

**СБОРНИК ВАРИАНТОВ
ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ
С ОТВЕТАМИ И РЕШЕНИЯМИ**



**ИНСТИТУТ КРИПТОГРАФИИ,
СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ
АКАДЕМИИ ФСБ РОССИИ**

2009 год

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Примеры вариантов вступительного экзамена по математике	
Варианты экзамена на математическом потоке	
• Вариант 1	4
• Вариант 2	5
• Вариант 3	6
Варианты экзамена на инженерном потоке	
• Вариант 1	7
• Вариант 2	8
Примеры вариантов вступительного экзамена по физике	
Варианты экзамена на инженерном потоке	
• Вариант 1	9
• Вариант 2	10
• Вариант 3	11
Варианты экзамена на математическом потоке	
• Вариант 1	12
• Вариант 2	13
Справочный материал по математике	14
Решение вариантов вступительного экзамена по математике	
Варианты экзамена на математическом потоке	
• Вариант 1	19
• Вариант 2	24
• Вариант 3	31
Варианты экзамена на инженерном потоке	
• Вариант 1	37
• Вариант 2	42
Справочный материал по физике	48
Решение вариантов вступительного экзамена по физике	
Варианты экзамена на инженерном потоке	
• Вариант 1	61
• Вариант 2	65
• Вариант 3	68
Варианты экзамена на математическом потоке	
• Вариант 1	71
• Вариант 2	75
Рекомендуемая литература	78

ВВЕДЕНИЕ

С 2009 года на все потоки подготовки ИКСИ Академии ФСБ России засчитываются результаты сдачи единого государственного экзамена (ЕГЭ) по русскому языку, математике и физике. Кроме того, кандидаты проходят дополнительные вступительные испытания профильной направленности в форме письменных экзаменов по математике и физике.

В данном сборнике содержатся примеры вариантов этих экзаменов, с ответами и решениями. Время, отводившееся на решение и оформление письменной работы – 4 часа. Стоит обратить внимание, что на экзамене по математике не допускалось использование калькуляторов и других вычислительных устройств.

Оценка на экзаменах выставляется по десятибалльной шкале. За правильное решение каждой задачи начисляется по два балла. Для получения минимальной положительной оценки – четырех баллов – необходимо наличие двух правильно решенных задач.

Актуальная информация о правилах приема, составе экзаменов и подборка вариантов вступительных экзаменов с ответами за последние 5 лет размещается на официальном интернет-сайте www.academy.fsb.ru. Там же публикуются объявления и материалы проводимых Академией олимпиад.

ПРИМЕРЫ ВАРИАНТОВ
ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ
ЗА НЕСКОЛЬКО ПОСЛЕДНИХ ЛЕТ

ВАРИАНТЫ ЭКЗАМЕНА НА МАТЕМАТИЧЕСКОМ ПОТОКЕ

Вариант 1

Задача 1

Пусть x_1, x_2 корни уравнения $4x - x^2 = a$, а x_3, x_4 корни уравнения $36x - x^2 = b$. Найти все значения a, b , при которых последовательность x_1, x_2, x_3, x_4 является геометрической прогрессией с положительными членами.

Задача 2

Решить уравнение: $\frac{4}{3} \cdot \log_3^2(5x-6)^3 - \log_3(5x-6)^3 \cdot \log_3 x^6 = -6 \cdot \log_3^2 \frac{1}{x}$.

Задача 3

В двух автоколоннах, по 28 автомобилей в каждой, было 11 "Жигулей", остальные "Москвичи". Известно, что в первой автоколонне на каждую машину "Жигули" приходилось в два раза больше "Москвичей", чем во второй автоколонне. Сколько "Москвичей" было в каждой автоколонне?

Задача 4

Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известны отношения длин его противолежащих сторон $AB:CD = 2:3$, $BC:AD = 1:4$. Найти отношение синусов углов A и D .

Задача 5

Решить неравенство: $\frac{|x-5| - 2\sqrt{x+2} + 1}{|x+3| - 2\sqrt{4-x} + 1} \leq 0$.

Задача 6

Решить уравнение: $\operatorname{tg}(2 \cdot \arccos(3x)) = -1$.

Вариант 2

Задача 1

Решить неравенство: $\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} < 4 + \sqrt{3} - x$.

Задача 2

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2 \cdot \log_3^2(x+2y) = \log_{\frac{1}{3}}(x+2y) \cdot \log_{\frac{1}{3}}(x-y) + \log_3^2(x-y) \\ x^2 + xy - 2y^2 = 9 \end{cases}$$

Задача 3

Решить неравенство: $\frac{\log_7 12}{\log_7(x^2-9)} \geq \frac{\log_5(x^2+8x+12)}{\log_5(x^2-9)}$.

Задача 4

Высоты равнобедренного остроугольного треугольника ABC , в котором $AB = BC$, пересекаются в точке O . Найти площадь треугольника ABC , если $AO = 5$, а длина высоты AD равна 8.

Задача 5

Числа $-\sin x$, $4 \sin x \cdot \operatorname{ctg} 2x$, $\cos x$ являются членами арифметической прогрессии с номерами $k, k+1, k+2$ соответственно. Найти все значения x и k , при которых седьмой член этой прогрессии равен $\frac{1}{5}$.

Задача 6

Для того чтобы успеть на последний электропоезд, семье из четырех человек нужно перейти по пешеходному мосту быстрее, чем за 32 минуты. Одновременно по мосту могут идти не более двух человек, причем ввиду темного времени непременно с фонариком. Если мост проходят двое, то они двигаются со скоростью того, кто идет медленнее. Успеют ли на последний поезд все члены семьи, если известно, что в одиночку Юра может перейти мост за 2 минуты, Катя – за 4 минуты, Игорек – за 10 минут, а Мария Ивановна – за 16 минут. Фонарик у семьи только один.

Вариант 3

Задача 1

Автомобилист выехал в путешествие из пункта А в пункт Б, расстояние между которыми равно 4740 км. В первый день путешествия автомобилист преодолел 700 км, а затем каждый последующий день преодоленное им расстояние уменьшалась на 50 километров. В конце каждого дня (включая день приезда) автомобилист связывался по радио с пунктом А и сообщал о своем местоположении. Сколько раз автомобилист выходил на связь?

Задача 2

Решить неравенство: $(x^2 + 2x) \cdot (2x + 2) - \frac{9 \cdot (2x + 2)}{(x^2 + 2x)} \leq 0$.

Задача 3

Решить уравнение:

$$\sqrt{3} \cdot (1 - 2 \cdot |\cos x|) + \cos(2x + \pi/6) + \cos(2x - \pi/6) = 6 \cdot (|\cos x| - 1)$$

Задача 4.

Решить неравенство: $\left| \frac{x+1}{2x-1} \right| < \left| \frac{4-x}{2x+5} \right| + 1$.

Задача 5

В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) диагонали пересекаются в точке M , при этом $|BC| = 6$ см, $|AD| = 10$ см. Высота трапеции равна 8 см. Найти площадь треугольника ABM .

Задача 6

Для каждого действительного значения параметра a решить уравнение:

$$|x - a| + x - 3a = 2.$$

ВАРИАНТЫ ЭКЗАМЕНА НА ИНЖЕНЕРНОМ ПОТОКЕ

Вариант 1

Задача 1

Два лыжника стартовали друг за другом с интервалом в 27 минут. Вторым лыжник догнал первого в 18 км от места старта. Дойдя до отметки 27 км, второй лыжник повернул обратно и встретил первого лыжника на расстоянии 1 км от места поворота. Найти скорости лыжников.

Задача 2

Решить неравенство: $\log_2(2^x - 12) < 6 - x$.

Задача 3

Найти сумму всех различных корней уравнения:

$$\sqrt{\frac{\pi - x}{x}} \cdot (\sin 7x - \sin x + \cos 4x) = 0.$$

Задача 4

Решить неравенство: $\frac{\sqrt{2-x} + |x+2|}{1-x} < 0$

Задача 5

В прямоугольном треугольнике ABC расположен прямоугольник $ADKM$ так, что AD лежит на катете AB , AM – на катете AC , вершина K – на гипотенузе BC . Известно, что $AB=5$ см, $AC=12$ см. Найти длины сторон прямоугольника, если его площадь равна $\frac{40}{3}$ см², а длина диагонали меньше 8 см.

Задача 6

Число x удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 2x = -\frac{3}{4} \\ \sin 2x > 0 \end{cases}.$$

Обязательно ли при этих условиях определено выражение $\log_{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} x$ и чему оно тогда равно?

Вариант 2

Задача 1

Решить неравенство: $\frac{\sqrt{6-x-x^2}}{2-3x} + \frac{\sqrt{6-x-x^2}}{x+4} \geq 0$.

Задача 2

Решить уравнение: $\sqrt{\frac{3x}{2}} + 37 = \sqrt{x+7} + \sqrt{\frac{x}{2}}$.

Задача 3

Решить уравнение: $\left(56 - 7^{\frac{2x-1}{x}}\right)^{\frac{x}{x+1}} = 7$.

Задача 4

Решить уравнение: $\log_{27}\left(\sin 2x - \frac{1}{3} \cdot \cos x\right) = \frac{1}{3} + \log_3(-\cos x)$.

Задача 5

В правильной треугольной пирамиде длина стороны основания равна $2\sqrt{3}$, длина высоты равна 2. Найти диаметр шара, вписанного в пирамиду.

Задача 6

В спортивном соревновании первый спортсмен стартует одновременно с преследующим его вторым спортсменом, имея преимущество в 40 метров. Когда первый спортсмен преодолел половину своей дистанции, то второму спортсмену до их общего финиша оставалось бежать 13 сек., а через 2 сек. после этого второй спортсмен отставал от первого только на 2 метра. Найти скорости спортсменов, если первый спортсмен преодолевает свою дистанцию за 34 сек.

ПРИМЕРЫ ВАРИАНТОВ
ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО ФИЗИКЕ
ЗА НЕСКОЛЬКО ПОСЛЕДНИХ ЛЕТ

ВАРИАНТЫ ЭКЗАМЕНА НА ИНЖЕНЕРНОМ ПОТОКЕ

Вариант 1

Задача 1

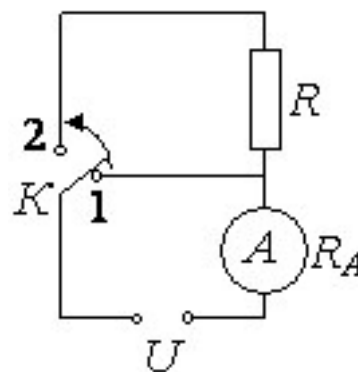
Два тела брошены у поверхности Земли с одинаковым начальными скоростями под углами α и $90^\circ - \alpha$ к горизонту. Найти отношение наибольшей высоты подъема первого тела $H_{1\max}$ к соответствующей величине $H_{2\max}$ для второго тела.

Задача 2

Шар массой M висит на легкой нерастяжимой нити. В шар попадает пуля массой m , летящая горизонтально со скоростью V , и застревает в нем. Угол наибольшего отклонения нити от вертикали α ($\alpha < \pi/2$). Найти период гармонических колебаний, считая подвешенный на нити шар математическим маятником.

Задача 3

Каково должно быть сопротивление R , чтобы сила тока через амперметр с внутренним сопротивлением R_A при перемещении ключа K из положения 1 в положение 2 изменялась на величину ΔI . Схема питается от сети с напряжением U .



К задаче 3

Задача 4

В цилиндре под поршнем находится некоторая масса газа при температуре T_1 , занимающая при давлении P объем V_1 . Какой стала температура T_2 газа, если при неизменном давлении его объем уменьшился настолько, что при этом над газом была совершена работа A ?

Задача 5

На каком расстоянии f от объектива проекционного аппарата нужно поместить экран, чтобы изображение на экране было $k=50$ раз больше предмета на диапозитиве? Фокусное расстояние объектива $F=0,1$ м.

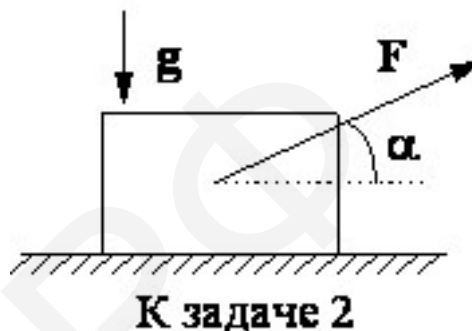
Вариант 2

Задача 1

Камень, брошенный с поверхности Земли под углом $\alpha=30^\circ$ к горизонту, дважды побывал на одной и той же высоте h спустя время $t_1=3$ с и $t_2=5$ с после начала движения. Найти начальную скорость камня V_0 . Ускорение свободного падения $g=10$ м/с².

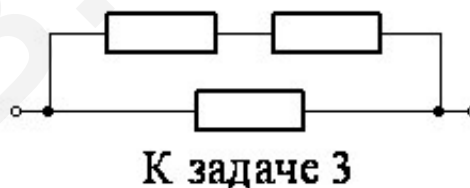
Задача 2

Брусок массой $M=2$ кг движется вдоль горизонтальной плоскости под действием силы $F=20$ Н, направленной вверх под углом $\alpha=30^\circ$ к горизонту (см. рис.). Коэффициент трения скольжения бруска о плоскость $\mu=0,1$. Найти ускорение a бруска. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с².



Задача 3

Электрорезка имеет три секции с одинаковыми сопротивлениями. При параллельном их соединении вода закипает через $t_0=6$ мин. Через какое время t закипит вода такой же массы и такой же начальной температуры при соединении секций, показанном на рисунке?



Задача 4

Температура нагревателя идеальной тепловой машины Карно $T_1=390$ К, а холодильника $T_2=300$ К. Количество теплоты, получаемое машиной от нагревателя в каждом цикле, равно $Q_1=60$ кДж. Вычислить количество теплоты Q_2 , отдаваемое холодильнику в каждом цикле.

Задача 5

В водоем на некоторую глубину помещен точечный источник белого света. Найти отношение радиусов кругов R_1 и R_2 на поверхности воды, в пределах которых возможен выход в воздух красных и фиолетовых лучей соответственно. Абсолютный показатель преломления воды для красных лучей $n_1=1,328$, для фиолетовых $n_2=1,335$; абсолютный показатель преломления воздуха считать равным единице.

