Английский язык
Библиотека в школе
Биология
География
Дошкольное образование
Здоровье детей
Информатика

Математика

№32

Искусство
История
Классное руководство
Литература
Начальная школа
Немецкий язык
Педагогика
Русский язык
Спорт в школе
Управление школой
Физика
Французский язык
Химия
Школьный психолог

Библиотечка «Первого сентября»

И. СМИРНОВА, В. СМИРНОВ

50 задач о равенстве треугольников

БИБЛИОТЕЧКА «ПЕРВОГО СЕНТЯБРЯ»
Серия «Математика»
Выпуск 32

И. Смирнова, В. Смирнов

50 ЗАДАЧ О РАВЕНСТВЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Москва
Чистые пруды
2010

ВВЕДЕНИЕ

Данная брошюра предназначена для тех, кто хочет научиться решать задачи на доказательство по геометрии. Она содержит пятьдесят задач, сформулированных в виде признаков равенства треугольников по трем элементам, включающим стороны, углы, высоты, медианы или биссектрисы треугольника. При этом используются обычные признаки равенства треугольников.

Особенностью предлагаемых заданий является то, что это не просто задачи на доказательство. В них нужно самому выяснить, верно ли сформулированное утверждение. Если верно, то привести доказательство, если нет — дать контрпример.

Именно такие задачи характерны для исследовательской, творческой деятельности человека не только в математике, но и других различных областях знания. Не случайно, что многие научные проблемы формулируются в терминах задач с неопределенным условием.

Как правило, задачи с подобным неопределенным условием труднее, чем просто задачи на доказательство. Отсутствие уверенности в справедливости предложения, сформулированного в условии задачи, накладывает дополнительную, психологическую трудность поиска решения. Но из этого не следует, что решением таких задач не следует заниматься на уроках математики. Наоборот, в них заложен большой образовательный и воспитательный потенциал. Они помогают более глубокому освоению изучаемого материала, учат отличать верное утверждение от неверного, развивают интуицию, логическое мышление, учат рассуждать, анализировать, аргументировать, доказывать.

Все включенные в брошюру задачи сопровождаются рисунками, помогающими лучше понять условия задач, представить соответствующую геометрическую ситуацию, при необходимости провести дополнительные построения, наметить план решения.

В конце пособия даны решения всех задач.

В качестве дополнительной литературы рекомендуем следующую книгу:

Голубев В.И., Ерганжиева Л.Н., Мосевич К.К. Построение треугольника. — М.: БИНОМ, 2008.

В ней рассмотрены всевозможные построения треугольника по трем его элементам, включающим стороны, углы, биссектрисы, медианы, высоты, радиусы вписанной и описанной окружностей, периметр.

Задачи

Выясните, верны ли следующие утверждения. Если да, докажите, если нет, приведите контрпример

1. Два треугольника равны, если две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника.

2. Два треугольника равны, если две стороны и высота, опущенная на одну из них, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте другого треугольника.

3. Два треугольника равны, если две стороны и высота, опущенная на третью сторону, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте другого треугольника.

4. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и высота, опущенная на эту сторону, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и высоте другого треугольника, то эти треугольники равны.

5. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и высота, опущенная на сторону, противоположную данному углу, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и высоте другого треугольника, то эти треугольники равны.

6. Если угол, сторона, противолежащая этому углу, и высота, опущенная на другую сторону, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и высоте другого треугольника, то эти треугольники равны.

7. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и высота, опущенная на другую сторону, прилежащую к данному углу, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и высоте другого треугольника, то эти треугольники равны.

8. Два треугольника равны, если два угла и высота, проведенная из вершины одного из них, соответственно равны двум углам и высоте другого треугольника.

9. Два треугольника равны, если два угла и высота, проведенная из вершины третьего угла, соответственно равны двум углам и высоте другого треугольника.

10. Если сторона и две высоты, опущенные на две другие стороны, одного треугольника соответственно равны стороне и двум высотам другого треугольника, то такие треугольники равны.

11. Если сторона и две высоты, одна из которых опущена на данную сторону, одного треугольника соответственно равны стороне и двум высотам другого треугольника, то такие треугольники равны.

12. Если угол и две высоты, опущенные на его стороны, одного треугольника соответственно равны углу и двум высотам другого треугольника, то такие треугольники равны.

13. Если угол и две высоты, одна из которых проведена из данного угла, одного треугольника, соответственно равны углу и двум высотам другого треугольника, то такие треугольники равны.

14. Если две стороны и медиана, проведенная к одной из них, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и медиане другого треугольника, то такие треугольники равны.

15. Если две стороны и медиана, заключенная между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и медиане другого треугольника, то такие треугольники равны.

16. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и медиана, проведенная к этой стороне, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и медиане другого треугольника, то эти треугольники равны.

17. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и медиана, проведенная к стороне, противоположной данному углу, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и медиане другого треугольника, то эти треугольники равны.

18. Если угол, сторона, противолежащая этому углу, и медиана, проведенная к другой стороне, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и медиане другого треугольника, то эти треугольники равны.

19. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и медиана, проведенная к другой стороне, прилежащей к данному углу, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и медиане другого треугольника, то эти треугольники равны.

20. Два треугольника равны, если два угла и медиана, проведенная из вершины одного из них, соответственно равны двум углам и медиане другого треугольника.

21. Два треугольника равны, если два угла и медиана, проведенная из вершины третьего угла, соответственно равны двум углам и медиане другого треугольника.

22. Если сторона и две медианы, проведенные к двум другим сторонам, одного треугольника соответственно равны стороне и двум медианам другого треугольника, то такие треугольники равны.

23. Если сторона и две медианы, одна из которых проведена к данной стороне, одного треугольника соответственно равны стороне и двум медианам другого треугольника, то такие треугольники равны.

24. Если угол и две медианы, проведенные к его сторонам, одного треугольника соответственно равны углу и двум медианам другого треугольника, то такие треугольники равны.

25. Если угол и две медианы, одна из которых проведена из вершины данного угла, одного треугольника, соответственно равны углу и двум медианам другого треугольника, то такие треугольники равны.

26. Если две стороны и биссектриса, проведенная к одной из них, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и биссектрисе другого треугольника, то такие треугольники равны.

27. Если две стороны и биссектриса, заключенная между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и биссектрисе другого треугольника, то такие треугольники равны.

28. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и биссектриса, проведенная к этой стороне, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и биссектрисе другого треугольника, то эти треугольники равны.

29. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и биссектриса, проведенная из вершины этого угла, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и биссектрисе другого треугольника, то эти треугольники равны.

30. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и биссектриса, проведенная к другой стороне, прилежащей к данному углу, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и биссектрисе другого треугольника, то эти треугольники равны.

31. Два треугольника равны, если два угла и биссектриса, проведенная из вершины одного из них, соответственно равны двум углам и биссектрисе другого треугольника.

32. Два треугольника равны, если два угла и биссектриса, проведенная из вершины третьего угла, соответственно равны двум углам и биссектрисе другого треугольника.

