

В.В.Воробьев

Практикум для подготовки к ЕГЭ по математике

| для учащихся 10-11 классов

|

«Практикум для подготовки к ЕГЭ по математике»
практические рекомендации
/ для учащихся 10-11 классов / В.В.Воробьев.-:
Изд-во _____, 2014. – 61с.

© Воробьев В.В., 2014

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Обратные тригонометрические функции	5
2. Тригонометрические уравнения.	10
3. Системы комбинированных уравнений	20
4. Геометрический смысл производной	24
5. Комбинированные уравнения	29
6. Тренировочные варианты №1-№7	37
Ответы	58
Список литературы и источники информации	59

Введение

Результаты ЕГЭ по математике и анализ ошибок показывают, что многие учащиеся даже в самых простых заданиях допускают просто «нелепые» ошибки, а при выполнении заданий из группы С, как правило, действуют по определенному алгоритму. Если же задания не соответствуют этому алгоритму, то выпускники не выполняют их совсем. Причин здесь много, но главная заключается, прежде всего, в **поверхностных знаниях по математике**, так как при подготовке к экзамену в основном рассматриваются только однотипные задания (по аналогии с демонстрационным вариантом), обучающимся предлагаются только стандартные методы и приемы решений. Соответственно отработка умений и навыков решения доводится до автоматизма, а потому, как правило, многие ученики не до конца читают условие задач, не пытаются найти более рациональный способ их решения.

Настоящий «Практикум» составлен с **целью** обеспечения качественной подготовки выпускников к ЕГЭ по математике, акцент при этом сделан на глубокую проработку отдельных тем.

Приобретение обучающимися знаний в области рациональных методов выполнения тестовых заданий, безусловно, будет способствовать успешной государственной итоговой аттестации.

Представленный сборник можно также использовать как одно из эффективных учебных средств при организации развивающего обучения.

Особенность данного «Практикума»:

- задачи составлены автором так, что можно выполнять несколькими способами один из которых более рациональный;
- «Практикум» можно использовать для активизации познавательной деятельности школьников, а также для различных форм организации самостоятельной работы и др.

Тема: «Обратные тригонометрические функции»

1. Решить уравнение

$$7 \arcsin(2x+1) + \arccos(2x+1) = \frac{3\pi}{2}$$

Решение.

$$7 \arcsin(2x+1) + \arccos(2x+1) = \frac{3\pi}{2} \quad \text{ОДЗ: } -1 \leq 2x+1 \leq 1; \\ -1 \leq x \leq 0.$$

Использовали
свойство:

Запомни!

$$1) \arcsin t + \arccos t = \frac{\pi}{2}, \\ \text{если } -1 \leq t \leq 1; \\ 2) \sin(\arcsin t) = t, \\ \text{если } -1 \leq t \leq 1$$

$$6 \arcsin(2x+1) + (\arcsin(2x+1) + \arccos(2x+1)) = \frac{3\pi}{2}$$

$$6 \arcsin(2x+1) + 0,5\pi = 1,5\pi;$$

$$\arcsin(2x+1) = \frac{\pi}{6}; \quad \sin(\arcsin(2x+1)) = \sin \frac{\pi}{6};$$

$$2x+1 = 0,5; \quad x = -0,25; \quad -0,25 \in [-1; 0];$$

Ответ: $-0,25$.

2. Решить уравнение

$$6 \arccos^2(0,4x) - \pi \arccos(0,4x) - \pi^2 = 0$$

Решение.

$$6 \arccos^2(0,4x) - \pi \arccos(0,4x) - \pi^2 = 0; \quad \text{ОДЗ: } -1 \leq 0,4x \leq 1; \\ -2,5 \leq x \leq 2,5.$$

$$\text{Пусть } \arccos(0,4x) = t; \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

$$6t^2 - \pi t - \pi^2 = 0;$$

$$t_1 = -\frac{\pi}{3}, \quad -\frac{\pi}{3} \notin [0; \pi]; \quad t_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} \in [0; \pi];$$

$$\text{если } t = \frac{\pi}{2}, \text{ то } \arccos(0,4x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(\arccos(0,4x)) = \cos \frac{\pi}{2}; \quad 0,4x = 0; \quad x = 0; \quad 0 \in [-2,5; 2,5]$$

Ответ: 0.

3. Вычислить

$$\frac{16}{\pi} \left(\arctg \frac{1}{4} + \arctg \frac{3}{5} \right)$$

Решение.

Положим, что

$$\arctg \frac{1}{4} = \alpha; \quad \arctg \frac{3}{5} = \beta. \text{ Тогда получим равенство}$$

$$\arctg \frac{1}{4} + \arctg \frac{3}{5} = \alpha + \beta;$$

$$\tg \left(\arctg \frac{1}{4} + \arctg \frac{3}{5} \right) = \tg(\alpha + \beta);$$

$$\frac{\tg \left(\arctg \frac{1}{4} \right) + \tg \left(\arctg \frac{3}{5} \right)}{1 - \tg \left(\arctg \frac{1}{4} \right) \cdot \tg \left(\arctg \frac{3}{5} \right)} = \tg(\alpha + \beta);$$

$$\frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{5}}{1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5}} = \tg(\alpha + \beta); \quad \tg(\alpha + \beta) = 1; \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно,

Использовали **Запомни!**
свойство:

$$\tg(\alpha + \beta) = \frac{\tg \alpha + \tg \beta}{1 - \tg \alpha \cdot \tg \beta}$$

$$(\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi, n \in \mathbb{Z}).$$

$$\frac{16}{\pi} \left(\arctg \frac{1}{4} + \arctg \frac{3}{5} \right) = \frac{16}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = 4$$

Ответ: 4.

4. Найти наименьшее значение функции

$$y = (\operatorname{arctg}(x^2 - 2x) + 0,5)^2 - (\operatorname{arctg}(x^2 - 2x) + 0,5) - 0,75,$$

если $\sqrt{x^2 + x + 0,25} \leq 0,5$

Решение.

1) $\sqrt{x^2 - x + 0,25} \leq 0,5;$

$$\sqrt{(x - 0,5)^2} \leq 0,5;$$

$$|x - 0,5| \leq 0,5$$

$$-0,5 \leq x - 0,5 \leq 0,5$$

$$0 \leq x \leq 1$$

2) $y = (\operatorname{arctg}(x^2 - 2x) + 0,5)^2 - (\operatorname{arctg}(x^2 - 2x) + 0,5) - 0,75;$

$$y = (\operatorname{arctg}(x^2 - 2x) + 0,5)^2 - 2 \cdot 0,5(\operatorname{arctg}(x^2 - 2x) + 0,5) + 0,25 - 0,25 - 0,75;$$

$$y = (\operatorname{arctg}(x^2 - 2x) + 0,5 - 0,5)^2 - 1;$$

$$y = ((\operatorname{arctg}(x^2 - 2x))^2 - 1, \text{ при } 0 \leq x \leq 1.$$

3) $y(0) = ((\operatorname{arctg}(0^2 - 2 \cdot 0))^2 - 1, y(0) = -1;$

$$y(1) = ((\operatorname{arctg}(1^2 - 2 \cdot 1))^2 - 1, y(1) = \frac{\pi^2}{16} - 1;$$

$$y' = ((\operatorname{arctg}(x^2 - 2x))^2 - 1)'; y' = \frac{(2\operatorname{arctg}(x^2 - 2x)) \cdot (2x - 2)}{1 + (x^2 - 2x)^2};$$

$$y' = 0, \text{ если } \frac{(2\operatorname{arctg}(x^2 - 2x)) \cdot (2x - 2)}{1 + (x^2 - 2x)^2} = 0,$$

$$\begin{cases} \operatorname{arctg}(x^2 - 2x) = 0 \\ 2x - 2 = 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; x = 2 \\ x = 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad x = 0, x = 1;$$

$x = 0, x = 1; x = 2$ – критические точки, $0 \in [0;1], 1 \in [0;1], 2 \notin [0;1]$

Наименьшее значение функции выбираем из двух $y(0)$ и $y(1)$

$y(1) > y(0)$ т.к. $\frac{\pi^2}{16} - 1 > -1$, следовательно, наименьшее значение функции $y = (\arctg(x^2 - 2x) + 0,5)^2 - (\arctg(x^2 - 2x) + 0,5) - 0,75$ равно -1 при $x = 0$, если $x \in [0;1]$.

Ответ: $y = -1$ -наименьшее значение функции при $x = 0$, если $x \in [0;1]$.

5. Найти все значения x , при каждом из которых выражения

$$\arccctg \frac{4}{2x-1} + \arccctg \frac{3}{2x-1} + \arccctg \frac{2}{2x-1} \text{ и } \arccctg 4 + \frac{\pi}{4} \text{ принимают}$$

равные значения, если $0 < \arccctg \frac{1}{2x-1} < \frac{\pi}{2}$

Решение.

Если $0 < \arccctg \frac{1}{2x-1} < \frac{\pi}{2}$, то

$$\frac{1}{2x-1} > 0; \quad x > 0,5$$

$$\arccctg \frac{2x-1}{4} + \arccctg \frac{2x-1}{3} + \arccctg \frac{2x-1}{2} = \arccctg \frac{1}{4} + \frac{\pi}{4};$$

$$\operatorname{tg}\left(\arccctg\left(\frac{2x-1}{4}\right) + \arccctg\left(\frac{2x-1}{3}\right) + \arccctg\frac{2x-1}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\arccctg\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\arccctg \frac{2x-1}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(\arccctg \frac{2x-1}{3} + \arccctg \frac{2x-1}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\arccctg \frac{2x-1}{4}\right) \operatorname{tg}\left(\arccctg \frac{2x-1}{3} + \arccctg \frac{2x-1}{2}\right)} = \operatorname{tg}\left(\arccctg\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{\frac{2x-1}{4} + \frac{\frac{2x-1}{3} + \frac{2x-1}{2}}{1 - \frac{2x-1}{3} \cdot \frac{2x-1}{2}}}{1 - \frac{2x-1}{4} \cdot \frac{\frac{2x-1}{3} + \frac{2x-1}{2}}{1 - \frac{2x-1}{3} \cdot \frac{2x-1}{2}}} = \frac{\frac{1}{4} + 1}{1 - \frac{1}{4} \cdot 1} \text{ положим, что } 2x-1 = t$$

тогда получим уравнение

$$\frac{\frac{t}{4} + \frac{\frac{t}{3} + \frac{t}{2}}{1 - \frac{t}{3} \cdot \frac{t}{2}}}{1 - \frac{t}{4} \cdot \frac{\frac{t}{3} + \frac{t}{2}}{1 - \frac{t}{3} \cdot \frac{t}{2}}} = \frac{\frac{1}{4} + 1}{1 - \frac{1}{4} \cdot 1};$$

$$\frac{\frac{t}{4} + \frac{5t}{6-t^2}}{1 - \frac{t}{4} \cdot \frac{5t}{6-t^2}} = \frac{5}{3}; \quad \frac{6t - t^3 + 20t}{24 - 4t^2 - 5t^2} = \frac{5}{3} \quad (t \neq \pm\sqrt{6})$$

$$\frac{26t - t^3}{24 - 9t^2} = \frac{5}{3}; \quad -3t^3 + 78t = 120 - 45t^2; \quad t \neq \pm\sqrt{6}, t \neq \sqrt{\frac{8}{3}}$$

$$-3t^3 + 45t^2 + 78t - 120 = 0;$$

$$t^3 - 15t^2 - 26t + 40 = 0$$

$$(t^3 - t^2) + (-14t^2 + 14t) + (-40t + 40) = 0$$

$$t^2(t-1) - 14t(t-1) - 40(t-1) = 0$$

$$(t-1)(t^2 - 14t - 40) = 0$$

$$t_1 = 1; t_2 = 7 + \sqrt{89} \text{ удовлетворяет } t > 0, t \neq \pm\sqrt{6}, t \neq \sqrt{\frac{8}{3}}$$

$$t_3 = 7 - \sqrt{89} \text{ не удовлетворяет } (t > 0)$$

Если $t = 1$, то $2x - 1 = 1; x = 1$ удовлетворяет неравенству $x > 0,5$.

$$\text{Если } t = 7 + \sqrt{89}, \text{ то } 2x - 1 = 7 + \sqrt{89}; x = \frac{8 + \sqrt{89}}{2}$$

$$x = \frac{8 + \sqrt{89}}{2} \text{ удовлетворяет неравенству } x > 0,5.$$

Следовательно, если $x = 1$ или $x = \frac{8 + \sqrt{89}}{2}$, то выражения

$$\operatorname{arccctg} \frac{4}{2x-1} + \operatorname{arccctg} \frac{3}{2x-1} + \operatorname{arccctg} \frac{2}{2x-1} \text{ и } \operatorname{arccctg} 4 + \frac{\pi}{4} \text{ принимают}$$

равные значения.

$$\text{Ответ: } 1; \frac{8 + \sqrt{89}}{2}.$$

Тема: «Тригонометрические уравнения»

1. Решить уравнение

$$\sqrt{\sin^2 x + \sqrt{3} \sin x + 1} = \cos x$$

Решение.