Вариант 3

Задача 1

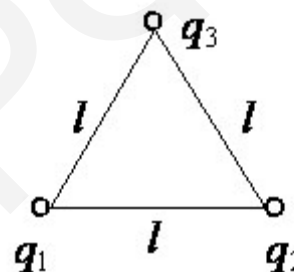
За время $t_1=1$ с от начала движения тело прошло путь $S=10$ м, при этом его скорость, не меняя направления, увеличилась в 4 раза. Найти ускорение тела

Задача 2

Открытую вертикальную стеклянную трубку длиной $L=1000$ мм наполовину погружают в ртуть. Затем верхний конец трубки закрывают пальцем и вынимают. Какой длины h столбик ртути останется в трубке? Атмосферное давление равно $p_0=750$ мм рт.ст. $\approx 100,0$ кПа. Температура постоянная. Плотность ртути $\rho=13600$ кг/м³, $g=9,8$ м/с².

Задача 3

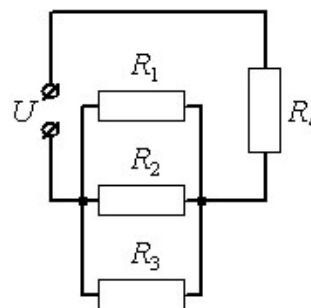
Три точечных заряда q_1 , q_2 и q_3 расположены в вакууме в вершинах равностороннего треугольника с длиной стороны $l=3$ см, причем $q_1=q_2=8$ нКл, $q_3=1$ нКл (см. рис.). С какой результирующей силой F (по модулю) заряды q_1 и q_2 действуют на заряд q_3 ? $k=1/4\pi\epsilon_0=9\cdot 10^9$ м/Ф.



К задаче 3

Задача 4

В цепи, изображенной на рисунке, сопротивления равны: $R_1=8$ Ом, $R_2=4$ Ом, $R_3=4$ Ом, $R_4=2$ Ом. На вход цепи подано напряжение $U=36$ В. Найти разность потенциалов U_4 на концах проводника с сопротивлением R_4 .



К задаче 4

Задача 5

Расстояние от предмета до рассеивающей линзы равно $l_1=20$ см, а от линзы до изображения $l_2=10$ см. Найти фокусное расстояние линзы F .

ВАРИАНТЫ ЭКЗАМЕНА НА МАТЕМАТИЧЕСКОМ ПОТОКЕ

Вариант 1

Задача 1

Два спутника движутся вокруг Земли по круговым орбитам, лежащим в одной плоскости, со скоростями $V_1 = 7,8$ км/с и $V_2 = 7,6$ км/с. Пользуясь только данными, приведенными в условии задачи, определить минимальное возможное расстояние l между спутниками во время их движения. Радиус Земли принять равным $R_3 = 6400$ км. Ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 9,8$ м/с².

Задача 2

При выстреле из пушки, находящейся на гладкой горизонтальной поверхности, вылетает снаряд под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. За счет отдачи пушка откатывается назад со скоростью $V = 2$ м/с. Масса пушки без снаряда равна $M = 500$ кг. Найти величину импульса p системы, состоящей из пушки и снаряда, сразу после выстрела.

Задача 3

Электрон через отверстие в обкладке влетает внутрь плоского конденсатора и, двигаясь вдоль линии напряженности электрического поля, полностью теряет свою скорость, пройдя путь $l = 0,016$ м. На каком расстоянии x от обкладки электрон потеряет скорость, если его начальную скорость уменьшить в $n = 2$ раза, а разность потенциалов обкладок конденсатора увеличить в такое же число раз? Действием силы тяжести пренебречь.

Задача 4

В калориметре смешивают жидкость при температуре $t_1 = 20^\circ\text{C}$ с жидкостью при температуре $t_2 = 80^\circ\text{C}$ с вдвое большей массой. Удельные теплоемкости жидкостей одинаковы. Найти температуру смеси t .

Задача 5

Тонкий стержень длиной $L = 70$ см согнули под прямым углом и положили на горизонтальную поверхность. Длина одной из частей стержня, образующих прямой угол, равна $L_1 = 30$ см. В пространстве имеется однородное вертикальное магнитное поле с индукцией $B = 4$ мТл. Найти величину результирующей силы Ампера F , действующей на стержень, если по нему пропускать ток $I = 10$ А.

Вариант 2

Задача 1

Двигаясь по окружности с постоянной скоростью $V=5$ м/с, небольшое тело за время $t=0,1$ с переместилось по дуге с углом раствора $\alpha=0,25$ рад. Найти радиус R окружности, по которой двигалось тело.

Задача 2

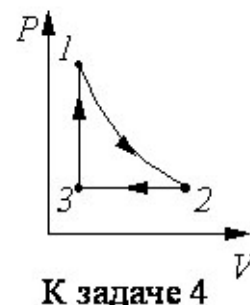
На гладкой горизонтальной плоскости находятся два гладких шара одинакового размера, один из которых движется со скоростью V_1 , а другой покоится ($V_2=0$). Масса движущегося шара в k раз больше массы покоящегося. Найти скорость V_1' , которую приобретет шар большей массы после упругого центрального соударения с другим шаром.

Задача 3

Напряженность поля в пространстве между пластинами плоского воздушного конденсатора с площадью пластин $S=400$ см², подключенного к источнику тока, равна $E=2000$ В/м. Емкость конденсатора $C=35$ пФ. Чему равна разность потенциалов U на пластинах? Электрическая постоянная $\epsilon_0=0,885 \cdot 10^{-11}$ Ф/м.

Задача 4

Найти работу A , которую совершает один моль гелия ($\nu=1$ моль) в цикле $1-2-3-1$, состоящем из процессов адиабатического расширения $1-2$, изобарического сжатия $2-3$ и изохорического нагревания $3-1$. В адиабатическом процессе $1-2$ температура газа уменьшается на величину $|\Delta T|$. В изобарическом процессе от газа отвели количество теплоты Q .



Задача 5

Точечный источник света помещен на главной оптической оси собирающей линзы на расстоянии от линзы, равном ее двойному фокусному расстоянию. Фокусное расстояние $F=1$ м. На каком расстоянии f от линзы находится изображение источника?

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

Арифметические и геометрические прогрессии.

1. Арифметическая прогрессия $a_1, a_2, a_3, \dots$ с разностью d :

- $a_{i+1} = a_i + d$ для всех $i = 1, 2, \dots$;
- $a_n = a_1 + d(n-1) = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, при $n = 2, 3, 4, \dots$;
- $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n$;

2. Геометрическая прогрессия $b_1, b_2, b_3, \dots$ со знаменателем q :

- $b_{i+1} = b_i \cdot q$, для всех $i = 1, 2, \dots$;
- $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, при $n = 2, 3, 4, \dots$;
- $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ при $n = 2, 3, 4, \dots$;
- $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = \begin{cases} \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}, & \text{если } q \neq 1; \\ nb_1, & \text{если } q = 1 \end{cases}$;
- Сумма всех членов прогрессии в случае $|q| < 1$: $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Уравнения и неравенства с модулем.

Основные равносильные переходы.

1. $|A| = \begin{cases} A, & \text{если } A \geq 0 \\ -A, & \text{если } A < 0 \end{cases}$;

2. $|f(x)| = A \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x) = A \\ f(x) = -A \end{cases}, & \text{если } A \geq 0 \\ \emptyset, & \text{если } A < 0 \end{cases}$;

$$3. |f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ f(x) \leq -g(x) \end{cases};$$

$$4. |f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ f(x) \geq -g(x) \end{cases}.$$

Иррациональные уравнения и неравенства.

Основные равносильные переходы.

$$1. \sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases};$$

$$2. \sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases};$$

$$3. \sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq (g(x))^2 \\ g(x) \leq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases};$$

Некоторые тригонометрические тождества.

Тригонометрические функции связывает большое количество соотношений. Мы приведем самые используемые. Основные из них следует просто запомнить, а остальные – научиться выводить.

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ – основное тригонометрическое тождество
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$
- $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$
- $\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$, при $x \pm y, x, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}$, при $x \pm y, x, y \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$

- $\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} \cdot (\cos(x - y) - \cos(x + y))$
- $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \cdot (\cos(x - y) + \cos(x + y))$
- $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \cdot (\sin(x - y) + \sin(x + y))$
- $\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x + y}{2} \cdot \cos \frac{x - y}{2}$
- $\sin x - \sin y = 2 \cdot \cos \frac{x + y}{2} \cdot \sin \frac{x - y}{2}$
- $\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \frac{x + y}{2} \cdot \cos \frac{x - y}{2}$
- $\cos x - \cos y = 2 \cdot \sin \frac{x + y}{2} \cdot \sin \frac{y - x}{2}$
- $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x + y)}{\cos x \cdot \cos y}, x, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cdot \cos y}, x, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x + y)}{\sin x \cdot \sin y}, x, y \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x - y)}{\sin x \cdot \sin y}, x, y \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$
- $\sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cdot \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \cdot \sin^2 x$
- $\operatorname{tg}(2x) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, 2x, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$
- $\operatorname{ctg}(2x) = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \cdot \operatorname{ctg} x}, 2x, x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$
- $\sin(3x) = 3 \cdot \sin x - 4 \cdot \sin^3 x$
- $\cos(3x) = 4 \cdot \cos x - 3 \cdot \cos^3 x$
- $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$

- $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$
- $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}, x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 - \cos x}, x \neq 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
- $\sin x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$
- $\operatorname{tg} x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, x \neq \pi + 2\pi n, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k, n \in \mathbb{Z}.$
- $\operatorname{ctg} x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}, x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \pm \sin x$
- $\sin(\pi \pm x) = \mp \sin x$
- $\cos(\pi \pm x) = -\cos x$

Показательные и логарифмические функции.

1. Основные тождества.

- $a^{\log_a b} = b, a > 0, a \neq 1, b > 0$
- $\log_a(b \cdot c) = \log_a |b| + \log_a |c|, a > 0, a \neq 1, b \cdot c > 0$
- $\log_a \frac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c|, a > 0, a \neq 1, b \cdot c > 0$

- $\log_{a^m} b^k = \frac{k}{m} \log_{|a|} |b|$, $a^m > 0$, $a \neq 1$, $b^k > 0$, $k, m \in R$, $m \neq 0$
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$

2. Основные равносильные переходы.

- Если $a > 0, a \neq 1, f(x) > 0$, то: $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$
- Если $f(x) > 0$, то: $f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = h(x) \\ f(x) = 1 \end{cases}$
- $\log_a f(x) \leq \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) \leq g(x), & \text{если } a > 1 \\ f(x) \geq g(x) > 0, & \text{если } 0 < a < 1 \end{cases}$
- $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), & \text{если } a > 1 \\ f(x) > g(x), & \text{если } 0 < a < 1 \end{cases}$

**ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ
ЗА НЕСКОЛЬКО ПОСЛЕДНИХ ЛЕТ**

ВАРИАНТЫ ЭКЗАМЕНА НА МАТЕМАТИЧЕСКОМ ПОТОКЕ

Вариант 1

Задача 1

Пусть x_1, x_2 корни уравнения $4x - x^2 = a$, а x_3, x_4 корни уравнения $36x - x^2 = b$. Найти все значения a, b , при которых последовательность x_1, x_2, x_3, x_4 является геометрической прогрессией с положительными членами.

Ответ: $a = 3, b = 243$.

Решение

Пусть $q > 0$ - знаменатель прогрессии. Тогда по теореме Виета

$$\begin{cases} x_1^2 q = a \\ x_1 + x_1 q = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1^2 q^5 = b \\ x_1 q^2 + x_1 q^3 = 36 \end{cases}.$$

Из вторых уравнений систем имеем $q = 3, x_1 = 1$. Тогда $a = 3, b = 243$.

Задача 2

Решить уравнение: $\frac{4}{3} \cdot \log_3^2(5x - 6)^3 - \log_3(5x - 6)^3 \cdot \log_3 x^6 = -6 \cdot \log_3^2 \frac{1}{x}$.

Ответ: $x \in \left\{ \frac{3}{2}, \frac{36}{25} \right\}$.

Решение.

ОДЗ уравнения задается условиями: $\begin{cases} x > 0 \\ 5x - 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{6}{5}$.

Преобразуем исходное уравнение к виду:

$$\begin{aligned} 12 \cdot \log_3^2(5x-6) - 18 \cdot \log_3(5x-6) \cdot \log_3 x &= -6 \cdot \log_3^2 x \\ 2 \cdot \log_3^2(5x-6) - 3 \cdot \log_3(5x-6) \cdot \log_3 x + \log_3^2 x &= 0 \end{aligned}$$

Так как на ОДЗ $\log_3 x \neq 0$, то, поделив уравнение на $\log_3^2 x$, получим:

$$2 \cdot \left(\frac{\log_3(5x-6)}{\log_3 x} \right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{\log_3(5x-6)}{\log_3 x} \right) + 1 = 0.$$

Произведем замену переменных $\frac{\log_3(5x-6)}{\log_3 x} = t$.

Решим уравнение:

$$2 \cdot t^2 - 3 \cdot t + 1 = 0,$$

$$t_1 = 1, \quad t_2 = \frac{1}{2}.$$

Далее имеем совокупность

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} \frac{\log_3(5x-6)}{\log_3 x} = 1 \\ \frac{\log_3(5x-6)}{\log_3 x} = \frac{1}{2} \end{array} \right] &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3(5x-6) = \log_3 x \\ \log_3(5x-6)^2 = \log_3 x \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x-6 = x \\ (5x-6)^2 = x \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{l} 4x = 6 \\ 25x^2 - 61x + 36 = 0 \end{array} \right] &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = 1, \quad x_3 = \left(\frac{6}{5}\right)^2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Пересекая это множество решений с ОДЗ, получим ответ.

Задача 3

В двух автоколоннах, по 28 автомобилей в каждой, было 11 "Жигулей", остальные "Москвичи". Известно, что в первой автоколонне на каждую машину "Жигули" приходилось в два раза больше "Москвичей", чем во второй автоколонне. Сколько "Москвичей" было в каждой автоколонне?

Ответ: 24 "Москвича" в первой колонне и 21 – во второй.

Решение.