33. Если у двух равнобедренных треугольников соответственно равны основания и опущенные на них высоты, то такие треугольники равны.

34. Если основание и высота, опущенная на боковую сторону, одного равнобедренного треугольника соответственно равны основанию и высоте другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники равны.

35. Если основание и медиана, проведенная к боковой стороне, одного равнобедренного треугольника соответственно равны основанию и медиане другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники равны.

36. Если основание и биссектриса, проведенная к боковой стороне, одного равнобедренного треугольника соответственно равны основанию и биссектрисе другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники равны.

37. Два треугольника равны, если сторона, медиана и высота, проведенные к этой стороне, одного треугольника соответственно равны стороне, медиане и высоте другого треугольника.

38. Два треугольника равны, если сторона, биссектриса и высота, проведенные к этой стороне, одного треугольника соответственно равны стороне, биссектрисе и высоте другого треугольника.

39. Два треугольника равны, если сторона, медиана и высота, проведенные к другой стороне, одного треугольника соответственно равны стороне, медиане и высоте другого треугольника.

40. Два треугольника равны, если сторона, биссектриса и высота, проведенные к другой стороне, одного треугольника соответственно равны стороне, биссектрисе и высоте другого треугольника.

41. Два треугольника равны, если сторона, медиана и высота, проведенные к двум другим сторонам, одного треугольника соответственно равны стороне, медиане и высоте другого треугольника.

42. Два треугольника равны, если сторона, биссектриса и высота, проведенные к двум другим сторонам, одного треугольника соответственно равны стороне, биссектрисе и высоте другого треугольника.

43. Два треугольника равны, если угол, медиана и высота, проведенные из вершины этого угла, одного треугольника соответственно равны углу, медиане и высоте другого треугольника.

44. Два треугольника равны, если угол, биссектриса и высота, проведенные из вершины этого угла, одного треугольника соответственно равны углу, биссектрисе и высоте другого треугольника.

45. Два треугольника равны, если угол, медиана и высота, проведенные из вершин двух других углов, одного треугольника соответственно равны углу, медиане и высоте другого треугольника.

46. Два треугольника равны, если угол, медиана и высота, проведенные из вершины другого угла, одного треугольника соответственно равны углу, медиане и высоте другого треугольника.

47. Два треугольника равны, если угол, биссектриса и высота, проведенные из вершины другого угла, одного треугольника соответственно равны углу, биссектрисе и высоте другого треугольника.

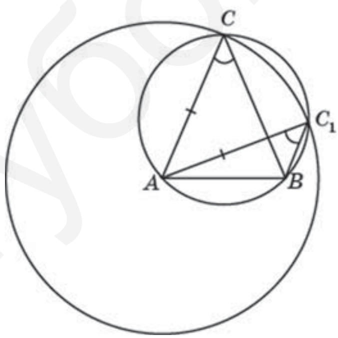
48. Два треугольника равны, если угол, биссектриса, проведенная из его вершины, и высота, опущенная на сторону, прилежащую к этому углу, одного треугольника соответственно равны углу, биссектрисе и высоте другого треугольника.

49. Два треугольника равны, если три высоты одного треугольника соответственно равны трем высотам другого треугольника.

50. Два треугольника равны, если три медианы одного треугольника соответственно равны трем медианам другого треугольника.

Решения

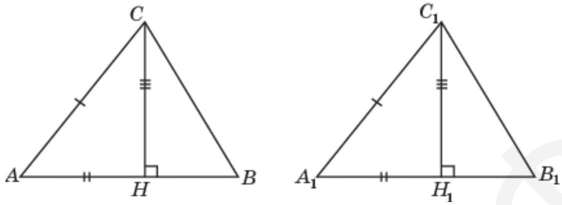
1. Приведем пример, показывающий, что равенства указанных в задаче элементов треугольников ABC и ABC_1 недостаточно для равенства самих треугольников.



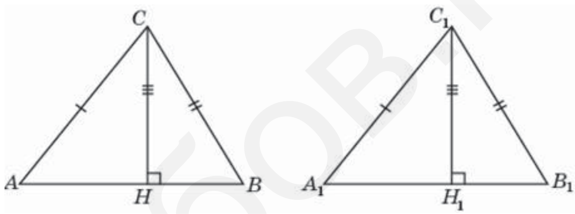
Рассмотрим окружность и ее хорду AB. С центром в точке A проведем другую окружность, пересекающую первую окружность в некоторых точках C и C_1. Тогда в треугольниках ABC и ABC_1 AB — общая сторона, $AC = AC_1$, $\angle C = \angle C_1$, однако треугольники ABC и ABC_1 не равны.

2. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, высота CH равна высоте C_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по катету и гипотенузе. Значит, $\angle A = \angle A_1$. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. Следовательно, эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними.

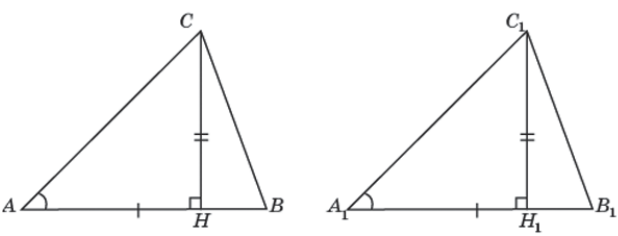


3. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, высота CH равна высоте C_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



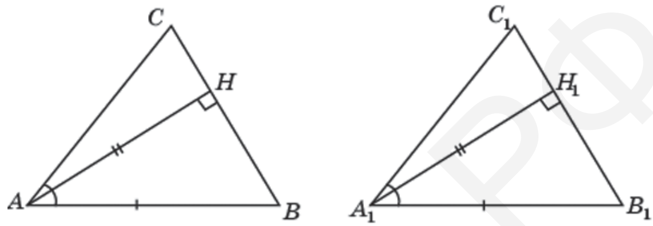
Прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по катету и гипотенузе. Значит, $\angle ACH = \angle A_1C_1H_1$. Аналогично, из равенства треугольников BCH и $B_1C_1H_1$ следует, что $\angle BCH = \angle B_1C_1H_1$. Таким образом, $\angle C = \angle C_1$, следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

4. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, высота CH равна высоте C_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



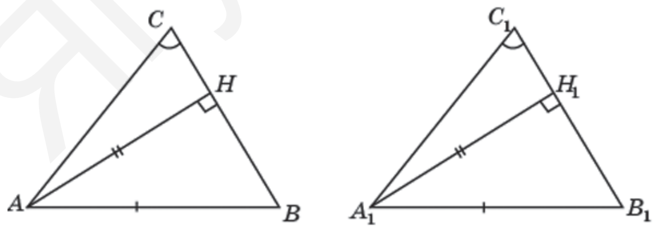
Прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по катету и острому углу. Значит, $AC = A_1C_1$. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. Следовательно, эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними.

5. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, высота AH равна высоте A_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



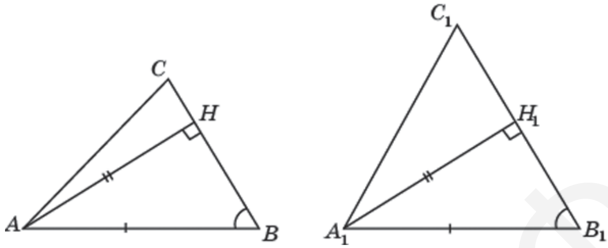
Прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ равны по катету и гипотенузе. Значит, $\angle B = \angle B_1$. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Следовательно, эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

6. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle C = \angle C_1$, высота AH равна высоте A_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



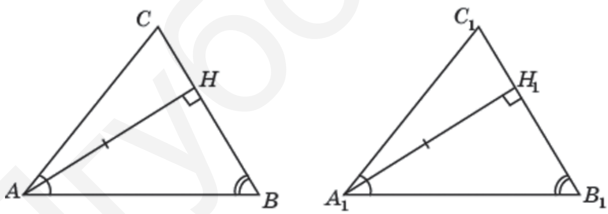
Прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ равны по катету и гипотенузе. Значит, $\angle B = \angle B_1$, откуда $\angle A = \angle A_1$. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Следовательно, эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

7. Приведем пример, показывающий, что равенства указанных в задаче элементов треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ недостаточно для равенства самих треугольников.



Рассмотрим прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$, в которых $\angle H = \angle H_1 = 90^\circ$, $AH = A_1H_1$, $AB = A_1B_1$. На продолжениях сторон BH и B_1H_1 отложим соответственно неравные отрезки HC и H_1C_1. Тогда в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle B = \angle B_1$, высоты AH и A_1H_1 равны, однако сами треугольники не равны.

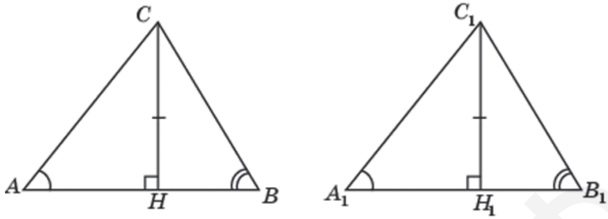
8. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, высота AH равна высоте A_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



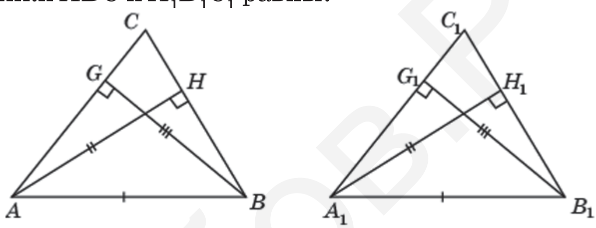
Прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ равны по катету и острому углу. Значит, $AB = A_1B_1$. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Следовательно, эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

9. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, высота CH равна высоте C_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по катету и острому углу. Значит, $AC = A_1C_1$. Кроме того, из равенства углов A и A_1, B и B_1 следует равенство углов C и C_1. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$. Следовательно, эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

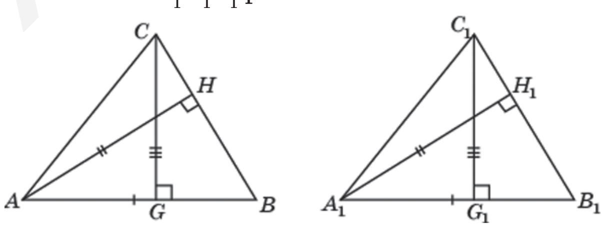


10. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, высота AH равна высоте A_1H_1, высота BG равна высоте B_1G_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



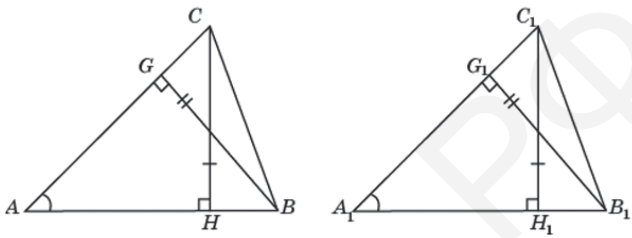
Прямоугольные треугольники ABG и $A_1B_1G_1$ равны по катету и гипотенузе. Значит, $\angle A = \angle A_1$. Аналогично, из равенства треугольников ABH и $A_1B_1H_1$ следует, что $\angle B = \angle B_1$. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Следовательно, эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

11. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, высота AH равна высоте A_1H_1, высота CG равна высоте C_1G_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



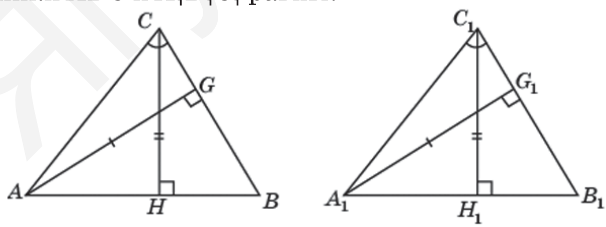
Прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ равны по катету и гипотенузе. Значит, $\angle B = \angle B_1$. Прямоугольные треугольники BCG и $B_1C_1G_1$ равны по катету и острому углу. Значит, $BC = B_1C_1$. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$. Следовательно, эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними.

12. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, высота CH равна высоте C_1H_1, высота BG равна высоте B_1G_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



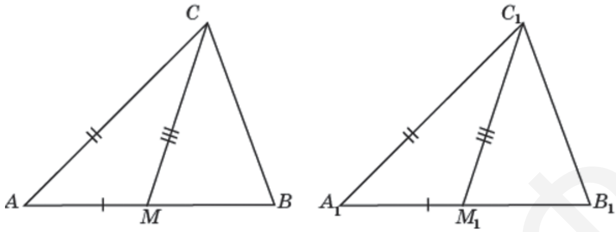
Прямоугольные треугольники ABG и $A_1B_1G_1$ равны по катету и острому углу. Значит, $AB = A_1B_1$. Прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по катету и острому углу. Значит, $AC = A_1C_1$. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. Следовательно, эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними.

13. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle C_1$, высота AG равна высоте A_1G_1, высота CH равна высоте C_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



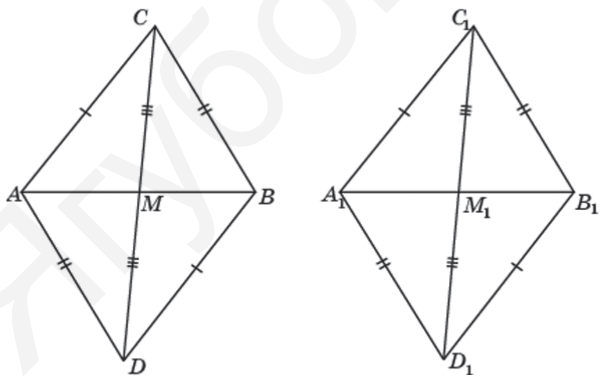
Прямоугольные треугольники ACG и $A_1C_1G_1$ равны по катету и острому углу. Значит, $AC = A_1C_1$. Прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по катету и гипотенузе. Значит, $\angle A = \angle A_1$. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$. Следовательно, эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

14. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, медиана CM равна медиане C_1M_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Треугольники ACM и $A_1C_1M_1$ равны по трем сторонам. Значит, $\angle A = \angle A_1$. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. Следовательно, эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними.