Данное уравнение $\sqrt{\sin^2 x + \sqrt{3} \sin x + 1} = \cos x$ равносильно смешанной системе:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x + 1 = \cos^2 x \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x + 1 = 1 - \sin^2 x \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x(2 \sin x + \sqrt{3}) = 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Уравнение системы равносильно совокупности двух уравнений:

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Первое уравнение $\sin x = 0$ имеет решения:

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Числа $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ не удовлетворяют условию $\cos x \geq 0$.

Второе уравнение $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ имеет два множества решений

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Числа $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ не удовлетворяют условию $\cos x \geq 0$.

$$\text{Ответ: } 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{0,5 \cos 2x + \sqrt{2} \cos x + 1,5} = -\sin x$$

Решение.

Данное уравнение $\sqrt{0,5(2 \cos^2 x - 1) + \sqrt{2} \cos x + 1,5} = -\sin x$

равносильно смешанной системе:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \cos^2 x + \sqrt{2} \cos x + 1 = \sin^2 x \\ \sin x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x + \sqrt{2} \cos x + 1 = 1 - \cos^2 x \\ \sin x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x(2 \cos x + \sqrt{2}) = 0 \\ \sin x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Уравнение системы равносильно совокупности двух уравнений

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Первое уравнение $\cos x = 0$ имеет две серии решений:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Числа $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ не удовлетворяют условию $\sin x \leq 0$.

Второе уравнение $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ имеет решение:

$$x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$$

Числа $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$ не удовлетворяют условию $\sin x \leq 0$.

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$$

3. Решить уравнение

$$\frac{\sin 2x + 3\cos x + 3\sin x + 3}{\sqrt{-\sin x}} = 0$$

Решение.

Уравнение $\frac{\sin 2x + 3\cos x + 3\sin x + 3}{\sqrt{-\sin x}} = 0$ равносильно смешанной системе:

$$\begin{cases} 2\sin x \cos x + 3(\sin x + \cos x) + \sin^2 x + \cos^2 x + 2 = 0 \\ \sin x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x + \cos x)^2 + 3(\sin x + \cos x) + 2 = 0 \\ \sin x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \sin x + \cos x = -1 \\ \sin x + \cos x = -2 \end{cases} \\ \sin x < 0 \end{cases}$$

Уравнение $\sin x + \cos x = -2$ не имеет решений, так как

$$-\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = -1 \\ \sin x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z \\ x + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z \end{cases} \\ \sin x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \\ x = -\pi + 2\pi n, n \in Z \end{cases} \\ \sin x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Числа $-\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ не удовлетворяют условию $\sin x < 0$.

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

4. Решить уравнение

$$\frac{\sin 2x + 5 \cos x + 5 \sin x + 5}{\cos x + 1} = 0$$

Решение.

Уравнение $\frac{\sin 2x + 5 \cos x + 5 \sin x + 5}{\cos x + 1} = 0$ равносильно смешанной системе

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2 \sin x \cos x + 5(\sin x + \cos x) + \sin^2 x + \cos^2 x + 4 = 0 \\ \cos x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x + \cos x)^2 + 5(\sin x + \cos x) + 4 = 0 \\ \cos x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \sin x + \cos x = -1 \\ \sin x + \cos x = -4 \end{cases} \\ \cos x \neq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Уравнение $\sin x + \cos x = -4$ не имеет решений, так как $-\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = -1 \\ \cos x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \cos x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \cos x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Числа $-\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ не удовлетворяют условию $\cos x \neq -1$.

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

5. Решить уравнение

$$(3\cos 2x + \sin 2x - 3)(-\cos x)^{-0,5} = 0$$

Решение.

Уравнение $(3\cos 2x + \sin 2x - 3)(-\cos x)^{-0,5} = 0$ равносильно смешанной системе

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{3 - 3tg^2 x}{1 + tg^2 x} + \frac{2tgx}{1 + tg^2 x} - 3 = 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 3tg^2 x + 2tgx - 3 - 3tg^2 x = 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -6tg^2 x + 2tgx = 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2tgx(3tgx - 1) = 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} tgx = 0 \\ tgx = \frac{1}{3} \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \arctg \frac{1}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\pi + \arctg \frac{1}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \end{cases} \end{aligned}$$

Числа $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ и $\arctg \frac{1}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ не удовлетворяют условию $\cos x < 0$.

$$\text{Ответ: } -\pi + \arctg \frac{1}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

6. Решить уравнение

$$(\cos 2x - 4\sin 2x - 4)(\sin x)^{-0,5} = 0$$

Решение. Если $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x > 0 \end{cases}$, то числа $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ не являются

решением данного уравнения. Перепишем уравнение $\cos 2x - 4\sin 2x - 4 = 0$ в виде

$2\cos^2 x - 8\sin x \cos x - 5 = 0$, учитывая, что $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, тогда

если $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ имеем $(2 \cdot 0 - 8 \cdot 1 \cdot 0 - 5 = -5; -5 \neq 0)$.

Уравнение $(\cos 2x - 4\sin 2x - 4)(\sin x)^{-0,5} = 0$ равносильно смешанной системе

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} - \frac{8 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} - 4 = 0 \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \operatorname{tg}^2 x - 8 \operatorname{tg} x - 4 - 4 \operatorname{tg}^2 x = 0 \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \operatorname{tg}^2 x - 8 \operatorname{tg} x - 3 = 0 \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \operatorname{tg}^2 x + 8 \operatorname{tg} x + 3 = 0 \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \operatorname{tg} x = -1 \\ \operatorname{tg} x = -\frac{3}{5} \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\operatorname{arctg} \frac{3}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \operatorname{arctg} \frac{3}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \sin x > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Числа $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ и $-\operatorname{arctg} \frac{3}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ не удовлетворяют условию $\sin x > 0$.

Ответ: $\pi - \operatorname{arctg} \frac{3}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

7. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}^2 \frac{3x}{2} - \operatorname{tg} \frac{3x}{2} - 2 = \sqrt{\cos 4x + 4 \sin x - 5}$$

Решение. Правая часть данного уравнения определена при условии, что

$$\cos 4x + 4 \sin x - 5 \geq 0 \quad (1)$$

Так как $-1 \leq \cos 4x \leq 1$; $-4 \leq 4 \sin x \leq 4$, то неравенство (1)

имеет решение тогда и только тогда, когда $\begin{cases} \cos 4x = 1 \\ 4 \sin x = 4 \end{cases}$, откуда имеем:

$$\begin{cases} \cos 4x = 1 \\ \sin x = 1 \end{cases}. \text{ Числа } \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \text{ являются решением}$$

второго уравнения и удовлетворяют первому уравнению так как

$$\cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{2} + 4 \cdot 2\pi n\right) = \cos(2\pi + 8\pi n) = 1; (n \in Z).$$

Таким образом, если $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$, то правая часть данного уравнения равна нулю. Найдем значения левой части при

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\right) - 2 = \\ & = \operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{4} + 3\pi n\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} + 3\pi n\right) - 2 = \\ & = (-1)^2 - (-1) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, если $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$, то исходное уравнение обращается в верное равенство $0=0$.

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

8. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg}^2 x - 3\operatorname{ctg} x - 4 = \sqrt{4 \cos 8x - 5 \sin 2x - 9}$$

Решение. Правая часть данного уравнения определена (учитывая свойство арифметического квадратного корня) при условии, что

$$4 \cos 8x - 5 \sin 2x - 9 \geq 0. \quad (2)$$

Так как $-4 \leq 4 \cos 8x \leq 4$; $-5 \leq -5 \sin 2x \leq 5$, то неравенство (2)

имеет решение тогда и только тогда, когда $\begin{cases} 4 \cos 8x = 4 \\ -5 \sin 2x = 5 \end{cases}$; отсюда имеем

систему уравнений $\begin{cases} \cos 8x = 1 \\ \sin 2x = -1 \end{cases}$. Числа $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ являются решением

второго уравнения и удовлетворяют первому уравнению так как

$$\cos\left(8 \cdot \left(-\frac{\pi}{4} + \pi n\right)\right) = \cos(-2\pi + 8\pi n) = 1.$$

Таким образом, если $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, то правая часть данного уравнения равна нулю. Найдём значения левой части исходного уравнения

при $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

$$\begin{aligned} & \operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n\right) - 4\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n\right) - 5 = \\ & = (-1)^2 - 3(-1) - 4 = 1 + 3 - 4 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, если $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, то исходное уравнение обращается в верное равенство $0=0$.

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

9. Решить уравнение

$$\sqrt{1 + \sin 2x} = \sin x + \cos x + 2, \text{ если } \operatorname{ctg} x + 1 > 0$$

$$\text{Решение. } \sqrt{1 + \sin 2x} = \sin x + \cos x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 + 2 \sin x \cos x} = \sin x + \cos x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} = \sin x + \cos x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\sin x + \cos x| = \sin x + \cos x + 2.$$

При решении использовали свойство $\sqrt{a^2} = |a|$

Учитывая условие, что $\operatorname{ctgx} + 1 > 0$ получим совокупность смешанных систем

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = \sin x + \cos x + 2 \\ \sin x + \cos x \geq 0 \\ \operatorname{ctgx} + 1 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -\sin x - \cos x = \sin x + \cos x + 2 \\ \sin x + \cos x < 0 \\ \operatorname{ctgx} + 1 > 0 \end{cases}$$

(первая система не имеет решений так как $0 \neq 2$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \neq 2 \\ \sin x + \cos x \geq 0 \\ \operatorname{ctgx} + 1 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = -1 \\ \operatorname{ctgx} + 1 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = -1 \\ \sin x + \cos x < 0 \\ \operatorname{ctgx} + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{ctgx} + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{ctgx} + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{ctgx} + 1 > 0 \end{cases}$$

Числа $-\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ не удовлетворяют, так как ctgx – не определен при этих значениях.

Если $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, то выражение $\operatorname{ctgx} + 1$ принимает

положительное значение: $0 + 1 = 1, 1 > 0$ верно.

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

10. Решить уравнение

$$\sqrt{1 - \sin 2x} = \cos x - \sin x + 2, \text{ если } \operatorname{tg} x - 1 < 0.$$

$$\text{Решение. } \sqrt{1 - \sin 2x} = \cos x - \sin x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x} = \cos x - \sin x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} = \cos x - \sin x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\sin x - \cos x| = \cos x - \sin x + 2. \text{ Учитывая условие, что } \operatorname{tg} x - 1 < 0$$

получим совокупность смешанных систем

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = \cos x - \sin x + 2 \\ \sin x - \cos x \geq 0 \\ \operatorname{tg} x - 1 < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -\sin x + \cos x = \cos x - \sin x + 2 \\ \sin x - \cos x < 0 \\ \operatorname{tg} x - 1 < 0 \end{cases}$$

(вторая система не имеет решений так как $0 \neq 2$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = 1 \\ \sin x - \cos x \geq 0 \\ \operatorname{tg} x - 1 < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = 1 \\ \operatorname{tg} x - 1 < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \neq 2 \\ \sin x - \cos x < 0 \\ \operatorname{tg} x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{tg} x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{tg} x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{tg} x - 1 < 0 \end{cases}$$

Числа $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ не удовлетворяют, так как $\operatorname{tg} x$ – не определен при этих значениях.

Если $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, то выражение $\operatorname{tg} x - 1$ принимает отрицательное значение: $0 - 1 = -1, -1 < 0$ верно.

Ответ: $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Тема: «Системы комбинированных уравнений»

1. Найти значение выражения $x_0 + y_0$, если $x_0; y_0$ решение системы уравнений
$$\begin{cases} \log_3(-x) + \log_3(-y) = 3 \\ xy - 3y = 30 \end{cases}$$

Решение. ОДЗ:
$$\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3(xy) = 3 \\ xy - 3y = 30 \\ x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 27 \\ 27 - 3y = 30 \\ x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 27 \\ y = -1 \\ x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -27 \\ y = -1 \\ x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

Следовательно, $x_0 = -27; y_0 = -1$ – решение данной системы уравнений, тогда $x_0 + y_0 = -27 + (-1) = -28; x_0 + y_0 = -28$.

Использовали свойства:

Запомни!

- 1) $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc);$
($a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$)
- 2)

Правильный ответ 4.

$$\begin{aligned}\log_a b &= r; \\ b &= a^r \\ (a > 0, a \neq 1, b > 0, r \in R)\end{aligned}$$

2. Найти значение выражения $x_0 \cdot \sin y_0$, если $x_0; y_0$ решение

системы уравнений
$$\begin{cases} 3^{\log_2 x} - 4 \sin y = 8,2 \\ x^{\log_2 3} + 4 \sin y = 9,8 \end{cases}$$

Решение.

Складываем уравнения данной системы, учитывая, что $\begin{cases} x > 0 \\ -1 \leq \sin y \leq 1 \end{cases}$

получим смешанную систему
$$\begin{cases} 3^{\log_2 x} + x^{\log_2 3} = 18 \\ 3^{\log_2 x} - 4 \sin y = 8,2 \\ x > 0 \\ -1 \leq \sin y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot 3^{\log_2 x} = 18 \\ 3^{\log_2 x} - 4 \sin y = 8,2 \\ x > 0 \\ -1 \leq \sin y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ 3^{\log_2 x} - 4 \sin y = 8,2 \\ x > 0 \\ -1 \leq \sin y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 9 - 4 \sin y = 8,2 \\ x > 0 \\ -1 \leq \sin y \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \sin y = 0,2 \\ x > 0 \\ -1 \leq \sin y \leq 1 \end{cases} \quad \text{Следовательно, } x_0 \cdot \sin y_0 = 4 \cdot 0,2 = 0,8;$$

$$x_0 \cdot \sin y_0 = 0,8.$$

Ответ: 0,8.