Обозначим через x и y количество "Жигулей" в каждой автоколонне. В результате имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ \frac{28 - x}{x} = 2 \cdot \frac{28 - y}{y} \end{cases}$$

Решим эту систему:

$$\frac{28}{x} = \frac{56}{11 - x} - 1$$

$$\frac{28}{x} = \frac{45 + x}{11 - x}$$

$$308 - 28x = x^2 + 45x$$

$$x^2 + 73x - 308 = 0$$

$$x_1 = 4, x_2 = -77.$$

Значит $x=4, y=7$.

Задача 4

Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известны отношения длин его противоположных сторон $AB:CD = 2:3$, $BC:AD = 1:4$. Найти отношение синусов углов A и D .

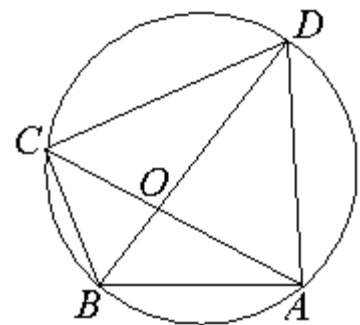
Ответ: $\frac{\sin \angle D}{\sin \angle A} = \frac{11}{14}$.

Решение.

По свойствам углов, опирающихся на одинаковые дуги, имеем $\angle CDB = \angle CAB$, $\angle DCA = \angle DBA$, $\angle ACB = \angle BDA$, $\angle CBD = \angle CAD$. Следовательно, подобны треугольники $\triangle CDO \sim \triangle BAO$, $\triangle COB \sim \triangle AOD$ и

$$\frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OC} = \frac{OA}{OD} = \frac{2}{3}, \quad \frac{CB}{AD} = \frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OD} = \frac{1}{4}.$$

Теперь по теореме синусов замечаем, что



$$\frac{BD}{\sin \angle A} = 2R = \frac{AC}{\sin \angle D}.$$

$$\text{Значит, } \frac{\sin \angle D}{\sin \angle A} = \frac{AC}{BD} = \frac{OA + OC}{OB + OD} = \frac{\frac{OA}{OC} + 1}{\frac{OB}{OC} + \frac{OD}{OC}} = \frac{\frac{OA}{OC} + 1}{\frac{2}{3} + 4}.$$

$$\text{Кроме того, } \frac{OA}{OC} = \frac{OA}{OD} \cdot \frac{OD}{OC} = \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}.$$

$$\text{Окончательно получаем: } \frac{\sin \angle D}{\sin \angle A} = \frac{\frac{8}{3} + 1}{\frac{2}{3} + 4} = \frac{11}{14}.$$

Задача 5

$$\text{Решить неравенство } \frac{|x-5| - 2\sqrt{x+2} + 1}{|x+3| - 2\sqrt{4-x} + 1} \leq 0.$$

$$\text{Ответ: } x \in [-2; 0) \cup [2; 4].$$

Решение

ОДЗ неравенства определяется условиями:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} x+2 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ |x+3| - 2\sqrt{4-x} + 1 \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq 4 \\ x \geq -2 \\ |x+3| - 2\sqrt{4-x} + 1 \neq 0 \end{array} \right. \\ & \left\{ \begin{array}{l} x \leq 4 \\ x \geq -2 \\ x+3 - 2\sqrt{4-x} + 1 \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq 4 \\ x \geq -2 \\ x+4 \neq 2\sqrt{4-x} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq 4 \\ x \geq -2 \\ x \neq 0 \end{array} \right. \\ & x \in [-2; 0) \cup (0; 4] \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что на ОДЗ модули раскрываются однозначно:

$$\frac{6-x-2\sqrt{x+2}}{x+4-2\sqrt{4-x}} \leq 0.$$

Найдем корни числителя

$$\begin{aligned} 6-x-2\sqrt{x+2} &= 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+2} = 6-x \Leftrightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} 4x+8 = 36-12x+x^2 \\ 6-x \geq 0 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = 28-16x+x^2 \\ x \leq 6 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Далее неравенство можно решать методом интервалов. Достаточно только найти знаки значений числителя и знаменателя на интервалах $[-2;0), (0;2), (2;4]$. В качестве пробных точек используем $x=-1, x=1, x=3$.

Задача 6

Решить уравнение $\operatorname{tg}(2 \cdot \arccos(3x)) = -1$.

Ответ:
$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \cdot \cos \frac{3\pi}{8} \\ x = \frac{1}{3} \cdot \cos \frac{7\pi}{8} \end{cases}.$$

Решение

Имеем:

$$2 \cdot \arccos(3x) = -\frac{\pi}{4} + \pi \cdot n,$$

$$\arccos(3x) = \frac{\pi(4n-1)}{8}.$$

Так как $\arccos(x)$ принимает значения на отрезке $[0; \pi]$, то в последнем равенстве $n=1$ или $n=2$. Окончательно получаем

$$\begin{cases} \arccos(3x) = \frac{3\pi}{8} \\ \arccos(3x) = \frac{7\pi}{8} \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x = \cos \frac{3\pi}{8} \\ 3x = \cos \frac{7\pi}{8} \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3} \cdot \cos \frac{3\pi}{8} \\ x = \frac{1}{3} \cdot \cos \frac{7\pi}{8} \end{cases}.$$

Вариант 2

Задача 1

Решить неравенство: $\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} < 4 + \sqrt{3} - x$.

Ответ: $x \in [0;1) \cup (1;3)$.

Решение

ОДЗ неравенства: $x \in [0;1) \cup (1;+\infty)$.

Преобразуем неравенство на ОДЗ:

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} < 4 + \sqrt{3} - x,$$

$$\sqrt{x} + 1 < 4 + \sqrt{3} - x,$$

$$x + \sqrt{x} - 3 - \sqrt{3} < 0.$$

После замены переменных $y = \sqrt{x}$ получим квадратное неравенство:

$$y^2 + y - 3 - \sqrt{3} < 0,$$

$$(y - \sqrt{3}) \cdot (y + 1 + \sqrt{3}) < 0.$$

С учетом условия $y \geq 0$, получаем:

$$0 \leq y < \sqrt{3},$$

$$0 \leq x < 3.$$

Учтя ОДЗ, получим окончательный ответ:

$$x \in [0;1) \cup (1;3).$$

Задача 2

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2 \cdot \log_3^2(x+2y) = \log_{\frac{1}{3}}(x+2y) \cdot \log_{\frac{1}{3}}(x-y) + \log_3^2(x-y) \\ x^2 + xy - 2y^2 = 9 \end{cases}.$$

Ответ: $\begin{cases} y = 0 \\ x = 3 \end{cases}, \begin{cases} x = 1459/27 \\ y = -728/27 \end{cases}.$

Решение

ОДЗ неравенства $\begin{cases} x + 2y > 0 \\ x - y > 0 \end{cases}$. Сделаем замену переменных в первом урав-

нении $a = \log_3(x + 2y)$, $b = \log_3(x - y)$. Получим однородное уравнение:

$$2a^2 = a \cdot b + b^2,$$

$$2a^2 - a \cdot b - b^2 = 0,$$

$$\begin{cases} a = b \\ a = -\frac{1}{2} \cdot b \end{cases}.$$

Случай 1: $a = b$.

$$\begin{cases} \log_3(x + 2y) = \log_3(x - y) \\ x^2 + xy - 2y^2 = 9 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x + 2y = x - y \\ x^2 + xy - 2y^2 = 9 \end{cases},$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 9 \end{cases}.$$

С учетом ОДЗ получаем первое решение: $\begin{cases} y = 0 \\ x = 3 \end{cases}.$

Случай 2: $a = -\frac{1}{2} \cdot b$.

$$\begin{cases} \log_3(x + 2y) = -\frac{1}{2} \cdot \log_3(x - y) \\ x^2 + xy - 2y^2 = 9 \end{cases},$$

$$\begin{cases} (x + 2y)^2 \cdot (x - y) = 1 \\ (x + 2y) \cdot (x - y) = 9 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x + 2y = \frac{1}{9} \\ (x + 2y) \cdot (x - y) = 9 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x + 2y = 1/9 \\ x - y = 81 \end{cases}.$$

Заметим здесь, что условия ОДЗ выполнены.

Решая систему, получим:

$$\begin{cases} x = 1459/27 \\ y = -728/27 \end{cases}.$$

Задача 3

Решить неравенство $\frac{\log_7 12}{\log_7(x^2 - 9)} \geq \frac{\log_5(x^2 + 8x + 12)}{\log_5(x^2 - 9)}$.

Ответ: $[-8; -6) \cup (3; \sqrt{10})$.

Решение

$$\text{ОДЗ неравенства } \begin{cases} x^2 - 9 > 0 \\ x^2 - 9 \neq 1 \\ x^2 + 8x + 12 > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} |x| > 3 \\ x \neq \pm\sqrt{10} \\ x \in (-\infty; -6) \cup (-2; +\infty) \end{cases},$$

$$x \in (-\infty; -6) \cup (3; \sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}; +\infty).$$

Перейдем к новому основанию логарифма:

$$\log_{x^2-9} 12 \geq \log_{x^2-9}(x^2 + 8x + 12).$$

Данное неравенство на ОДЗ равносильно неравенству

$$(x^2 - 9 - 1) \cdot (x^2 + 8x + 12 - 12) \leq 0,$$

$$(x^2 - 10) \cdot (x^2 + 8x) \leq 0,$$

$$(x - \sqrt{10}) \cdot (x + \sqrt{10}) \cdot x \cdot (x + 8) \leq 0,$$

$$x \in [-8; -\sqrt{10}] \cup [0; \sqrt{10}].$$

С учетом ОДЗ получаем окончательный ответ.

Задача 4

Высоты равнобедренного остроугольного треугольника ABC , в котором $AB = BC$, пересекаются в точке O . Найти площадь треугольника ABC , если $AO = 5$, а длина высоты AD равна 8.

Ответ: 40.

Решение

Треугольники AOE и ADC подобны по трем углам. Поэтому:

$$\frac{AO}{AC} = \frac{AE}{AD}, \quad \frac{5}{2AE} = \frac{AE}{8}, \quad AE = 2\sqrt{5}.$$

Итак, основание треугольника равно $4\sqrt{5}$. При этом по теореме Пифагора

$$DC = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{80 - 64} = 4$$

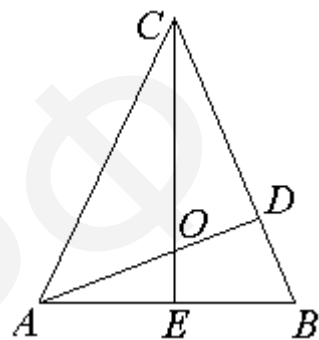
Треугольники BEC и ADC также подобны по трем углам. Поэтому

$$\frac{EC}{DC} = \frac{BE}{AD},$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{BE}{8},$$

$$BE = 4\sqrt{5}.$$

Теперь площадь треугольника равна: $S = \frac{AC \cdot BE}{2} = 40$.



Задача 5

Числа $-\sin x$, $4\sin x \cdot \operatorname{ctg} 2x$, $\cos x$ являются членами арифметической прогрессии с номерами $k, k+1, k+2$ соответственно. Найти все значения x и k , при которых седьмой член этой прогрессии равен $\frac{1}{5}$.

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = \operatorname{arccctg}\left(-\frac{4}{3}\right) + 2\pi \cdot n \\ k = 15 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \pi + \operatorname{arccctg}\left(-\frac{4}{3}\right) + 2\pi \cdot n \\ k = 11 \end{cases}.$$

Решение

Из условия задачи получаем уравнение

$$8\sin x \cdot \operatorname{ctg} 2x = \cos x - \sin x,$$

$$8\sin x \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \cos x - \sin x,$$

$$4 \cdot \frac{\cos 2x}{\cos x} = \cos x - \sin x,$$

$$4 \cdot \cos 2x = \cos^2 x - \cos x \cdot \sin x,$$

$$3 \cdot \cos^2 x + \cos x \cdot \sin x - 4\sin^2 x = 0,$$

$$3 \cdot \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x - 4 = 0,$$

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x = 1 \\ \operatorname{ctg} x = -\frac{4}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Случай 1. } \operatorname{ctg} x = 1, \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi \cdot n, \quad 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n.$$

Видно, что в этом случае прогрессия имеет вид либо $-\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 0; \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$, либо

$$\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 0; \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пусть для данных значений x существует искомое k , указанное в условии задачи. Тогда получаем соотношения:

$$d \in \left\{ \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \quad - \text{ разность прогрессии,}$$

$$a_{k+1} = a_1 + d \cdot k = 0.$$

Отсюда $a_1 = -d \cdot k \in \left\{ \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot k \right\}$. Теперь из условия, что седьмой член про-

грессии равен $\frac{1}{5}$, получаем соотношение

$$a_7 = a_1 + d \cdot 6 = \frac{1}{5}.$$

Отсюда вытекает противоречие с иррациональностью числа $\sqrt{2}$. Значит, в случае 1 не существует искомым значений x и k .

Случай 2. $\operatorname{ctg} x = -\frac{4}{3}$. Выделим две серии решений этого уравнения

А) $x = \operatorname{arccctg}\left(-\frac{4}{3}\right) + 2\pi \cdot n$,

Б) $x = \pi + \operatorname{arccctg}\left(-\frac{4}{3}\right) + 2\pi \cdot n$.

В случае (А) $\sin x = \frac{3}{5}$, $\cos x = -\frac{4}{5}$. Тогда $\operatorname{ctg} 2x = -\frac{7}{24}$, и прогрессия имеет вид $-\frac{3}{5}; -\frac{7}{10}; -\frac{4}{5}$. Разность прогрессии равна $d = -\frac{1}{10}$. Далее

$$a_{k+1} = a_1 + d \cdot k = -\frac{7}{10},$$

Отсюда $a_1 = -d \cdot k - \frac{7}{10} = \frac{k-7}{10}$. Теперь из условия, что седьмой член прогрессии равен $\frac{1}{5}$, получаем соотношение

$$a_7 = a_1 + d \cdot 6 = \frac{1}{5},$$

$$\frac{k-7}{10} - \frac{6}{10} = \frac{1}{5},$$

$$k = 15.$$

Итак, получаем первое решение задачи:
$$\begin{cases} x = \operatorname{arccctg}\left(-\frac{4}{3}\right) + 2\pi \cdot n \\ k = 15 \end{cases}.$$

В случае (Б) $\sin x = -\frac{3}{5}$, $\cos x = \frac{4}{5}$. Тогда $\operatorname{ctg} 2x = -\frac{7}{24}$, и прогрессия имеет вид $\frac{3}{5}; \frac{7}{10}; \frac{4}{5}$. Разность прогрессии равна $d = \frac{1}{10}$. Далее:

$$a_{k+1} = a_1 + d \cdot k = \frac{7}{10},$$

Отсюда $a_1 = -d \cdot k + \frac{7}{10} = \frac{-k+7}{10}$.