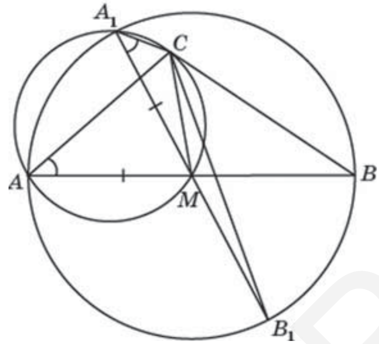
15. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, медиана CM равна медиане C_1M_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Продолжим медианы и отложим отрезки $MD = CM$ и $M_1D_1 = C_1M_1$.

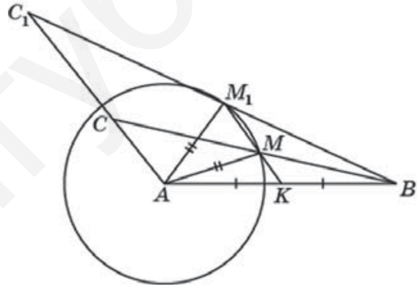
Тогда четырехугольники $ACBD$ и $A_1C_1B_1D_1$ — параллелограммы. Треугольники ACD и $A_1C_1D_1$ равны по трем сторонам. Следовательно, $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$. Аналогично, треугольники BCD и $B_1C_1D_1$ равны по трем сторонам. Следовательно, $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$. Значит, $\angle C = \angle C_1$, и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

16. Приведем пример, показывающий, что равенства указанных в задаче элементов недостаточно для равенства самих треугольников.



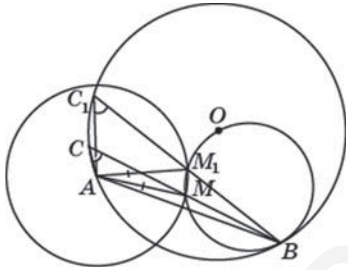
Для этого рассмотрим окружность с центром в точке M. Проведем два диаметра AB и A_1B_1. Через точки A, A_1, M проведем еще одну окружность и выберем на ней точку C, как показано на рисунке. В треугольниках ABC и A_1B_1C $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, медиана CM общая. Однако треугольники ABC и A_1B_1C не равны.

17. Приведем пример, показывающий, что равенства указанных в задаче элементов недостаточно для равенства самих треугольников.



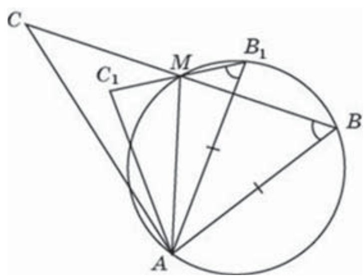
Для этого рассмотрим угол и окружность с центром в вершине A этого угла. На одной стороне угла отложим отрезок AB и через его середину K проведем прямую, параллельную другой стороне и пересекающую окружность в точках M и M_1. Через точку B проведем прямые BM и BM_1, пересекающие сторону угла соответственно в точках C и C_1. В треугольниках ABC и ABC_1 угол A общий, AB — общая сторона, медианы AM и AM_1 равны, однако треугольники ABC и ABC_1 не равны.

18. Приведем пример, показывающий, что равенства указанных в задаче элементов недостаточно для равенства самих треугольников.



Для этого рассмотрим окружность с центром в точке O и окружность в два раза меньшего радиуса, касающуюся первой окружности внутренним образом в точке B. Напомним, что эта окружность без точки B является геометрическим местом середин хорд первой окружности, проходящих через точку B. Проведем хорду AB и окружность с центром в точке A, пересекающую вторую окружность в точках M и M_1. Проведем прямые BM и BM_1, пересекающие первую окружность соответственно в точках C и C_1. В треугольниках ABC и ABC_1 сторона AB общая, $\angle C = \angle C_1$, медианы AM и AM_1 равны. Однако треугольники ABC и ABC_1 не равны.

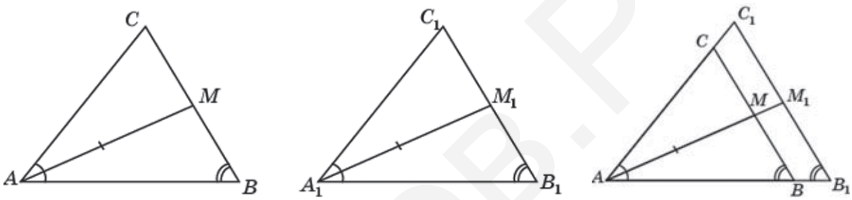
19. Приведем пример, показывающий, что равенства указанных в задаче элементов недостаточно для равенства самих треугольников.



Для этого рассмотрим окружность и проведем равные хорды AB и AB_1. Через точку M окружности проведем прямые BM и B_1M и отложим на них отрезки MC и MC_1 соответственно равные BM и B_1M. В треугольниках ABC и AB_1C_1 $AB = AB_1$, $\angle B = \angle B_1$, медиана AM общая, однако треугольники ABC и AB_1C_1 не равны.

20. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, медиана AM равна медиане A_1M_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

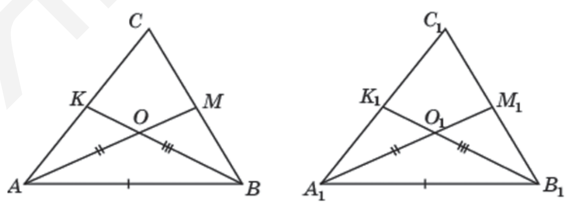
Из равенства углов следует, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Напомним, что преобразование подобия переводит медиану в медиану. Если бы $AB \neq A_1B_1$, то $AM \neq A_1M_1$, что противоречит условию.



Значит, $AB = A_1B_1$, и следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

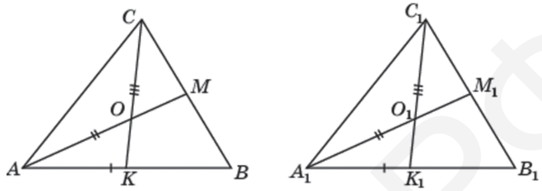
21. Решение аналогично решению предыдущей задачи.

22. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, медиана AM равна медиане A_1M_1, медиана BK равна медиане B_1K_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



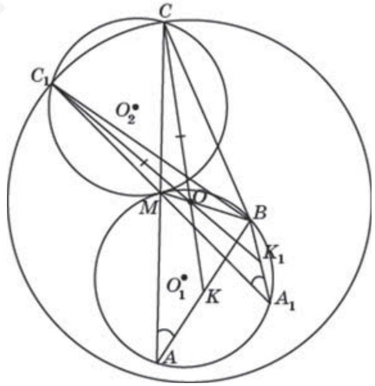
Пусть O, O_1 — точки пересечения медиан данных треугольников. Так как медианы в точке пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины, то треугольники ABO и $A_1B_1O_1$ равны по трем сторонам. Следовательно, $\angle BAO = \angle B_1A_1O_1$, и значит, треугольники ABM и $A_1B_1M_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. Аналогично доказывается, что $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

23. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, медиана AM равна медиане A_1M_1, медиана CK равна медиане C_1K_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



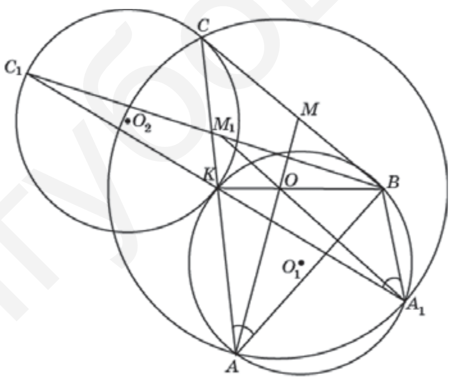
Пусть O, O_1 — точки пересечения медиан данных треугольников. Так как медианы в точке пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины, то треугольники AKO и $A_1K_1O_1$ равны по трем сторонам. Следовательно, $\angle KAO = \angle K_1A_1O_1$, и значит, треугольники ABM и $A_1B_1M_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ и $MB = M_1B_1$ и, следовательно, $BC = B_1C_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

24. Приведем пример, показывающий, что равенства указанных в задаче элементов не достаточно для равенства самих треугольников.



Для этого рассмотрим две равные окружности с центрами в точках O_1 и O_2, касающиеся друг друга в точке M. Проведем в одной из них хорду AB и прямую AM, пересекающую вторую окружность в некоторой точке C. Проведем отрезок BC. Получим треугольник ABC. Проведем в нем медиану CK и обозначим O точку, делящую ее в отношении 2 : 1, считая от вершины C. Проведем окружность с центром в точке O радиуса OC, пересекающую вторую окружность в точке C_1. Проведем прямую C_1M и обозначим A_1 точку ее пересечения с первой окружностью. Обозначим K_1 точку пересечения хорды A_1B и прямой C_1O. В треугольниках ABC и A_1BC_1 $\angle A = \angle A_1$, медианы CK и C_1K_1 равны, так как равны отрезки CO и C_1O, соответственно равные двум третям этих медиан, медиана BM общая. Однако треугольники ABC и A_1BC_1 не равны.

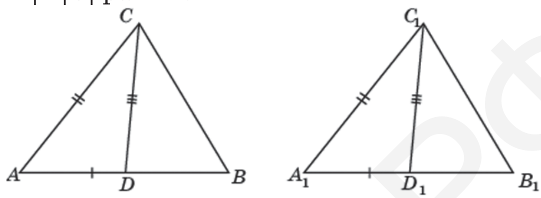
25. Приведем пример, показывающий, что равенства указанных в задаче элементов недостаточно для равенства самих треугольников. Для этого рассмотрим две равные окружности с центрами в точках O_1 и O_2, касающиеся друг друга в точке K.



Проведем в одной из них хорду AB и прямую AK, пересекающую вторую окружность в некоторой точке C. Проведем отрезок BC. Получим треугольник ABC. Проведем в нем медиану BK и обозначим O точку, делящую ее в отношении 2 : 1, считая от вершины B. Проведем окружность радиуса OA, пересекающую первую окружность в точке A_1. Проведем прямую A_1K и обозначим C_1 точку ее пересечения со второй окружностью. Получим треугольник A_1BC_1, в котором O – точка пересечения медиан. В треугольниках

ABC и A_1BC_1 $\angle A = \angle A_1$, медианы AM и A_1M_1 равны, так как равны отрезки AO и A_1O, соответственно равные двум третям этих медиан, медиана BK общая. Однако треугольники ABC и A_1BC_1 не равны.

26. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, биссектриса CD равна биссектрисе C_1D_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Обозначим $AB = A_1B_1 = c$, $AC = A_1C_1 = b$, $CD = C_1D_1 = l$, $BC = a$, $B_1C_1 = a_1$. Докажем, что $a = a_1$. Из этого будет следовать, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам. Воспользуемся формулой для биссектрисы треугольника

$$l^2 = ab - \frac{c^2ab}{(a+b)^2}.$$

Покажем, что, при фиксированных b и c, большему значению a соответствует большее значение l биссектрисы. Производная правой части, как функции от a, равна

$$b - \frac{c^2b(b-a)}{(a+b)^3}.$$

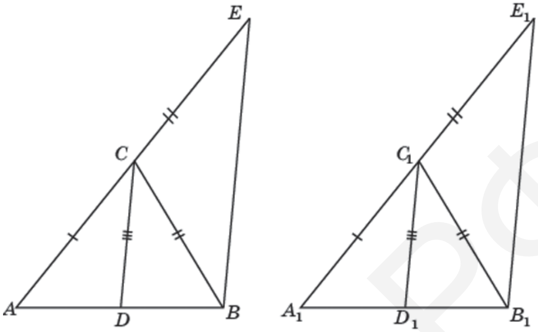
Из неравенства треугольника следует, что $b - a < c$ и $a + b > c$. Откуда получаем, что производная больше нуля, значит, функция строго возрастает, то есть большему значению a соответствует большее значение l. Таким образом, из равенства биссектрис следует равенство сторон a и a_1. Значит, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам.

27. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, биссектриса CD равна биссектрисе C_1D_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

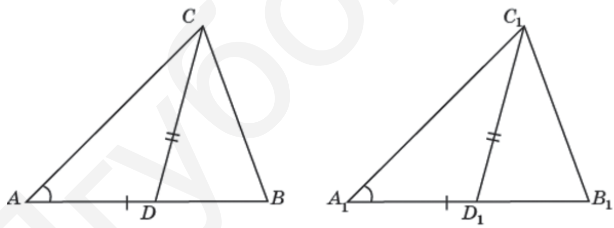
Продолжим стороны AC и A_1C_1 и отложим на их продолжениях отрезки $CE = BC$ и $C_1E_1 = B_1C_1$. Тогда

$$BE = CD \cdot \frac{AE}{AC}, \quad B_1E_1 = C_1D_1 \cdot \frac{A_1E_1}{A_1C_1}.$$

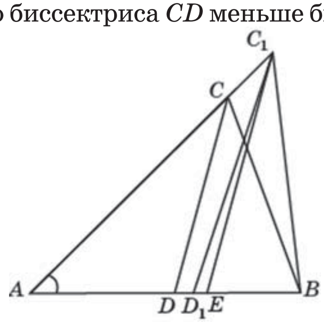
Треугольники BCE и $B_1C_1E_1$ равны по трем сторонам. Значит, $\angle E = \angle E_1$. Треугольники ABE и $A_1B_1E_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $AB = A_1B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам.



28. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, биссектриса CD равна биссектрисе C_1D_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



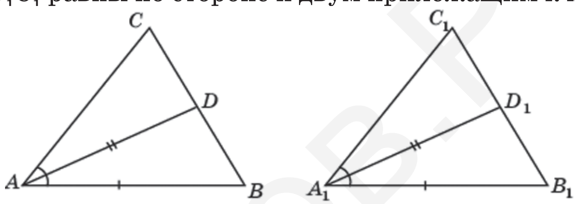
Наложим данные треугольники так, что вершины A и A_1, B и B_1 совпадают, а вершины C и C_1 лежат по одну сторону от AB. Докажем, что если $AC < AC_1$, то биссектриса CD меньше биссектрисы C_1D_1.



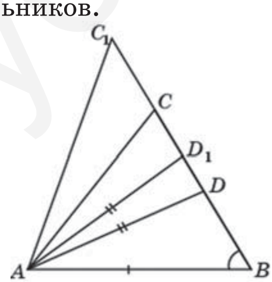
Предположим, что $AC \geqslant BC$. Через вершину C_1 проведем прямую C_1E, параллельную прямой CD. Точка D_1 будет лежать между точками D и E. При этом $CD < C_1E < C_1D_1$. Аналогично доказывается, что $CD < C_1D_1$ в случае, если $AC < BC$. Таким образом, из условия равенства биссектрис следует, что вершины C и C_1 должны совпадать, значит, данные треугольники равны.

29. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, биссектриса AD равна биссектрисе A_1D_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $\angle B = \angle B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.



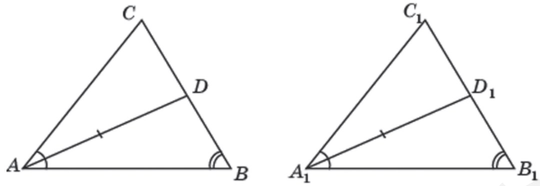
30. Пример треугольников, изображенных на рисунке, показывает, что равенства указанных в задаче элементов недостаточно для равенства треугольников.



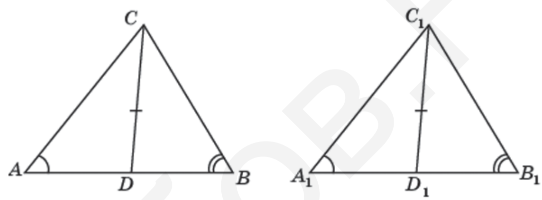
В треугольниках ABC и ABC_1 $\angle B$ — общий, AB — общая сторона, биссектрисы AD и AD_1 равны. Однако треугольники ABC и ABC_1 не равны.

31. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, биссектриса AD равна биссектрисе A_1D_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Значит, $AB = A_1B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

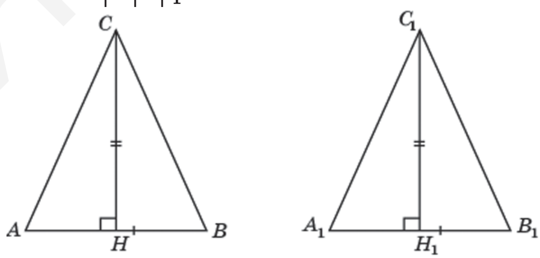


32. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, биссектриса CD равна биссектрисе C_1D_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



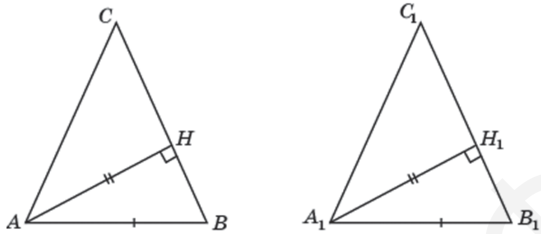
Треугольники ACD и $A_1C_1D_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Значит, $AC = A_1C_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

33. Пусть в равнобедренных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны основания AB, A_1B_1 и высоты CH, C_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



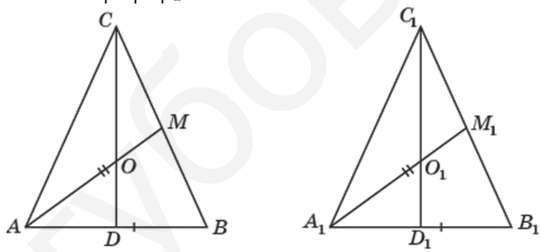
Прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по двум катетам. Значит, $AC = A_1C_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам.

34. Пусть в равнобедренных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны основания AB, A_1B_1 и высоты AH, A_1H_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ равны по катету и гипотенузе. Значит, $\angle B = \angle B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

35. Пусть в равнобедренных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны основания AB, A_1B_1 и медианы AM, A_1M_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Проведем медианы CD и C_1D_1. Точки их пересечения с медианами AM и A_1M_1 обозначим соответственно O и O_1.

Прямоугольные треугольники AOD и $A_1O_1D_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle OAD = \angle O_1A_1D_1$. Треугольники ABM и $A_1B_1M_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $\angle B = \angle B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

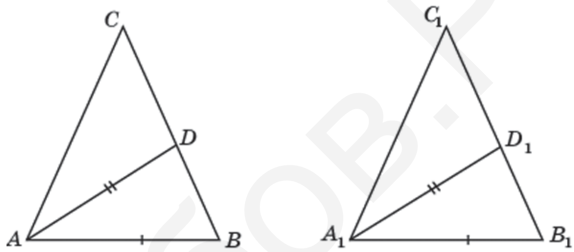
36. Пусть в равнобедренных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны основания AB, A_1B_1 и биссектрисы AD, A_1D_1. Докажем, что эти треугольники равны.

Для этого докажем, что при увеличении боковой стороны равнобедренного треугольника и постоянном основании биссектриса, проведенная к боковой стороне, увеличивается. Предположим, что $AB = 1$, $AC = a$. Тогда для биссектрисы l имеет место формула

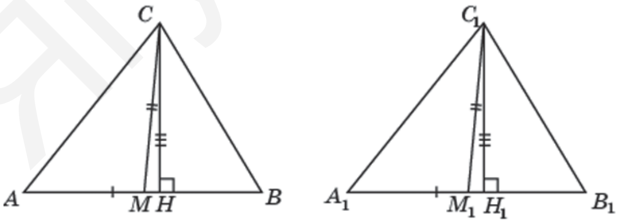
$$l^2 = a - \frac{a^3}{(a+1)^2}.$$

Производная функции, стоящей в правой части этого равенства, равна $1 - \frac{a^3 + 3a^2}{(a+1)^3}$.

