} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$

## C2

1.  $\arccos \frac{16}{25}$

6.  $3\sqrt{\frac{5}{14}}$

11.  $\frac{1}{3}$

2.  $\frac{2}{3}$

7.  $\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$

12.  $\arccos \frac{\sqrt{15}}{15}$

3.  $\frac{\sqrt{70}}{2}$

8.  $\frac{\sqrt{138}}{12}$

13. 30

4.  $4\sqrt{\frac{13}{29}}$

9.  $\frac{4\sqrt{5}}{3}$

14.  $\arccos \frac{\sqrt{6}}{3}$

5.  $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

10.  $\frac{4}{3}$

15. 30

16.  $\arccos 0,8$

17.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$       28.  $\arccos \frac{\sqrt{370}}{20}$       40.  $\arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$   
 18.  $\arccos \frac{8}{\sqrt{85}}$       29.  $\arccos \frac{2}{5}$       41. 90  
 19.  $\frac{4\sqrt{5}}{3}$       30. 60      42.  $\arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$   
 20. 30      31.  $\arccos \frac{\sqrt{7}}{7}$       43.  $\arccos \frac{3}{4}$   
 21. 30      32.  $\frac{2\sqrt{34}}{5}$       44.  $2\sqrt{3}$   
 22.  $\frac{3\sqrt{91}}{10}$       33.  $\sqrt{\frac{28}{23}}$       45.  $\sqrt{21}$   
 23.  $\frac{\sqrt{19}}{2\sqrt{5}}$       34.  $2\sqrt{2}$       46.  $\frac{2\sqrt{21}}{5}$   
 24.  $\arcsin \frac{\sqrt{19}}{13}$       35. 90      47.  $2\sqrt{3}$   
 25.  $\arccos \frac{13}{19}$       36.  $\arccos \frac{1}{\sqrt{15}}$       48. 3  
 26.  $\arccos \frac{\sqrt{13}}{5}$       37.  $3\sqrt{2}$       49.  $\arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$   
 27.  $\frac{\sqrt{390}}{20}$       38.  $\arccos \frac{1}{\sqrt{15}}$       50.  $\arccos \frac{4\sqrt{35}}{35}$

### C3

1.  $(2; +\infty)$       3.  $[1; +\infty)$   
 2.  $(1; +\infty)$       4.  $(0; +\infty)$   
 5.  $(0; 1) \cup (1; +\infty)$

$$6. \left(0; \frac{1}{3^7}\right); \left(\frac{1}{3}; 3\right); (3; 9); (9; 3^5)$$

$$7. \left(\frac{1}{4}; 4\right); [4^5; +\infty)$$

$$8. \left(0; \frac{1}{4}\right); \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; 2\right); (2; 8]$$

$$9. \left(0; \frac{1}{4}\right); (2; 4); (4; 16); (16; 64)$$

$$10. \left(\frac{1}{9}; 1\right); [81; +\infty)$$

$$11. \left(-1; -\frac{1}{2}\right); (1; +\infty)$$

$$12. (-1,5; -1); (-1; 0)$$

$$13. (-5; -4); (-4; -3); (-3; -2)$$

$$14. (-1; +\infty)$$

$$15. (-5; +\infty)$$

$$16. (1; +\infty)$$

$$17. (5; 6); (6; +\infty)$$

$$18. (3; 4); (4; +\infty)$$

$$19. \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$$

$$20. (7; 8); (8; 14); (14; 15)$$

$$21. \left(1\frac{2}{3}; 2\right); (3; +\infty)$$

22.  $\left(1\frac{5}{7}; 1\frac{6}{7}\right); (3; 4)$

23.  $(4; 5); (5; +\infty)$

24.  $\left(1\frac{1}{3}; 1\frac{1}{2}\right); (2; 4)$

25.  $\left(1\frac{3}{7}; 1\frac{4}{7}\right); \left(1\frac{4}{7}; 2\right); (5; +\infty)$

26.  $(0; +\infty)$

27.  $(-1; 0); (0; 1); (1; 2); (2; +\infty)$

28.  $(0; 1); (1; 2); (2; 5); (4; +\infty)$

29.  $(-\infty; -1); (1; 1.5)$

30.  $(-2; -1); (-1; 0); (2; 5); (5; +\infty)$

# Литература

1. *Алимов Ш. А.* и др. Алгебра и начала анализа: учебник для 10–11 классов общеобразоват. учреждений. 12-е изд. М.: Просвещение, 2004.
2. *Атанасян Л. С.* и др. Геометрия. 7–9 классы: учебник для общеобразоват. учреждений. – 19-е изд. — М.: Просвещение, 2009.
3. *Атанасян Л. С.* и др. Геометрия: 10–11 классы: учебник для общеобразоват. учреждений: Базовый и профильный уровни. 16-е изд. М.: Просвещение, 2007.
4. *Семенов Е. А., Крупетович С. Л., Фоминко М. В., Ларкин Г. Н.* Тестовые задания для подготовки к ЕГЭ-2011 по математике / под ред. Е. А. Семенова. Краснодар: Просвещение-Юг, 2011.
5. [www.fipi.ru](http://www.fipi.ru)
6. <http://mathege.ru>