Использовали
свойства:

Запомни!

$$1) a^{\log_c b} = b^{\log_c a};$$

$$(a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1)$$

2)

$$\log_a b = r;$$

$$b = a^r$$

$$(a > 0, a \neq 1, b > 0, r \in R)$$

3. Найти значение выражения $y_0 - \cos x_0$, если x_0, y_0 решение системы уравнений

$$\begin{cases} \sin^2 2x + 8 \sin 2x \cos x + 16 = 16 \sin^2 x \\ 2^{y+1} + \cos x = 0,25 \end{cases}$$

Решение.

При решении системы уравнений, учитываем условие $\begin{cases} -1 \leq \cos x \leq 1 \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} \sin^2 2x + 8 \sin 2x \cos x + 16 - 16 \sin^2 x = 0 \\ 2^{y+1} + \cos x = 0,25 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 2x + 8 \sin 2x \cos x + 16 \cos^2 x = 0 \\ 2^{y+1} + \cos x = 0,25 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sin 2x + 4 \cos x)^2 = 0 \\ 2^{y+1} + \cos x = 0,25 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x (2 \sin x + 4) = 0 \\ 2^{y+1} + \cos x = 0,25 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2^{y+1} = 0,25 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2^{y+1} = 2^{-2} \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2^{y+1} = 2^{-2} \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ y = -3 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \end{cases}$$

Следовательно, $y_0 - \cos x_0 = -3 - 0$;

$$y_0 - \cos x_0 = -3$$

Ответ: -3 .

Использовали
свойства:

Запомни!

$$1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 ;$$

$$2) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

4. Найти значение выражения $y_0 - \cos x_0$, если $x_0; y_0$ решение системы

уравнений
$$\begin{cases} x^{\sqrt{\log_x 6}} + 2 \cos y = 35,8 \\ 6^{\sqrt{\log_6 x}} - 2 \cos y = 36,2 \end{cases}$$

Решение.

Складываем уравнения данной системы, учитывая, что $\begin{cases} x > 1 \\ -1 \leq \cos y \leq 1 \end{cases}$

получим смешанную систему
$$\begin{cases} 6^{\sqrt{\log_6 x}} + x^{\sqrt{\log_x 6}} = 72 \\ 6^{\sqrt{\log_6 x}} - 2 \cos y = 36,2 \\ x > 1 \\ -1 \leq \cos y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot 6^{\sqrt{\log_6 x}} = 72 \\ 6^{\sqrt{\log_6 x}} - 2 \cos y = 36,2 \\ x > 1 \\ -1 \leq \cos y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6^{\sqrt{\log_6 x}} = 6^2 \\ 36 - 2 \cos y = 36,2 \\ x > 1 \\ -1 \leq \cos y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1296 \\ \cos y = -0,1 \\ x > 1 \\ -1 \leq \cos y \leq 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ Следовательно, $x_0 \cos y_0 = 1296 \cdot (-0,1) = -129,6$;

$$x_0 \cdot \cos y_0 = -129,6.$$

Ответ: $-129,6$.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x^3 + 23x^2 + 5x - 6 = 0 \\ 5^{2y} + (\cos 5\pi x) \cdot 5^y - 3^{2y} \sqrt{25x^3 - 145x^2 + 104x - 20} = 650 \end{cases}$$

Решение.

1) ОДЗ: $25x^3 - 145x^2 + 104x - 20 \geq 0$;

$$(25x^3 - 125x^2) + (-20x^2 + 100x) + (4x - 20) \geq 0$$

$$25x^2(x - 5) - 20x(x - 5) + 4(x - 5) \geq 0$$

$$(x - 5)(25x^2 - 20x + 4) \geq 0$$

$$(x - 5)(5x - 2)^2 \geq 0$$

$$x \in \left\{ \frac{2}{5} \right\} \cup [5; +\infty)$$

2) Найдем корни первого уравнения

$$5x^3 + 23x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Если } x = \frac{2}{5}, \quad 5 \cdot \frac{8}{125} + 23 \cdot \frac{4}{25} + 5 \cdot \frac{2}{5} - 6 = \\ = \frac{8 + 92}{25} + 2 - 6 = 4 - 4 = 0, \quad (0=0), \text{ следовательно,} \end{aligned}$$

$$\frac{2}{5} - \text{корень первого уравнения.}$$

Тогда выполним преобразование, и получим:

$$5x^3 + 23x^2 + 5x - 6 = (5x^3 - 2x^2) + (25x^2 - 10x) + (15x - 6) = 0$$

$$= x^2(5x - 2) + 5x(5x - 2) + 3(5x - 2) = 0$$

$$= (5x - 2)(x^2 + 5x + 3) = 0$$

$$x^2 + 5x + 3 = 0$$

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{13}}{2}, \quad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{13}}{2} \text{ не удовлетворяют т.к. } x \in \left\{ \frac{2}{5} \right\} \cup [5; +\infty)$$

Значит, первое уравнение имеет только один корень $x = \frac{2}{5}$

3) Найдем значения y из второго уравнения

Если $x = \frac{2}{5}$, то получим уравнение:

$$5^{2y} + \cos\left(5\pi \cdot \frac{2}{5}\right) \cdot 5^y - 3^{y+1} \sqrt{0} = 650$$

$$5^{2y} + 5^y - 650 = 0, \text{ пусть } 5^y = t, \quad (t > 0),$$

$$t^2 + t - 650 = 0;$$

$t_1 = -26$ – не удовлетворяет ($t > 0$),

$t_2 = 25$. Если $t = 25$, $5^y = 5^2$, $y = 2$.

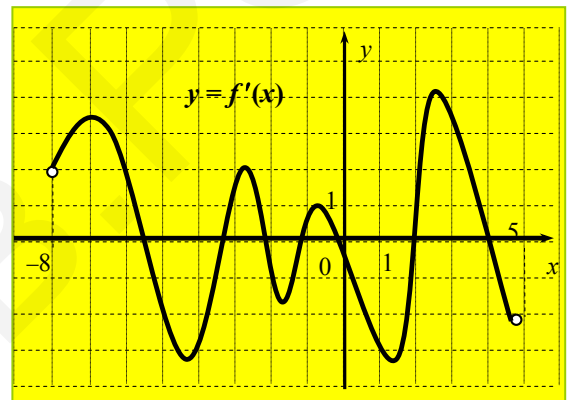
Следовательно, данная система уравнений имеет

решение: $x = \frac{2}{5}$; $y = 2$.

Ответ: $\left(\frac{2}{5}; 2\right)$.

Тема: «Геометрический смысл производной функции»

1. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-8; 5)$. График ее производной изображен на рисунке. Указать количество точек для которых угловой коэффициент касательных проведенных к графику функции $y = f(x)$ равен -3 .



Решение.

Используем равенство $f'(x_0) = k$

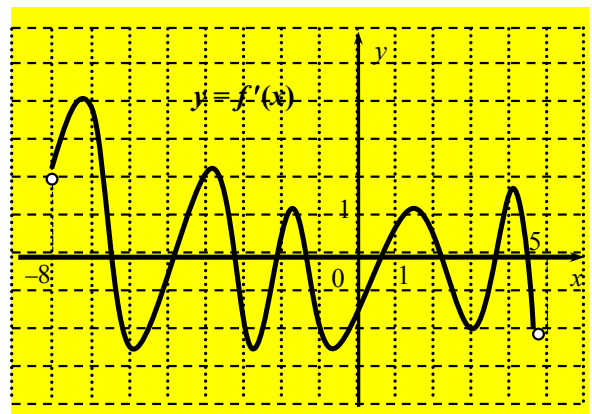
По условию задачи $k = -3$, следовательно, $f'(x_0) = -3$.

Прямая $y = -3$ пересекает график производной $f'(x)$ в четырех точках.

Значит, количество точек, равно 4, для которых угловой коэффициент касательных проведенных к графику функции $y = f(x)$ равен -3 .

Ответ: 4

2. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-8; 5)$. График ее производной изображен на рисунке. Указать количество точек, для которых касательные проведенный к графику функции $y = f(x)$ образуют с осью абсцисс угол 135° .



Решение.

Используем равенство $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$

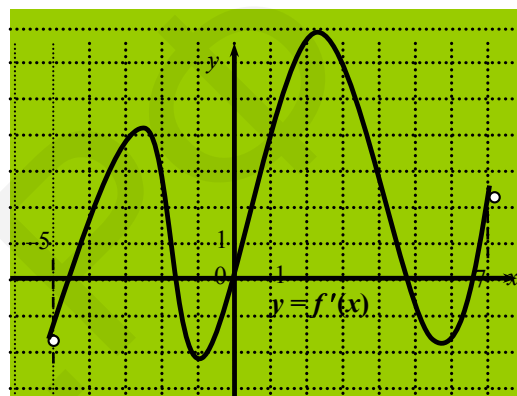
По условию задачи $\alpha = 135^\circ$, тогда $\operatorname{tg} 135^\circ = -1$, следовательно, $f'(x_0) = -1$.

Прямая $y = -1$ пересекает график производной $f'(x)$ в девяти точках.

Значит, количество точек, равно 9, для которых касательные проведенный к графику функции $y = f(x)$ образуют с осью абсцисс угол 135° .

Ответ: 9.

3. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 7)$. График ее производной изображен на рисунке. Определить количество точек, для которых касательные проведенные к графику функции $y = f(x)$ параллельны прямой $y = 0,5x + 18$.



Решение.

$$f'(x_0) = k$$

По условию задачи $k = 0,5$, следовательно, $f'(x_0) = 0,5$.

Прямая $y = 0,5$ пересекает график производной $f'(x)$ в пяти точках.

Использовали свойства:

Запомни!

1) Если прямые $a \parallel b$, и задаются уравнениями

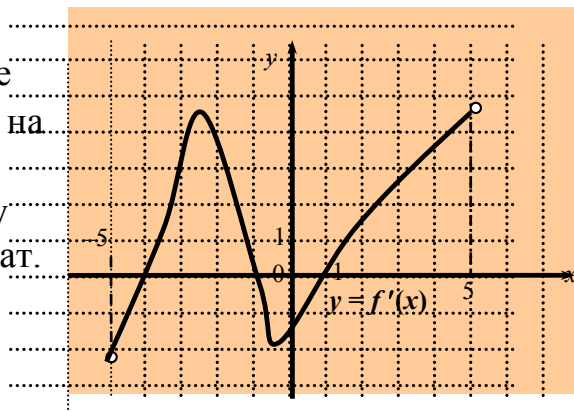
$$y = k_1x + l_1$$

$$y = k_2x + l_2, \text{ то } k_1 = k_2, l_1 \neq l_2$$

Значит, количество точек, равно 5, для которых касательные проведенный к графику функции $y = f(x)$ параллельны прямой $y = 0,5x + 18$.

Ответ: 5.

4. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 5)$. График ее производной изображен на рисунке. Найти сумму абсцисс точек, для которых касательные, проведенные к графику функции $y = f(x)$ перпендикулярны оси ординат.



Решение.

$$f'(x_0) = k$$

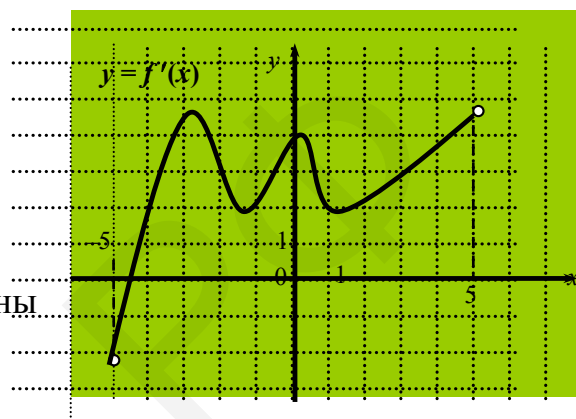
По условию задачи $f'(x_0) = 0$.

$f'(x) = 0$, если $x = -4, x = -1, x = 1$. Следовательно, сумма абсцисс $(-4 + (-1) + 1 = -4)$ равна -4

Значит, сумма абсцисс точек равна -4 , для которых касательные, проведенные к графику функции $y = f(x)$ перпендикулярны оси ординат.

Ответ: -4 .

5. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 5)$. График ее производной изображен на рисунке. Указать количество точек, для которых касательные, проведенные к графику функции $y = f(x)$ перпендикулярны прямой $y = -\frac{2}{3}x - 12$



Решение.

$$f'(x_0) = k$$

По условию задачи $k_1 = -\frac{2}{3}$

$$k\left(-\frac{2}{3}\right) = -1, k = 1,5, \text{ следовательно,}$$

$$f'(x_0) = 1,5. \text{ Прямая}$$

$y = 1,5$ пересекает график

производной $f'(x)$ в одной точке. Значит, количество точек равно 1, для которых касательные,

проведенные к графику функции $y = f(x)$

перпендикулярны прямой $y = -\frac{2}{3}x - 12$

Ответ: 1.

Использовали

Запомни!