Теперь из условия, что седьмой член прогрессии равен $\frac{1}{5}$, получаем соотношение

$$a_7 = a_1 + d \cdot 6 = \frac{1}{5},$$

$$\frac{-k+7}{10} + \frac{6}{10} = \frac{1}{5},$$

$$k = 11.$$

Итак, получаем второе решение задачи $\begin{cases} x = \pi + \operatorname{arccctg}\left(-\frac{4}{3}\right) + 2\pi \cdot n \\ k = 11 \end{cases}.$

Задача 6

Для того чтобы успеть на последний электропоезд, семье из четырех человек нужно перейти по пешеходному мосту быстрее, чем за 32 минуты. Одновременно по мосту могут идти не более двух человек, причем ввиду темного времени непременно с фонариком. Если мост проходят двое, то они двигаются со скоростью того, кто идет медленнее. Успеют ли на последний поезд все члены семьи, если известно, что в одиночку Юра может перейти мост за 2 минуты, Катя – за 4 минуты, Игорек – за 10 минут, а Мария Ивановна – за 16 минут. Фонарик у семьи только один.

Ответ: успеют.

Решение

Приведем порядок перехода всей семьи через мост.

1. Юра и Катя идут через мост за 4 минуты.
2. Юра возвращается назад за 2 минуты с фонариком.
3. Игорек и Мария Ивановна идут через мост за 16 минут.
4. Катя возвращается назад за 4 минуты с фонариком.
5. Юра и Катя идут через мост за 4 минуты.

Общее время перехода равно 30 минут.

Вариант 3

Задача 1

Автомобилист выехал в путешествие из пункта А в пункт Б, расстояние между которыми равно 4740 км. В первый день путешествия автомобилист преодолел 700 км, а затем каждый последующий день преодоленное им расстояние уменьшалась на 50 километров. В конце каждого дня (включая день приезда) автомобилист связывался по радио с пунктом А и сообщал о своем местоположении. Сколько раз автомобилист выходил на связь?

Ответ: 10 раз.

Решение

Пусть искомая величина равна n . Очевидно, что количество километров пройденных автомобилистом в каждый день образует арифметическую прогрессию с первым членом 700 и разностью -50. Отсюда следует, что n – это наименьшее натуральное число удовлетворяющее неравенству

$$\frac{700 + 700 - 50(n-1)}{2} \cdot n \geq 4740.$$

Решим данное неравенство

$$\frac{700 + 700 - 50(n-1)}{2} \cdot n \geq 4740$$

$$(700 - 25(n-1)) \cdot n \geq 4740,$$

$$25 \cdot n^2 - 725 \cdot n + 4740 \leq 0,$$

$$5 \cdot n^2 - 145 \cdot n + 948 \leq 0,$$

$$\frac{145 - \sqrt{2065}}{10} \leq n \leq \frac{145 + \sqrt{2065}}{10}$$

Осталось найти наименьшее натуральное число из этого отрезка. Так как $45 < \sqrt{2065} < 46$, то

$$\frac{145 - 46}{10} < \frac{145 - \sqrt{2065}}{10} < \frac{145 - 45}{10}$$

$$\frac{99}{10} < \frac{145 - \sqrt{2065}}{10} < \frac{100}{10}$$

$$9\frac{9}{10} < \frac{145 - \sqrt{2065}}{10} < 10$$

Значит искомое число равно 10.

Задача 2

Решить неравенство: $(x^2 + 2x) \cdot (2x + 2) - \frac{9 \cdot (2x + 2)}{(x^2 + 2x)} \leq 0$.

Ответ: $x \in (-\infty; -3] \cup (-2; -1] \cup (0; 1]$.

Решение

ОДЗ неравенства: $x \neq 0, \quad x \neq -2$.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{\left((x^2 + 2x)^2 - 9\right) \cdot (2x + 2)}{(x^2 + 2x)} \leq 0$$

$$\frac{(x^2 + 2x + 3) \cdot (x^2 + 2x - 3) \cdot 2(x + 1)}{x \cdot (x + 2)} \leq 0$$

$$\frac{(x^2 + 2 \cdot x + 3) \cdot (x + 3) \cdot (x - 1) \cdot 2(x + 1)}{x \cdot (x + 2)} \leq 0.$$

Далее неравенство решается методом интервалов.

Задача 3

Решить уравнение:

$$\sqrt{3} \cdot (1 - 2 \cdot |\cos x|) + \cos(2x + \pi/6) + \cos(2x - \pi/6) = 6 \cdot (|\cos x| - 1)$$

Ответ: $x = \pi \cdot n$.

Решение

$$\sqrt{3} \cdot (1 - 2 \cdot |\cos x|) + \cos(2x + \pi/6) + \cos(2x - \pi/6) = 6 \cdot (|\cos x| - 1),$$

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3} \cdot (1 - 2 \cdot |\cos x|) + 2 \cdot \cos 2x \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 6 \cdot (|\cos x| - 1) \\
&\sqrt{3} \cdot (1 - 2 \cdot |\cos x|) + \sqrt{3} \cdot \cos 2x = 6 \cdot (|\cos x| - 1) \\
&\sqrt{3} \cdot (1 - 2 \cdot |\cos x|) + \sqrt{3} \cdot (2 \cdot \cos^2 x - 1) = 6 \cdot (|\cos x| - 1) \\
&-2\sqrt{3} \cdot |\cos x| + 2\sqrt{3} \cdot \cos^2 x = 6 \cdot (|\cos x| - 1) \\
&-|\cos x| + \cos^2 x = \sqrt{3} \cdot (|\cos x| - 1) \\
&\cos^2 x - (\sqrt{3} + 1) \cdot |\cos x| + \sqrt{3} = 0
\end{aligned}$$

Обозначим $|\cos x| = t \geq 0$. Тогда имеем квадратное уравнение

$$t^2 - (\sqrt{3} + 1) \cdot t + \sqrt{3} = 0.$$

Его корни $t_1 = \sqrt{3}$, $t_2 = 1$. Первый корень является лишним, а из второго корня вытекает решение уравнения:

$$\begin{aligned}
|\cos x| &= 1 \\
\cos x &= \pm 1 \\
x &= \pi \cdot n
\end{aligned}$$

Задача 4.

Решить неравенство: $\left| \frac{x+1}{2x-1} \right| < \left| \frac{4-x}{2x+5} \right| + 1.$

Ответ: $x \in (-\infty; -\frac{5}{2}) \cup (-\frac{5}{2}; \sqrt{10} - 3) \cup (\frac{7}{5}; +\infty)$

Решение

ОДЗ уравнения определяется условиями $x \neq -\frac{5}{2}; \frac{1}{2}.$

Решим неравенство:

$$\left| \frac{x+1}{2x-1} \right| < \left| \frac{4-x}{2x+5} \right| + 1$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} \frac{x+1}{2x-1} < \left| \frac{4-x}{2x+5} \right| + 1 \\ \frac{x+1}{2x-1} > -1 - \left| \frac{4-x}{2x+5} \right| \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{2-x}{2x-1} < \left| \frac{4-x}{2x+5} \right| \\ \frac{3x}{2x-1} > -\left| \frac{4-x}{2x+5} \right| \end{array} \right\} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{4-x}{2x+5} \right| > \frac{2-x}{2x-1} \\ \left| \frac{4-x}{2x+5} \right| > \frac{-3x}{2x-1} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \frac{4-x}{2x+5} > \frac{2-x}{2x-1} \\ \frac{4-x}{2x+5} < \frac{x-2}{2x-1} \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} \frac{4-x}{2x+5} > \frac{-3x}{2x-1} \\ \frac{4-x}{2x+5} < \frac{3x}{2x-1} \end{array} \right. \end{array} \right\} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \frac{10x-14}{(2x+5)(2x-1)} > 0 \\ \frac{6+8x-4x^2}{(2x+5)(2x-1)} < 0 \\ \frac{4x^2+24x-4}{(2x+5)(2x-1)} > 0 \\ \frac{-8x^2-6x-4}{(2x+5)(2x-1)} < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{5x-7}{(2x+5)(2x-1)} > 0 \\ \frac{2x^2-4x-3}{(2x+5)(2x-1)} > 0 \\ \frac{x^2+6x-1}{(2x+5)(2x-1)} > 0 \\ \frac{4x^2+3x+2}{(2x+5)(2x-1)} > 0 \end{array} \right\} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \frac{5x-7}{(2x+5)(2x-1)} > 0 \\ \frac{2x^2-4x-3}{(2x+5)(2x-1)} > 0 \\ \frac{x^2+6x-1}{(2x+5)(2x-1)} > 0 \\ \frac{1}{(2x+5)(2x-1)} > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -\frac{5}{2}) \cup (-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}) \cup (\frac{7}{5}; +\infty) \\ x \in (-\infty; -\frac{5}{2}) \cup (-\frac{5}{2}; \sqrt{10}-3) \cup (\frac{1}{2}; +\infty) \end{cases} \\
& x \in (-\infty; -\frac{5}{2}) \cup (-\frac{5}{2}; \sqrt{10}-3) \cup (\frac{7}{5}; +\infty)
\end{aligned}$$

Задача 5

В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) диагонали пересекаются в точке M , при этом $|BC| = 6$ см, $|AD| = 10$ см. Высота трапеции равна 8 см. Найти площадь треугольника ABM .

Ответ: $S_{AMD} = 15 \text{ см}^2$.

Решение

1. Площадь трапеции равна

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot h = 64.$$

2. Треугольники BCM и AMD подобны по трем уг-

лам. При этом коэффициент подобия k равен $k = \frac{BC}{AD} = \frac{3}{5}$. Тогда можно

найти высоты h_1, h_2 этих треугольников:

$$\begin{cases} h_1 + h_2 = 8 \\ \frac{h_1}{h_2} = k = \frac{3}{5} \end{cases}$$

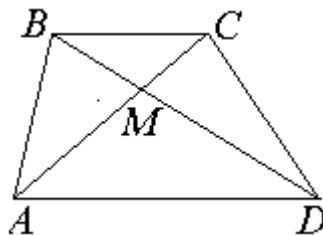
Отсюда следует, что $h_1 = 3$, $h_2 = 5$.

Следовательно, площади треугольников BCM и AMD равны

$$S_{BCM} = \frac{BC \cdot h_1}{2} = 9, \quad S_{AMD} = \frac{AD \cdot h_2}{2} = 25.$$

3. Треугольники ABD и ACD имеют одинаковую высоту и основание. Следовательно, их площади равны. Тогда равны и площади треугольников ABM и CMD .

4. Окончательно получаем, что $S_{AMD} = \frac{S_{ABCD} - S_{BCM} - S_{AMD}}{2} = \frac{64 - 9 - 25}{2} = 15$.



Задача 6

Для каждого действительного значения параметра a решить уравнение:

$$|x - a| + x - 3a = 2$$

Ответ: при $a = -1$ $x \leq -1$,

при $a > -1$ $x = 2a + 1$

при $a < -1$ корней нет.

Решение

$$|x - a| + x - 3a = 2,$$

$$2 + 3a - x = |x - a|$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 + 3a - x \geq 0 \\ 2 + 3a - x = x - a \\ 2 + 3a - x = a - x \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 + 3a - x \geq 0 \\ 2 + 4a = 2x \\ 2 + 2a = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 + 3a - x \geq 0 \\ 1 + 2a = x \\ a = -1 \end{array} \right.$$

Из полученных выражений видно, что для $a = -1$ решением уравнения будет любое x , удовлетворяющее неравенству

$$\begin{aligned} 2 - 3 - x &\geq 0 \\ x &\leq -1 \end{aligned}$$

Если же $a \neq -1$, то тогда получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 + 3a - x \geq 0 \\ x = 1 + 2a \end{array} \right.$$

Отсюда следует, что должно выполняться неравенство

$$\begin{aligned} 2 + 3a - 1 - 2a &\geq 0 \\ a &\geq -1 \end{aligned}$$

Замечание. Существует другое (более простое) решение, основанное на замене переменных $y = x - a$.

ВАРИАНТЫ ЭКЗАМЕНА НА ИНЖЕНЕРНОМ ПОТОКЕ

Вариант 1

Задача 1

Два лыжника стартовали друг за другом с интервалом в 27 минут. Второй лыжник догнал первого в 18 км от места старта. Дойдя до отметки 27 км, второй лыжник повернул обратно и встретил первого лыжника на расстоянии 1 км от места поворота. Найти скорости лыжников.

Ответ: скорости лыжников 8 км/ч, 10 км/ч.

Решение

Обозначим через v_1, v_2 скорости лыжников (в км/ч). Тогда можно составить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{18}{v_1} = \frac{18}{v_2} + \frac{27}{60}, \\ \frac{26}{v_1} = \frac{28}{v_2} + \frac{27}{60}. \end{cases}$$

Решая данную систему, получаем $v_1 = \frac{4}{5} \cdot v_2$, и следовательно

$$\frac{90}{4v_2} = \frac{18}{v_2} + \frac{27}{60},$$

$$\frac{5}{2v_2} = \frac{2}{v_2} + \frac{1}{20},$$

$$v_2 = 10, \quad v_1 = 8.$$

Задача 2

Решить неравенство $\log_2(2^x - 12) < 6 - x$.

Ответ: $x \in (\log_2 12; 4)$.

Решение

ОДЗ: $x > \log_2 12$

Решим неравенство

$$2^x - 12 < \frac{2^6}{2^x},$$

$$2^{2x} - 12 \cdot 2^x < 32,$$

$$(2^x - 16) \cdot (2^x + 4) < 0.$$

Так как $2^x > 0$, то получаем $0 < 2^x < 16$, $x < 4$. Осталось учесть ОДЗ.