Эта производная больше нуля для всех положительных a. Следовательно, большей боковой стороне соответствует большая биссектриса. Равенство биссектрис равнобедренных треугольников с равными основаниями возможно только в случае равенства боковых сторон, т.е. в случае равенства самих треугольников.

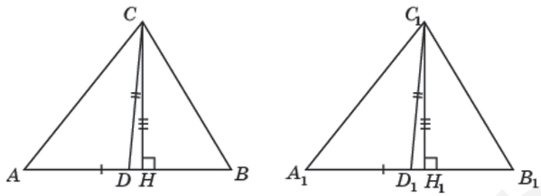


37. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, медианы CM и C_1M_1 равны, высоты CH и C_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

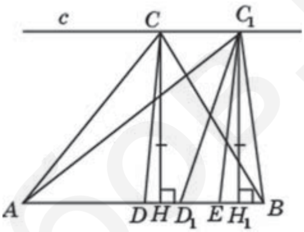


Прямоугольные треугольники CMH и $C_1M_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle CMH = \angle C_1M_1H_1$ и, значит, $\angle AMC = \angle A_1M_1C_1$. Треугольники AMC и $A_1M_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AC = A_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

38. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, биссектрисы CD и C_1D_1 равны, высоты CH и C_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

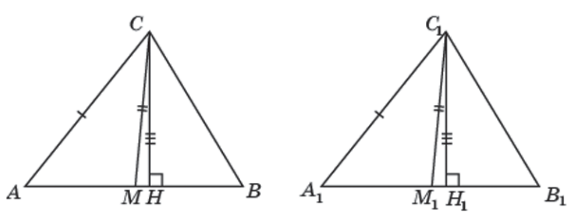


Предположим, что $AC \geq BC$ и $A_1C_1 \geq B_1C_1$. Наложим данные треугольники так, что вершины A и A_1, B и B_1 совпадут, а вершины C и C_1 лежат по одну сторону от AB. Докажем, что если $AC < AC_1$, то биссектриса CD меньше биссектрисы C_1D_1.



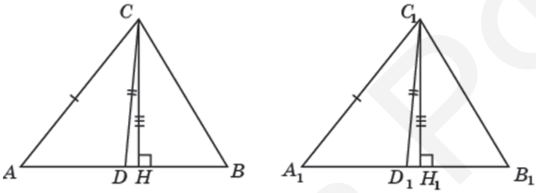
Проведем прямую C_1E, параллельную CD. Угол ACB больше угла AC_1B, угол AC_1E больше угла ACD. Следовательно, угол AC_1E больше угла BC_1E, значит, точка D_1 лежит между точками A и E. Следовательно, $DH < D_1H_1$ и, значит, $CD < C_1D_1$. Таким образом, из условия равенства биссектрис следует, что вершины C и C_1 должны совпадать и, значит, данные треугольники равны.

39. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, медианы CM и C_1M_1 равны, высоты CH и C_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



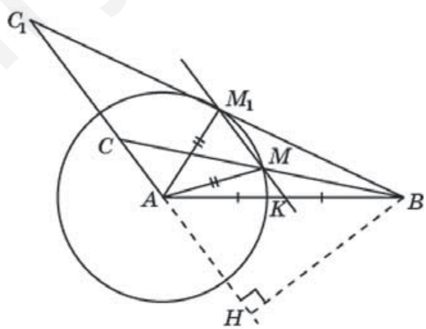
Прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle A = \angle A_1$ и $AH = A_1H_1$. Прямоугольные треугольники CMH и $C_1M_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $MH = M_1H_1$, откуда $AM = A_1M_1$ и, значит, $AB = A_1B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

40. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, биссектрисы CD, C_1D_1 равны, высоты CH, C_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



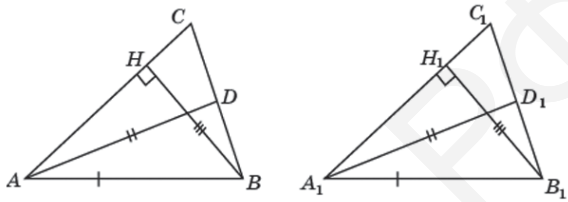
Прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle A = \angle A_1$, $\angle ACH = \angle A_1C_1H_1$. Прямоугольные треугольники DCH и $D_1C_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle DCH = \angle D_1C_1H_1$, откуда $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$ и, значит, $\angle C = \angle C_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

41. Приведем пример, показывающий, что равенства указанных в задаче элементов недостаточно для равенства треугольников.



Рассмотрим окружность и угол с вершиной в центре A этой окружности. Отложим на его стороне отрезок AB, который больше диаметра, и через его середину K проведем прямую, параллельную другой стороне угла и пересекающую окружность в некоторых точках M и M_1. Проведем прямые BM, BM_1 и точки их пересечения со стороной угла обозначим соответственно C и C_1. Тогда в треугольниках ABC и ABC_1 сторона AB — общая, высота BH — общая, медианы AM и AM_1 равны, однако треугольники ABC и ABC_1 не равны.

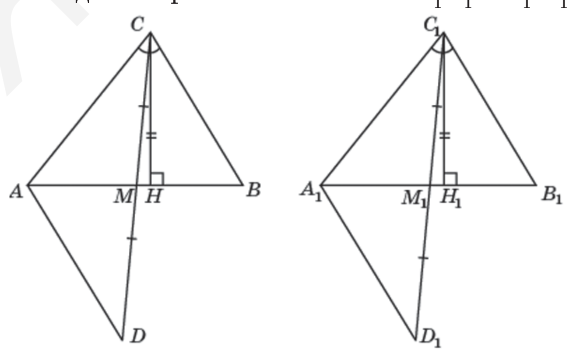
42. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, биссектрисы AD и A_1D_1 равны, высоты BH и B_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle A = \angle A_1$. Треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $\angle B = \angle B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

43. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle C_1$, медианы CM и C_1M_1 равны, высоты CH и C_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

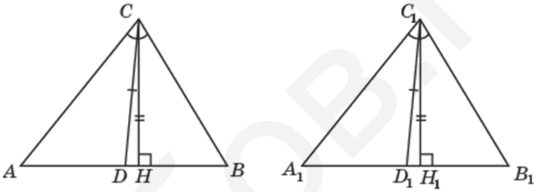
Прямоугольные треугольники CMH и $C_1M_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle AMC = \angle A_1M_1C_1$. Отложим на продолжении медиан отрезки $MD = CM$ и $M_1D_1 = C_1M_1$.