свойства:

1) Если прямые $a \perp b$, и задаются уравнениями

$$(a) \quad y = k_1x + l_1$$

$$(b) \quad y = k_2x + l_2, \text{ то } k_1 \cdot k_2 = -1$$

6. Найти угловой коэффициент общей касательной для функций

$$y = x^2 - 4x + 1 \text{ и } y = x^2 + 6x + 2.$$

Решение.

Первый способ решения

1) Пусть x_0 – абсцисса точки касания для функции $y = x^2 - 4x + 1$

Тогда $y' = 2x - 4$; $y'(x_0) = 2x_0 - 4$

$$y = x_0^2 - 4x_0 + 1 + (2x_0 - 4)(x - x_0);$$

$$y = (2x_0 - 4)x - x_0^2 + 1 - \text{уравнение общей касательной.} \quad (1)$$

2) Пусть x_1 – абсцисса точки касания для функции $y = x^2 + 6x + 2$.

$$y' = 2x + 6; y'(x_1) = 2x_1 + 6$$

$$y = x_1^2 + 6x_1 + 2 + (2x_1 + 6)(x - x_1);$$

$$y = (2x_1 + 6)x - x_1^2 + 2 - \text{уравнение общей касательной.} \quad (2)$$

Из (1) и (2) равенств получим систему уравнений
$$\begin{cases} 2x_0 - 4 = 2x_1 + 6 \\ -x_0^2 + 1 = -x_1^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = x_1 + 5 \\ -(x_1 + 5)^2 + 1 = -x_1^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2,4 \\ x_1 = -2,6 \end{cases} \quad \text{Вычислим угловой коэффициент}$$

общей касательной $k = y'(x_0) = 2x_0 - 4 = 4,8 - 4 = 0,8$, $k = 0,8$ или

$$k = y'(x_1) = 2x_1 + 6 = -5,2 + 6 = 0,8, \quad k = 0,8$$

Следовательно, угловой коэффициент общей касательной равен 0,8.

Ответ: 0,8.

Второй способ решения

Пусть $y = kx + l$ – уравнение общей касательной для функций

$$y = x^2 - 4x + 1 \text{ и } y = x^2 + 6x + 2.$$

$$1) \begin{cases} y = x^2 - 4x + 1 \\ y = kx + l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 1 = kx + l \\ y = kx + l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (4+k)x + 1 - l = 0 \\ y = kx + l \end{cases}$$

Квадратное уравнение $x^2 - (4+k)x + 1 - l = 0$ имеет один корень, т.к. парабола и прямая (общая касательная) имеют одну общую точку.

Квадратное уравнение $x^2 - (4+k)x + 1 - l = 0$ имеет один корень, если дискриминант равен нулю. $D = (4+k)^2 - 4 + 4l = 0$;

$$k^2 + 8k + 12 = -4l \quad (3)$$

$$2) \begin{cases} y = x^2 + 6x + 2 \\ y = kx + l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x + 2 = kx + l \\ y = kx + l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (6-k)x + 2 - l = 0 \\ y = kx + l \end{cases}$$

Квадратное уравнение $x^2 + (6-k)x + 2 - l = 0$ имеет один корень, т.к. парабола и прямая (общая касательная) имеют одну общую точку.

Квадратное уравнение $x^2 + (6-k)x + 2 - l = 0$ имеет один корень, если дискриминант равен нулю.

$$D = (6-k)^2 - 8 + 4l = 0;$$

$$k^2 - 12k + 28 = -4l \quad (4)$$

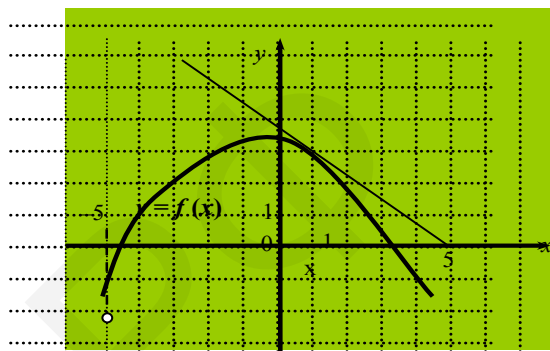
Из (3) и (4) равенств получим систему уравнений $\begin{cases} k^2 + 8k + 12 = -4l \\ k^2 - 12k + 28 = -4l \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k^2 + 8k + 12 = k^2 - 12k + 28 \\ k^2 - 12k + 28 = -4l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20k = 16 \\ k^2 - 12k + 28 = -4l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0,8 \\ l = -4,76 \end{cases}$$

Следовательно, угловой коэффициент общей касательной равен 0,8.

Ответ: 0,8

7. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 4,5)$. График $y = f(x)$ изображен на рисунке. К графику функции $y = f(x)$ проведена касательная. Найти значение $f'(x_0)$, $x_0 = 1$ — абсцисса точки касания.



Решение.

По условию задачи $x_0 = 1$, тогда используя рисунок, находим $f(x_0) = f(1) = 3$

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC , $AB = 3$; $AC = 4$.

$$\operatorname{tg} \angle ACB = \frac{AB}{AC}, \operatorname{tg} \angle ACB = \frac{3}{4} = 0,75$$

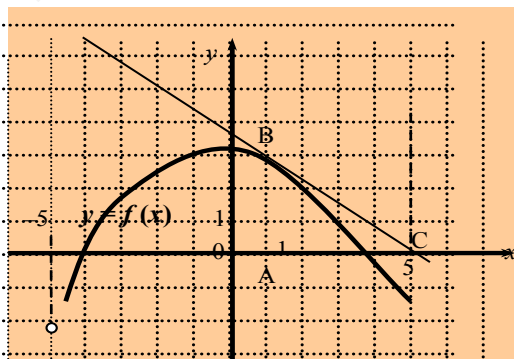
α — угол образованный касательной с осью абсцисс, α — тупой угол, тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\operatorname{tg} \angle ACB = -0,75$$

Так как $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, следовательно,

$$f'(x_0) = -0,75$$

Ответ: $-0,75$.



Тема: «Комбинированные уравнения»

1. Найти наименьший положительный корень уравнения

$$4^{\cos 2\pi x + 1} + 4^{\cos^2 \pi x} = 6$$

Решение.

$$4^{\cos 2\pi x + 1} + 4^{\cos^2 \pi x} = 6;$$

$$4^{2\cos^2 \pi x - 1 + 1} + 4^{\cos^2 \pi x} = 6;$$

$$4^{2\cos^2 \pi x} + 4^{\cos^2 \pi x} = 6;$$

Пусть $4^{\cos^2 \pi x} = t$, ($1 \leq t \leq 4$)

$$t^2 + t - 6 = 0;$$

$t_2 = 2$, $t_1 = -3$ не удовлетворяет ($1 \leq t \leq 4$)

Если $t_2 = 2$, то $4^{\cos^2 \pi x} = 2$;

$$2^{2\cos^2 \pi x} = 2^1; 2\cos^2 \pi x = 1;$$

$$1 + \cos 2\pi x = 1; \cos 2\pi x = 0;$$

$$2\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi n; x = \frac{1}{4} + \frac{n}{2}; \quad \text{если } n = 0; x = 0,25 \text{ наименьший}$$

положительный корень данного уравнения.

Ответ: 0,25.

2. Найти наибольший отрицательный корень уравнения

$$\log_3(\cos \pi x) + \log_{\frac{1}{3}}(-\sin \pi x) = 0;$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 0 < \cos \pi x \leq 1 \\ -1 \leq \sin \pi x < 0 \end{cases}$$

$$\log_3(\cos \pi x) + \log_{3^{-1}}(-\sin \pi x) = 0;$$

$$\log_3(\cos \pi x) - \log_3(-\sin \pi x) = 0;$$

$$\log_3\left(-\frac{\cos \pi x}{\sin \pi x}\right) = 0; \log_3(-\operatorname{ctg} \pi x) = 0;$$

$$-\operatorname{ctg} \pi x = 1; \operatorname{ctg} \pi x = -1; \operatorname{ctg} \pi x = -1; \pi x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$x = \frac{3}{4} + n$, если $n = -1$, $x = -0,25$ наибольший отрицательный

корень. Проверим, если $x = -0,25$ $\begin{cases} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ удовлетворяет

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 0 < \cos \pi x \leq 1 \\ -1 \leq \sin \pi x < 0 \end{cases}$$

Ответ: $-0,25$.

3. Найти корень уравнения (если корней несколько найти их сумму)

$$\log_2^2(x^2 - 1) - \log_{\sqrt[3]{2}}(x^2 - 1)^2 + 5,5 \log_{\cos \frac{\pi}{4}}\left(\sin \frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi x}{6}\right) + 1;$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } x^2 - 1 > 0$$

$$x < -1; x > 1.$$

Левая часть:

$$\begin{aligned} & \log_2^2(x^2 - 1) - \log_{\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}}(x^2 - 1)^2 + 5,5 \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = = \\ & = (\log_2^2(x^2 - 1) - 6 \log_2 |x^2 - 1| + 9) + 2; \end{aligned}$$

Учитывая ОДЗ: $x < -1; x > 1$, следовательно, $|x^2 - 1| = x^2 - 1$.

$$(\log_2^2(x^2 - 1) - 6 \log_2 (x^2 - 1) + 9) + 2 = (\log_2(x^2 - 1) - 3)^2 + 2 \geq 2.$$

Правая часть:

$$-1 \leq \sin\left(-\frac{\pi x}{6}\right) \leq 1; 0 \leq \sin\left(-\frac{\pi x}{6}\right) + 1 \leq 2;$$

Исходное уравнение имеет решение, если имеет решение система

$$\begin{aligned}
&\text{уравнений} \begin{cases} (\log_2(x^2 - 1) - 3)^2 + 2 = 2 \\ \sin\left(-\frac{\pi x}{6}\right) + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x^2 - 1) = 3 \\ \sin\left(-\frac{\pi x}{6}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x^2 - 1) = 3 \\ \sin\left(-\frac{\pi x}{6}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \\ \pi x = -3\pi + 12\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \\ x = -3 + 12n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases} \text{ Следовательно, исходное}
\end{aligned}$$

уравнение имеет единственный корень -3 , который удовлетворяет

ОДЗ: $x < -1$; $x > 1$.

Ответ: -3 .

4. Найти все значения x , при каждом из которых выражения

$$\sqrt{\log_5 x} \cdot (1 + \sqrt{2})^x + 4 \cdot (3 + \sqrt{8})^x \text{ и } 2\sqrt{\log_5 x} \cdot (3 + \sqrt{8})^x + 2 \cdot (1 + \sqrt{2})^x$$

принимают равные значения.

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ \log_5 x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases}; \quad x \geq 1.$$

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\log_5 x} \cdot (1 + \sqrt{2})^x + 4 \cdot (3 + 2\sqrt{2})^x = 2\sqrt{\log_5 x} \cdot (3 + 2\sqrt{2})^x + 2 \cdot (1 + \sqrt{2})^x; \\
&\sqrt{\log_5 x} \cdot (1 + \sqrt{2})^x + 4 \cdot (1 + (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2})^x = 2\sqrt{\log_5 x} \cdot (1 + (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2})^x + 2 \cdot (1 + \sqrt{2})^x; \\
&(\sqrt{\log_5 x} \cdot (1 + \sqrt{2})^x - 2\sqrt{\log_5 x} \cdot (1 + \sqrt{2})^{2x}) + (4 \cdot (1 + \sqrt{2})^{2x} - 2(1 + \sqrt{2})^x) = 0; \\
&\sqrt{\log_5 x} \cdot ((1 + \sqrt{2})^x - 2(1 + \sqrt{2})^{2x}) - 2(-2(1 + \sqrt{2})^{2x} + (1 + \sqrt{2})^x) = 0; \\
&((1 + \sqrt{2})^x - 2 \cdot (1 + \sqrt{2})^{2x})(\sqrt{\log_5 x} - 2) = 0 \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{\log_5 x} - 2 = 0 \\ (1 + \sqrt{2})^x - 2(1 + \sqrt{2})^{2x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \log_5 x = 4 \\ (1 + \sqrt{2})^x (1 - 2 \cdot (1 + \sqrt{2})^x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 625 \\ (1 - 2 \cdot (1 + \sqrt{2})^x) = 0 \\ (1 + \sqrt{2})^x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 625 \\ (1 + \sqrt{2})^x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 625 \\ (1 + \sqrt{2})^x = (1 + \sqrt{2})^{\log_{1+\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 625 \\ x = \log_{1+\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right); \end{cases}$$

$$x = 625, (625 > 1)$$

$$\log_{1+\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right) - \text{не удовлетворяет ОДЗ так как } \log_{1+\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right) < 0.$$

Следовательно, если $x = 625$, то выражения

$$\sqrt{\log_5 x} \cdot (1 + \sqrt{2})^x + 4 \cdot (3 + \sqrt{8})^x \text{ и } 2\sqrt{\log_5 x} \cdot (3 + \sqrt{8})^x + 2 \cdot (1 + \sqrt{2})^x$$

принимают равные значения.

Ответ: 625.

5. Найти все значения x , при каждом из которых выражения

$$\sqrt{2 \cos 4\pi x + 9 \sin \pi x - 11} \text{ и } 2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot 9^{2x} - 7 \cdot 9^x + 3 \text{ принимают равные}$$

значения.