Задача 3

Найти сумму всех различных корней уравнения

$$\sqrt{\frac{\pi - x}{x}} \cdot (\sin 7x - \sin x + \cos 4x) = 0.$$

Ответ: 4π .

Решение

ОДЗ уравнения определяется условием $\frac{\pi - x}{x} \geq 0$. Значит, ОДЗ имеет вид:

$$x \in (0; \pi].$$

Решая уравнение, получим:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi - x}{x} = 0 \\ \sin 7x - \sin x + \cos 4x = 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \pi \\ 2 \cdot \sin 3x \cdot \cos 4x + \cos 4x = 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \pi \\ \cos 4x = 0 \\ \sin 3x = -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \pi \\ 4x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n \\ 3x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi \cdot k \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \pi \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi \cdot n}{4} \\ x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{18} + \frac{\pi \cdot k}{3} \end{array} \right].$$

Из последних двух серий отберем решения, удовлетворяющие ОДЗ.

$$\text{А) } 0 < \frac{\pi}{8} + \frac{\pi \cdot n}{4} \leq \pi, \quad -\frac{1}{8} < \frac{n}{4} \leq 1 - \frac{1}{8}, \quad -\frac{1}{2} < n \leq \frac{7}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3,$$

$$\text{Б) } 0 < -\frac{\pi}{18} + \frac{\pi \cdot 2k}{3} \leq \pi, \quad \frac{1}{12} < k \leq \frac{19}{12}, \quad k = 1,$$

$$\text{В) } 0 < \frac{\pi}{18} + \frac{\pi \cdot (2k+1)}{3} \leq \pi, \quad -\frac{7}{12} < k \leq \frac{11}{12}, \quad k = 0.$$

В итоге запишем все множество различных корней уравнения

$$x \in \left\{ \pi; \frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}; \frac{11\pi}{18}; \frac{7\pi}{18} \right\}. \text{ Сумма этих решений равна } 4\pi.$$

Задача 4

Решить неравенство:
$$\frac{\sqrt{2-x} + |x+2|}{1-x} < 0$$

Ответ: $x \in (1; 2]$.

Решение

ОДЗ неравенства $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 2]$.

Нетрудно заметить, что на ОДЗ числитель неравенства всегда больше нуля.

Поэтому на ОДЗ неравенство равносильно неравенству $1 - x < 0$.

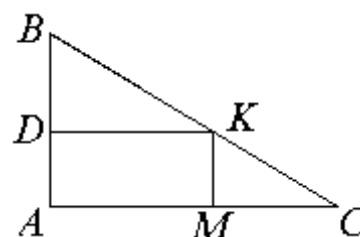
Задача 5

В прямоугольном треугольнике ABC расположен прямоугольник $ADKM$ так, что AD лежит на катете AB , AM – на катете AC , вершина K – на гипотенузе BC . Известно, что $AB=5$ см, $AC=12$ см. Найти длины сторон прямоугольника, если его площадь равна $\frac{40}{3}$ см², а длина диагонали меньше 8 см.

Ответ: 4 см и $10/3$ см.

Решение

Обозначим $AM=x$, $AD=y$.



Тогда из условия задачи и подобия треугольников ABC и BDK имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x \cdot y = \frac{40}{3} \\ \frac{5-y}{5} = \frac{x}{12} \end{cases}.$$

$$60 - 12y = 5x, \quad \frac{60 - 12y}{5} \cdot y = \frac{40}{3}, \quad \frac{15 - 3y}{5} \cdot y = \frac{10}{3},$$

$$45y - 9y^2 = 50, \quad 9y^2 - 45y + 50 = 0, \quad y_1 = \frac{10}{3}, \quad y_2 = \frac{5}{3}.$$

Тогда $x_1 = 4$, $x_2 = 8$. Из условия, что диагональ прямоугольника меньше 8 следует, что второй вариант ответа не подходит.

Задача 6

Число x удовлетворяет системе:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 2x = -\frac{3}{4} \\ \sin 2x > 0 \end{cases}.$$

Обязательно ли при этих условиях определено выражение $\log_{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} x$ и чему

оно тогда равно?

Ответ: $\log_{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} x = -2$.

Решение

Выразим $\operatorname{tg} 2x$ и $\sin 2x$ через $\operatorname{tg} x$:

$$\begin{cases} \frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = -\frac{3}{4} \\ \frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} > 0 \end{cases},$$

Из первого уравнения получаем $3 \cdot \operatorname{tg}^2 x - 8 \cdot \operatorname{tg} x - 3 = 0$,

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 3 \\ \operatorname{tg} x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что второе решение не удовлетворяет условию

$\frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} > 0$. Значит, $\operatorname{tg} x = 3$, и выражение $\log_{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} x$ принимает значение

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} (3) = -2.$$

Вариант 2

Задача 1

Решить неравенство $\frac{\sqrt{6-x-x^2}}{2-3x} + \frac{\sqrt{6-x-x^2}}{x+4} \geq 0$.

Ответ: $x \in [-3; \frac{2}{3}) \cup \{2\}$.

Решение

ОДЗ неравенства имеет вид:

$$\begin{cases} 6-x-x^2 \geq 0 \\ x \neq \frac{2}{3} \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-3; 2] \\ x \neq \frac{2}{3} \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-3; \frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}; 2].$$

Для $x = -3$, $x = 2$ числитель обращается в ноль. Поэтому эти числа являются решениями неравенства.

Для остальных значений x из ОДЗ числитель положителен, и данное неравенство равносильно неравенству

$$\begin{aligned} \frac{1}{2-3x} + \frac{1}{x+4} \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{x+4+2-3x}{(2-3x) \cdot (x+4)} \geq 0 \\ \frac{6-2x}{(2-3x) \cdot (x+4)} \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{x-3}{(3x-2) \cdot (x+4)} \geq 0 \\ &x \in [3; +\infty) \cup (-4; \frac{2}{3}). \end{aligned}$$

С учетом ОДЗ получаем окончательное решение неравенства:

$$x \in [-3; \frac{2}{3}) \cup \{2\}.$$

Задача 2

Решить уравнение: $\sqrt{\frac{3x}{2} + 37} = \sqrt{x+7} + \sqrt{\frac{x}{2}}$.

Ответ: $x = 18$.

Решение

ОДЗ уравнения определяется условиями

$$\begin{cases} \frac{3x}{2} + 37 \geq 0 \\ x + 7 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}, \quad x \geq 0.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\frac{3x}{2} + 37 = x + 7 + 2\sqrt{(x+7) \cdot \frac{x}{2} + \frac{x}{2}},$$

$$\sqrt{(x+7) \cdot \frac{x}{2}} = 15,$$

$$x^2 + 7x - 450 = 0$$

$$\begin{cases} x = 18 \\ x = -25 \end{cases}.$$

Осталось учесть ОДЗ.

Задача 3

Решить уравнение $\left(56 - 7^{\frac{2x-1}{x}}\right)^{\frac{x}{x+1}} = 7.$

Ответ: $x = 1.$

Решение

ОДЗ уравнения: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -1 \end{cases}.$

Преобразуем уравнение:

$$\left(56 - 7^{\frac{2x-1}{x}}\right)^{\frac{x}{x+1}} = 7,$$

$$56 - 7^{\frac{2x-1}{x}} = 7^{\frac{x+1}{x}},$$

$$56 - 7^{2-\frac{1}{x}} = 7^{1+\frac{1}{x}},$$

$$8 - 7 \cdot 7^{-\frac{1}{x}} = 7^{\frac{1}{x}}.$$

Обозначим $7^{\frac{1}{x}} = t > 0$. Тогда получаем уравнение:

$$8 - \frac{7}{t} = t,$$

$$t^2 - 8t + 7 = 0,$$

$$t = 1, \quad t = 7,$$

$$7^{\frac{1}{x}} = 1, \quad 7^{\frac{1}{x}} = 7,$$

$$\frac{1}{x} = 0, \quad \frac{1}{x} = 1.$$

Первое уравнение не имеет решений, а второе имеет решение $x = 1$.

Задача 4

Решить уравнение: $\log_{27} \left(\sin 2x - \frac{1}{3} \cdot \cos x \right) = \frac{1}{3} + \log_3 (-\cos x)$.

Ответ: $x = \pi + \arcsin \frac{2}{3} + 2\pi \cdot n$.

Решение

ОДЗ уравнения определяется условиями:
$$\begin{cases} \sin 2x - \frac{1}{3} \cos x > 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}.$$

Решим уравнение

$$\log_{27} \left(\sin 2x - \frac{1}{3} \cdot \cos x \right) = \frac{1}{3} + \log_3 (-\cos x)$$

$$\log_3 \left(\sin 2x - \frac{1}{3} \cdot \cos x \right) = \log_3 (-3 \cos^3 x)$$

$$\sin 2x - \frac{1}{3} \cdot \cos x = -3 \cos^3 x$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ 2 \sin x - \frac{1}{3} = -3 \cos^2 x = 3 \sin^2 x - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ 9\sin^2 x - 6\sin x - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -2/3 \\ \sin x = 4/3 \end{cases}$$

С учетом области значений синуса имеем

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -2/3 \end{cases}$$

Решение $\cos x = 0$ не удовлетворяет ОДЗ.

Во втором решении $\sin x = -2/3$ с учетом ОДЗ получаем $\cos x = -\sqrt{5}/3$. В этом случае неравенство $\sin 2x - \frac{1}{3}\cos x > 0$ выполнено. Следовательно, решением уравнения является серия $x = \pi + \arcsin \frac{2}{3} + 2\pi \cdot n$.

Задача 5

В правильной треугольной пирамиде длина стороны основания равна $2\sqrt{3}$, длина высоты равна 2. Найти диаметр шара, вписанного в пирамиду.

Ответ: $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Решение

Площадь основания пирамиды равна $S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$, а радиус окружности описанной около основания равен $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = 2$. Объем пирамиды равен

$V = \frac{1}{3} \cdot S_1 \cdot h = 2\sqrt{3}$. Найдем площадь боковой грани. По теореме Пифагора длина бокового ребра равна $b = \sqrt{h^2 + R^2} = 2\sqrt{2}$. Тогда высота боковой грани равна $\sqrt{b^2 - a^2/4} = \sqrt{5}$. Тогда площадь боковой грани равна:

$$S_2 = \frac{a \cdot \sqrt{5}}{2} = \sqrt{15}.$$

Теперь можно найти r – радиус вписанного шара из формулы:

$$V = r \cdot \frac{S_1 + 3 \cdot S_2}{3},$$

$$r = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Задача 6

В спортивном соревновании первый спортсмен стартует одновременно с преследующим его вторым спортсменом, имея преимущество в 40 метров. Когда первый спортсмен преодолел половину своей дистанции, то второму спортсмену до их общего финиша оставалось бежать 13 сек., а через 2 сек. после этого второй спортсмен отставал от первого только на 2 метра. Найти скорости спортсменов, если первый спортсмен преодолевает свою дистанцию за 34 сек.

Ответ: 5 м/сек и 7 м/сек.

Решение

Пусть длина дистанции для первого спортсмена равна S , а скорости спортсменов равны v_1, v_2 . Тогда имеем систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S}{v_1} = 34 \\ \frac{S}{2v_1} = \frac{S + 40}{v_2} - 13 \\ \left(\frac{S}{2v_1} + 2 \right) \cdot (v_2 - v_1) = 40 - 2 \end{array} \right. .$$

Решим эту систему.

$$\begin{cases} S = 34 \cdot v_1 \\ \frac{34 \cdot v_1}{2v_1} = \frac{34 \cdot v_1 + 40}{v_2} - 13 \\ \left(\frac{34 \cdot v_1}{2v_1} + 2 \right) \cdot (v_2 - v_1) = 38 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = 34 \cdot v_1 \\ \frac{34 \cdot v_1 + 40}{v_2} = 30 \\ 19 \cdot (v_2 - v_1) = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 34 \cdot v_1 \\ 34 \cdot v_1 + 40 = 30v_2 \\ v_2 - v_1 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = 34 \cdot v_1 \\ 34 \cdot v_1 + 40 = 30(v_1 + 2) \\ v_2 - v_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = 7 \\ v_1 = 5 \\ S = 170 \end{cases}$$

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ ПО ФИЗИКЕ

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

Кинематика

1. Координата и перемещение тела при равномерном движении по прямой:

$$x=x_0+V_x t,$$

$$s_x=x-x_0=V_x t,$$

где x_0 — начальная координата.

2. Закон сложения скоростей и ускорений (для поступательного движения системы отсчета):

$$V_{\text{абс}}=V_{\text{пер}}+V_{\text{отн}},$$

$$a_{\text{абс}}=a_{\text{пер}}+a_{\text{отн}},$$

где $V_{\text{абс}}$, $a_{\text{абс}}$ — скорость и ускорение в неподвижной системе отсчета; $V_{\text{отн}}$, $a_{\text{отн}}$ — скорость и ускорение в движущейся системе отсчета; $V_{\text{пер}}$, $a_{\text{пер}}$ — скорость и ускорение движущейся системы отсчета относительно неподвижной системы отсчета.

3. Средняя скорость при неравномерном движении по прямой:

$$V_{\text{ср}}=S/t,$$

(весь путь, деленный на все время).

4. Координата и скорость тела при равноускоренном движении по прямой (положительное направление координатной оси x совпадает с направлением вектора начальной скорости тела или его первоначального смещения):

$$x=x_0+V_0 t\pm at^2/2,$$

$$V_x=V_0\pm at,$$

(знак "+" соответствует равноускоренному движению, знак "-" — равнозамедленному движению).

5. Бросок тела под углом α к горизонту с начальной скоростью V_0 .