Из равенства углов CAD и $C_1A_1D_1$ следует равенство отрезков AM и A_1M_1. Значит, $AB = A_1B_1$. Кроме того, из равенства треугольников AMC и $A_1M_1C_1$ (по двум сторонам и углу между ними) следует равенство сторон AC и A_1C_1 и углов A и A_1. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

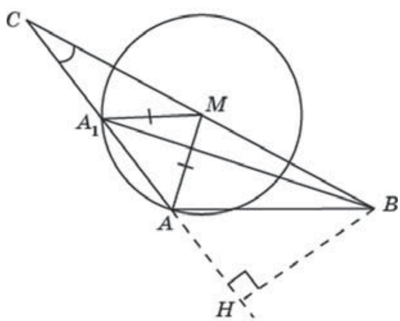
44. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle C_1$, биссектрисы CD и C_1D_1 равны, высоты CH и C_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Прямоугольные треугольники CDH и $C_1D_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle CDH = \angle C_1D_1H_1$. Значит, $\angle ADC = \angle A_1D_1C_1$. Треугольники ADC и $A_1D_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

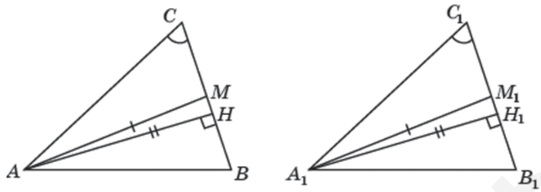


45. Приведем пример, показывающий, что равенства указанных в задаче элементов недостаточно для равенства треугольников.

Рассмотрим треугольник ABC. Проведем окружность с центром в середине M стороны BC и радиусом AM. Обозначим A_1 точку пересечения этой окружности со стороной AC. В треугольниках ABC и A_1BC $\angle C$ — общий, медианы AM и A_1M равны, высота BH — общая. Однако треугольники ABC и A_1BC не равны.



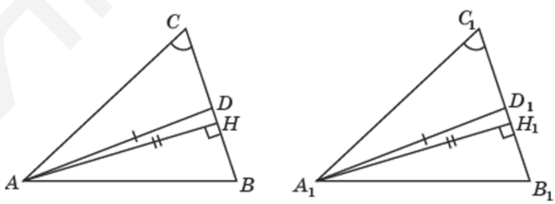
46. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle C_1$, медианы AM и A_1M_1 равны, высоты AH и A_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Прямоугольные треугольниках ACH и $A_1C_1H_1$ равны по катету и острому углу. Следовательно, $AC = A_1C_1$ и $CH = C_1H_1$. Прямоугольные треугольники AMH и $A_1M_1H_1$ равны по катету и гипотенузе. Следовательно, $MH = M_1H_1$ и, значит, $CM = C_1M_1$, и тогда $BC = B_1C_1$. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

47. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle C_1$, биссектрисы AD и A_1D_1 равны, высоты AH и A_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

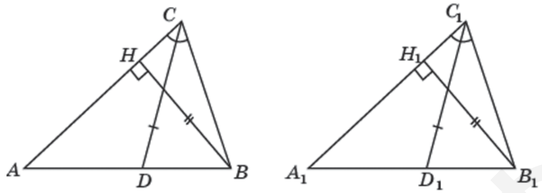
Действительно, прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по катету и острому углу. Следовательно, $AC = A_1C_1$ и $\angle CAH = \angle C_1A_1H_1$. Прямоугольные треугольники ADH и $A_1D_1H_1$ равны по катету и гипотенузе. Следовательно, $\angle DAH = \angle D_1A_1H_1$. Значит, $\angle CAD = \angle C_1A_1D_1$, тогда и $\angle A = \angle A_1$. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.



48. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle C_1$, биссектрисы CD и C_1D_1 равны, высоты BH и B_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

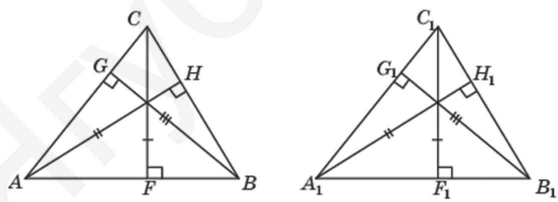
Прямоугольные треугольники BCH и $B_1C_1H_1$ равны по катету и острому углу. Следовательно, $BC = B_1C_1$. Треугольники BCD и $B_1C_1D_1$

равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $\angle B = \angle B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

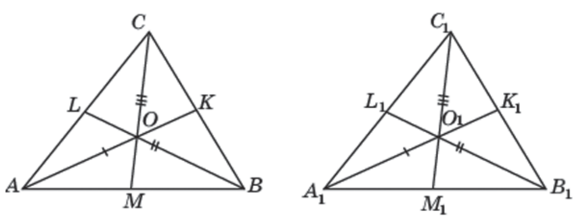


49. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно равны высоты AH и A_1H_1, BG и B_1G_1, CF и C_1F_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Обозначим стороны треугольников соответственно a, b, c и a_1, b_1, c_1, а соответствующие высоты h_a, b_b, h_c и h_{1a}, h_{1b}, h_{1c}. Имеют место равенства $ah_a = bh_b = ch_c$ и $a_1h_{1a} = b_1h_{1b} = c_1h_{1c}$. Разделив почленно первые равенства на вторые, получим равенства $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$, из которых следует, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Так как соответствующие высоты этих треугольников равны, то они не только подобны, но и равны.



50. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно равны медианы AK и A_1K_1, BL и B_1L_1, CM и C_1M_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



Заметим, что медианы OM и O_1M_1 треугольников ABO и $A_1B_1O_1$ равны, так как они составляют одну третью часть соответствующих медиан данных треугольников.

По признаку равенства треугольников, доказанному нами при решении задачи под номером 15, треугольники ABO и $A_1B_1O_1$ равны, значит, $AB = A_1B_1$.

Аналогично доказывается, что $BC = B_1C_1$ и $AC = A_1C_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 3
Задачи 4
Решения 8

УДК 372.851
ББК 74.262.21
С50

Общая редакция серии «Математика»: *Л.О. Рослова*

Смирнова И.
С50 50 задач о равенстве треугольников / И. Смирнова, В. Смирнов. – М. : Чистые пруды, 2010. – 32 с. : ил. – (Библиотечка «Первого сентября», серия «Математика». Вып. 32).

ISBN 978-5-9667-0678-4

Пособие содержит задачи по геометрии на доказательство, изучение которых способствует формированию умений рассуждать, анализировать, отличать верное утверждение от неверного, доказывать. Решения всех задач сопровождаются рисунками.

Пособие предназначено для тех, кто хочет научиться решать задачи на доказательство.

УДК 372.851
ББК 74.262.21

Учебное издание

СМИРНОВА Ирина Михайловна
СМИРНОВ Владимир Алексеевич

50 ЗАДАЧ О РАВЕНСТВЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Редактор *О.В. Макарова*
Корректор *Л.А. Громова*
Компьютерная верстка *Л.А. Кукушкина*
Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-19078 от 08.12.2004 г.

Подписано в печать 24.12.2009.
Формат 60×90 1/16. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная. Печ. л. 2,0
Тираж экз. Заказ №

ООО «Чистые пруды», ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
Тел. (499) 249-28-77, http://www.1september.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в филиале ГУП МО «КТ» «Раменская типография»
Сафоновский пр., д. 1, г. Раменское, МО, 140100
Тел. (495) 377-07-83. E-mail: ramentip@mail.ru

ISBN 978-5-9667-0678-4