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2 \cos 4\pi x + 9 \sin \pi x - 11 \geq 0 \\ \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \neq 0 \end{cases}$$

Учитывая, что $-2 \leq 2 \cos 4\pi x \leq 2$, $-9 \leq 9 \sin \pi x \leq 9$, то выражение $\sqrt{2 \cos 4\pi x + 9 \sin \pi x - 11}$ определено только, если имеет решение

$$\text{система уравнений } \begin{cases} 2 \cos 4\pi x = 2 \\ 9 \sin \pi x = 9 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2 \cos 4\pi x = 2 \\ 9 \sin \pi x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4\pi x = 1 \\ \sin \pi x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\pi x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{n}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}; x = \frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z} - \text{решение системы так как}$$

множество чисел $\frac{1}{2} + 2k$ принадлежит множеству чисел $\frac{n}{2}$, если $(n, k) \in \mathbb{Z}$.

Если $x = \frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z}$, то $\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} + 2k\right)\right) \neq 0$ так как

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ при всех } k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, если $x = \frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z}$, то левая часть уравнения

$$\sqrt{2 \cos 4\pi x + 9 \sin \pi x - 11} = 2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot 9^{2x} - 7 \cdot 9^x + 3 \text{ равна нулю,}$$

следовательно, и правая часть равна нулю. Заметим, что

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 1, \text{ если } x = \frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z}, \text{ тогда имеем:}$$

$$2 \cdot 9^{2x} - 7 \cdot 9^x + 3 = 0; \text{ Пусть } 9^x = t \ (t > 0)$$

$$2t^2 - 7t + 3 = 0; \ t_1 = \frac{1}{2}; \ t_2 = 3; \ \left(\frac{1}{2} > 0; 3 > 0\right)$$

Если $t = \frac{1}{2}; 9^x = \frac{1}{2}; x = \log_9(0,5)$ – не удовлетворяет ОДЗ.

Так как $\log_9(0,5) \notin \left(\frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z}\right)$.

Если $t = 3; 9^x = 3; 3^{2x} = 3^1; x = \frac{1}{2}$ единственный корень

уравнения $\sqrt{2\cos 4\pi x + 9\sin \pi x - 11} = 2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot 9^{2x} - 7 \cdot 9^x + 3$

так как $\frac{1}{2} \in \left(\frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z}\right)$. Следовательно, если $x = \frac{1}{2}$, то

выражения $\sqrt{2\cos 4\pi x + 9\sin \pi x - 11}$ и $2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot 9^{2x} - 7 \cdot 9^x + 3$

принимают равные значения.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

5. Решить уравнение

$$(\cos^2 3\pi x + 2\cos 3\pi x + 2)\sqrt{25 - x^2} = (-40,5x^4 + 9x^2)\sqrt{100 - 4x^2}$$

Решение.

ОДЗ: $25 - x^2 \geq 0; -5 \leq x \leq 5$.

$$\begin{aligned} & (\cos^2 3\pi x + 2\cos 3\pi x + 2)\sqrt{25 - x^2} = (-81x^4 + 18x^2)\sqrt{25 - x^2} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ \sqrt{25 - x^2} ((\cos^2 3\pi x + 2\cos 3\pi x + 1) + (81x^4 - 18x^2 + 1)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -5 \leq x \leq 5 \\ 25 - x^2 = 0 \\ (\cos 3\pi x + 1)^2 = 0 \\ (9x^2 - 1)^2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -5 \leq x \leq 5 \\ x = \pm 5 \\ x = \frac{1}{3} + \frac{2n}{3}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{1}{3} \end{array} \right. ; x = \pm 5; x = \pm \frac{1}{3}.$$

Ответ: $-5; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 5$.

Вариант 1

В1. В книжном магазине в августе продают пособия для подготовки к ЕГЭ со скидкой. Денис в мае заплатил за пособие 95 рублей, а Таня в августе за такое же пособие заплатила 57 рублей. Определите процент скидки.

В2. Петя купил месячный проездной билет на автобус. За месяц он сделал 45 поездок. Сколько поездок может сделать Петя на сэкономленные деньги, если проездной билет стоит 810 рублей, а разовая поездка - 28 рублей?

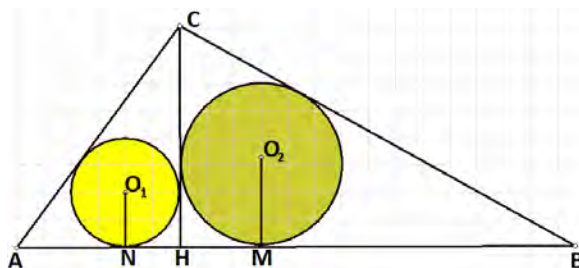
В3. На рисунке показано изменение биржевой стоимости акций на нефть в течение десяти дней февраля. Второго февраля бизнесмен купил 16 акций; 0,75 всех акций продал 5 февраля, а остальные – на следующий день. Какую прибыль в рублях получил бизнесмен в результате всех этих операций, если на оси ординат показана стоимость акций в рублях?



В4. Мебельная фабрика «Добрмебель» планирует купить 200 м^2 мебельного щита у одного из двух поставщиков. Сколько придется заплатить за самую дешевую покупку.

поставщик	Стоимость мебельного щита (рублей за 1 м^2)	Стоимость доставки
А	510	2,6 % от всей суммы
В	580	2,2 % от всей суммы

В5. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle ACB = 90^\circ$, $АН=9$, $ВН=16$, $СН$ – высота. Найдите отношение $O_1N : O_2M$.



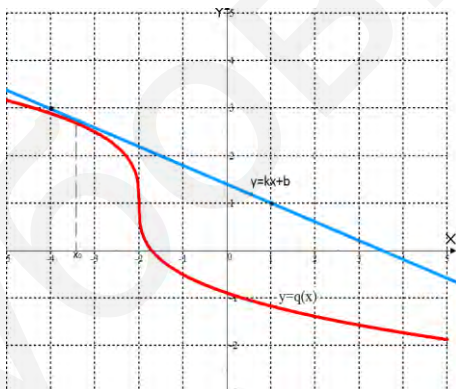
В6. Составляют двузначные числа, которые являются членами арифметической прогрессии вида $a_n = 6n + 1$. Какова вероятность того, что в выбранном на удачу числе, из всех составленных, если сумма цифр этого числа равна 13.

В7. Решите уравнение $\log_{49} 7^{x+2} = 5^{\log_5 2}$

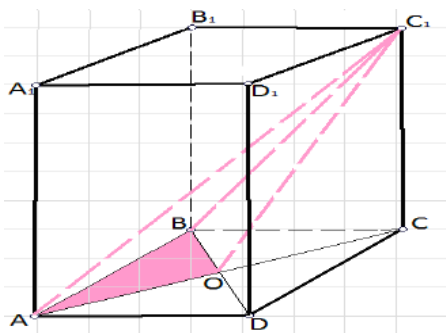
В8. В параллелограмме ABCD угол HAN равен 12° . Найдите угол ABC, если AH-высота, а AN-биссектриса угла BAD.



В9. На рисунке изображён график функции $y=q(x)$ и касательная $y=kx+b$ к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0



В10. Объем правильной четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 72. Найдите объем пирамиды $C_1 AOB$.



В11. Найдите значение выражения $(\sqrt{54} + \sqrt{24})\sqrt{150}$

В12. При взвешивании на неравноплечих рычажных весах вес тела на одной чашке получился равным $P_1 = 18\text{Н}$, а на другой - $P_2 = 72\text{Н}$. Если длины плеч коромысла весов l_1 и l_2 , то уравнение моментов сил для первого и второго взвешиваний: $P_1 l_1 = P_2 l_2$, $P_2 l_2 = P_1 l_1$. Найдите истинный вес тела P .

В13. Найдите объем правильной шестиугольной призмы, если сторона основания равна $2\sqrt{3}$, а высота призмы равна $8\sqrt{3}$.

В14. Клиент А. сделал вклад в банке в размере 16400 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал клиент Б. Ещё ровно через год клиенты А. и Б. закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А. получил на 861 рубль больше клиента Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

В15. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{x^3 - 27}{15 - 5x}$, если $x \in [3, 5]$

С1. Решите уравнение $(\cos 4x - \cos 2x + 2 \cos^2 x) \cdot (-\cos x)^{-0,5} = 0$

С2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны 8. Найдите расстояние от точки А до плоскости A_1BC .

С3. Решите неравенство $\log_{2x} 16 + \log_{0,25x} 4 \leq \log_x 512$

С4. В треугольнике ABC точка М делит биссектрису AN на отрезки в отношении 2:1 считая от вершины А, а прямая ВМ пересекает сторону AC в точке F. а) Докажите, что $S_{\triangle BMN} : S_{\triangle BFC} = 0,44$, если $AB:AC:BC=3:2:2,5$.

б) Найдите площадь треугольника AMF, если $AB=6$, $AC=4$, $BC=5$.

С5. При каких значениях параметра a уравнение $|x - a^2 - 3a + 6| + |x - a^2 + 2a + 4| = 5a - 2$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[-1; 12]$?

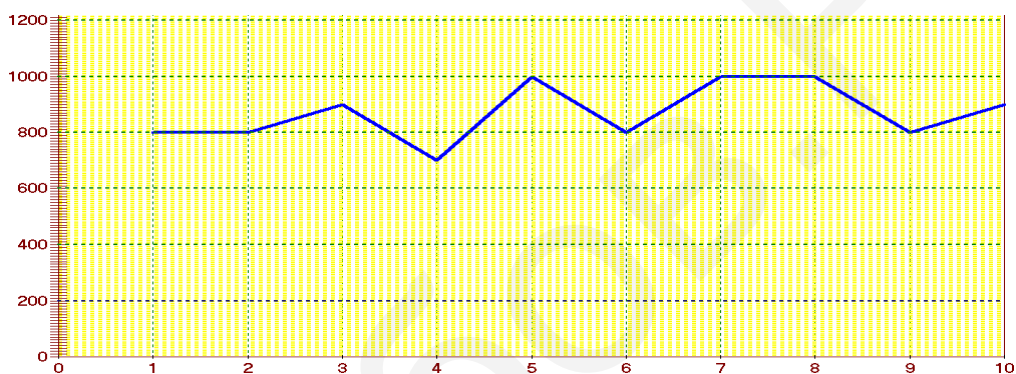
С6. Каждое из чисел 3, ..., 7 умножают на каждое из чисел 13, 14, ..., 19 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 35 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге.

Вариант 2

В1. В книжном магазине в августе продают пособия для подготовки к ЕГЭ со скидкой. Виктор в апреле заплатил за пособие 135 рублей, а Оля в августе за такое же пособие заплатила 108 рублей. Определите процент скидки.

В2. Петя купил месячный проездной билет на автобус. За месяц он сделал 45 поездок. Сколько поездок может сделать Петя на сэкономленные деньги, если проездной билет стоит 800 рублей, а разовая поездка - 26 рублей?

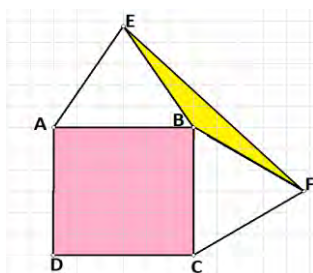
В3. На рисунке показано изменение биржевой стоимости акций на нефть в течение десяти дней февраля. Третьего февраля бизнесмен купил 18 акций; $\frac{7}{9}$ всех акций продал 5 февраля, а остальные – на следующий день. Какую прибыль в рублях получил бизнесмен в результате всех этих операций, если на оси ординат показана стоимость акций в рублях?



В4. Мебельная фабрика «Добрмебель» планирует купить 160 м^2 мебельного щита у одного из двух поставщиков. Сколько придется заплатить за самую дешевую покупку.

поставщик	Стоимость мебельного щита (рублей за 1 м^2)	Стоимость доставки
А	500	2,8 % от всей суммы
В	560	2,3 % от всей суммы

В5. В квадрате ABCD $AB=6\text{ см}$, треугольники ABE и CBF – равносторонние. На сколько см^2 площадь квадрата ABCD больше площади $\triangle BEF$.

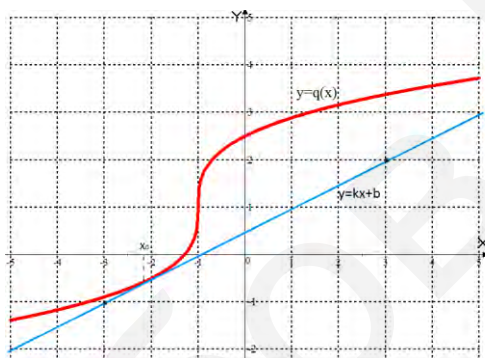


В6. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 17 очков. Результат округлите до сотых.

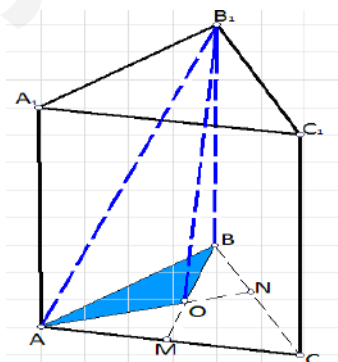
В7. Найдите корень уравнения $\log_4 2^{1-5x} = (\log_4 3)(\log_3 0,25)$.

В8. Основания трапеции равны $17\sqrt{2}$ и $39\sqrt{2}$, боковая сторона, равная 8, образует с одним из оснований трапеции угол 135° . Найдите площадь трапеции.