- Координата и скорость тела в проекциях на оси x и y (ось x — горизонтальна, ось y направлена вертикально вверх):

$$x=x_0+V_0\cos\alpha t,$$

$$y=y_0+V_0\sin\alpha t-gt^2/2,$$

$$V_x=V_0\cos\alpha,$$

$$V_y=V_0\sin\alpha-gt.$$

- Время подъема до высшей точки траектории:

$$t=V_0\sin\alpha/g.$$

- Максимальная высота подъема над начальной точкой броска:

$$h_{\text{макс}}=V_0^2\sin^2\alpha/(2g).$$

- Полное время полета от момента броска до падения на начальный горизонтальный уровень:

$$t_{\text{полн}}=2V_0\sin\alpha/g.$$

- Дальность полета за время $t_{\text{полн}}$:

$$L=V_0^2\sin 2\alpha/g.$$

- Модуль скорости тела в произвольный момент времени:

$$V=\sqrt{V_x^2+V_y^2}.$$

- Угол β между вектором скорости тела и горизонтом в произвольный момент времени:

$$\text{tg}\beta=|V_y|/V_x.$$

6. Движение материальной точки по окружности радиуса R .

- Угловая скорость ω :

$$\omega=\varphi/t,$$

где φ — угол поворота (в радианах).

- Период вращения T :

$$T=2\pi/\omega.$$

- Частота вращения ν :

$$\nu=1/T=\omega/2\pi.$$

- Связь между линейной скоростью V и угловой скоростью ω :

$$V=\omega R.$$

- Ускорение тела при движении по окружности с постоянной скоростью ($V=\text{const}$):

$$a=a_{\text{ц.с.}}=V^2/R=\omega^2 R.$$

- Ускорение тела при равноускоренном движении по окружности:

$$a_R=V^2/R=\omega^2 R,$$

$$a_\tau=V'(t),$$

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_R^2},$$

где a_τ — тангенциальное ускорение, a_R — центростремительное ускорение, a — полное ускорение. При этом путь S , пройденный телом по окружности, равен: $S=V_0t+a_\tau t^2/2$; скорость тела равна: $V=V_0+a_\tau t$.

Динамика

1. Второй закон Ньютона:

$$ma=F_1+F_2+\dots$$

Третий закон Ньютона:

$$F_{12}=-F_{21}.$$

2. Сила упругости:

$$F_{\text{упр}}=k\Delta l,$$

где k — жесткость пружины (упругого стержня, шнура), Δl — изменение длины. Сила упругости направлена противоположно направлению деформации. Жесткость измеряется в Н/м.

3. Сила трения скольжения:

$$F_{\text{тр}}=\mu N,$$

сила трения покоя:

$$0\leq F_{\text{тр.п}}\leq\mu N,$$

где μ — коэффициент трения, N — сила нормальной реакции опоры.

4. Гравитационная сила:

$$F_{\text{гр}} = GmM/r^2,$$

где m, M — массы взаимодействующих тел, r — расстояние между их центрами, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$ — гравитационная постоянная.

- Ускорение свободного падения на расстоянии r от центра планеты:

$$g = GM/r^2,$$

при $r = 6400 \text{ км}$ (радиус Земли) $g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$.

- Вес тела P — сила, с которой благодаря притяжению к Земле, тело действует на опору или подвес. По третьему закону Ньютона вес по модулю равен равнодействующей сил реакции опоры.
- Первая космическая скорость:

$$V_1 = \sqrt{G \frac{M}{r^2}} = \sqrt{Gr},$$

где r — радиус круговой околоземной орбиты, M — масса земли. При $r = 6400 \text{ км}$ $V_1 \approx 7,9 \text{ км/с}$.

5. Движение по окружности. Уравнение движения в проекции на ось x , направленную от тела к центру окружности (по радиусу):

$$mV^2/r = F_x.$$

Законы сохранения импульса и энергии

1. Импульс тела (материальной точки):

$$p = mV.$$

Импульс системы тел (материальных точек):

$$p = m_1 V_1 + m_2 V_2 + \dots$$

Импульс измеряется в $\text{кг} \cdot \text{м/с}$.

2. Неупругий удар: после удара тела движутся вместе. Выполняется закон сохранения импульса:

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = (m_1 + m_2) U.$$

3. Упругий удар. Выполняются законы сохранения энергии и импульса:

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 U_1 + m_2 U_2,$$
$$m_1 V_1^2 / 2 + m_2 V_2^2 / 2 = m_1 U_1^2 / 2 + m_2 U_2^2 / 2.$$

Механические колебания

1. Смещение точки при гармонических колебаниях:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где A — амплитуда колебаний, ω — циклическая (круговая) частота (измеряется в рад/с), φ_0 — начальная фаза (рад).

- Период T и частота ν колебаний:

$$\omega = 2\pi / T = 2\pi \nu.$$

Частота ν измеряется в герцах ($1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1}$).

2. Скорость при гармонических колебаниях:

$$V_x = x'(t) = -A \omega \sin(\omega t + \varphi_0).$$

- Амплитуда колебаний скорости (наибольшая скорость):

$$V_{\text{макс}} = \omega A.$$

- Ускорение точки при гармонических колебаниях:

$$a_x = V'(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x(t).$$

- Амплитуда ускорения:

$$a_{\text{макс}} = \omega^2 A.$$

- Сила, действующая на тело, при гармонических колебаниях (возвращающая сила):

$$F_x = m a_x = -m \omega^2 x.$$

3. Уравнение гармонических колебаний:

$$x'' + \omega^2 x = 0.$$

4. Циклическая частота ω , период колебаний T груза на пружине жесткостью k :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Циклическая частота ω и период колебаний T математического маятника:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

5. Кинетическая E_k , потенциальная E_p и полная E энергия колебаний:

$$E_k = \frac{mV_x^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2},$$

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)}{2},$$

$$E = \frac{mV_x^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = \frac{kA^2}{2}.$$

Молекулярная физика. Газовые законы

1. Количество вещества (моль):

$$\nu = m/M = N/N_A,$$

где m — масса вещества, N — число молекул, M — молярная масса (измеряется в кг/моль), $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹ — число Авогадро.

2. Уравнение состояния идеального газа в молекулярно-кинетической теории:

$$P = nkT.$$

Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона-Менделеева):

$$PV = (m/M)RT.$$

3. Объединенный газовый закон:

$$P_1 V_1 / T_1 = P_2 V_2 / T_2,$$

(здесь предполагается, что масса газа m не изменяется).

4. Закон Дальтона:

$$P = P_1 + P_2 + \dots,$$

где $P_1, P_2, \dots$ — парциальные давления газов.

Парциальное давление — это давление, которое создавал бы при той же температуре данный газ в отсутствие в сосуде остальных компонентов смеси.

Термодинамика

1. Первый закон термодинамики:

$$Q = \Delta U + A$$

(полученная телом теплота идет на приращение его внутренней энергии и на совершение работы над внешними телами).

2. Количество полученной теплоты вычисляется по следующим формулам.

- а) При изменении температуры

$$Q = C\Delta T = cm\Delta T = C_{\text{мол}} \nu \Delta T,$$

где C — теплоемкость тела (Дж/К), c — удельная теплоемкость (Дж/(кг·К)), $C_{\text{мол}}$ — молярная теплоемкость (Дж/(моль·К)).

- В процессах с идеальным газом при постоянном объеме и при постоянном давлении:

$$Q = \nu C_V \Delta T, \quad Q = \nu C_P \Delta T,$$

где C_V, C_P — молярные теплоемкости газа при постоянном объеме и давлении соответственно ($C_V = 3R/2$ для одноатомного газа, $C_V = 5R/2$ для двухатомного газа из жестких молекул, $C_P = C_V + R$ — соотношение Майера).

- б) При плавлении твердого тела или испарении жидкости

$$Q = \lambda m, \quad Q = rm,$$

где λ — удельная теплота плавления (Дж/кг), r — удельная теплота парообразования (Дж/кг). При кристаллизации жидкости или конденсации пара соответствующая теплота выделяется во внешнюю среду.

Плавление (кристаллизация) происходит при постоянной температуре, называемой температурой плавления. Так, таяние льда происхо-

дит при 0°C (если давление равно нормальному атмосферному). Равновесное испарение (конденсация) происходит при постоянной температуре — температуре кипения жидкости (для воды при нормальном атмосферном давлении 100°C). При плавлении или испарении работой твердого тела и жидкости можно пренебречь, так что приведенные формулы можно использовать для расчета изменения внутренней энергии.

- в) При сгорании топлива массой m выделяется теплота:

$$Q=qm,$$

где q — удельная теплота сгорания топлива.

3. Уравнение теплового баланса. Если между телами системы происходит теплообмен (обмен внутренней энергией без совершения работы), то конечная температура всех тел одинакова (состояние теплового равновесия), и ее можно найти из закона сохранения энергии:

$$Q_1+Q_2+\dots=0$$

(алгебраическая сумма полученных и отданных количеств теплоты равна нулю).

4. В изобарном процессе газ совершает работу:

$$A=P\Delta V.$$

- Работа газа в изохорном процессе:

$$A=0.$$

- Работа газа в процессе с линейной зависимостью давления от объема:

$$A=(P_1+P_2)\Delta V/2.$$

- Работа газа в произвольном процессе равна площади под графиком процесса в координатах P и V .

5. Внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры и равна:

$$U=\nu C_V T,$$

для одноатомного газа:

$$U=(3/2)R\nu T.$$

Приращение внутренней энергии идеального газа:

$$\Delta U=\nu C_V\Delta T.$$

6. Адиабатический процесс — процесс без теплообмена тела с окружающими телами:

$$Q=0,$$

$$0=\Delta U+A.$$

Электростатика

1. Закон Кулона:

$$F=k|q_1||q_2|/\varepsilon r^2,$$

где $k=1/4\pi\varepsilon_0\approx 9\cdot 10^9$ Н·м²/Кл², ε — диэлектрическая проницаемость вещества. Заряд измеряется в кулонах.

2. Закон сохранения заряда. Алгебраическая сумма зарядов в электрически изолированной системе остается постоянной:

$$q=q_1+q_2+\dots=\text{const.}$$

3. Напряженность электрического поля:

$$E=F_q/q.$$

Напряженность, создаваемая точечным зарядом q на расстоянии r :

$$E=k|q|/r^2.$$

Принцип суперпозиции:

$$E=E_1+E_2+\dots$$

Напряженность измеряется в Н/Кл или в В/м.

4. Разность потенциалов электростатического поля в точках 1 и 2:

$$A_{q12}=q(\varphi_1-\varphi_2),$$

где A_{q12} — работа поля по перемещению заряда q из точки 1 в точку 2. Потенциал и разность потенциалов измеряются в вольтах (В).

Разность потенциалов между точками, лежащими на одной силовой линии однородного поля:

$$U=Ed.$$

5. Емкость конденсатора:

$$C=q/U.$$

Емкость плоского конденсатора:

$$C=\epsilon_0\epsilon S/d,$$

где S — площадь пластин, d — расстояние между ними. Емкость измеряется в фарадах (Ф).

6. Энергия поля в конденсаторе:

$$W=CU^2/2=q^2/2C=qU/2.$$

Плотность энергии поля:

$$w=W/V=\epsilon_0\epsilon E^2/2.$$

Законы постоянного тока

1. Сила тока:

$$I=q/t,$$

где q — заряд, прошедший через сечение проводника за время t . Сила тока измеряется в амперах (А).

2. Закон Ома для однородного участка цепи:

$$I=U/R,$$

где U — напряжение на концах участка, R — сопротивление участка (измеряется в омах (Ом)).

3. Соединение сопротивлений

а) последовательное:

$$R_{\text{экв}}=R_1+R_2, I_1=I_2, U=U_1+U_2;$$

б) параллельное:

$$1/R_{\text{экв}}=1/R_1+1/R_2, U_1=U_2, I=I_1+I_2.$$

Магнитное поле. Электромагнитная индукция

1. Сила, действующая на проводник с током I длиной l в магнитном поле с индукцией B (сила Ампера):

$$F=I \cdot l \cdot B \cdot \sin \alpha,$$

где α — угол между проводником и вектором магнитной индукции. Магнитная индукция измеряется в теслах (Тл). Сила направлена перпендикулярно как направлению тока, так и вектору B .

2. Сила, действующая на частицу с зарядом q , движущуюся со скоростью V в магнитном поле с индукцией B :

$$F=qVB\sin\alpha,$$

где α — угол между векторами скорости частицы и магнитной индукции. Сила направлена перпендикулярно векторам V и B .

3. Магнитный поток через поверхность, ограниченную замкнутым контуром:

$$\Phi=BS\cos\alpha,$$

где S — площадь контура, α — угол между нормалью к плоскости контура и вектором B . Магнитный поток измеряется в веберах (Вб).

4. Закон электромагнитной индукции Фарадея:

$$E_{\text{инд}}=-\Delta\Phi/\Delta t,$$

где $\Delta\Phi=\Phi_2-\Phi_1$ — приращение магнитного потока за время t .

Геометрическая оптика

1. Скорость света в среде:

$$V=c/n,$$

где $c\approx 3\cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме, n — абсолютный показатель преломления среды. При переходе волны из вакуума в среду частота колебаний не меняется, а длина волны уменьшается в n раз.

2. Закон преломления света:

$$n_1\sin\alpha_1=n_2\sin\alpha_2,$$

где α_1 — угол падения в среде с показателем преломления n_1 , α_2 — угол преломления в среде с показателем преломления n_2 . Углы отсчитываются от нормали к поверхности раздела.

3. Предельный угол полного внутреннего отражения — это такой угол падения, для которого угол преломления равен 90° :

$$n_1 \sin \alpha_{\text{пр}} = n_2 \sin 90^\circ = n_2,$$

$$\sin \alpha_{\text{пр}} = n_2 / n_1.$$

Предельный угол и полное внутреннее отражение света наблюдаются при падении луча из среды оптически менее плотной на границу раздела со средой оптически более плотной, например, при переходе луча из воды в воздух. Полное отражение — при углах падения $\alpha \geq \alpha_{\text{пр}}$.

4. Собирающая линза: пучок лучей, параллельных главной оптической оси, после преломления в линзе собирается в фокусе.

Рассеивающая линза: пучок лучей, параллельных главной оптической оси, после преломления в линзе расходится, а продолжения лучей пересекаются в фокусе.

5. Формула тонкой линзы:

$$\frac{1}{d} \pm \frac{1}{f} = \pm \frac{1}{F},$$

где d — расстояние от предмета до линзы, f — расстояние от линзы до изображения, F — фокусное расстояние линзы ($D = 1/F$ — оптическая сила линзы (измеряется в диоптриях, дптр = 1/м).

- Знак перед $1/F$: "+" для собирающей линзы, "-" для рассеивающей.
- Знак перед $1/f$: "+" в случае действительного изображения, "-" в случае мнимого изображения.
- Знак перед $1/d$: "+" в случае действительного предмета, "-" в случае мнимого предмета (сходящийся пучок лучей, падающий на линзу).

Действительное изображение формируется собирающей линзой только при $d > F$ и рассеивающей линзой только в случае мнимого предмета при $|-d| < |F|$.

6. Линейное увеличение линзы равно отношению размера изображения l' к размеру предмета l .

Поперечное увеличение равно:

$$\Gamma = l'/l = f/d.$$

ЯГубов.РФ

**ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО ФИЗИКЕ
ЗА НЕСКОЛЬКО ПОСЛЕДНИХ ЛЕТ**

ВАРИАНТЫ ЭКЗАМЕНА НА ИНЖЕНЕРНОМ ПОТОКЕ

Вариант 1

Задача 1

Два тела брошены у поверхности Земли с одинаковым начальными скоростями под углами α и $90^\circ - \alpha$ к горизонту. Найти отношение наибольшей высоты подъема первого тела $H_{1\max}$ к соответствующей величине $H_{2\max}$ для второго тела.

Ответ: $H_{1\max} / H_{2\max} = \operatorname{tg}^2 \alpha$

Решение

Воспользуемся формулой для максимальной высоты подъема тела, брошенного под углом к горизонту (см. «Основные законы и формулы. Кинематика»):

$$\frac{H_{1\max}}{H_{2\max}} = \frac{\frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}}{\frac{V_0^2 \sin^2 (90^\circ - \alpha)}{2g}} = \operatorname{tg}^2 \alpha$$

Задача 2

Шар массой M висит на легкой нерастяжимой нити. В шар попадает пуля массой m , летящая горизонтально со скоростью V , и застревает в нем. Угол наибольшего отклонения нити от вертикали α ($\alpha < \pi/2$). Найти период гармонических колебаний, считая подвешенный на нити шар математическим маятником.

Ответ: $T = \frac{\pi m V}{g \sin \frac{\alpha}{2} (m + M)}$.

Решение

Начальная скорость шара с застрявшей пулей определяется из закона сохранения импульса:

$$V_1 = \frac{mV}{M + m}.$$

При отклонении нити на угол α шар поднимется на высоту h , равную:

$$h = l(1 - \cos \alpha),$$

где l - длина подвеса.

Закон сохранения энергии дает:

$$\frac{(m + M)V_1^2}{2} = (m + M)gh = (m + M)gl(1 - \cos \alpha),$$

где учтено, что при $\alpha < \pi/2$ скорость шара в высшей точке траектории равна нулю.

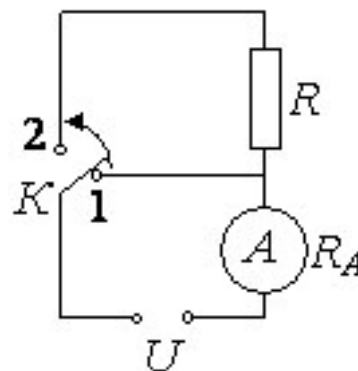
Отсюда найдем длину подвеса l и период колебаний T :

$$l = \frac{V_1^2}{2g(1 - \cos \alpha)} = \frac{V_1^2}{4g \sin^2 \frac{\alpha}{2}},$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{\pi V_1}{g \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi m V}{g \sin \frac{\alpha}{2} (m + M)}.$$

Задача 3

Каково должно быть сопротивление R , чтобы сила тока через амперметр с внутренним сопротивлением R_A при перемещении ключа K из положения 1 в положение 2 изменялась на величину ΔI . Схема питается от сети с напряжением U .



К задаче 3

Ответ: $R_1 = \frac{U}{U/R_A - \Delta I} - R_A = \frac{\Delta I R_A^2}{U - \Delta I R_A}$.

Решение

$$R + R_A = \frac{U}{I_0 - \Delta I} = \frac{U}{U/R_A - \Delta I},$$

где $I_0 = U/R_A$ - сила тока через амперметр в положении ключа 1.

Отсюда:

$$R_1 = \frac{U}{U/R_A - \Delta I} - R_A = \frac{\Delta I R_A^2}{U - \Delta I R_A}.$$

Задача 4

В цилиндре под поршнем находится некоторая масса газа при температуре T_1 , занимающая при давлении P объем V_1 . Какой стала температура T_2 газа, если при неизменном давлении его объем уменьшился настолько, что при этом над газом была совершена работа A ?

Ответ: $T_2 = T_1 \left(1 - \frac{A}{P V_1} \right)$.

Решение

Совершенная над газом работа A равна:

$$A = P(V_1 - V_2).$$

Отсюда найдем конечный объем газа V_2 :

$$V_2 = V_1 - \frac{A}{P}.$$

При изобарическом уменьшении объема температура понижается прямо пропорционально объему.

Поэтому конечная температура T_2 равна:

$$T_2 = T_1 \frac{V_2}{V_1} = T_1 \left(1 - \frac{A}{P V_1} \right).$$

Задача 5

На каком расстоянии f от объектива проекционного аппарата нужно поместить экран, чтобы изображение на экране было $k=50$ раз больше предмета на диапозитиве? Фокусное расстояние объектива $F=0,1$ м.

Ответ: $f=5,1$ м.

Решение

$$k = \frac{f}{d},$$

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}.$$

Отсюда:

$$f=(k+1)F=5,1 \text{ м.}$$

Вариант 2

Задача 1

Камень, брошенный с поверхности Земли под углом $\alpha=30^\circ$ к горизонту, дважды побывал на одной и той же высоте h спустя время $t_1=3$ с и $t_2=5$ с после начала движения. Найти начальную скорость камня V_0 . Ускорение свободного падения $g=10$ м/с².

Ответ: $V_0=80$ м/с.

Решение

Запишем выражение для вертикальной координаты тела, равной h , в два указанных момента времени:

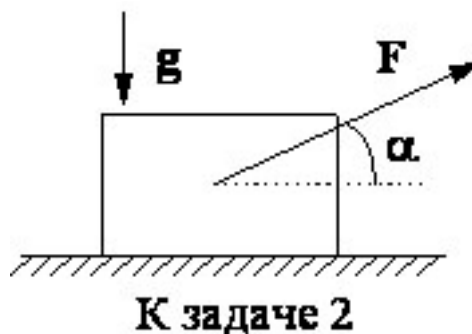
$$h = V_0 \sin \alpha t_1 - g t_1^2 / 2 = V_0 \sin \alpha t_2 - g t_2^2 / 2.$$

Из этой системы уравнений найдем V_0 :

$$V_0 = \frac{g(t_1 + t_2)}{2 \sin \alpha} = 80 \text{ м/с.}$$

Задача 2

Брусок массой $M=2$ кг движется вдоль горизонтальной плоскости под действием силы $F=20$ Н, направленной вверх под углом $\alpha=30^\circ$ к горизонту (см. рис.). Коэффициент трения скольжения бруска о плоскость $\mu=0,1$. Найти ускорение a бруска. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с².



Ответ: $a \approx 8,2$ м/с².

Решение

Уравнение движения бруска в проекции на вертикальную ось:

$$0 = N + F \sin \alpha - Mg,$$

откуда найдем силу нормальной реакции опоры:

$$N = Mg - F \sin \alpha.$$

Уравнение движения бруска в проекции на горизонтальную ось:

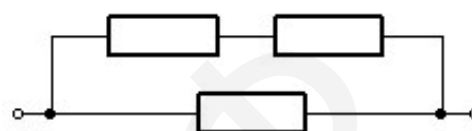
$$Ma = F \cos \alpha - F_{\text{тр}},$$

где $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu(Mg - F \sin \alpha)$.

Отсюда найдем ускорение a : $a = F(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) / M - \mu g \approx 8,2 \text{ м/с}^2$

Задача 3

Электроплитка имеет три секции с одинаковыми сопротивлениями. При параллельном их соединении вода закипает через $t_0 = 6$ мин. Через какое время t закипит вода



К задаче 3

такой же массы и такой же начальной температуры при соединении секций, показанном на рисунке?

Ответ: $t = 12$ мин.

Решение

Количество теплоты Q , необходимое для вскипания воды, должно быть одинаковым как при параллельном подключении секций, так и при подключении, показанном на рисунке. Поэтому:

$$Q = 3U^2 t_0 / R = (U^2 / R + 2(U/2)^2 / R)t,$$

где U — напряжение в электросети, U и $U/2$ — напряжения на секциях при подключении, показанном на рисунке.

Отсюда: $t = 2t_0 = 12$ мин.

Задача 4

Температура нагревателя идеальной тепловой машины Карно $T_1 = 390 \text{ К}$, а холодильника $T_2 = 300 \text{ К}$. Количество теплоты, получаемое машиной от нагревателя в каждом цикле, равно $Q_1 = 60 \text{ кДж}$. Вычислить количество теплоты Q_2 , отдаваемое холодильнику в каждом цикле.

Ответ: $Q_2 = 46,2 \text{ кДж}$.

Решение

Приравняем КПД, выраженные через количества теплоты и температуры:

$$1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Отсюда: $Q_2 = Q_1 \frac{T_2}{T_1} = 46,2 \text{ кДж}.$

Задача 5

В водоем на некоторую глубину помещен точечный источник белого света. Найти отношение радиусов кругов R_1 и R_2 на поверхности воды, в пределах которых возможен выход в воздух красных и фиолетовых лучей соответственно. Абсолютный показатель преломления воды для красных лучей $n_1=1,328$, для фиолетовых $n_2=1,335$; абсолютный показатель преломления воздуха считать равным единице.

Ответ: $\frac{R_1}{R_2} \approx 1,012.$

Решение

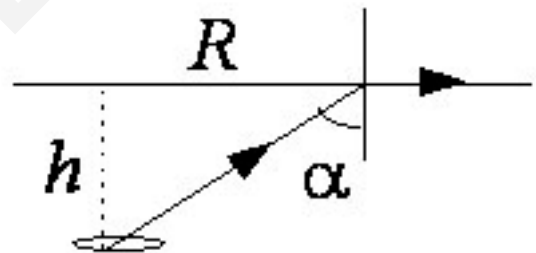
Луч, выход которого из воды в воздух невозможен, падает на поверхность под предельным углом α или под углом, превышающим предельный, (см. рис): $\sin \alpha = 1/n$.

Радиус круга, через который возможен выход лучей в воздух, равен:

$$R = h \operatorname{tg} \alpha = h / \sqrt{n^2 - 1}.$$

Отношение радиусов таких кругов для красного и фиолетового света равно:

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{n_2^2 - 1}{n_1^2 - 1}} \approx 1,012.$$



Вариант 3

Задача 1

За время $t_1=1$ с от начала движения тело прошло путь $S=10$ м, при этом его скорость, не меняя направления, увеличилась в 4 раза. Найти ускорение тела.

Ответ: $a=12$ м/с².

Решение

Кинематические уравнения для пути и скорости тела в зависимости от времени:

$$S=V_0t_1+at_1^2/2, \quad 4V_0=V_0+at_1.$$

Отсюда: $V_0=at_1/3, \quad a=6S/5t_1^2=12$ м/с².

Задача 2

Открытую вертикальную стеклянную трубку длиной $L=1000$ мм наполовину погружают в ртуть. Затем верхний конец трубки закрывают пальцем и вынимают. Какой длины h столбик ртути останется в трубке? Атмосферное давление равно $p_0=750$ мм рт.ст. $\approx 100,0$ кПа. Температура постоянная. Плотность ртути $\rho=13600$ кг/м³, $g=9,8$ м/с².

Ответ: $h=250$ мм.

Решение

Начальное давление воздуха в трубке равно p_0 , а после подъема трубки из ртути оно станет равным $p=p_0-\rho gh$ (с учетом того обстоятельства, что давление у нижнего конца трубки складывается из давления столбика воздуха p и столбика ртути ρgh и равно при этом p_0). Начальная высота столбика воздуха в трубке равна $L/2$, а конечная высота равна $(L-h)$.

По закону Бойля-Мариотта для воздуха в трубке имеем:

$$p_0L/2=(p_0-\rho gh)(L-h).$$

Это квадратное уравнение относительно неизвестной величины h :

$$\rho g h^2 - (\rho g L + p_0)h + p_0 L / 2 = 0.$$

Отсюда:

$$h = \frac{\rho g L + p_0 \pm \sqrt{(\rho g L + p_0)^2 - 2\rho g p_0 L}}{2\rho g} = \frac{\rho g L + p_0 \pm \sqrt{(\rho g L)^2 + p_0^2}}{2\rho g} =$$

$$= \frac{L + (p_0 / \rho g) \pm \sqrt{L^2 + (p_0 / \rho g)^2}}{2} \Rightarrow h = 250 \text{ мм}$$

(Корень квадратного уравнения, соответствующий знаку плюс в последнем выражении, не имеет физического смысла, т.к. при этом $h > L$).

Задача 3

Три точечных заряда q_1 , q_2 и q_3 расположены в вакууме в вершинах равностороннего треугольника с длиной стороны $l = 3$ см, причем $q_1 = q_2 = 8$ нКл, $q_3 = 1$ нКл (см. рис.). С какой результирующей силой F (по модулю) заряды q_1 и q_2 действуют на заряд q_3 ? $k = 1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

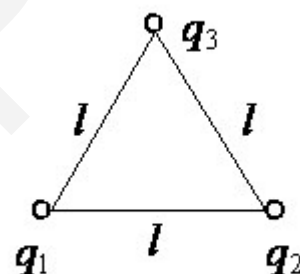
Ответ: $F \approx 1,39 \cdot 10^{-4}$ Н.