В9. На рисунке изображён график функции $y=q(x)$ и касательная $y=kx+b$ к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0



В10. Объем правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен 144. Найдите объем пирамиды B_1AOB , если O – точка пересечения медиан треугольника ABC .



В11. Найдите значение выражения $(\sqrt{28} - \sqrt{252})(\sqrt{343} + \sqrt{63})$

В12. При взвешивании на неравноплечих рычажных весах вес тела на одной чашке получился равным $P_1=50\text{Н}$, а на другой - $P_2=72\text{Н}$. Если длины плеч коромысла весов l_1 и l_2 , то уравнение моментов сил для первого и второго взвешиваний: $P_1 l_1 = P_2 l_2$, $P_2 l_2 = P_1 l_1$. Найдите истинный вес тела P .

В13. Найдите объем правильной треугольной призмы, если сторона основания равна $2\sqrt{3}$, а высота призмы равна $9\sqrt{3}$.

В14. Клиент А. сделал вклад в банке в размере 9800 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал клиент Б. Ещё ровно через год клиенты А. и Б. закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А. получил на 1078 рублей больше клиента Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

В15. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^3 + 1}{2x + 2}$, если $x \in [0,5;4]$.

С1. Решите уравнение $(\cos 4x - \cos 2x - 2 \sin^2 x) \cdot (\sin x)^{-0,5} = 0$

С2. В правильной шестиугольной призме $ABC...F_1$ все ребра равны 3. Найдите расстояние от точки E до плоскости E_1DF .

С3. Решите неравенство $\log_{5x} 25 + \log_{0,04x} 25 \leq \log_x 0,2$

С4. В треугольнике ABC точка M делит биссектрису AN на отрезки в отношении 3:1 считая от вершины A , а прямая BM пересекает сторону AC в точке F . а) Докажите, что что $S_{\triangle BMN} : S_{\triangle BFC} = 19:49$, если $AB:AC:BC=4:3:3,5$. б) Найдите площадь треугольника AMF , если $AB=8$, $AC=6$, $BC=7$.

С5. При каких значениях параметра a уравнение $|x - a^2 + 4a + 4| + |x - a^2 - a + 8| = 5a - 4$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[-7;34]$?

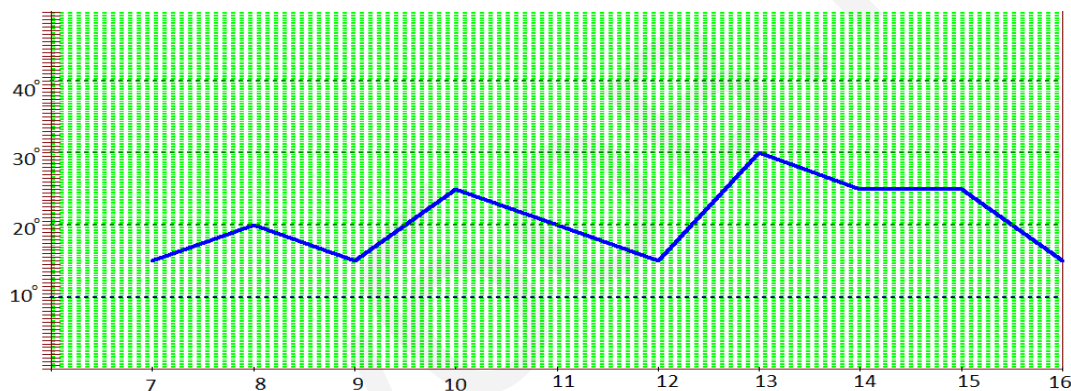
С6. Каждое из чисел 7, 8, ..., 11 умножают на каждое из чисел 13, 14, ..., 21 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 45 полученных результаты складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге.

Вариант 3

В1. В магазине «Всё для дома» вся мебель продаётся в разобранном виде. Покупатель может заказать сборку мебели на дому, стоимость которой составляет 10% от стоимости купленной мебели. Угловой шкаф стоит 5800 рублей. Во сколько рублей обойдётся покупка этого шкафа вместе со сборкой?

В2. Для ремонта ванной комнаты, размеры которой $3,6 \times 3 \times 2,5$ (м) с дверным проемом 1×2 (м) требуется керамическая плитка для стен. Плитки упакованы в пачки. Сколько пачек нужно купить, если в одной пачке 25 штук, размеры плитки 20×30 (см)?

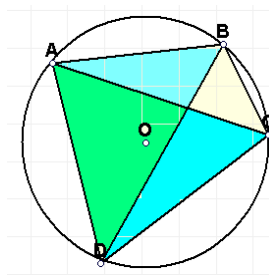
В3. На рисунке показана среднесуточная температура воздуха в Минске каждый день с 7 по 16 июля 1991 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей среднесуточными температурами за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.



В4. Мебельная фабрика «Добрмебель» планирует купить 200 м^2 мебельного щита у одного из двух поставщиков. Сколько придется заплатить за самую дешевую покупку.

поставщик	Стоимость мебельного щита (рублей за 1 м^2)	Стоимость доставки
А	500	2,8 % от всей суммы
В	580	2,2 % от всей суммы

В5. Четырехугольник ABCD вписан в окружность. Угол САВ равен 26° , угол DBC равен 34° . Найдите угол DCB.

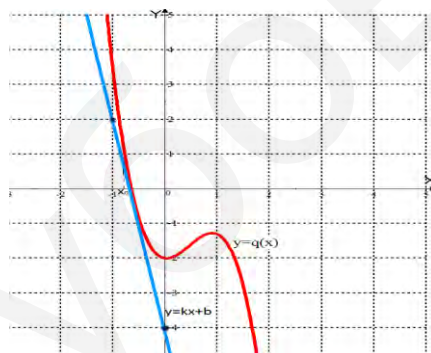


В6. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 15 очков. Результат округлите до сотых.

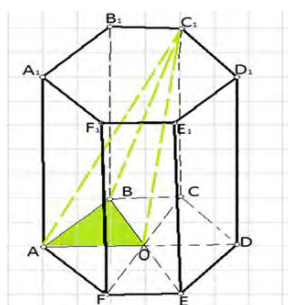
В7. Найдите корень уравнения $\log_{125} 5^{1-5x} = \log_8 16$.

В8. Основания трапеции равны $17\sqrt{3}$ и $31\sqrt{3}$, боковая сторона, равная 10, образует с одним из оснований трапеции угол 120° . Найдите площадь трапеции.

В9. На рисунке изображён график функции $y=q(x)$ и касательная $y=kx+b$ к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0



В10. Объем правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ равен 288. Найдите объем пирамиды $C_1 AOB$.



В11. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{75} + \sqrt{108} - \sqrt{48}}{\sqrt{12}}$

В12. Ядро массой $m=4$ кг бросают под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту

совершая при этом работу 450 Дж. Время, через которое ядро упадет на землю, находится по формуле $t = 2\sqrt{\frac{2A}{m} \cdot \frac{\sin \alpha}{g}}$. Пренебрегая сопротивление воздуха, определите через какое время ядро упадет на землю считая, что $g = 10 \text{ м/с}^2$.

В13. Найдите объем правильной четырехугольной призмы, если сторона основания равна $3\sqrt{3}$, а диагональ боковой грани призмы равна 6.

В14. Два гонщика участвуют в гонках. Им предстоит проехать 30 кругов по кольцевой трассе протяжённостью 4,5 км. Оба гонщика стартовали одновременно, а на финиш первый пришёл раньше второго на 7,5 минут. Чему равнялась средняя скорость первого гонщика, если известно, что первый гонщик в первый раз обогнал второго на круг через 18 минут?

В15. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{x^3 - 8}{2x - 4}$, если $x \in \left[\frac{5}{2}; 4\right]$

С1. Решите уравнение $(4 \sin x \cos x - \cos 2x - 2 \sin^2 x) \cdot (\cos x)^{-0,5} = 0$

С2. В правильной четырехугольной призме $AB...D_1$ все ребра равны 12. Найдите расстояние от точки С до плоскости BC_1D_1 .

С3. Решите неравенство $\frac{\log_{3x} 27 + \log_x 3 - \log_x 81}{x^2 - 12x + 36} \geq 0$

С4. В треугольнике ABC точка М делит биссектрису AN на отрезки в отношении 1:2 считая от вершины А, а прямая ВМ пересекает сторону AC в точке F. а) Докажите, что $S_{\triangle BMN} : S_{\triangle BFC} = 115:243$, если $AB:AC:BC=5:4:4,5$. б) Найдите площадь треугольника AMF, если $AB=10$, $AC=8$, $BC=9$.

С5. При каких значениях параметра a уравнение $|x - a^2 + 2a + 4| + |x - a^2 - a + 6| = 3a - 2$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[4; 36]$?

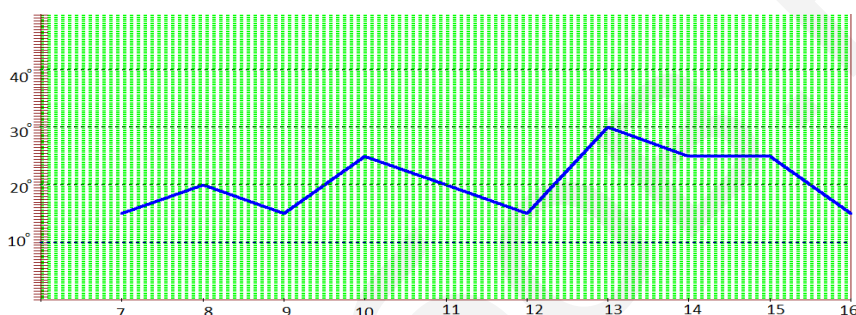
С6. Каждое из чисел 1, 2, ..., 7, умножают на каждое из чисел 13, 14, ..., 17 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 35 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге.

Вариант 4

В1. В магазине «Всё для дома» вся мебель продаётся в разобранном виде. Покупатель может заказать сборку мебели на дому, стоимость которой составляет 12% от стоимости купленной мебели. Угловой шкаф стоит 6500 рублей. Во сколько рублей обойдётся покупка этого шкафа вместе со сборкой?

В2. Для ремонта ванной комнаты, размеры которой $2,8 \times 3 \times 2,5$ (м) с дверным проемом 1×2 (м) требуется керамическая плитка для стен. Плитки упакованы в пачки. Сколько пачек нужно купить, если в одной пачке 30 штук, размеры плитки 20×30 (см)?

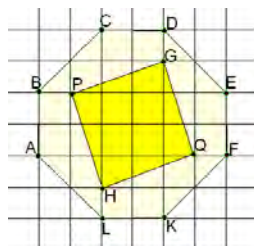
В3. На рисунке показана среднесуточная температура воздуха в Омске каждый день с 7 по 16 июня 1971 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Определите по рисунку наибольшую среднесуточную температуру за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.



В4. В таблице даны условия банковского вклада в двух различных банках. Предполагается, что клиент кладет на счет 20000 р. на срок 1 год. В каком банке к концу года вклад окажется наибольшим? В ответе укажите сумму этого вклада в рублях.

Банк	Обслуживание счета*	Процентная ставка (% годовых)
Банк А	70 руб. в мес.	7,7
Банк Б	Бесплатно	7,5

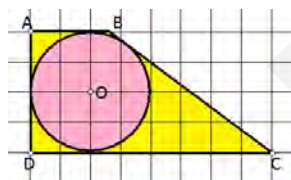
В5. Площадь одной клетки 1см^2 . Найдите на сколько см^2 площадь восьмиугольника ABCDEFLK больше площади четырехугольника PGQH.



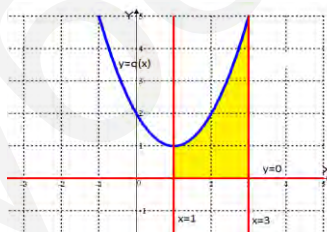
В6. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,01. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,96. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,04. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

В7. Найдите корень уравнения $\log_{0,2} 5^{1-4x} = \log_2 0,125$.

В8. В прямоугольной трапеции ABCD $AD \perp AB$, $BC=34$. Площадь вписанного круга равна 64π . Найдите основание CD



В9. Вычислите определенный интеграл $12 \int_1^3 q(x) dx$, если $q(x) = x^2 + 1$, если график функции $q(x) = x^2 + 1$ и ограничения показаны на рисунке.

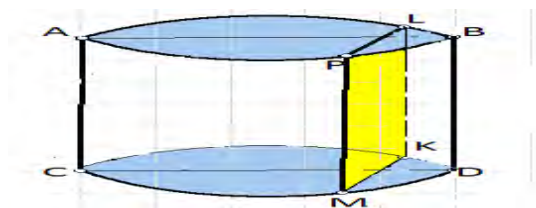


В10. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

В11. Найдите значение выражения $5\operatorname{tg}43^\circ \cdot \operatorname{tg}133^\circ + \cos 240^\circ$

В12. Ядро массой $m=2\text{кг}$ бросают под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту совершая при этом работу 400 Дж. Время, через которое ядро упадет на землю, находится по формуле $t = 2\sqrt{\frac{2A}{m}} \cdot \frac{\sin \alpha}{g}$. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите через какое время ядро упадет на землю считая, что $g = 10 \text{ м/с}^2$.

В13. Площадь осевого сечения цилиндра в пять раз больше площади сечения цилиндра $MKLP$. Найдите площадь осевого сечения, если площадь боковой поверхности цилиндра равна 125π , а сечение $MKLP$ – квадрат.



В14. Клиент А. сделал вклад в банке в размере 9800 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал клиент Б. Ещё ровно через год клиенты А. и Б. закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А. получил на 1078 рублей больше клиента Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

В15. Найдите наибольшее значение функции $y = (x - 2)^3 e^{x-3}$ на отрезке $[0; 3]$.

С1. а) Решить уравнение $\cos^4 x - 2 \cos 2x = -1$

б) Найдите все корни принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

С2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = BC = 5\sqrt{2}$, $AA_1 = 12\sqrt{2}$. Сечение параллелепипеда проходит через точки В и D и образует с плоскостью ABC угол $\alpha = \arctg \sqrt{2}$. Найдите площадь сечения.

С3. Решить систему неравенств
$$\begin{cases} \log_{0,04x} 25 \leq \log_x 0,04 \\ 3 \cdot 2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

С4. В треугольнике ABC точка М делит медиану AD на отрезки в отношении 3:2 считая от вершины А. Прямая BM пересекает сторону AC в точке F. а) Докажите, что $S_{\triangle ABM} : S_{\triangle ABC} = 3:10$ б) Найдите площадь треугольника AMF, если площадь треугольника ABC равна 48.

С5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 12|$ больше 1.

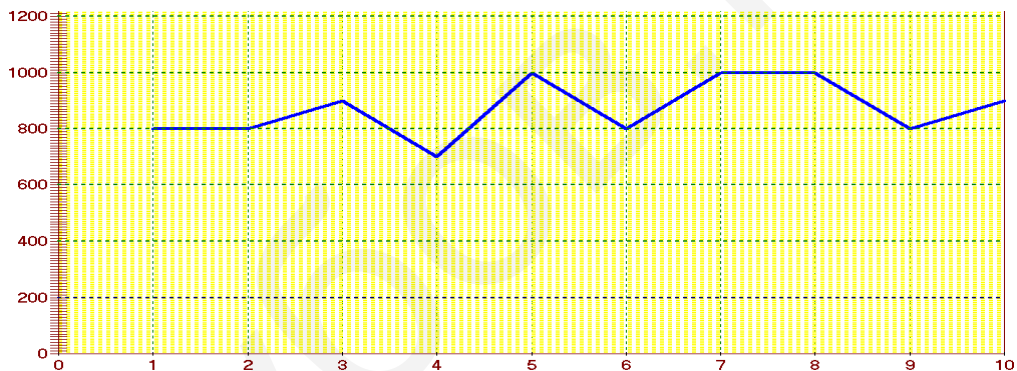
С6. Среднее арифметическое трёх натуральных чисел в 9 раз больше, чем среднее арифметическое обратных им чисел. Найдите эти натуральные числа

Вариант 5

В1. В школьную библиотеку привезли учебные пособия для самостоятельных и контрольных работ по математике для 5–10 классов, по 120 штук для каждой параллели классов. Все книги одинаковы по размеру. В книжном шкафу 10 полок, на каждой полке помещается 24 книги. Сколько шкафов можно полностью заполнить новыми книгами?

В2. Для ремонта ванной комнаты, размеры которой $2,6 \times 3 \times 2,5$ (м) с дверным проемом 1×2 (м) требуется керамическая плитка для стен. Плитки упакованы в пачки. Сколько пачек нужно купить, если в одной пачке 25 штук, размеры плитки 20×30 (см)?

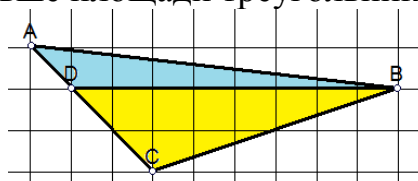
В3. На рисунке показано изменение биржевой стоимости акций на нефть в течение десяти дней февраля. Второго февраля бизнесмен купил 10 акций; $\frac{4}{5}$ всех акций продал 5 февраля, а остальные – 9 февраля. Какую прибыль в рублях получил бизнесмен в результате всех этих операций, если на оси ординат показана стоимость акций в рублях?



В4. В таблице даны условия банковского вклада в двух различных банках. Предполагается, что клиент кладет на счет 30000 р. на срок 1 год. В каком банке к концу года вклад окажется наибольшим? В ответе укажите сумму этого вклада в рублях.

Банк	Обслуживание счета*	Процентная ставка (% годовых)
Банк А	120 руб. в мес.	8,2
Банк Б	Бесплатно	7,5

В5. Площадь одной клетки 1 см^2 . Найдите на сколько см^2 площадь треугольника ABC больше площади треугольника ABD.



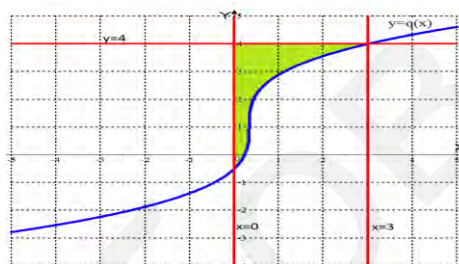
В6. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,01. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,97. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,03. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

В7. Решите уравнение $\frac{x^2 - 9}{2x - 6} = 0,5$.

В8. В трапеции ABCD угол A равен 60° , а угол D равен 30° , основания трапеции равны соответственно $BC=3\sqrt{3}$, $AD=7\sqrt{3}$. Найдите боковую сторону CD

В9. Вычислите определенный интеграл $\int_0^3 (4 - q(x))dx$, если $q(x) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{9x} - 0,5$,

если график функции $q(x) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{9x} - 0,5$ и ограничения показаны на рисунке.

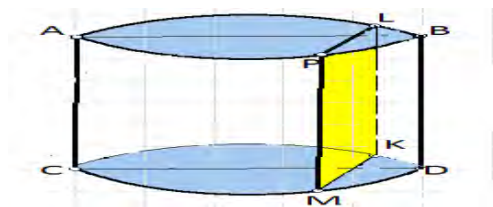


В10. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 96 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 4 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

В11. Найдите значение выражения $12\operatorname{tg}17^\circ \cdot \operatorname{ctg}197^\circ + 5\sin 210^\circ$

В12. Двояковыпуклая линза из стекла обладает оптической силой $\Phi=4,5$ дптр. При погружении в жидкость линза действует как рассеивающая. Оптическую силу рассеивающей линзы Φ_1 можно найти, используя формулу $\frac{\Phi_1(n-1)}{\Phi} = \left(\frac{n}{n_1} - 1\right)$. Определите оптическую силу линзы в жидкости Φ_1 , если $n=1,4$; $n_1=1,8$.

В13. Площадь осевого сечения цилиндра в три раза больше площади сечения цилиндра MKLP. Найдите площадь сечение MKLP, если площадь боковой поверхности цилиндра равна 162π , а сечение MKLP – квадрат.



B14. Клиент А. сделал вклад в банке в размере 7900 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал клиент Б. Ещё ровно через год клиенты А. и Б. закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А. получил на 1896 рублей больше клиента Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

B15. Найдите наибольшее значение функции $y = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)e^{x-2}$ на отрезке $[-2; 2]$

C1. а) Решите уравнение $\sin^4 x + 2\cos 2x = -1$

б) Найдите все корни принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$

C2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB=BC=4\sqrt{2}$, $AA_1=14$. Сечение параллелепипеда проходит через точки В и D и образует с плоскостью ABC угол $\alpha = \arctg 2$. Найдите площадь сечения.

C3. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} (\log_{x-2} 16 - 2)(\log_{8-x} 125 - 3) \leq 0 \\ 4 \cdot 3^{2x+1} - 7 \cdot 3^x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

C4. В треугольнике ABC точка М делит медиану AD на отрезки в отношении 4:3 считая от вершины А. Прямая BM пересекает сторону AC в точке F. Докажите, что $S_{\triangle ABM} : S_{\triangle ABC} = 2:7$. Найдите площадь четырехугольника MDCF, если площадь треугольника ABC равна 60.

C5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 6x + 8|$ больше 1.

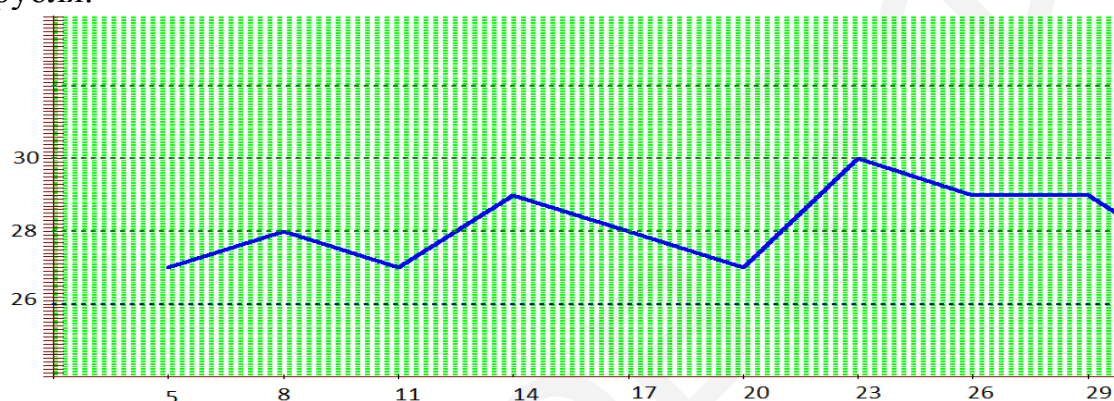
C6. Среднее арифметическое трёх натуральных чисел в 16 раз больше, чем среднее арифметическое обратных им чисел. Найдите эти натуральные числа.

Вариант 6

В1. Для ремонта квартиры требуется 57 рулонов обоев. Сколько пачек обойного клея нужно купить, если одна пачка клея рассчитана на 8 рулонов?

В2. Для покраски 1 м^2 потолка требуется 130 г краски. Краска продается в банках по 3,5 кг. Сколько банок краски нужно купить для покраски потолка площадью 90 м^2 ?

В3. На рисунке показан курс евро, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 5 февраля по 29 февраля 2002 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена евро в рублях. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода курс евро был меньше 27,1 рубля.



В4. В таблице даны условия банковского вклада в двух различных банках. Предполагается, что клиент кладет на счет 40000 р. на срок 1 год. В каком банке к концу года вклад окажется наибольшим? В ответе укажите сумму этого вклада в рублях.

Банк	Обслуживание счета*	Процентная ставка (% годовых)
Банк А	100 руб. в мес.	6,7
Банк Б	Бесплатно	6,5

В5. Площадь треугольника ABC равна 120. Найдите площадь треугольника NMBC четырехугольника, если NM — средняя линия треугольника ABC.

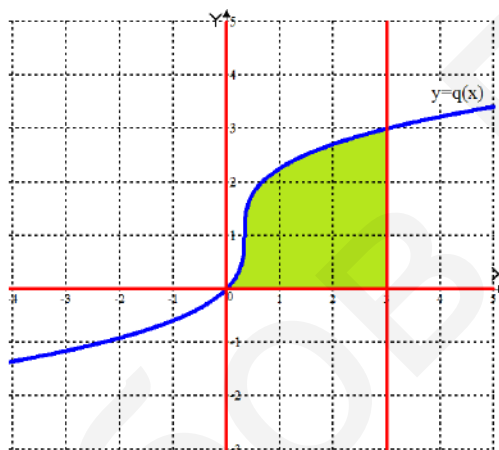
В6. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,01. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,98. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,02. Найдите вероятность

того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

В7. Найдите корень уравнения $\frac{1-4x^2}{5+10x} = 0,4$.

В8. В трапеции ABCD угол A равен 60° , а угол D равен 30° , основания трапеции равны соответственно $BC=12\sqrt{3}$, $AD=28\sqrt{3}$. Найдите высоту BH трапеции ABCD.

В9. Вычислите определенный интеграл $\int_0^3 q(x)dx$, если $q(x) = \sqrt[3]{3x-1} + 1$, если график функции $q(x) = \sqrt[3]{3x-1} + 1$ и ограничения показаны на рисунке.



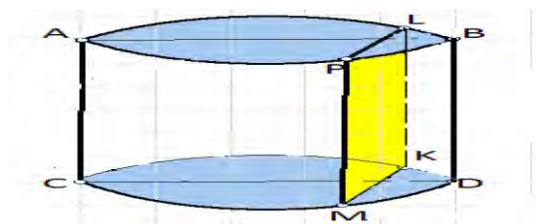
В10. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 27 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 3 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

В11. Найдите значение выражения $12 \operatorname{tg} 41^\circ \cdot \operatorname{tg} 131^\circ - 7 \cos 240^\circ$

В12. Двояковыпуклая линза из стекла обладает оптической силой $\Phi=4$ дптр. При погружении в жидкость линза действует как рассеивающая. Оптическую силу рассеивающей линзы Φ_1 можно найти, используя формулу

$$\frac{\Phi_1(n-1)}{\Phi} = \left(\frac{n}{n_1} - 1 \right)$$
. Определите оптическую силу линзы в жидкости Φ_1 , если $n=1,4$; $n_1=1,6$.