Решение

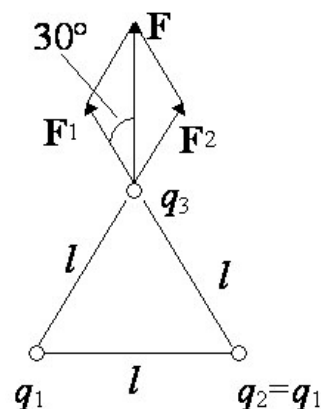
Действующая на заряд q_3 сила равна (см. рис.):

$$F = F_1 \cos 30^\circ + F_2 \cos 30^\circ =$$

$$= 2F_1 \cos 30^\circ = 2 \frac{kq_1 q_3}{l^2} \cos 30^\circ \approx 1,39 \cdot 10^{-4} \text{ Н.}$$

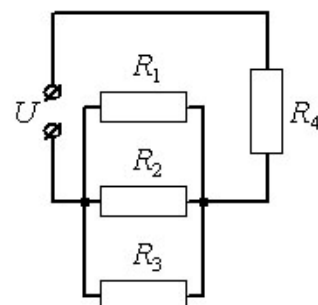


К задаче 3



Задача 4

В цепи, изображенной на рисунке, сопротивления равны: $R_1 = 8$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 4$ Ом, $R_4 = 2$ Ом. На вход цепи подано напряжение $U = 36$ В. Найти разность потенциалов U_4 на концах проводника с сопротивлением R_4 .



К задаче 4

Ответ: $U_4 = 20$ В, где $I = U/R = 10$ А — полный ток в цепи,

$R = 3,6$ Ом — полное сопротивление цепи.

Решение

Сопротивление $R_{\text{экв}}$ участка цепи, содержащего сопротивления R_1 , R_2 , R_3 , найдем из соотношения:

$$\frac{1}{R_{\text{экв}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2}.$$

Отсюда:

$$R_{\text{экв}} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = 1,6 \text{ Ом}.$$

Полное сопротивление цепи R равно:

$$R = R_{\text{экв}} + R_4 = 3,6 \text{ Ом}.$$

Ток, текущий через сопротивление R_3 , равен:

$$I = U/R = 10 \text{ А}.$$

Падение напряжение на этом сопротивлении равно:

$$U_4 = IR_4 = 20 \text{ В}.$$

Задача 5

Расстояние от предмета до рассеивающей линзы равно $l_1 = 20$ см, а от линзы до изображения $l_2 = 10$ см. Найти фокусное расстояние линзы F .

Ответ: $F = -0,2$ м.

Решение

Изображение в рассеивающей линзе мнимое. Формула линзы дает:

$$\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2} = \frac{1}{F},$$

Отсюда:

$$F = l_1 l_2 / (l_2 - l_1) = -20 \text{ см} = -0,2 \text{ м}.$$

ВАРИАНТЫ ЭКЗАМЕНА НА МАТЕМАТИЧЕСКОМ ПОТОКЕ

Вариант 1

Задача 1

Два спутника движутся вокруг Земли по круговым орбитам, лежащим в одной плоскости, со скоростями $V_1 = 7,8$ км/с и $V_2 = 7,6$ км/с. Пользуясь только данными, приведенными в условии задачи, определить минимальное возможное расстояние l между спутниками во время их движения. Радиус Земли принять равным $R_3 = 6400$ км. Ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 9,8$ м/с².

Ответ: $l \approx 360$ км.

Решение

Уравнение движения первого спутника по круговой орбите радиуса R_1 :

$$m_1 V_1^2 / R_1 = G M_3 m_1 / R_1^2,$$

где m_1 — масса спутника, M_3 — масса Земли, G — гравитационная постоянная.

Отсюда найдем радиус орбиты R_1 :

$$R_1 = G M_3 / V_1^2.$$

Аналогично получим выражение для радиуса орбиты второго спутника:

$$R_2 = G M_3 / V_2^2.$$

Минимальное расстояние между спутниками равно:

$$l = R_2 - R_1 = G M_3 (1/V_2^2 - 1/V_1^2) = (G M_3 / R_3^2) R_3^2 (1/V_2^2 - 1/V_1^2) = g R_3^2 (1/V_2^2 - 1/V_1^2) \approx 360 \text{ км.}$$

Задача 2

При выстреле из пушки, находящейся на гладкой горизонтальной поверхности, вылетает снаряд под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. За счет отдачи пушка откатывается назад со скоростью $V = 2$ м/с. Масса пушки без снаряда равна

$M=500$ кг. Найти величину импульса p системы, состоящей из пушки и снаряда, сразу после выстрела.

Ответ: $p \approx 578$ кг·м/с.

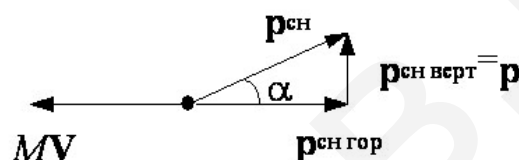
Решение

Горизонтальную составляющую импульса снаряда $p_{\text{сн гор}}$ найдем из закона сохранения импульса системы пушка+снаряд, выполняющегося только для горизонтальной оси:

$$0 = -MV + p_{\text{сн гор}},$$

$$p_{\text{сн гор}} = MV.$$

Вертикальная составляющая импульса снаряда $p_{\text{сн верт}}$ равна суммарному импульсу p системы пушка+снаряд сразу после выстрела (см. рис):



$$p = p_{\text{сн верт}} = p_{\text{сн гор}} \operatorname{tg} \alpha = MV \operatorname{tg} \alpha = 1000 / \sqrt{3} \approx 578 \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Задача 3

Электрон через отверстие в обкладке влетает внутрь плоского конденсатора и, двигаясь вдоль линии напряженности электрического поля, полностью теряет свою скорость, пройдя путь $l=0,016$ м. На каком расстоянии x от обкладки электрон потеряет скорость, если его начальную скорость уменьшить в $n=2$ раза, а разность потенциалов обкладок конденсатора увеличить в такое же число раз? Действием силы тяжести пренебречь.

Ответ: $x=0,002$ м.

Решение

По закону сохранения энергии в случае полной остановки электрона на пути l при его движении в электрическом поле вдоль силовой линии имеет место соотношение:

$$mV^2/2=eEl, \quad (1)$$

где m , e и V — масса, заряд и начальная скорость электрона, E — напряженность поля, El — разность потенциалов начальной и конечной точек движения.

Аналогичное соотношение имеет место при уменьшении начальной скорости в n раз и увеличении разности потенциалов конденсатора, а следовательно, и напряженности поля E также в n раз:

$$m(V/n)^2/2=e(nE)x, \quad (2)$$

где x — путь до остановки.

Из (1) и (2) найдем x :

$$x=l/n^3=0,002 \text{ м.}$$

Задача 4

В калориметре смешивают жидкость при температуре $t_1=20^\circ\text{C}$ с жидкостью при температуре $t_2=80^\circ\text{C}$ с вдвое большей массой. Удельные теплоемкости жидкостей одинаковы. Найти температуру смеси t .

Ответ: $t=60^\circ\text{C}$.

Решение

Уравнение теплового баланса имеет вид:

$$cm(t-t_1)=c(2m)(t_2-t),$$

где m — масса первой жидкости, c — удельная теплоемкость.

Отсюда:

$$t=(t_1+2t_2)/3=60^\circ\text{C}.$$

Задача 5

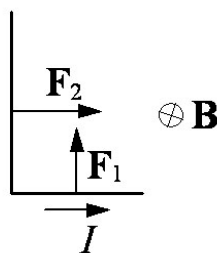
Тонкий стержень длиной $L=70$ см согнули под прямым углом и положили на горизонтальную поверхность. Длина одной из частей стержня, образующих прямой угол, равна $L_1=30$ см. В пространстве имеется однородное вертикальное магнитное поле с индукцией $B=4$ мТл. Найти величину ре-

зультатирующей силы Ампера F , действующей на стержень, если по нему пропускать ток $I=10$ А.

Ответ: $F=2 \cdot 10^{-2}$ Н.

Решение

Обозначим через L_2 длину второй стороны угла, образованного двумя частями стержня ($L_2=L-L_1=40$ см). На две части стержня действуют силы Ампера $F_1=IL_1B$ и $F_2=IL_2B=I(L-L_1)B$, перпендикулярные друг к другу (см. рис.).



Суммарная сила Ампера равна:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = IB\sqrt{L_1^2 + L_2^2} = IB\sqrt{L_1^2 + (L - L_1)^2} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ Н.}$$

Вариант 2

Задача 1

Двигаясь по окружности с постоянной скоростью $V=5$ м/с, небольшое тело за время $t=0,1$ с переместилось по дуге с углом раствора $\alpha=0,25$ рад. Найти радиус R окружности, по которой двигалось тело.

Ответ: $R=2$ м.

Решение

Угловая скорость тела равна: $\omega=\alpha/t$.

Связь между линейной V и угловой скоростью ω : $V=\omega R$.

Отсюда: $R=V/\omega=Vt/\alpha=2$ м.

Задача 2

На гладкой горизонтальной плоскости находятся два гладких шара одинакового размера, один из которых движется со скоростью V_1 , а другой покоится ($V_2=0$). Масса движущегося шара в k раз больше массы покоящегося. Найти скорость V_1' , которую приобретет шар большей массы после упругого центрального соударения с другим шаром.

Ответ: $V_1' = \frac{k-1}{k+1} V_1$.

Решение

Обозначим через m_1 , m_2 массы шаров ($m_1=km_2$), V_1' и V_2' — их скорости после соударения. Предположим, что после соударения оба шара движутся в том направлении, в котором двигался налетающий шар. Законы сохранения импульса и энергии имеют вид:

$$m_1 V_1 = m_1 V_1' + m_2 V_2',$$

$$m_1 V_1^2/2 = m_1 V_1'^2/2 + m_2 V_2'^2/2,$$

Преобразуем полученную систему уравнений.

$$m_1(V_1 - V_1') = m_2 V_2',$$

$$m_1(V_1 - V_1')(V_1 + V_1') = m_2 V_2'^2.$$

Поделив второе уравнение на первое, упростим систему:

$$V_1 + V_1' = V_2',$$

$$m_1(V_1 - V_1') = m_2 V_2'.$$

Отсюда легко найти V_1' и V_2' :

$$V_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_1 = \frac{k - 1}{k + 1} V_1,$$

$$V_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_1 = \frac{2k}{k + 1} V_1.$$

Задача 3

Напряженность поля в пространстве между пластинами плоского воздушного конденсатора с площадью пластин $S=400 \text{ см}^2$, подключенного к источнику тока, равна $E=2000 \text{ В/м}$. Емкость конденсатора $C=35 \text{ пФ}$. Чему равна разность потенциалов U на пластинах? Электрическая постоянная $\epsilon_0=0,885 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м}$.

Ответ: $U \approx 20 \text{ В}$.

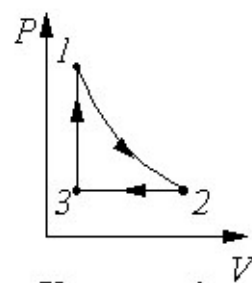
Решение

Из формулы емкости плоского конденсатора $C=\epsilon_0 S/d$ выразим расстояние d между пластинами. Затем найдем разность потенциалов U :

$$U=Ed=E\epsilon_0 S/C \approx 20 \text{ В}.$$

Задача 4

Найти работу A , которую совершает один моль гелия ($\nu=1 \text{ моль}$) в цикле $1-2-3-1$, состоящем из процессов адиабатического расширения $1-2$, изобарического сжатия $2-3$ и изохорического нагревания $3-1$. В адиабатическом процессе $1-2$ температура газа уменьшается на величину $|\Delta T|$. В изобарическом процессе от газа отвели количество теплоты Q .



К задаче 4

Ответ: $A = \frac{3}{2} \nu R |\Delta T| - \frac{2}{5} Q$.

Решение

Найдем работу газа в процессе 2–3. По первому закону термодинамики имеем:

$$-Q = A_{23} + \nu C_V (T_3 - T_2) = A_{23} + \nu (3/2) R (T_3 - T_2). \quad (1)$$

Из определения работы газа и уравнения Менделеева-Клапейрона следует:

$$A_{23} = P_2 (V_3 - V_2) = \nu R (T_3 - T_2). \quad (2)$$

Подставив $(T_3 - T_2)$, выраженное из (2), в равенство (1), найдем затем A_{23} :

$$A_{23} = -2Q/5. \quad (3)$$

Найдем работу в процессе 1–2. По первому закону термодинамики для адиабатического процесса имеем:

$$0 = A_{12} + \nu C_V (T_2 - T_1) = A_{12} + \nu (3/2) R (T_2 - T_1) = A_{12} - \nu (3/2) R |\Delta T|, \\ A_{12} = \nu (3/2) R |\Delta T|. \quad (4)$$

Работа газа в цикле 1–2–3–1 равна сумме работ в процессах 1–2(4) и 2–3 (3):

$$A = \frac{3}{2} \nu R |\Delta T| - \frac{2}{5} Q.$$

Задача 5

Точечный источник света помещен на главной оптической оси собирающей линзы на расстоянии от линзы, равном ее двойному фокусному расстоянию. Фокусное расстояние $F=1$ м. На каком расстоянии f от линзы находится изображение источника?

Ответ: $f=2$ м.

Решение

С использованием формулы тонкой линзы получим: $\frac{1}{2F} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$.

Отсюда: $f=2F=2$ м.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Мельников И.И., Сергеев И.Н. Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах. Москва: УНЦ ДО, НТЦ «Университетский», Универ-Пресс, 2007.
2. Сборник задач по математике для поступающих в вузы (под ред. М.И.Сканави). Шестое издание. Любое издательство, любой год.
3. Ткачук В.В. Математика абитуриенту. М.:МЦМНО, 2007.
4. Мякишев Б.Я., Буховцев Б.Б., Сотский Г.Н.. Физика 10. М.: «Просвещение», 2007.
5. Мякишев Б.Я., Буховцев Б.Б., Чаругин В.М. Физика 11. М.: «Просвещение», 2008.
6. Глазунов А.Т., Кабардин О.Ф., Малинин А.Н., и др., под ред. Пинского А.А., Кабардина О.Ф. Физика 10. М.: «Просвещение», 2005.
7. Глазунов А.Т., Кабардин О.Ф., Малинин А.Н., и др., под ред. Пинского А.А.,Кабардина О.Ф. Физика 11. М.: «Просвещение», 2007.
8. Касьянов В.А. Физика 10. М.: «Дрофа», 2003.
9. Касьянов В.А. Физика 11. М.: «Дрофа», 2003.
10. Рымкевич А.П. Физика. Задачник. 10-11 классы. М.: «Дрофа», 2002.