В13. Площадь осевого сечения цилиндра в два раза больше площади сечения цилиндра MKLP. Найдите площадь осевого сечения цилиндра, если площадь полной поверхности цилиндра равна 144π , а сечение MKLP – квадрат.



B14. Клиент А. сделал вклад в банке в размере 16400 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал клиент Б. Ещё ровно через год клиенты А. и Б. закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А. получил на 861 рубль больше клиента Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

B15. Найдите наибольшее значение функции $y = 2^{3\sin x + 4\cos x - 1}$

C1. а) Решите уравнение $\sin^4 x + 2\cos 2x = -1$

б) Найдите все корни принадлежащие отрезку $[-3\pi; -1,5\pi]$

C2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB=BC=4\sqrt{2}$, $AA_1 = 4$. Сечение параллелепипеда проходит через точки В и D и образует с плоскостью ABC угол $\alpha = \arctg 2$. Найдите площадь сечения

C3. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} (\log_{x-5} 16 - 4)(\log_{11-x} 625 - 4) \leq 0 \\ 3 \cdot 7^{2x+1} - 10 \cdot 7^x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

C4. В треугольнике ABC точка М делит медиану AD на отрезки в отношении 4:3 считая от вершины А. Прямая BM пересекает сторону AC в точке F. Докажите, что

$S_{MDCF} : S_{\triangle ABC} = 13,5:35$. Найдите площадь четырехугольника ABDF, если площадь треугольника ABC равна 70.

C5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 10x + 24|$ больше 1.

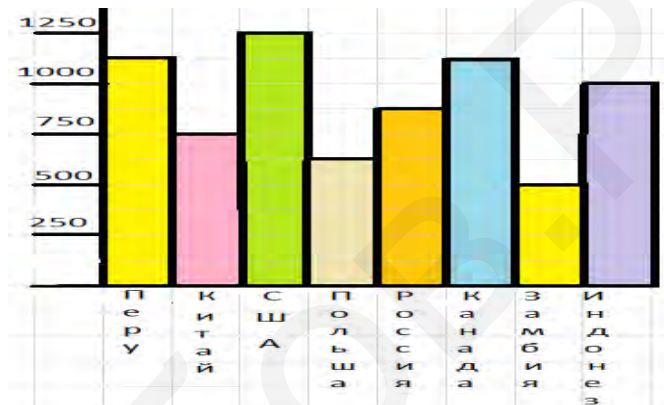
C6. Среднее арифметическое трёх натуральных чисел в 25 раза больше, чем среднее арифметическое обратных им чисел. Найдите эти натуральные числа.

Вариант 7

В1. Для ремонта ванной комнаты, размеры которой $2,8 \times 3 \times 2,8$ (м) с дверным проемом 1×2 (м) требуется керамическая плитка для стен. Плитки упакованы в пачки. Сколько пачек нужно купить, если в одной пачке 20 штук, размеры плитки 20×30 (см)?

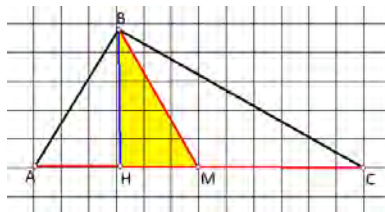
В2. Билет на автобус стоит 32 рублей. Какое максимальное количество билетов можно купить на 800 рублей после повышения цены билета на 10%?

В3. На диаграмме показано распределение выплавки меди в 8 странах мира (в тысячах тонн) за 2004 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимали США, шестое место – Польша. Какое место занимал Китай?



В4. Семья из трёх человек планирует поехать из Санкт-Петербурга в Вологду. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 1546 рублей. Автомобиль расходует 11 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 780 км, а цена бензина равна 26 рублей за литр. Сколько рублей придётся заплатить за наиболее дешёвую поездку на троих?

В5. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle ABC = 90^\circ$, BM – медиана, BH – высота, $\angle BMH = 62^\circ$. Найдите угол $\angle CBM$.

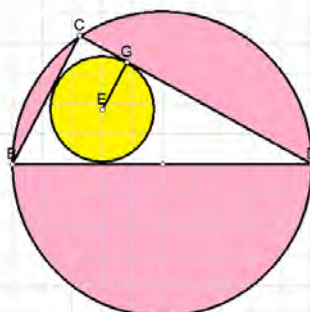


В6. Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 21 бадминтонистов, среди которых 4 участника из Рос-

сии, в том числе Степан Петров. Найдите вероятность того, что в первом туре Степан Петров будет играть с каким-либо бадминтонистом из России?

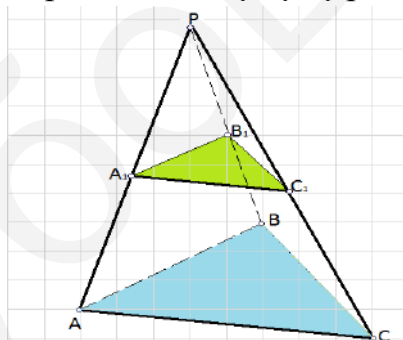
В7. Найдите корень уравнения $\sqrt{x+42} = -x$.

В8. В прямоугольном треугольнике BCD $\angle C = 90^\circ$, $DC = 12$, $BC = 9$. Найдите отношение радиусов описанной и вписанной окружностей.



В9. Прямая $y = -5x + 8$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 12x^2 + 43x + 72$. Найдите абсциссу точки касания.

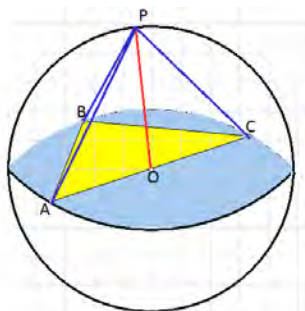
В10. В правильной треугольной пирамиде $PABC$ сечение $A_1B_1C_1$ проходит через середины боковых ребер. Найдите объем усеченной пирамиды $A_1B_1C_1ABC$, если объем пирамиды $PA_1B_1C_1$ равен 12.



В11. Найдите значение выражения $25\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = 0,4$

В12. Азот расширяется в вакууме, в результате чего объем газа увеличивается от $V_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ до $V_2 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$. Количество теплоты Q необходимо сообщить газу, чтобы его температура осталась неизменной можно определить используя формулу $\frac{Q}{v^2 a} = \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}$. Какое количество теплоты Q необходимо сообщить газу, чтобы его температура осталась неизменной, если $a = 0,135 \text{ Н} \cdot \text{м}^4 / \text{моль}^2$, $v = 4 \text{ моль}$?

В13. Треугольная пирамида $PABC$ вписана в шар, в основании пирамиды прямоугольный треугольник ABC $\angle B = 90^\circ$. Объем пирамиды $PABC$ равен $40\sqrt{3}$. Найдите радиус шара, если $\triangle PAC$ – равносторонний $\tan \angle BCA = 0,75$.



B14. Первый и второй насосы наполняют бассейн за 8 минут, второй и третий — за 10 минут, а первый и третий — за 24 минуты. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

B15. Найдите наибольшее значение функции $y = 5^{3 \sin x - 4 \cos x - 2}$.

C1. а) Решите уравнение $1 - \cos 2x = \sqrt{3} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

б) Найдите все корни принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

C2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, $AB=24$, $AA_1=12$. Сечение призмы проходит через точки N и M и образует с плоскостью ABC угол $\alpha = \arctg 0,5$. Найдите площадь сечения, если NM — средняя линия треугольника ABC , $N \in AB$, $M \in BC$, сечение пересекает ребро BB_1 в точке E .

C3. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} \frac{2x^2 - 8x + 2}{x^2 - 4x} - \frac{1}{(x-4)(x-1)} \geq 2 \\ 36^{x+1} - 8 \cdot 30^{x+1} + 7 \cdot 25^{x+1} \geq 0 \end{cases}$$

C4. Прямая MN перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника ABC и высота CH , отсекают четырехугольник $MNCH$, в который можно вписать окружность, $N \in AC$, $M \in AB$. а) Докажите, что $\operatorname{tg} \angle CMN = \frac{2}{3}$;

б) Найдите радиус этой окружности, если $AC=8$, $BC=6$, $\angle C = 90^\circ$.

C5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых график функции $f(x) = x|x-6| - 2x - 2a$ имеет с осью абсцисс ровно три общие точки.

C6. Все члены конечной арифметической прогрессии являются натуральными числами, сумма всех членов прогрессии равна 125. а) Найдите число членов прогрессии у которой произведение всех членов прогрессии является наименьшим; б) Найдите наименьшее произведение всех членов этой прогрессии.

Ответы

	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5
B1	40	20	6380	7280	3
B 2	15	14	21	15	18
B 3	2400	1000	15	30	1600
B 4	104652	82240	102800	21500	32250
B 5	0,75	27	120	18	8
B 6	0,2	0,01	0,5	0,0492	0,0394
B 7	2	0,6	-0,6	-0,5	-2
B 8	24	224	360	40	6
B 9	-0,4	0,5	-6	128	3,375
B10	6	16	16	4	6
B11	150	-280	3,5	-5,5	9,5
B12	36	60	1,5	2	-2,5
B13	432	81	81	125	54
B14	5	10	120	10	20
B15	-9,8	6,5	7,625	1	27
C1	$\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,$ $n \in Z$	$\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $n \in Z$	$\frac{\pi}{12} + 2\pi n,$ $\frac{5\pi}{12} + 2\pi n,$ $n \in Z$	а) $\pi n, n \in Z$ б) $-2\pi; -\pi$	а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ б) $\pm \frac{\pi}{2};$
C2	$\frac{8\sqrt{21}}{7}$	$\frac{3}{\sqrt{5}}$	$4\sqrt{3}$	$25\sqrt{3}$	$16\sqrt{5}$
C3	$\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right); (1; 4);$ $[8; +\infty)$	$\left(0; \frac{1}{5}\right); \left[\frac{1}{\sqrt[5]{25}}; 1\right);$ $[5; 25)$	$\left(\frac{1}{3}; 1\right); (3; 6); (6; 9]$	$(0; 1); [5; 25)$	$[6; 7)$
C4	$\frac{6\sqrt{7}}{11}$	$\frac{81\sqrt{15}}{76}$	$\frac{5\sqrt{231}}{69}$	$\frac{216}{35}$	$\frac{162}{7}$
C5	3	$\left[\frac{4}{5}; 1\right]; [3; 6]$	$[4; 6]$	$\left(\frac{1}{4}; 4 + \sqrt{11}\right)$	$\left(\frac{1}{4}; 3 + \sqrt{7}\right)$
C6	1; 2800	0; 7920	1; 2100	3; 3; 3 или 1; 3; 9	4; 4; 4 или 1; 4; 16

°

	Вариант 6	Вариант 7
B1	8	26
B 2	4	22
B 3	3	5
B 4	42600	2230,8
B 5	90	31
B 6	0,0296	0,15
B 7	90	-6
B 8	12	2,5
B 9	6,75	-4
B10	3	84
B11	-8,5	17
B12	-1,25	648
B13	96	5
B14	15	7,5
B15	16	125
C1	$a) \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ $б) \frac{-5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}$	$a) \pi n, n \in \mathbb{Z}$ $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k,$ $k \in \mathbb{Z}$ $б) 2\pi; \frac{5\pi}{3}$
C2	$12\sqrt{5}$	$18\sqrt{15}$
C3	$[7;10)$	$(-\infty; -1];$ $\left[\log_{1,2} \frac{35}{6}; +\infty \right)$
C4	49	1,6
C5	$\left(\frac{1}{8}; 5 + \sqrt{23} \right)$	$(-6; 2)$
C6	5;5;5 или 1;5;25	а) 5 б) 589225

Список литературы и использование источников

1. Вольпер Е.Е. Задачи по математике Ч.1: Уравнения и неравенства / ОМИПКРО; Школа-лицей №66. – Омск, 1998. – 64с.
2. Воробьев В.В. Учебно-методическое пособие. «Сборник задач и тестов для успешной подготовки к ЕГЭ по математике: практические рекомендации для выпускников 11 классов» – Омск.. Изд-во ОмГПУ, 2008 – 83с.
3. Воробьев В.В. Система подготовки к ЕГЭ по математике. «Обучающие тесты по геометрии». Журнал «Современный урок» – Москва. Изд-во ООО «Руспечать». Центр «Педагогический поиск». №1–№4 2013. – С.3-10.
4. Воробьев В.В. Система подготовки к ЕГЭ по математике. «Тренировочные варианты для подготовки к ЕГЭ по математике». Журнал «Современный урок» – Москва. Изд-во ООО «Руспечать». Центр «Педагогический поиск». 2014. – С.3-10.
4. Екимова М.А., Кукин Г.П. Задачи на разрезание. – М.:МЦНМО, 2002. – 120с. Серия: «Секреты преподавания математики».
5. Далингер В.А. Все для обеспечения успеха на выпускных и вступительных экзаменах по математике. Нестандартные уравнения и неравенства и методы их решения. Учеб. пособие – Омск: Изд-во ОмГПУ, 1995.
6. ЕГЭ-2012. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов /под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. –М.: Национальное образование, 2012
7. ЕГЭ-2013. Математика: типовые экзаменационные варианты: 10 вариантов под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Национальное образование,

Воробьёв Василий Васильевич

**«Практикум для подготовки к ЕГЭ
по математике»**

практические рекомендации
/ для учащихся 10-11 классов /.-: