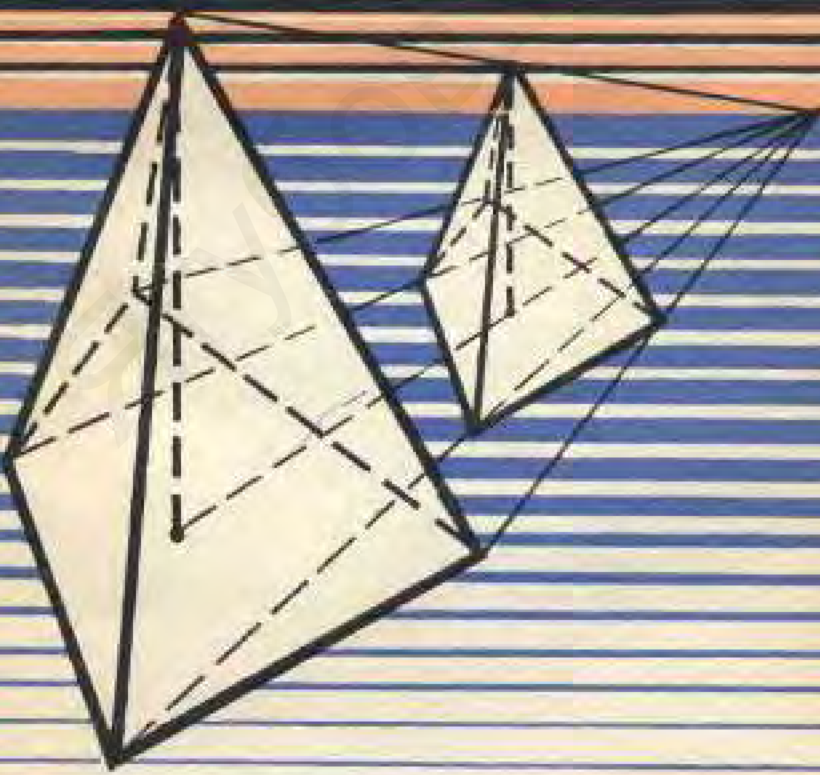
А.Б. Василевский

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ ПО ГЕОМЕТРИИ



А. Б. Василевский

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ ПО ГЕОМЕТРИИ

VI—X классы

Пособие для учителя

Рекомендовано Министерством просвещения БССР

Минск
«Народная асвета»
1983

ББК 74.262.7
В 19
УДК 513(07.07)

Рецензенты:
кандидат педагогических наук, старший научный сотрудник НИИ педагогики МП БССР В. Ю. Гуревич,
заслуженный учитель БССР И. И. Паний

Василевский А. Б.
В 19 Устные упражнения по геометрии: VI—X кл. Пособие для учителя.— Мн.: Нар. асвета, 1983.— 80 с., ил.
15 к.

Пособие содержит устные упражнения различной степени трудности, принципиально нестандартные как по содержанию, так и по методам решения. Их можно использовать при изучении нового материала, при повторении пройденных тем, а также во внеклассной работе с учащимися VI—X классов.
Книга адресуется учителям математики.

В $\frac{4306010000-101}{М303(05)-83}$ 114—82 ББК 74.262.7

Предисловие

Устные упражнения предлагаются учащимся на уроках геометрии с различными целями. Они способствуют формированию операционных, логических и конструктивных навыков, развитию устной речи учащихся, подготовке к изучению нового материала и к предстоящей самостоятельной работе, помогают углубить и расширить знания по тем или иным темам и ликвидировать пробелы. Эти цели тесно связаны между собой. Поэтому большинство устных упражнений должно преследовать одновременно несколько целей.

Для предупреждения неуспеваемости необходим систематический учет знаний, умений, навыков каждого ученика на каждом уроке. К концу урока учителю математики нужно знать, как усвоили ученики новые понятия, содержание теорем и методы их доказательства, важнейшие свойства геометрических фигур. Только тогда можно осуществлять индивидуальный подход в обучении, дифференцировать самостоятельные задания как на уроке, так и вне его, добиваться глубоких и прочных знаний.

Учителю математики на каждом уроке необходимо осуществлять быструю эффективную обратную связь (ученик — учитель) с тем, чтобы знать, как организовать работу с отдельными группами учащихся. Оперативная обратная связь нужна и для систематической проверки правильности выполнения домашних заданий всеми учениками класса. В реализации этой обратной связи значительное место отводится устным упражнениям, особенно тем, которые позволяют организовать безмашинный программированный контроль.

Материал настоящего сборника соответствует содержанию действующих учебных пособий по геометрии для восьмилетней и средней школы.

Одной из особенностей сборника является наличие большого количества чертежей, которые позволяют организовать устное решение достаточно сложных по содержанию и формулировке задач. Если эти чертежи перенести на кодопозитивы (транспаранты), то можно организовать эффективную фронтальную работу на уроках геометрии.

Сборник содержит много нестандартных по содержанию и методам решения упражнений. Такие упражнения помогают создать у учащихся отчетливые представления о трехмерном пространстве, формируют диалектико-материалистическое мировоззрение.

Первые четыре параграфа посвящены геометрическим движениям (центральная и осевая симметрии, поворот и параллельный перенос).

В § 5 помещены упражнения, которые дают возможность организовать проблемные ситуации при изучении свойств различных многоугольников. В этом параграфе есть упражнения и для углубления понятий «необходимо», «достаточно», «необходимо и достаточно».

В § 7, 8 содержится материал, который позволяет углубить знание учащимися основных свойств преобразований подобия и гомотетии.

§ 9 включает устные задачи на построение по планиметрии. Эти задачи решаются по готовым чертежам. В ряде упражнений предлагается составить только устный план решения конструктивных задач. Многие из них носят комбинаторный характер, имеют элементы занимательности, что повышает интерес учащихся к изучению геометрии.

Упражнения на геометрические величины (§ 10) способствуют пониманию того, как часто геометрические методы следует увязывать с аналитическими способами решения задач. Ознакомление учащихся с идеей измерения геометрических величин важно для понимания ими внутри- и межпредметных связей различных наук.

Большое место в школьном преподавании занимает комплексное повторение различных разделов математики. Поэтому в сборник включен § 11, программированные задания которого позволяют учителю эффективно организовать проверку знаний в конце учебного года (это замечание относится, прежде всего, к системам упражнений 11.3, 11.8, 11.9).

Основное содержание § 12—14 — это устные упражнения программированного характера, которые дают возможность осуществить обратную связь при изучении всех основных вопросов курса геометрии IX класса. Для того чтобы снизить до минимума вероятность угадывания ответов, в большинстве из этих заданий имеется по нескольку однотипных по содержанию вопросов.

Для изучения различных видов многогранников предназначены упражнения § 15—20. Здесь предлагаются задания на развитие конструктивных способностей, составление устных планов решения задач различной трудности. Наличие большого числа рисунков позволяет существенно сократить время на выполнение таких упражнений.

Рассмотрение готовых разверток многогранников (§ 21) или несложных заданий по их преобразованию развивает пространственное представление учащихся, их комбинаторные способности.

В § 6, 22, 23 рассматриваются нестандартные упражнения, в которых используются основные свойства окружности, круга, цилиндра и конуса.

Многие задачи на вычисление могут быть решены только при помощи чертежа, выполненного с соблюдением всех свойств параллельных проекций. Поэтому значительная часть упражнений § 24 посвящена выяснению того, пересечением каких прямых и плоскостей являются центры шаров, вписанных в многогранники и описываемых вокруг них.

Устные упражнения имеют целый ряд дидактических достоинств. В частности, на запись условия, оформление чертежа и решения письменной задачи ученики часто тратят больше времени, чем на поиск ее решения. Учителю приходится много времени тратить на проверку письменных заданий. Поэтому в сборнике применяются некоторые способы более рациональной и наглядной записи условия задач и оформления чертежей. Дополнительные обозначения на самих чертежах облегчают понимание условия задачи, ускоряют составление плана решения, что очень важно при работе с устными упражнениями.

Наиболее трудные упражнения отмечены звездочкой (*).

§ 1. Центральная симметрия

1.1. Может ли невыпуклый шестиугольник иметь центр симметрии?

1.2. Может ли невыпуклый четырехугольник иметь центр симметрии?

1.3. Чем является преобразование, обратное центральной симметрии?

1.4. Почему никакой треугольник не имеет центра симметрии?

1.5. Постройте шестиугольник, который имеет центр симметрии.

1.6. Точка D_1 симметрична точке D относительно точки A. Найдите координаты точки D_1, если $D\ (a;\ b)$ и $A\,(m;\ n)$.

1.7. Запишите уравнение прямой, симметричной графику функции $y=-2x-2$ относительно точки $(1;\ 0)$.

1.8. Запишите уравнение кривой, симметричной графику функции $y=2^x$ относительно начала координат.

1.9. Точка A_1 симметрична точке A относительно точки O. Запишите это утверждение при помощи векторов.

1.10. На рисунке 1 изображены две равные окружности, которые соприкасаются в точке K. Верно ли, что $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{KA}$?

1.11. В какую фигуру переводится данный треугольник ABC двумя последовательно выполненными центральными симметриями относительно одной и той же точки M?

1.12. В каком случае имеет центр симметрии фигура, которая составлена из окружности и точки?

1.13. Как одной прямой разделить параллелограмм на две равные части?

1.14. Является ли преобразование, которое переводит фигуру в эту же фигуру, центральной симметрией?

1.15. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм (рис. 2). Докажите, что четырехугольник $MPHK$ — параллелограмм (M и P — произвольные точки отрезка BC).

1.16. Верны ли утверждения:

а) чтобы четырехугольник был ромбом, необходимо и достаточно, чтобы он имел центр симметрии;

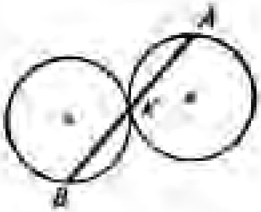


Рис. 1

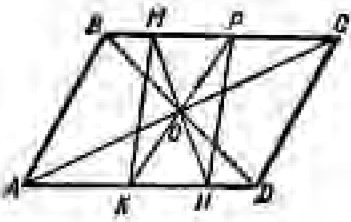


Рис. 2

б) чтобы четырехугольник был ромбом, достаточно, чтобы он имел центр симметрии;

в) чтобы четырехугольник был ромбом, необходимо, чтобы он имел центр симметрии?

1.17. Какому условию должны удовлетворять две полупрямые, чтобы одна из них получалась из другой при помощи центральной симметрии?

1.18. Имеет ли фигура, которая составлена из полосы и прямой, не принадлежащей ей, центр симметрии?

1.19. Сколько центров симметрии имеет полупрямая?

1.20. Существуют ли прямые, которые при помощи центральной симметрии переходят в себя?

1.21. Дана фигура Ф — прямоугольник $ABCD$. Точка O — центр его симметрии. Фигура $Ф_1$ симметрична фигуре Ф относительно точки O. Назовите фигуру, которая является общей частью фигур Ф и $Ф_1$. Назовите фигуру, которая составлена из фигур Ф и $Ф_1$.

1.22. Точка A движется по окружности (с центром O в начале координат) по часовой стрелке. В каком направлении будет двигаться точка A_1, симметричная точке A относительно точки O?

§ 2. Поворот

2.1. В какую из указанных на рисунке 3 точек (A, B, C, D) переводится точка A путем ее поворота вокруг точки O по ходу часовой стрелки на угол 90°?

2.2. Дана равнобочная трапеция $ABCD$ (AD и BC — ее основания; стороны AB, BC и CD равны между собой; сторона AD в два раза длиннее стороны BC; угол BAD равен 60°). Пересечением каких прямых является центр поворота, который переводит: а) луч AB в луч DC; б) луч AB в луч CD; в) луч BD в луч AC; г) луч BD в луч CA? Найдите углы этих поворотов.

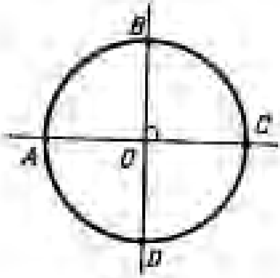


Рис. 3

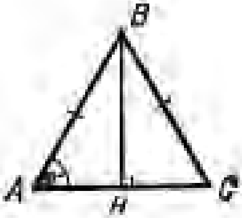


Рис. 4

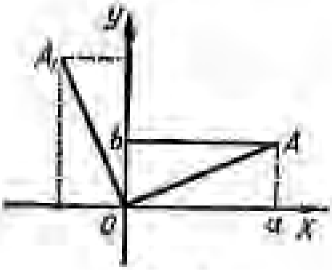


Рис. 5

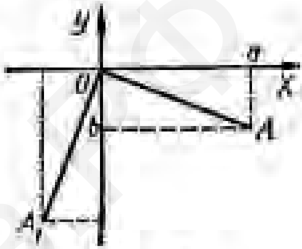


Рис. 6

2.3. Почему правильный треугольник имеет только один центр поворота?

2.4. Треугольник ABH повернули на 30° против хода часовой стрелки вокруг точки B. Получили треугольник BH_1A_1 (рис. 4). Какая фигура является общей частью треугольников BHC и BH_1A_1? Назовите фигуру, которая составлена из треугольников BHC и BH_1A_1.

2.5. Точка A $(a; b)$ повернута вокруг начала координат против хода часовой стрелки на прямой угол. Получили точку A_1. Найдите ее координаты (рис. 5).

2.6. Точка A $(a; b)$ повернута вокруг начала координат по ходу часовой стрелки на прямой угол. Получили точку A_1. Найдите ее координаты (рис. 6).

2.7. Точка B_1 получена поворотом точки B вокруг точки A против хода часовой стрелки на прямой угол. Найдите координаты точки B_1, если B $(m; n)$ и A $(a; b)$ (рис. 7).

2.8. Точка B_1 получена поворотом точки B вокруг точки A по ходу часовой стрелки на прямой угол. Найдите координаты точки B_1, если $B(2; 3)$ и $A(-1; 2)$ (рис. 8).

2.9. Сколько точек и прямых переводится в себя при их повороте вокруг точки на угол, отличный от развернутого?

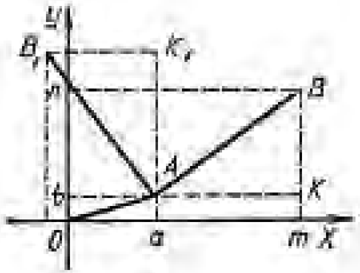


Рис. 7

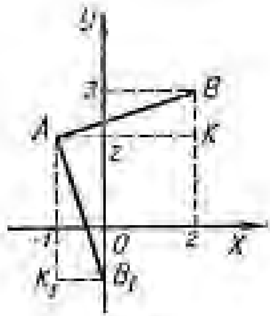


Рис. 8

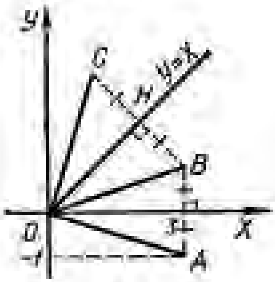


Рис. 9

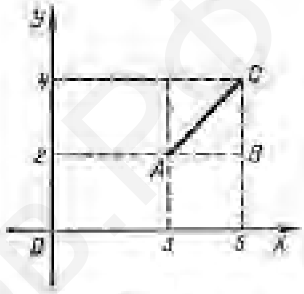


Рис. 10

2.10*. Точка A (3; − 1) переведена в точку B осевой симметрией относительно оси Ox, а точка B переведена осевой симметрией относительно прямой $y=x$ в точку C (рис. 9). Запишите координаты точек B и C. Можно ли точку A перевести в точку C некоторым поворотом?

2.11*. Можно ли из трех правильных равных треугольников составить четырехугольник, который имеет центр симметрии?

2.12*. Точки B и C повернуты вокруг точки A на 90° против хода часовой стрелки. Запишите координаты точек B_1 и C_1, в которые переведены точки B и C (рис. 10).

§ 3. Осевая симметрия

3.1. Сколько осей симметрии может иметь тупоугольный треугольник?

3.2. Может ли невыпуклый шестиугольник иметь две оси симметрии?

3.3. Какое наибольшее число осей симметрии может иметь невыпуклый пятиугольник?

3.4. Какое наибольшее число осей симметрии может иметь невыпуклый четырехугольник?

3.5. Почему диагональ неравностороннего прямоугольника $ABCD$ не является его осью симметрии?

3.6. Почему прямая, которой принадлежит средняя линия MK параллелограмма $ABCD$ с острым углом и неравными смежными сторонами, не является его осью симметрии ($\vec{AM}=\vec{MB}$, $\vec{CK}=\vec{KD}$)?

3.7. Почему прямоугольный равнобедренный треугольник имеет только одну ось симметрии?

3.8. Точка K_1 симметрична точке K относительно прямой l. Найдите координаты точки K_1, если K $(a;\ b)$ и l — прямая $y=m$.

3.9. Сколько осей симметрии имеет плоский угол (острый, прямой, тупой, развернутый, больше $180°$, в $360°$)?

3.10. Точка D_1 симметрична точке D относительно прямой l. Найдите координаты точки D_1, если $D(-b;\ a)$ и l — биссектриса второго и четвертого координатных углов.

3.11. Сколько точек и прямых переходятся в себя осевой симметрией?

3.12. Существует ли осевая симметрия, которая переводит полупрямую в себя?

3.13. Каким движением можно заменить три последовательно выполненные осевые симметрии относительно параллельных прямых?

3.14. Движение F оставляет точки A и B на месте. Верно ли, что это движение является осевой симметрией?

3.15. Верно ли утверждение: «Если $AC=BC$, то точки A и B симметричны относительно всякой прямой, проходящей через точку C»?

3.16. Прямые $y=\ldots x+3$ и $y=x+\ldots$ симметричны прямой $y=x$. Допишите уравнения этих прямых.

3.17. Назовите пропущенные координаты точек $A(-1;\ldots)$ и $B(4;\ \ldots)$, если эти точки симметричны относительно прямой $y=x$.

3.18. Прямые $y=\ldots x-3$ и $y=-4x+\ldots$ симметричны относительно оси Ox. Допишите уравнения этих прямых.

3.19. Прямые $y=x+\ldots$ и $y=\ldots x-7$ симметричны относительно оси Oy. Допишите уравнения этих прямых.

3.20. Точки A $(\ldots;\ 6)$ и B $(2;\ \ldots)$ симметричны относительно оси Oy. Назовите пропущенные координаты этих точек.

3.21. Точки A и A_1 лежат на одном и том же перпендикуляре к прямой l. Можно ли считать эти точки симметричными относительно прямой l?

§ 4. Векторы на плоскости

4.1. Покажите на чертеже взаимное положение точек A, B, C и D, если: а) $\vec{AB}\cdot\vec{CD}=0$; б) $\vec{CA}=k\vec{CD}$ ($k<0$); в) $\vec{AC}=-0,25\vec{AB}$; г) $\vec{CA}=k\vec{CD}$ (k — любое действительное число); д) $\vec{AC}=\vec{CB}$; е) $\vec{CA}=k\vec{CD}$ ($0\leqslant k\leqslant 2$); ж) $\vec{AC}=-0,5\vec{CB}$; з) $\vec{AC}=\vec{AD}+\vec{AB}$; и) $\vec{AC}=-0,5\vec{AD}+2\vec{AB}$; к) $\vec{AB}=k\vec{CD}$ (k — любое отрицательное число, меньшее -2).

4.2. Запишите при помощи векторных равенств следующие утверждения: а) прямые AB и CD перпендикулярны; б) точка A принадлежит прямой BC; в) точка A принадлежит отрезку BC; г) точка C является серединой отрезка AB; д) точка C принадлежит отрезку AB и $AC:CB=1:2$; е) точка D принадлежит плоскости ABC; ж) прямые AB и CD параллельны.

4.3. Дан параллелограмм $ABCD$ (рис. 11). $\vec{BK}=0,5\vec{BC}$. Выразите векторы $\vec{AK}$ и $\vec{DK}$ через векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$.

4.4. Дан параллелограмм $ABCD$ (рис. 12). $\vec{DM}=\vec{MC}$; $\vec{AP}=0,25\vec{AB}$; $\vec{AT}=-0,5\vec{AB}$; $\vec{AX}=-\vec{AD}$; $\vec{BK}=0,5\vec{BC}$; $\vec{BH}=1,5\vec{BC}$. Выразите через векторы $\vec{AD}$ и $\vec{AB}$ следующие векторы: а) $\vec{KM}$; б) $\vec{XT}$; в) $\vec{PM}$; г) $\vec{AH}$; д) $\vec{TX}+\vec{XD}-\vec{DP}$; е) $2\vec{AC}-\vec{CH}$; ж) $2\vec{XP}-3\vec{PK}$.

4.5. Дан параллелограмм $ABCD$. Найдите x и y, если а) $2x\vec{AD}=3y\vec{AB}$; б) $3x\vec{AD}-4y\vec{AB}=\vec{0}$; в) $(2+x)\vec{AD}+(y-2x)\vec{AB}=\vec{0}$; г) $(2-y)\vec{AD}+(x-5)\vec{AC}=\vec{0}$.

4.6. Назовите номера правильных утверждений (рис. 13):
1) $\vec{OB}=\vec{OA}+\vec{A_1T}$; 2) $\vec{KB}=-3\vec{LH}$; 3) $\vec{TA}+\vec{AO}=\vec{TO}$;
4) $\vec{RL}=\vec{RT}+\vec{RP}$; 5) $\vec{HL}=\vec{GF}$; 6) $\vec{OB}=\vec{OF}$;
7) $\vec{AB}=\vec{AM}+\vec{AO}$; 8) $\vec{OL}=0,5(\vec{OR}+\vec{OK})$; 9) $\vec{NB}=2\vec{OF}$;
10) $\vec{NF}=\vec{OF}+\vec{GF}$; 11) $\vec{TA}+\vec{A_1N}=\vec{FF}$; 12) $\vec{HL}=0,5(\vec{OP}+\vec{OG})$;
13) $\vec{KN}+\vec{NG}=\vec{PO}$; 14) $\vec{HL}=\vec{AM}$; 15) $\vec{LT}=0,5\vec{LR}+0,5\vec{LO}$;
16) $\vec{RL}=0,5\vec{RP}+\vec{RO}$; 17) $\vec{PH}=0,75\vec{RK}$; 18) $\vec{TA}=-0,5\vec{OP}$;
19) $\vec{TA}+\vec{AM}=\vec{TR}+\vec{RM}$; 20) $\vec{FO}=\frac{1}{3}\vec{FH}+\vec{FC}$.

4.7. Сколько существует параллельных переносов, которые переводят прямую в себя?

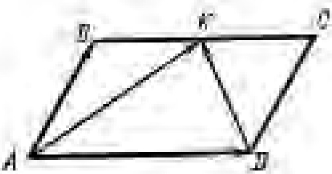


Рис. 11

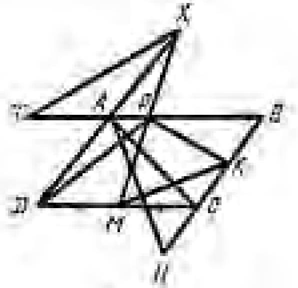


Рис. 12

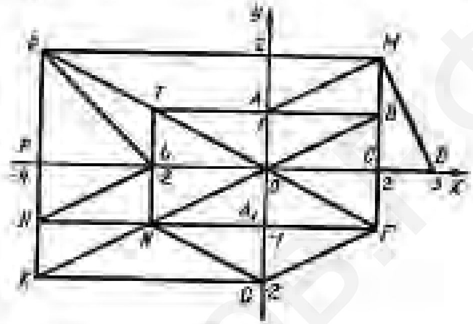


Рис. 13

4.8. Какие окружности можно преобразовать одна в другую параллельным переносом?

4.9. Какие углы можно перевести один в другой при помощи параллельного переноса?

4.10. Существует ли параллельный перенос, который переводит отрезок MK в себя?

4.11. Можно ли один из одинаково направленных лучей преобразовать в другой параллельным переносом?

4.12. При каком условии можно один отрезок преобразовать в другой параллельным переносом?

4.13. Запишите при помощи векторов условие того, что точки A, B, C, D принадлежат одной прямой.

4.14. Запишите при помощи векторов условие того, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом.

4.15. Дан треугольник ABC. Запишите при помощи векторов условие того, что точка M лежит внутри этого треугольника (точка M принадлежит отрезку AK, и точка K делит отрезок CB в отношении 3 : 2).

4.16*. Докажите, что углы при основании равнобочной трапеции $ABCD$ равны.

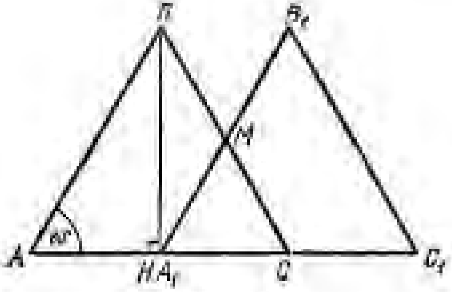


Рис. 14

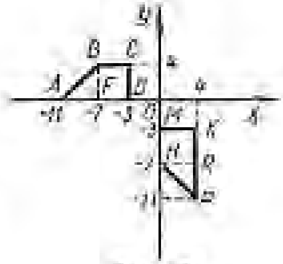


Рис. 15

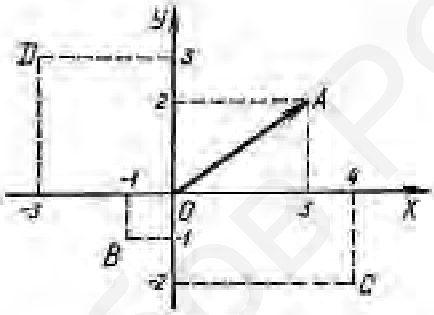


Рис. 16

4.17*. На рисунке 14 показан правильный треугольник ABC. Треугольник $B_1A_1H_1$ получен из треугольника BAH параллельным переносом (при этом переносе точка A переводится в точку H). Что является общей частью треугольников BHC и $B_1A_1H_1$?

4.18. Векторы $\vec{a}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ равны. Найдите координаты точки C_1, если $C(x;\ y)$ и $\vec{a} = (m;\ n)$.

4.19*. График функции $y = \frac{2(2-x)}{x-1}$ переведен параллельным переносом $x' = x+1$, $y' = y+1$ в кривую l. Составьте уравнение кривой l.

4.20. При помощи какого преобразования график функции $y = \sqrt{x-2}$ переводится в график функции $y = \sqrt{x-4}$?

4.21. Кривая l получена из графика функции $y = x(x-2)$ параллельным переносом $x' = x+2$, $y' = y$. Напишите уравнение кривой l.

4.22 *. Сколько точек и прямых переводит в себя параллельный перенос?

4.23. При каком условии два последовательно выполненных параллельных переноса переводят данную точку A в себя?

4.24 *. Многоугольники, показанные на рисунке 15, заданы координатами вершин.

а) Существует ли такой параллельный перенос, при котором общая часть преобразованной трапеции $MKPH$ и четырехугольника $ABCD$ является квадратом $BCDF$?

б) При помощи каких последовательно выполненных поворота и параллельного переноса трапеции $MKPH$ получается фигура, общая часть которой с трапецией $ABCD$ является треугольником FCD?

4.25. Даны функции:

1) $y=x^2+1$; 2) $y=x$; 3) $y=(3+x)^2$;

4) $y=x^2$; 5) $y=(x-2)^2$; 6) $y=(x-4)^2$;

7) $y=|x|$; 8) $y=-1$; 9) $y=|x+2|$.

Назовите такие пары функций, график одной из которых можно получить при помощи параллельного переноса из графика другой функции.

4.26 *. Назовите параллельный перенос, который параболу $y=x^2$ переводит в параболу $y=x^2-2x-3$.

4.27. Параллельный перенос переводит точку $O(0; 0)$ в точку $A(3; 2)$. Назовите координаты точек B_1, C_1, D_1, которые получаются из точек B, C, D этим параллельным переносом (рис. 16).

§ 5. Многоугольники

5.1. Сколько квадратов и треугольников изображено на рисунке 17?

5.2. На рисунке 18 показан прямоугольник. Сколько существует треугольников, у которых одна вершина находится в точке A, а две другие — в каких-либо остальных точках (M, B, C, K, D)?

5.3. Докажите, что нельзя провести прямую так, чтобы она пересекала все стороны 1001-угольника.

5.4. Может ли диагональ параллелограмма равняться его стороне?

5.5. Могут ли стороны пятиугольника быть равными 1, 2, 4, 8, 16 м?

5.6. В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 100 см, вторая — 40 см. Какая из них является основанием?

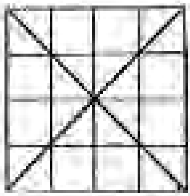


Рис. 17

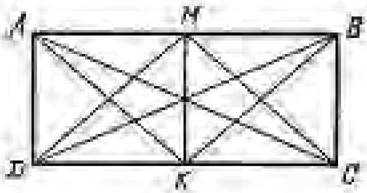


Рис. 18

5.7. Установите вид четырехугольника, вершинами которого являются точки пересечения графиков функций:

$$y=-x+4,\ y=-x-4,\ y=2x+4,\ y=2x-4.$$

5.8. Докажите, что следующее утверждение ошибочно: если в четырехугольнике один угол прямой, а диагонали равны, то он является прямоугольником.

5.9. Длины трех сторон треугольника равны 2, 3 и 4. Каков вид этого треугольника?

5.10. Существует ли такой ромб, у которого обе диагонали равны его стороне?

5.11. Сформулируйте свойство параллелограмма, которое не является ни достаточным, ни необходимым.

5.12. Верны ли утверждения:

а) для того чтобы параллелограмм был квадратом, необходимо и достаточно, чтобы диагонали параллелограмма были взаимно перпендикулярны;

б) для того чтобы параллелограмм был прямоугольником, необходимо и достаточно, чтобы прямая, содержащая середины двух противоположных сторон параллелограмма, была его осью симметрии?

5.13. Верно ли утверждение: если прямая проходит через середину боковой стороны треугольника и отрезок ее, заключенный между боковыми сторонами, равен половине основания треугольника, то этот отрезок является средней линией данного треугольника?

5.14. Назовите какие-либо общие свойства: а) трапеции и ромба; б) треугольника и параллелограмма; в) прямоугольника и круга.

5.15. Какие многоугольники обладают следующими свойствами (всеми или частью из них): 1) все стороны равны; 2) все углы равны; 3) все диагонали равны; 4) диагонали взаимно перпендикулярны; 5) диагонали делят углы многоугольника пополам; 6) диагонали точкой их пересечения делятся пополам; 7) диагонали являются осями симметрии; 8) имеют четыре оси симметрии; 9) в

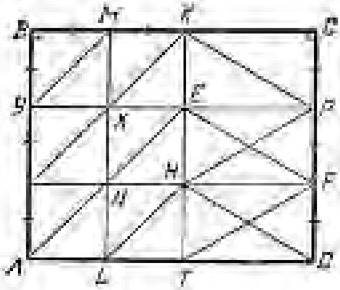


Рис. 19

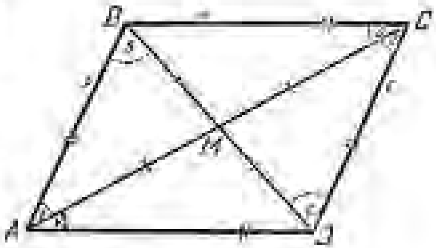


Рис. 20

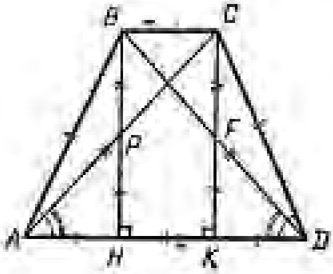


Рис. 21

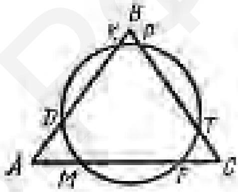


Рис. 22

многоугольник можно вписать окружность; 10) вокруг многоугольника можно описать окружность; 11) центры вписанной и описанной окружностей совпадают; 12) есть центр симметрии?

5.16. Может ли медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, совпадать с его высотой?

5.17. *Может ли биссектриса острого угла прямоугольного треугольника совпадать с его медианой, проведенной из той же вершины?*

5.18. Между длинами a, b, c отрезков существует соотношение $a+b>c$. Является ли наличие такого неравенства только необходимым, только достаточным или же необходимым и достаточным условием для построения треугольника со сторонами a, b, c?

5.19. Верны ли утверждения:

а) для того чтобы четырехугольник был квадратом, необходимо, чтобы его диагонали принадлежали биссектрисам его углов;

б) для того чтобы четырехугольник был квадратом, достаточно, чтобы его диагонали принадлежали биссектрисам его углов;

г) для того чтобы четырехугольник был квадратом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали были равны и принадлежали биссектрисам его углов?

5.20. Почему средняя линия MK трапеции $ABCD$ не проходит через точку P пересечения ее диагоналей?

5.21. На рисунке 19 изображены различные многоугольники. а) Назовите многоугольники с одинаковыми свойствами. б) Найдите многоугольники, у которых площади одинаковы. в) Укажите многоугольники, вокруг которых описываются окружности. г) Назовите многоугольники, в которые вписываются окружности.

5.22 *. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, если каждая диагональ делит его на равные части.

5.23. Докажите, что четырехугольник является параллелограммом, если каждая средняя линия делит его на равные части.

5.24. На рисунках 20 и 21 изображены многоугольники. Отмечены некоторые их свойства. Укажите, какие из них являются следствиями других свойств.

5.25 *. Докажите равносильность следующих утверждений:

1) наибольшая из сторон треугольника меньше суммы двух других сторон;

2) каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон;

3) какая-либо одна из сторон треугольника меньше суммы двух других сторон и больше их разности.

5.26 *. Не отрывая карандаш от бумаги, обойдите фигуру, изображенную на рисунке 22.

§ 6. Окружность и круг

6.1. Что представляет собой общая часть всех правильных треугольников, вписанных в данный круг (рис. 23)?

6.2. Какую фигуру составляют все прямоугольники, вписанные в данный круг (рис. 24)?

6.3. Что представляет собой общая часть всех прямоугольников, вписанных в окружность?

6.4. Какую фигуру составляют все правильные треугольники, вписанные в данный круг?

6.5. А. С. Пушкин писал:

«У лукоморья — дуб зеленый,
Златая цепь на дубе том.
И днем и ночью кот ученый
Все ходит по цепи кругом».

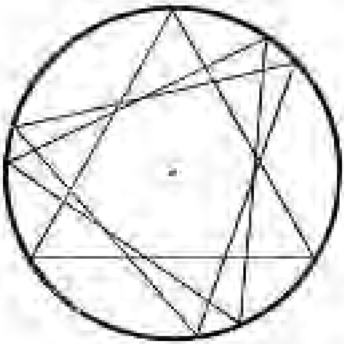


Рис. 23

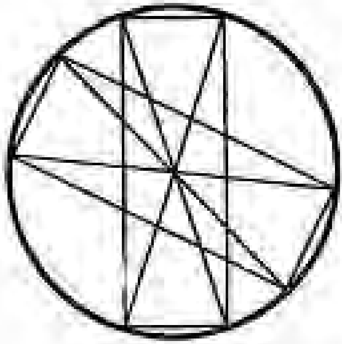


Рис. 24

Верно ли, что «кот ученый» при таком движении описывает окружность?

6.6. Из одной точки окружности проведены две хорды. Сколько получилось сегментов?

6.7. Может ли сектор круга быть его сегментом?

6.8*. Сплошной (без внутренних пустот) кусок железа, имеющий форму кругового кольца, нагревают. Что произойдет при этом с диаметром отверстия кругового кольца: увеличится он или уменьшится?

6.9*. Может ли прямая иметь с окружностью три общие точки?

§ 7. Подобие

7.1. Подобны ли два равнобедренных прямоугольных треугольника?

7.2. Два треугольника подобны. Два угла одного треугольника 100° и 60°. Чему равен меньший угол второго треугольника?

7.3. Коэффициент подобия углов A и B равен 2. Что можно утверждать о величинах этих углов?

7.4. Можно ли перевести угол величиной в 30° в угол величиной в 60° при помощи преобразования подобия?

7.5. Сколько можно получить треугольников, подобных треугольнику ABC (рис. 25), проведя через M различные прямые?

7.6. Какие углы прямоугольного равнобедренного треугольника ABC (угол C прямой) подобны между собой?

7.7. Докажите, что треугольники OMD и ABP подобны, и найдите коэффициент их подобия (рис. 26).

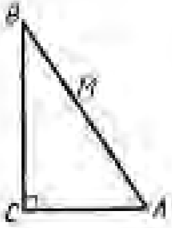


Рис. 25

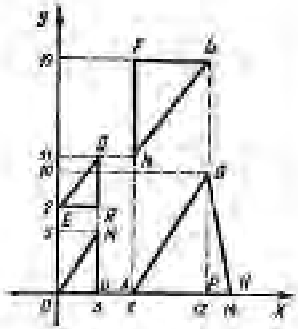


Рис. 26

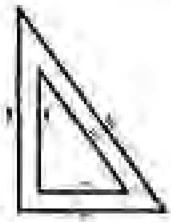


Рис. 27

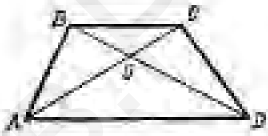


Рис. 28

7.8. Трапеция с основаниями 4 и 6 см разрезана средней линией на две трапеции. Будут ли полученные части подобны?

7.9. Существует ли такое движение или подобное преобразование плоскости, которое угол в 30° переводит в угол в 60°?

7.10. а) Угол величиной в 1,5° рассматривают в лупу, увеличивающую в 4 раза. Какой величины покажется угол?

б) Квадрат рассматривают в лупу, увеличивающую в 2 раза. Во сколько раз увеличенной покажется площадь «видимого» квадрата?

7.11. Подобны ли треугольники, показанные на рисунке 27?

7.12. Подобны ли графики функций $y = x - 2$ и $y = -2x - 2$?

7.13. Подобны ли между собой ромб с непрямыми углами и квадрат?

7.14. Подобны ли неравные прямоугольные треугольники с равными гипотенузами?

7.15*. Из двух равных прямоугольников составлен прямоугольник, подобный исходным. Каким может быть отношение длин сторон этого прямоугольника?

7.16*. Почему не подобны между собой: а) окружность и гипербола? б) окружность и парабола? в) гипербола и парабола?

7.17. На рисунке 28 показана трапеция, у которой $AD = 2BC$. Назовите подобные треугольники на этом рисунке и найдите $AO : OC$ и $BO : OD$.

§ 8. Гомотетия

8.1. Четыре планки, из которых сделана рамка (рис. 29), имеют одну и ту же ширину. Будет ли внутренний прямоугольник гомотетичен наружному?

8.2. Гомотетичны ли прямые: а) $y = 2x + 3$ и $y = 2x - 3$; б) $y = x + 1$ и $y = 2x + 1$?

8.3. Когда гомотетичны два прямоугольника с соответственно параллельными сторонами?

8.4. При каком условии треугольник ABC можно преобразовать в треугольник $A_1B_1C_1$ при помощи гомотетии?

8.5. Существует ли гомотетия, которая преобразует параллелограмм в тот же параллелограмм?

8.6. Запишите координаты точки M_1, в которую переводится точка $M(2; -3)$ гомотетией с центром в начале координат и коэффициентом 2.

8.7. Существуют ли прямые, которые переводятся гомотетией на себя?

8.8. Существуют ли точки, которые преобразуются гомотетией на себя?

8.9. Угол A преобразуется в угол B гомотетией с коэффициентом 0,5. Равны ли эти углы?

8.10. Существует ли гомотетия, которая преобразует квадрат в круг (центры квадрата и круга совпадают)?

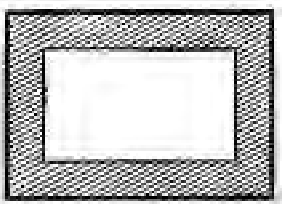


Рис. 29

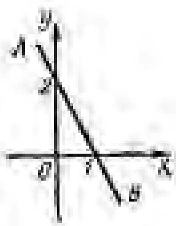


Рис. 30

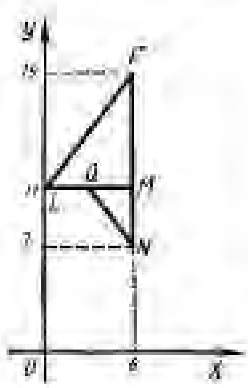


Рис. 31

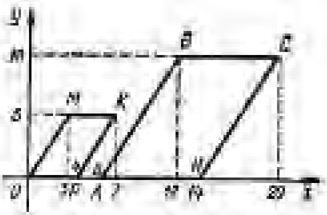


Рис. 32

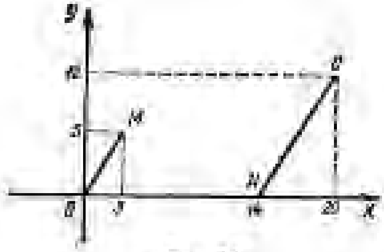


Рис. 33

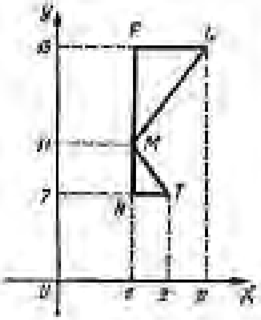


Рис. 34

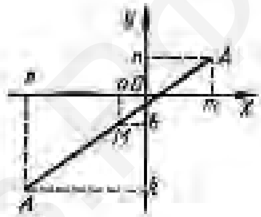


Рис. 35

8.11. Прямая $y=-2x+2$ преобразуется в прямую A_1B_1 гомотетией с центром в начале координат и коэффициентом 3. Запишите уравнение прямой A_1B_1 (рис. 30).

8.12. Назовите последовательность осевой симметрии и гомотетии, которая переводит треугольник QMN в треугольник LMF (рис. 31).

8.13. Гомотетичны ли четырехугольники $OMKP$ и $ABCH$ (рис. 32)?

8.14. Найдите координаты центра гомотетии отрезков OM и HC (рис. 33).

8.15. Назовите последовательность осевой симметрии и гомотетии, которая переводит треугольник MNT в треугольник MFL (рис. 34).

8.16. Точка A_1 получена из точки A гомотетией с центром M и коэффициентом 2. Назовите координаты точки A_1 (рис. 35).

8.17. Какой из показанных на рисунке 26 треугольников гомотетичен треугольнику EQR?

8.18. Запишите уравнение фигуры, которая гомотетична параболе $y=x^2$ относительно точки $A(3;\ 4)$, если коэффициент гомотетии равен 2.

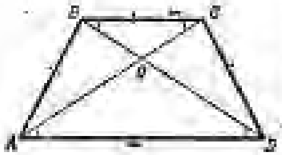


Рис. 36

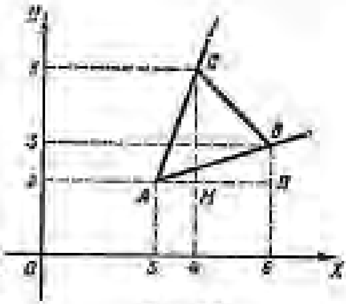


Рис. 37

Рис. 38

8.19. Верно ли утверждение: два треугольника, гомотетичные третьему, гомотетичны между собой?

8.20*. На рисунке 36 показана равнобочная трапеция, у которой $AD=2BC$. Очевидно, последовательно выполненные центральная симметрия и гомотетия относительно точки O переводят треугольник COB в треугольник AOD. Верно ли, что это преобразование переводит трапецию $ABCD$ на себя?

8.21*. Запишите координаты точек, которые получаются из точек M, D, B и C гомотетией с центром в точке A и коэффициентом 2 (рис. 37).

8.22. На рисунке 38 изображены графики функций $y=4x^2$ и $y=x^2$ $(x \geqslant 0)$. Запишите координаты точки A_1. Как доказать, что параболы $y=4x^2$ и $y=x^2$ гомотетичны относительно начала координат?

§ 9. Конструктивные задачи

9.1. К треугольнику (рис. 39) пристроили равнобедренный треугольник так, что получился новый треугольник. Сколькими способами это можно сделать?

9.2. Составьте четыре равных квадрата из 12 спичек.

9.3. Составьте два треугольника из 5 спичек.

9.4. Составьте пять треугольников из 9 спичек.

9.5. Как тремя прямыми разделить данный треугольник на четыре равных треугольника?

9.6. Как перекроить параллелограмм в треугольник?

9.7. Как перекроить параллелограмм в прямоугольник?

9.8. Разрежьте квадрат на три части так, чтобы из них можно было сложить прямоугольник с отношением сторон 1 : 2.

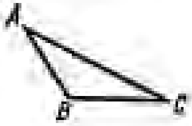


Рис. 39

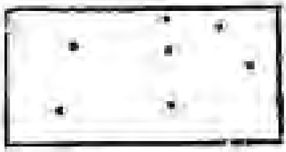


Рис. 40

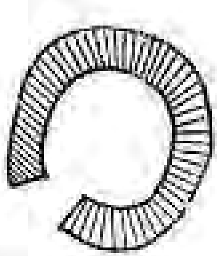


Рис. 41

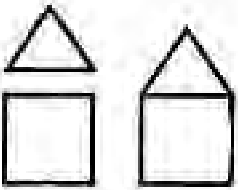


Рис. 42

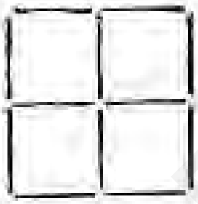


Рис. 43

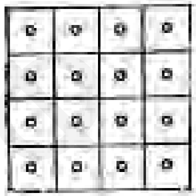


Рис. 44

9.9. Как при помощи циркуля и линейки построить плоский угол в 300°?

9.10*. Проведите прямую так, чтобы она пересекала все стороны треугольника.

9.11. Внутри прямоугольника расположены 7 кружочков (рис. 40). Тремя прямыми разделите прямоугольник на семь частей, каждая из которых содержит хотя бы один кружочек.

9.12. Двумя прямыми разделите заштрихованную часть плоскости на шесть частей (рис. 41).

9.13. Имеется 9 палочек длиной в 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 см. Квадраты с какими сторонами можно составить из этих палочек?

9.14*. Из 36 спичек построили треугольники, квадраты и домики (как на рисунке 42) — всего 10 фигур. Найдите число фигур каждого вида.

9.15. Из фигуры, образованной 12 спичками (рис. 43), удалите две спички так, чтобы осталось два квадрата.

9.16. Можно ли сектор разрезать на сегмент и сектор?

9.17. Можно ли сегмент разрезать на секторы?

9.18. В квадратном зале для танцев поставьте вдоль стен 10 кресел так, чтобы у каждой стены стояло кресел поровну.

9.19. На рисунке 44 показано расположение 16 шашек на квадратной доске. Уберите 6 шашек так, чтобы осталось

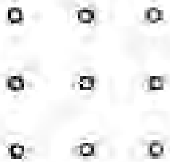


Рис. 45

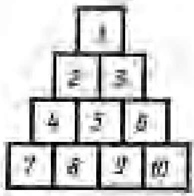


Рис. 46

в каждом горизонтальном и в каждом вертикальном ряду по четному числу шашек.

9.20. Перечеркните все девять окружностей (рис. 45) четырьмя отрезками, не отрывая карандаша от чертежа.

9.21. Как расположить 10 лампочек в пять рядов по 4 лампочки в каждом ряду?

9.22. Постройте трапецию, которую можно разделить на три равных прямоугольных треугольника.

9.23 *. Нетрудно покрыть 64 поля шахматной доски 32 костяшками домино так, чтобы каждая костяшка покрывала два поля (если конечно, размеры полей и размеры костяшек соответствуют друг другу). Можно ли покрыть 62 поля шахматной доски 31 костяшкой так, чтобы свободными остались два противоположных угловых поля доски?

9.24 *. Переложите фигуру из десяти квадратов (рис. 46) так, чтобы ее форма осталась прежней, но каждый квадрат соприкасался только с новыми квадратами.

§ 10. Геометрические величины

10.1. Могут ли равновеликие плоские фигуры быть неравными?

10.2. Длина какого отрезка принимается за единицу длины?

10.3. Что больше: площадь одного правильного треугольника ABC со стороной 10 см или сумма площадей десяти правильных треугольников $A_1B_1C_1$ со стороной 1 см?

10.4. Из листа железа вырезали два кружка диаметром 2 и 10 см. Во сколько раз второй кружок тяжелее первого?

10.5. Может ли сумма двух вертикальных углов быть равной: а) $180°$; б) $270°$; в) $360°$?

10.6. Докажите, что большей стороне треугольника соответствует меньшая высота.

10.7. На прямой через равные промежутки поставили 10 точек. Они заняли отрезок длиной l. На другой прямой через такие же промежутки отметили 100 точек. Они заняли отрезок длиной l_1. Во сколько раз l_1 больше l?

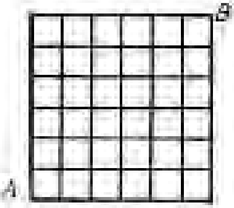


Рис. 47

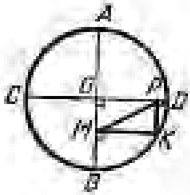


Рис. 48

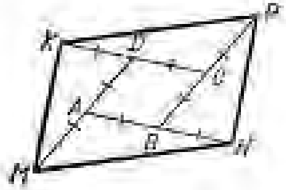


Рис. 49

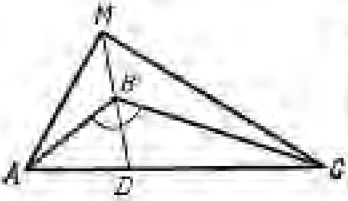


Рис. 50

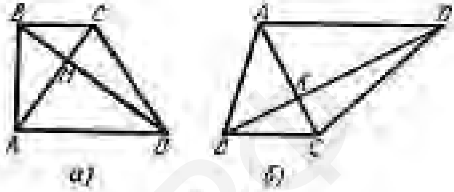


Рис. 51

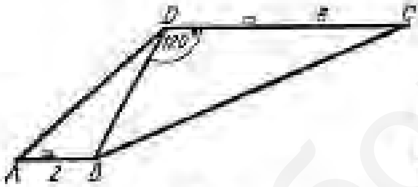


Рис. 52

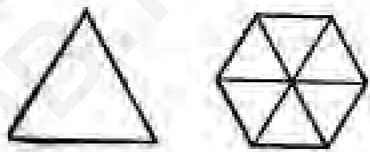


Рис. 53

10.8. Отношение периметров двух правильных треугольников равно 2. Чему равно отношение площадей этих треугольников?

10.9. Составьте из 22 спичек прямоугольник наибольшей площади.

10.10. На рисунке 47 показана квадратная сетка дорог. Существует ли самый короткий путь из A в B?

10.11. На рисунке 48 показана окружность, радиус которой равен единице. Точка O — ее центр. Найдите длину отрезка MP.

10.12. На рисунке 49 показан ромб $ABCD$. Докажите, что четырехугольник $MKPH$ — параллелограмм. Во сколько раз площадь параллелограмма больше площади ромба?

10.13. Две противоположные стороны квадрата $ABCD$ увеличили, а две другие уменьшили на 5 см каждую. Как изменилась площадь фигуры?

10.14. Докажите, что углы AMD и DMC неравные, если углы ABD и DBC равны и BC больше AB (рис. 50).

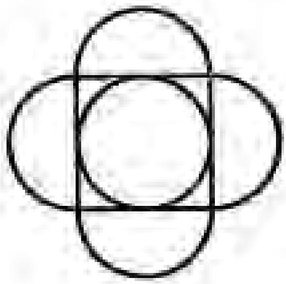


Рис. 54

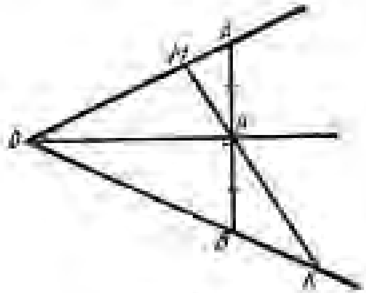


Рис. 55

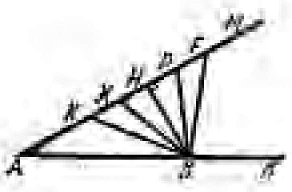


Рис. 56

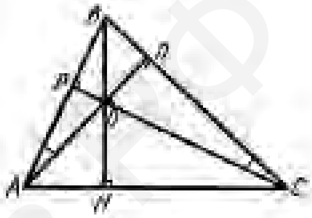


Рис. 57

10.15. На рисунках 51 (*а*, *б*) показаны трапеции (BC и AD — их основания), у которых одинаковые высоты и $AD=2BC$. Найдите отношение площадей треугольников: ABM и MCD; ABK и KCD; ABM и BMC; BMC и AMD.

10.16. На рисунке 52 изображена трапеция $ABCD$, у которой $AB=2$, $DC=8$ и площадь ее равна 20. Верно ли, что расстояние между отрезками AB и DC равно 4?

10.17. Правильный треугольник и правильный шестиугольник имеют одинаковые периметры. Чему равна площадь шестиугольника, если площадь треугольника равна 2 (рис. 53)?

10.18. Периметр треугольника равен 1 мм. Может ли оказаться радиус R описанной вокруг этого треугольника окружности большим 1 км?

10.19. Лист металла имеет форму квадрата 2×2 м², ко всем сторонам которого пристроены полукруги (рис. 54). Из середины листа вырезается круг диаметром в 2 м. Найдите площадь оставшейся части листа.

10.20. Сравните площади треугольников PMA и PBK (рис. 55).

10.21. Точка X движется по лучу AM. Как изменяется длина $AX+XB$ с увеличением длины отрезка AX (рис. 56)?

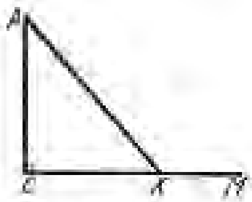


Рис. 58

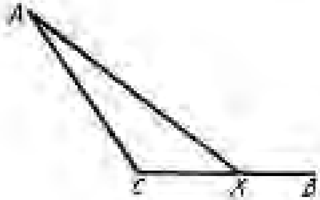


Рис. 59

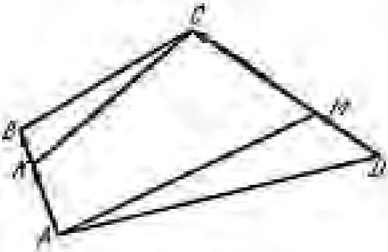


Рис. 60

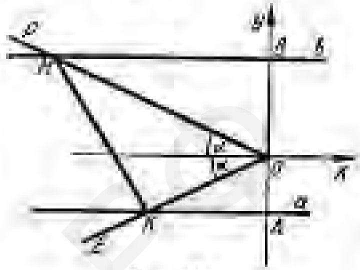


Рис. 61

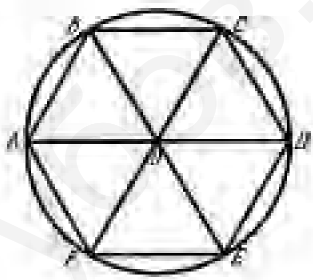


Рис. 62

10.22. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O (рис. 57). Известно, что $OC=AB$. Найдите величину угла ACB.

10.23. Прямые CA и CM взаимно перпендикулярны. Точка X движется по лучу CM (рис. 58). Как изменяется длина отрезка AX с увеличением отрезка CX? При какой длине CX расстояние AX наименьшее? Существует ли такое положение точки X на луче CM, при котором $CX=AC$, $CX=AX$, $CX>AX$? Существует ли такое положение точки X на луче CM, что $AX=5AC$, $AX=5000AC$? Как изменяется величина угла CAX с увеличением длины отрезка CX?

10.24. Угол ACB тупой (рис. 59). Точка X движется по лучу CB. Как изменяется длина отрезка AX с увеличением расстояния CX? При каком положении точки X на луче CB длина отрезка AX становится наибольшей? Существует ли на луче CB наиболее удаленная точка от точки A?

10.25 *. На рисунке 60 показан четырехугольник $ABCD$. $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$. Какую часть площади четырехугольника $ABCD$ составляет площадь четырехугольника $KCMA$?

10.26 *. На рисунке 61 показаны прямые a и b, параллельные оси абсцисс; $0<\alpha\leqslant 45°$. Как изменяется длина отрезков OM и OK при вращении угла POE вокруг точки O против хода часовой стрелки (угол вращения не больше α)? Как изменяется $MO-OK$ при этом вращении?

10.27 *. На рисунке 62 показан правильный шестиугольник $ABCDEF$, вписанный в окружность. Назовите номера верных утверждений: 1) луч OF получается из луча OA путем его поворота вокруг точки O на угол 60° против хода часовой стрелки; 2) прямую OA повернули вокруг точки O на угол 405° против хода часовой стрелки, получили прямую OA_1, поэтому угол между прямыми OA и OA_1 равен 405°; 3) угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ равен 120°; 4) угол между лучами BA и BC равен 120°; 5) угол между лучами BA и AD равен 60°.

§ 11. Повторение курса геометрии восьмилетней школы

11.1. Сколько осей симметрии имеет плоскость?

11.2. Верно ли, что все точки биссектрисы угла одинаково удалены от сторон этого угла?

11.3. Сколько осей симметрии имеет фигура, составленная из двух вертикальных углов?

11.4. Могут ли быть два треугольника неравными, если все углы первого треугольника равны соответствующим углам второго треугольника и две стороны первого треугольника равны двум сторонам второго треугольника?

11.5. Назовите фигуру, точки которой равноудалены от: 1) двух параллельных сторон квадрата $ABCD$; 2) двух смежных сторон AD и AB квадрата.

11.6. Может ли угол иметь три центра симметрии?

11.7. На рисунках 63—67 изображены многоугольники. Отмечены некоторые их свойства. Составьте задачи, при решении которых можно использовать данные чертежи.

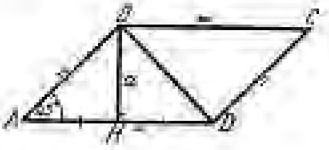


Рис. 63

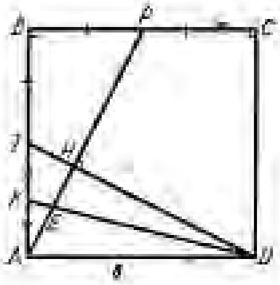


Рис. 64

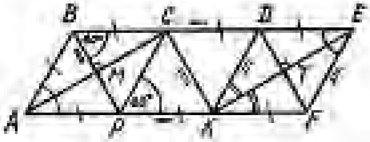


Рис. 65

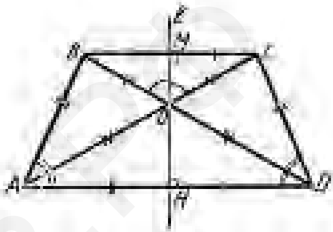


Рис. 66

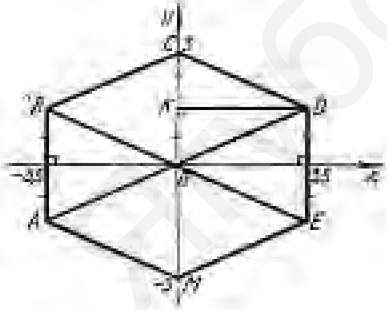


Рис. 67

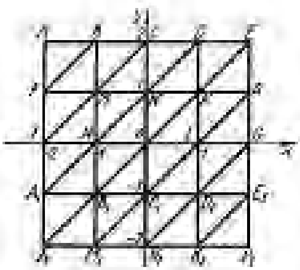


Рис. 68

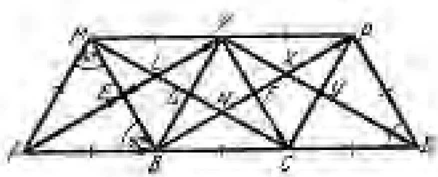


Рис. 69

11.8. Запишите номера верных утверждений (рис. 68): 1) треугольник D_1E_1G можно получить из треугольника $N_1K_1D_1$ двумя последовательно выполненными параллельными переносами $x'=x+1$, $y'=y$ и $x''=x'$, $y''=y'+1$; 2) треугольник $D_1C_1N_1$ преобразуется в треугольник D_1E_1G двумя последовательно выполненными осевыми симметриями относительно прямых A_1B_1 и D_1L; 3) треугольник $N_1K_1D_1$ преобразуется в треугольник NKD параллельным переносом $x'=x$, $y'=y+3$; 4) треугольник $C_1D_1N_1$ переводится в треугольник $C_1N_1M_1$ осевой симметрией относительно прямой CC_1; 5) четырехугольник $LOEP$ имеет ось симметрии; 6) четырехугольник $LOKP$ имеет центр симметрии; 7) треугольник HDL равновелик прямоугольнику $ABHT$; 8) треугольники EKP и C_1LG центрально-симметричны относительно некоторой точки; 9) квадрат $ABMF$ имеет два центра симметрии; 10) шестиугольник $HNKLC_1B_1$ переводится на себя поворотом вокруг точки O на $90°$ против хода часовой стрелки; 11) $\overrightarrow{B_1F_1}+\overrightarrow{KD}=\overrightarrow{AA}$; 12) $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{P_1E_1}$; 13) треугольник $M_1B_1C_1$ переводится в треугольник LKP параллельным переносом $x'=x+2$, $y'=y+2$; 14) полупрямые K_1D и FM равны; 15) прямые AE и K_1E_1 равны; 16) треугольники $A_1B_1F_1$ и DEK подобны; 17) треугольники $A_1B_1F_1$ и DEK гомотетичны относительно некоторой точки; 18) точки F_1 и B_1 гомотетичны относительно точки O; 19) четырехугольник $NDEK$ имеет две оси симметрии; 20) треугольник C_1D_1L получается из треугольника $K_1D_1E_1$ поворотом вокруг точки D_1 на угол $90°$ против хода часовой стрелки; 21) квадраты $BCNM$ и $OHMN$ гомотетичны относительно середины отрезка MN; 22) отрезки MN и NK подобны; 23) лучи AE и K_1E_1 подобны; 24) четырехугольники B_1OCB и $OKDC$ подобны; 25) четырехугольники B_1OCB и $OKDC$ гомотетичны относительно точки E; 26) четырехугольники $KEGL$ и E_1K_1LG симметричны относительно прямой LG; 27) лучи PF и A_1E_1 симметричны относительно прямой TH; 28) лучи A_1H и C_1M_1 гомотетичны относительно некоторого центра; 29) прямые AB и PM гомотетичны относительно некоторого центра; 30) фигура, образованная прямыми AB и PM, имеет: а) только один центр симметрии; б) только два центра симметрии; в) более двух центров симметрии; г) сколько угодно центров симметрии.

11.9. Запишите номера верных утверждений (рис. 69): 1) отрезок PC больше отрезка CD; 2) угол PCD равен $60°$; 3) отрезки AM и CP неравны; 4) угол PCB равен $120°$; 5) отрезки AM и CP параллельны; 6) отрезки MP и

AC равны; 7) прямые MP и AC непараллельны; 8) угол MEK меньше угла MEA; 9) точка A симметрична точке K относительно точки E; 10) точка A симметрична точке K относительно прямой MB; 11) $\vec{AE}=\vec{EK}$; 12) $\vec{MB}=\vec{KC}$; 13) $\vec{AB}=\vec{KP}$; 14) четырехугольник $KPCB$ получается из четырехугольника $MKBA$ некоторым параллельным переносом; 15) $\vec{AK}+\vec{BP}=\vec{0}$; 16) угол MBP прямой; 17) треугольник MBK центрально-симметричен треугольнику CKB относительно точки Q; 18) угол BKD меньше 90°; 19) точки N и L симметричны относительно точки M; 20) $\vec{EK}=-2\vec{LK}$; 21) $\vec{AK}=3\vec{LK}$; 22) $\vec{LX}=0{,}5\vec{AD}$; 23) $\vec{EY}=0{,}5\vec{AD}$; 24) четырехугольники $KPBA$ и $KPDC$ имеют одинаковую площадь; 25) площадь треугольника PKC меньше площади треугольника MKC; 26) площадь треугольника XPK в три раза меньше площади треугольника KPC; 27) площади четырехугольника $QKYC$ и треугольника KPC одинаковы; 28) прямая MB симметрична прямой CP относительно прямой KN; 29) прямые EF и CD непараллельны; 30) точки F и Y симметричны относительно прямой XC; 31) точка Q не принадлежит прямой EY; 32) площади четырехугольника $BCPM$ и треугольника AKD одинаковы; 33) треугольник CBN преобразуется в треугольник CAL гомотетией с центром C и коэффициентом 2; 34) отрезок BA получается из отрезка BK поворотом его вокруг точки B на угол 120° против хода часовой стрелки; 35) точки F и Y симметричны относительно точки X; 36) треугольник KPC получается из треугольника PCK поворотом вокруг точки X на 120° против хода часовой стрелки; 37) точки C и L симметричны относительно точки N; 38) отрезок AE преобразуется в отрезок ME поворотом вокруг точки E на прямой угол против хода часовой стрелки; 39) угол между лучами MK и QM равен 30°; 40) угол между лучами BK и DC равен 60°; 41) точки X и N симметричны относительно точки F; 42) треугольники MBP и CKA равны; 43) треугольники BPD и PBM подобны; 44) площадь треугольника BFC в два раза меньше площади треугольника BPD; 45) площади четырехугольников $NBEL$ и $NLKF$ равны; 46) прямоугольники $BEKF$ и $CYKQ$ симметричны относительно прямой KN; 47) прямоугольник $CYKQ$ переводится в прямоугольник $BEKF$ при помощи поворота вокруг точки K на угол 120° по ходу часовой стрелки и осевой симметрии относительно прямой KE; 48) общей частью треугольников BFC и BFK является только точка F; 49) общей частью треугольников BFC и BFK является только отрезок BF; 50) отрезки BC и

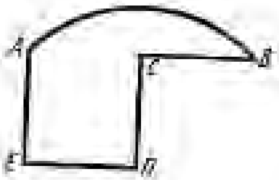


Рис. 70

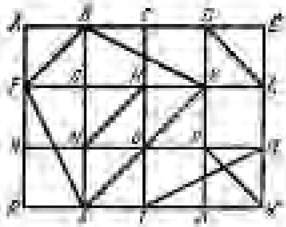


Рис. 71

BM симметричны относительно прямой BQ; 51) угол между прямыми AM и BP равен 45°; 52) угол между прямыми MC и BP равен 120°.

11.10. Подобны ли углы в 30 и 60°?

11.11. Существуют ли углы, которые имеют сколько угодно осей симметрии?

11.12. Фигуру, изображенную на рисунке 70, разрежьте на две равные части.

11.13. На рисунке 71 изображен прямоугольник $AEYR$, который разделен на 12 равных квадратов. Фигуры Φ и Φ' — многоугольники, показанные на этом рисунке, которые обладают некоторыми из следующих свойств:

1) Φ' и Φ симметричны относительно некоторой прямой; 2) Φ' и Φ центрально-симметричные фигуры; 3) фигура Φ' получается из Φ поворотом вокруг некоторой точки A, на прямой угол против хода часовой стрелки; 4) Φ' получается из Φ некоторым параллельным переносом; 5) фигура Φ' получается из Φ поворотом вокруг некоторой точки на прямой угол по ходу часовой стрелки; 6) фигуры Φ и Φ' не имеют общих точек; 7) фигуры Φ и Φ' равны; 8) фигура Φ' получается из фигуры Φ последовательным выполнением двух осевых симметрий относительно некоторых прямых; 9) фигура Φ' получается из Φ при помощи некоторого параллельного переноса и осевой симметрии относительно некоторой прямой; 10) фигура Φ' получается из Φ последовательно выполненными осевой симметрией и поворотом вокруг точки; 11) фигуры Φ' и Φ гомотетичны; 12) фигуры Φ' и Φ подобны; 13) площади фигур Φ' и Φ равны; 14) фигура Φ преобразуется в Φ' движением; 15) общая часть фигур Φ и Φ' имеет центр симметрии; 16) общая часть фигур Φ и Φ' не имеет оси симметрии; 17) общая часть фигур Φ и Φ' вписывается в окружность; 18) фигуры Φ и Φ' состоят из равных частей; 19) фигура, составленная из фигур Φ и Φ', имеет две оси симметрии; 20) фигура, в которую входят только фигуры

Φ и Φ', вписывается в окружность; 21) фигура, образованная из фигур Φ и Φ', имеет центр и ось симметрии; 22) фигура, составленная из фигур Φ' и Φ, описывается вокруг окружности.

Назовите номера свойств, которыми обладают следующие пары многоугольников:

а) ABF и BFG; б) BGK и FGS; в) NOS и HOK;
г) NOH и NOS; д) $NHOS$ и $KPQL$; е) QOT и $DELK$;
ж) $NSKH$ и $KLYX$; з) RSF и BDK; и) $ACHF$ и $HKXT$;
к) $CEQO$ и $TRFH$; л) $FGSR$ и $HOQL$; м) $ABKF$ и $BKLE$;
н) $ACHF$ и $BNOC$; о) $TSNQ$ и $BELK$; п) $TSOQ$ и $KLDB$;
р) $TSBC$ и $MFKP$; с) FGB и KGS.

§ 12. Основные понятия стереометрии. Параллельность в пространстве

12.1. На рисунке 72 изображена треугольная пирамида $DABC$. Прямые MK и AC пересекаются в точке X. Верно ли, что прямая MK пересекает плоскость ABC в точке X?

12.2. На рисунке 73 изображена треугольная пирамида $DABC$. Не выполняя построений, установите, пересекается ли отрезок AB с плоскостью KMP.

12.3. Назовите номера верных утверждений:

1) если точка A принадлежит прямой BC, то точка B принадлежит прямой AC; 2) если точка A принадлежит прямой BC, то прямые AB и AC совпадают; 3) если совпадают прямые CD и AB, то совпадают и прямые AB и AC; 4) если отрезки CD и AB равны, то точка D принадлежит плоскости ABC; 5) если точки A и B принадлежат плоскости α и точка C принадлежит прямой AB, то точка C принадлежит плоскости α; 6) если точки A, B и C принадлежат плоскости α, то точка C принадлежит прямой AB; 7) если прямая AB пересекает плоскость α в точке C, то точка B не принадлежит плоскости α; 8) если точки A, B и C принадлежат плоскости α, то точка A принадлежит прямой BC; 9) плоскости ABC и BCA совпадают; 10) если точка A принадлежит плоскости α, а точка B принадлежит плоскости β, то плоскости α и β пересекаются по прямой AB; 11) если $AC<AB+BC$, то точка A не принадлежит прямой BC; 12) если треугольники AMP и ABC имеют только одну общую точку A, то и плоскости AMP и ABC имеют только одну общую точку A.

12.4. Назовите номера верных утверждений:

1) если точки A и B принадлежат отрезку CD, то плоскости DBA и ABC совпадают; 2) если точка D принадлежит плоскости ABC, то точка A принадлежит плоскости BCD; 3) если прямые AB и CD пересекаются в точке M, то плоскости AMD и ABC совпадают; 4) если отрезки AB и CD не пересекаются, то точка A принадлежит плоскости BCD; 5) если плоскости ABC и BCD совпадают и прямые AB и CD параллельны, то прямые CB и AD не пересекаются; 6) если прямые AB и CD не пересекаются, то прямая AC принадлежит плоскости ABD.

12.5. Назовите номера верных утверждений:

по рисунку 74: 1) плоскости AYD и DPB пересекаются по отрезку DK; 2) прямая XM пересекает плоскость DPB; 3) прямые XM и DK пересекаются; 4) у треугольников ADY и ABC только одна общая точка Y; 5) общей частью пирамид $DAPK$ и $DKBY$ является только отрезок DK; 6) прямые XC и DY пересекаются; 7) прямые XM и AY пересекаются; 8) прямая XM и плоскость ABC пересекаются; 9) плоскость ABM и прямая CD пересекаются; 10) если прямые BM и CD пересекаются в точке H, то общей частью пирамиды $DABC$ и плоскости ABM является треугольник AHB;

по рисунку 75: 11) плоскости MAD и MBC пересекаются по прямой MP; 12) если прямые BK и MP пересекаются в точке X, то прямая BK пересекает плоскость AMP также в точке X; 13) если прямые BK и MP пересекаются в точке X, то в этой точке прямая BK пересекает плоскость BMP; 14) если прямые AB и OD пересекаются в точке Y, то плоскости MAB и ODM пересекаются по прямой MY; 15) точка H, в которой пересекаются прямая AK и плоскость BMD, принадлежит прямой MO; 16) сечение пирамиды $MABCD$ плоскостью ABK является частью сечения пирамиды $MABP$ плоскостью ABK; 17) если прямые AB и OD пересекаются в точке Y, то точка пересечения прямой KP с плоскостью ABM принадлежит прямой MY.

12.6. Назовите номера верных утверждений (рис. 75): 1) прямые BD и MC скрещиваются; 2) прямые MP и AB скрещиваются; 3) прямые BK и AP пересекаются; 4) прямые MO и AP пересекаются; 5) прямая KP и плоскость AMB пересекаются; 6) прямые BM и AC пересекаются; 7) прямые AK и MP пересекаются.

12.7. Назовите номера верных утверждений (рис. 76): 1) прямая AD параллельна плоскости MBC; 2) прямая CD параллельна плоскости ABM; 3) прямая KP параллельна плоскости BDM; 4) прямая KF параллельна плоскости ABD; 5) прямая KF параллельна плоскости BDC;

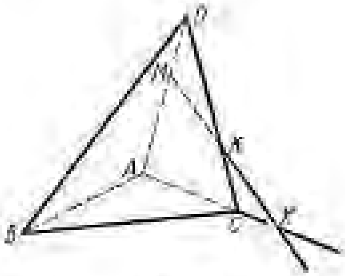


Рис. 72

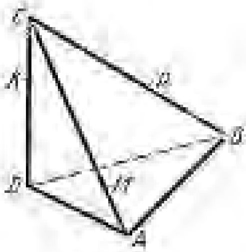


Рис. 73

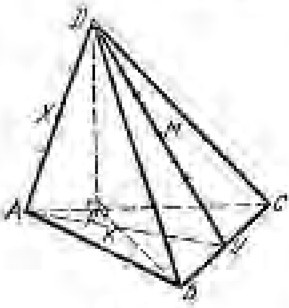


Рис. 74

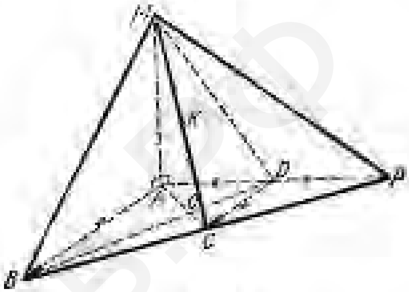


Рис. 75

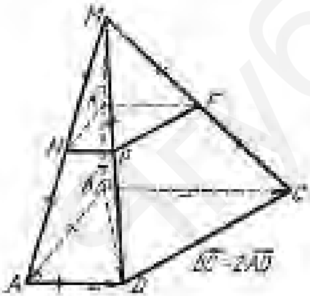


Рис. 76

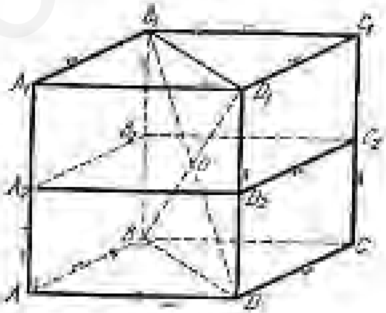


Рис. 77

6) точка F не принадлежит плоскости AKD; 7) $\overrightarrow{KF}=\overrightarrow{AD}$; 8) $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{DF}$.

12.8. Назовите номера верных утверждений (рис. 76):

1) прямая AD параллельна линии пересечения плоскостей ADM и BCM; 2) плоскости ABM и DCM пересекаются по прямой, параллельной прямой AB; 3) прямые KF и AD параллельны; 4) прямая BP параллельна плоскости AKF;

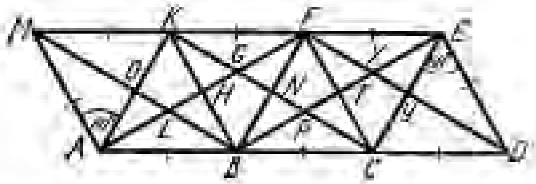


Рис. 78

5) прямые PC и AD параллельны; 6) прямая FP параллельна плоскости ABC.

12.9. Назовите номера верных утверждений (рис. 76):
1) плоскости KFP и BCD параллельны; 2) точка H принадлежит плоскости FKP; 3) плоскости HKP и ABD параллельны; 4) плоскости ABC и ADC параллельны; 5) прямая DF параллельна плоскости ABM; 6) плоскости FBC и HAD параллельны.

12.10. Назовите номера верных утверждений (рис. 77):
1) плоскости $A_1B_1C_1$ и ABC параллельны; 2) плоскости $A_2B_2C_2$ и $A_1B_1C_1$ параллельны; 3) прямые A_1B_1 и CD параллельны; 4) прямые A_2B_2 и D_1C_1 параллельны; 5) точка B_1 принадлежит плоскости A_1CD; 6) плоскости $A_2B_2C_2$, $A_1B_1C_1$ и ABC пересекаются по одной прямой; 7) прямые A_2B_2 и DC_2 параллельны; 8) плоскости $A_2B_2C_2$ и DCA_1 пересекаются по прямой, параллельной прямой CD; 9) прямые AC и A_1C_1 параллельны.

§ 13. Векторы в пространстве

13.1. Назовите номера верных утверждений (рис. 76):
1) точки D и M симметричны относительно точки P; 2) точки B и M симметричны относительно точки K; 3) точка M переводится в себя двумя последовательно выполненными центральными симметриями относительно точки K; 4) отрезок BC переводится в отрезок AD параллельным переносом, которым точка B преобразуется в точку A.

13.2. Назовите номера верных утверждений (рис. 78):
1) точки A и K симметричны относительно точки O; 2) прямые AB и MK симметричны относительно точки O; 3) точки B и M симметричны относительно прямой AK; 4) точка A переводится в точку K центральной симметрией относительно точки O или двумя осевыми симметриями относительно прямых AK и MB; 5) отрезок FE переводится в отрезок AB движением; 6) прямые KB и MA симметричны относительно прямой MB; 7) отрезок BC переводит-

ся в отрезок AB центральными симметриями относительно точек H и O.

13.3. Назовите номера верных утверждений (рис. 78):

1) полупрямые AK и AB противоположно направлены; 2) полупрямые BC и BF одинаково направлены; 3) полупрямые CF и DE одинаково направлены; 4) полупрямые AF и BE одинаково направлены; 5) полупрямые MK и DC одинаково направлены; 6) полупрямые MK и FE одинаково направлены.

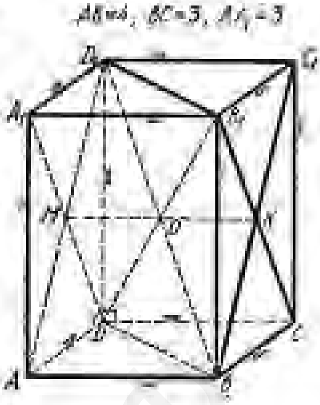


Рис. 79

13.4. Назовите номера верных утверждений (рис. 78):

1) $\vec{AA}=\vec{BB}$; 2) $\vec{AB}=\vec{MK}$; 3) $|\vec{AM}|=|\vec{DE}|$; 4) отрезок BK переводится в отрезок AM параллельным переносом, который преобразует точку B в точку A; 5) $\vec{OK}=\vec{OA}$; 6) треугольник ABK преобразуется в треугольник CDE параллельным переносом, который переводит точку A в точку C.

13.5. Назовите номера верных утверждений (рис. 78):

1) $\vec{AM}+\vec{MK}=\vec{AK}$; 2) $\vec{CE}+\vec{ED}=\vec{EF}$; 3) $\vec{KF}+\vec{FB}=\vec{DD}-\vec{KB}$; 4) $\vec{MK}+\vec{AB}=\vec{MB}$; 5) $\vec{AB}+\vec{CD}=\vec{AC}$; 6) $\vec{AA}+\vec{FF}=\vec{BB}$; 7) $\vec{AM}+\vec{AB}=\vec{AK}$; 8) $\vec{AM}-\vec{AB}=\vec{CE}$; 9) $\vec{CF}=\vec{CB}+\vec{CE}$; 10) $\vec{CB}+\vec{EC}=\vec{CF}$; 11) $\vec{MK}+\vec{KE}=\vec{CD}+\vec{BD}$; 12) $\vec{AM}+\vec{MF}+\vec{FA}=\vec{BE}+\vec{EC}+\vec{CB}$.

13.6. Назовите номера верных утверждений (рис. 78):

1) $\vec{AO}=0{,}5\vec{AM}+0{,}5\vec{AB}$; 2) $\vec{AF}=\vec{AM}+2\vec{CD}$; 3) $\vec{BL}=\frac{2}{3}\vec{BO}$; 4) $\vec{BL}=\frac{1}{3}\vec{BM}$; 5) $\vec{BL}=0{,}5\vec{BA}+\vec{BK}$; 6) $\vec{BF}=\frac{1}{3}\vec{BM}+\frac{2}{3}\vec{BE}$.

13.7. Назовите номера верных утверждений (рис. 79):

1) $\vec{BD_1}=\vec{BA}+\vec{BB_1}+\vec{BC}$; 2) $\vec{DB_1}=\vec{DA}+\vec{DC}-\vec{D_1D}$; 3) $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CC_1}-\vec{D_1C_1}+\vec{D_1A}=\vec{CC}$; 4) $\vec{BD_1}=\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{BC_1}$; 5) $2\vec{B_1O}=\vec{B_1A_1}+\vec{B_1C_1}+\vec{B_1B}$; 6) $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CC_1}+\vec{C_1D_1}+\vec{D_1A}=\vec{MM}$; 7) $\vec{B_1K}=\vec{B_1C_1}+\vec{B_1B}$; 8) $2\vec{B_1K}=\vec{B_1B}+\vec{B_1C_1}$.

13.8. Назовите номера верных утверждений (рис. 79):

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$; 2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{C_1D_1}=\overrightarrow{AA_1}$; 3) $\overrightarrow{C_1B}-\overrightarrow{C_1C}=\overrightarrow{C_1B_1}$; 4) $\overrightarrow{BC_1}-\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BC}$; 5) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{C_1B}-\overrightarrow{C_1C}$.

13.9. Назовите номера верных утверждений:

по рисунку 78:

1) угол между полупрямыми AB и AM равен $120°$; 2) угол между лучами BC и KM равен нулю; 3) лучи AB и FE одинаково направлены; 4) угол между прямыми AB и BF равен $120°$; 5) угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AM}$ равен $120°$; 6) угол между векторами $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{BC}$ равен $30°$; 7) угол между векторами $\overrightarrow{LA}$ и $\overrightarrow{LB}$ равен $60°$; 8) угол между векторами $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{KB}$ равен $60°$;

по рисунку 79:

9) угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC_1}$ равен углу между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AD_1}$; 10) углы между векторами $\overrightarrow{OD_1}$, $\overrightarrow{DB_1}$ и $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OB}$ равны.

13.10. Назовите номера истинных утверждений (рис. 78):

1) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BM}$; 2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=8$; 3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=32$; 4) $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CE}=16$; 5) $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CD}=-8$; 6) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{KB}=-8$.

13.11. Назовите номера истинных утверждений (рис. 78, $AB=1$):

1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{EC}$; 2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC}=\overrightarrow{AA}\cdot\overrightarrow{AB}$; 3) $(0{,}5\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AF})\cdot\overrightarrow{AK}=\vec{0}$; 4) $\overrightarrow{AF}\cdot(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AB}$; 5) $(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM})^2=\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CK}+(-\overrightarrow{BM})^2$.

§ 14. Перпендикулярные прямые и плоскости

14.1. Назовите номера верных утверждений (рис. 80):

1) угол DCB прямой; 2) угол DAB прямой; 3) угол ABC непрямой; 4) угол MAB прямой; 5) угол FDA прямой; 6) угол FDC прямой; 7) прямая DA перпендикулярна плоскости MAB; 8) прямые DA и AK перпендикулярны; 9) прямые DA и MK перпендикулярны; 10) угол между прямыми DA и BK острый; 11) угол между прямыми MK и MF прямой; 12) угол между прямыми FD и AK острый; 13) прямая MA неперпендикулярна плоскости ABC; 14) прямые BC и AM перпендикулярны; 15) прямая BC неперпендикулярна плоскости MAB; 16) прямая MF перпендикулярна плоскости MAB; 17) прямая AB неперпендикулярна плоскости MAD; 18) прямая BK перпендикулярна плоскости MAD; 19) прямая AK перпендикулярна плос-

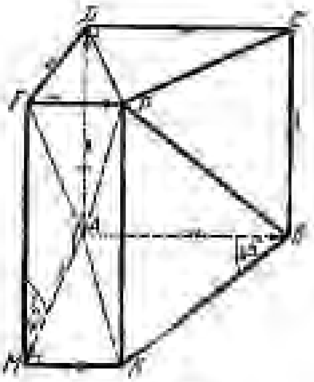


Рис. 80

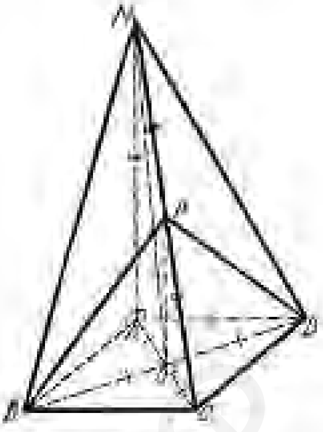


Рис. 81

кость DAB; 20) угол между прямыми KP и AB острый; 21) угол MKP прямой; 22) прямая MK перпендикулярна плоскости PKB.

14.2. Назовите номера верных утверждений (рис. 81):

1) прямая AM перпендикулярна плоскости COB; 2) прямые BO и AM параллельны; 3) прямые AD и AB перпендикулярны; 4) угол POB острый; 5) угол MBC тупой; 6) угол между прямыми AB и MD прямой; 7) прямые DC и MA перпендикулярны; 8) прямая DC перпендикулярна плоскости DAM; 9) отрезки MB и MC симметричны относительно плоскости MAB; 10) треугольник ACD является ортогональной проекцией треугольника MDC на плоскость ABC; 11) точка P является ортогональной проекцией отрезка PO на плоскость ABC.

14.3. Назовите номера верных утверждений (рис. 81): 1) точки B и D симметричны относительно прямой AC; 2) точки B и D симметричны относительно прямой PO; 3) треугольники MCB и MCD симметричны относительно прямой PO; 4) треугольники ACB и ACD симметричны относительно прямой AC; 5) треугольники CMB и CMD симметричны относительно прямой PC; 6) прямая AC является осью симметрии четырехугольника $ABCD$.

14.4. Назовите номера верных утверждений (рис. 81):

1) точки B и D симметричны относительно плоскости AMC; 2) плоскость AMC является плоскостью симметрии прямой AM; 3) треугольники MBC и MCD симметричны относительно плоскости POC; 4) отрезки CD и MB симметричны относительно плоскости AMC; 5) отрезки MB и

MD симметричны относительно плоскости AMC; 6) отрезки PC и PM симметричны относительно плоскости PDB.

14.5. Назовите номера верных утверждений (рис. 82):

1) трапеции $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ равны; 2) углы B_1A_1A и BAA_1 равны; 3) угол D_1A_1A меньше угла A_1AD; 4) плоскости $A_1B_1C_1$ и ABC параллельны; 5) прямая AA_1 перпендикулярна плоскости BCD; 6) прямая AA_1 перпендикулярна плоскости $A_1B_1C_1$; 7) прямая AD перпендикулярна плоскости DCD_1; 8) прямая AB перпендикулярна плоскости B_1BC; 9) прямая DC перпендикулярна плоскости ADD_1; 10) плоскости BCC_1 и AA_1D_1 параллельны.

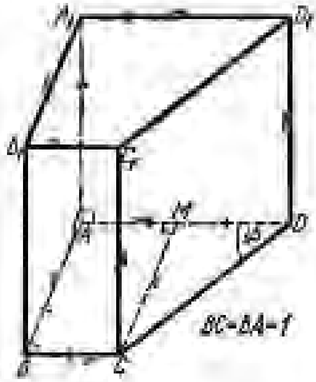


Рис. 82

14.6. Назовите номера верных утверждений (рис. 82):

1) расстояние от точки D до плоскости ABA_1 равно 2; 2) расстояние от точки C до плоскости ADD_1 равно длине отрезка CD; 3) точки D_1 и B одинаково удалены соответственно от плоскостей ABC и $A_1D_1C_1$; 4) расстояние от точки M до плоскости BAA_1 равно длине отрезка BC; 5) расстояние от D до плоскости AA_1D_1 равно расстоянию точки B до плоскости B_1BC; 6) расстояние от отрезка A_1D_1 до плоскости BCD равно 2; 7) расстояние от отрезка CD до плоскости BAA_1 равно 2; 8) расстояние между отрезком C_1D_1 и плоскостью BAA_1 равно длине отрезка B_1C_1; 9) расстояние между прямой C_1D_1 и плоскостью BAA_1 равно длине отрезка B_1C_1; 10) расстояние между плоскостями $B_1A_1C_1$ и BAC равно 2; 11) расстояние между плоскостями C_1CD и BAA_1 равно 2; 12) расстояние между плоскостями C_1CD и BAA_1 равно расстоянию от точки C до плоскости BAD; 13) расстояние от точки M до плоскости BCC_1 равно 1.

14.7. Назовите номера верных утверждений (рис. 82):

1) расстояние между прямыми AA_1 и BC равно длине отрезка BA; 2) расстояние между прямыми BC и DD_1 равно длине отрезка CD; 3) расстояние между прямыми BC и C_1D_1 равно 2; 4) расстояние между прямыми AA_1 и CM равно длине отрезка BC; 5) отрезок AB перпендикулярен прямой AA_1 и прямой CC_1.

14.8. Назовите номера верных утверждений (рис. 81):

1) прямая AM перпендикулярна плоскости DAB;

2) угол MBC прямой; 3) прямые AM и DC перпендикулярны; 4) угол MDC острый; 5) прямые MC и DB перпендикулярны; 6) угол между прямыми DP и AC прямой; 7) угол между прямыми MB и PO прямой.

14.9. Назовите номера верных утверждений (рис. 81):

1) угол между прямой MB и плоскостью ABC равен углу MDA; 2) угол между прямой MB и плоскостью ABC равен 45°; 3) угол между прямой MC и плоскостью DAB равен углу ACM; 4) угол между прямой PB и плоскостью ADC равен углу PDO; 5) угол между прямой PD и плоскостью ABC равен углу PDB; 6) угол между прямой AD и плоскостью POC равен 45°; 7) угол между прямой AB и плоскостью MAB равен 45°; 8) угол между прямой BC и плоскостью MDB равен 45°; 9) прямая AC перпендикулярна плоскости MDB; 10) угол между прямой AC и плоскостью MDB равен углу AOM; 11) угол между прямой MC и плоскостью DCB равен углу MCB; 12) угол между прямой PD и плоскостью AMC равен углу BPO.

14.10. Назовите номера верных утверждений (рис. 81):

1) плоскости MAB и AMD перпендикулярны; 2) угол между плоскостями MAB и AMD равен углу DCB; 3) угол между плоскостями CAM и AMB равен 45°; 4) угол между плоскостями ADC и MBC равен 45°; 5) угол между плоскостями MBC и ACB равен углу ACM; 6) угол между плоскостями ABC и ABM равен углу MBC; 7) угол между плоскостями CAM и AMB равен углу между плоскостями CAM и DAM; 8) угол между плоскостями DOM и OMC равен углу DOC.

14.11. Назовите номера верных утверждений (рис. 81):

1) угол между плоскостями MAB и DBC прямой; 2) плоскости MBC и MAB перпендикулярны; 3) плоскости MAC и DBC перпендикулярны; 4) угол между плоскостями MCD и DBC прямой; 5) плоскости DBC и AMP перпендикулярны; 6) угол между плоскостями MBC и AMC прямой.

14.12. Можно ли утверждать, что две плоскости, перпендикулярные третьей, параллельны между собой?

14.13*. На рисунке 83 показана параллельная проекция куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Известно, что грань BB_1C_1C параллельна плоскости проекций. Грань $ABCD$ изображена ромбом. Найдите угол наклона направления проектирования к плоскости проекций.

14.14*. По рисунку 84 составьте устный план решения задачи.

Дано: $AC=a$, $CB=b$, $CD=h$. Найти: угол между плоскостями DAB и ABC; угол между плоскостями ADB и DBC; площадь треугольника ADB.

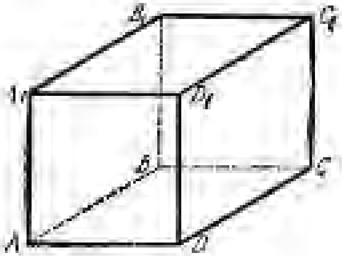


Рис. 83

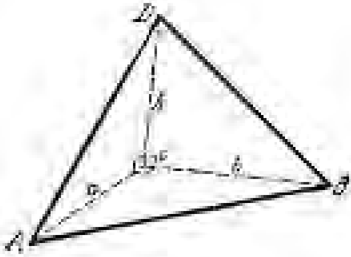


Рис. 84

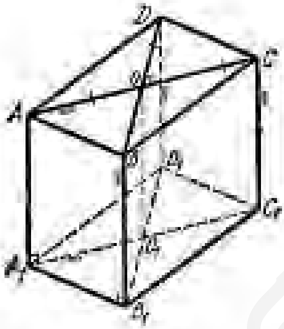


Рис. 85

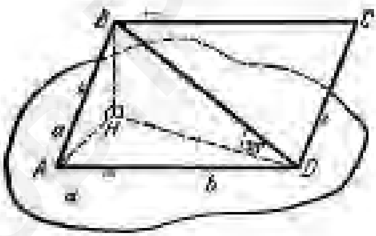


Рис. 86

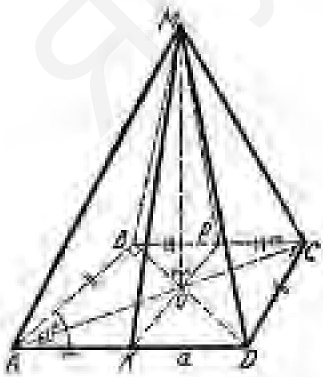


Рис. 87

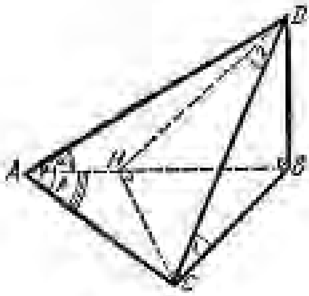


Рис. 88

14.15*. По рисунку 85 составьте устный план решения задачи. Найти все прямые углы на чертеже и угол между плоскостями $A_1B_1C_1$ и ABC, если $O_1D_1 : O_1C_1 = 1 : 2$.

14.16*. По рисунку 86 составьте устный план решения задачи.

Дано: $AB = a$, $AD = b$. Найти: угол между плоскостями BAD и AHD; расстояние от точки C до плоскости AHD; угол между плоскостями HAB и ABD; угол между прямой AC и плоскостью AHD.

14.17*. По рисунку 87 составьте устный план решения задачи.

Дано: $AD = a$, $OM = h$. Найти: все прямые углы на чертеже; расстояние от точки M до прямых AD, CD и BC.

14.18. По рисунку 88 составьте устный план решения задач.

а) Дано: $AD = 1$, α, β. Найти φ.

б) Дано: $AC = 1$, β, φ. Найти $\angle 1$.

в) Дано: $AC = 1$, α, β. Найти угол между плоскостями CAD и ADB.

г) Дано: $AC = 1$, β, $\angle 1$. Найти α.

д) Дано: $AC = 1$, β, α. Найти угол между прямой DC и плоскостью ABD.

14.19. *Может ли тупой угол быть ортогональной проекцией на плоскость острого угла? Сделайте соответствующий чертеж.*

14.20. Можно ли построить прямой двугранный угол, грани которого проходят через две данные прямые: а) параллельные; б) пересекающиеся; в) скрещивающиеся?

§ 15. Куб

15.1. Является ли кубом параллелепипед, в котором равны все ребра и плоские углы: а) при одной из вершин; б) при двух вершинах одного и того же ребра?

15.2. Что легче: один свинцовый куб с ребром 10 см или 10 свинцовых кубиков, ребра которых равны 1 см?

15.3. На рисунке 89 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 1$. Установите форму четырехугольников AM_1M_2D, DK_1K_2A и найдите их площади.

15.4. По рисунку 90 расскажите, как строилось сечение $KHYFA$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью: а) MAK; б) AHY; в) XAM.

15.5. По рисунку 91 расскажите, как строилось сечение $HMYXA$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью: а) EHM; б) YAH; в) XMA.

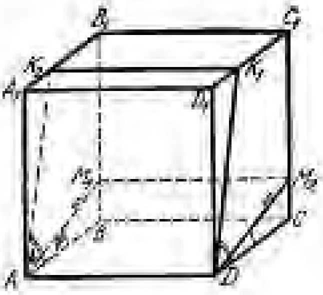


Рис. 89

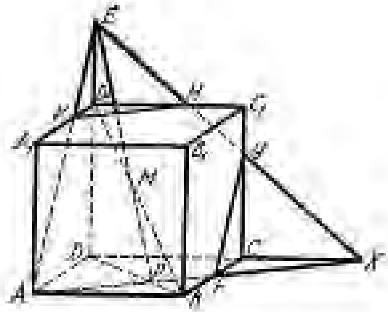


Рис. 90

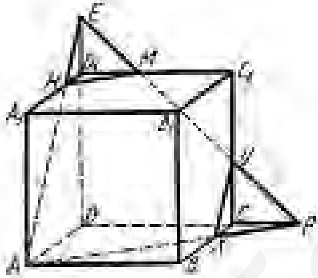


Рис. 91

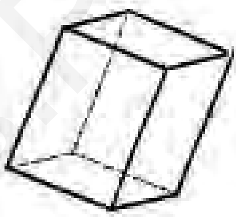


Рис. 92

15.6. Разделите куб на шесть четырехугольных пирамид.

15.7. Можно ли рисунок 92 принять за изображение куба?

15.8. На рисунках 93 (*а*, *б*, ..., *м*) показаны различные проекции одного и того же куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, по-разному расположенного в пространстве относительно плоскости проекции.

а) Назовите изображения куба, две грани которого параллельны плоскости проекций.

б) Назовите изображения куба, грани которого не параллельны плоскости проекций.

в) Каким отрезкам (ребрам, диагоналям и т. п.) параллельно направление проецирования (рис. 93, *б* — *з*, *к*, *л*)?

15.9. Вы видите (рис. 94) изображение трехгранного угла и куба. Где расположен куб: внутри трехгранного угла или вне его?

15.10*. *Муха* движется по поверхности куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и проходит через все его вершины только

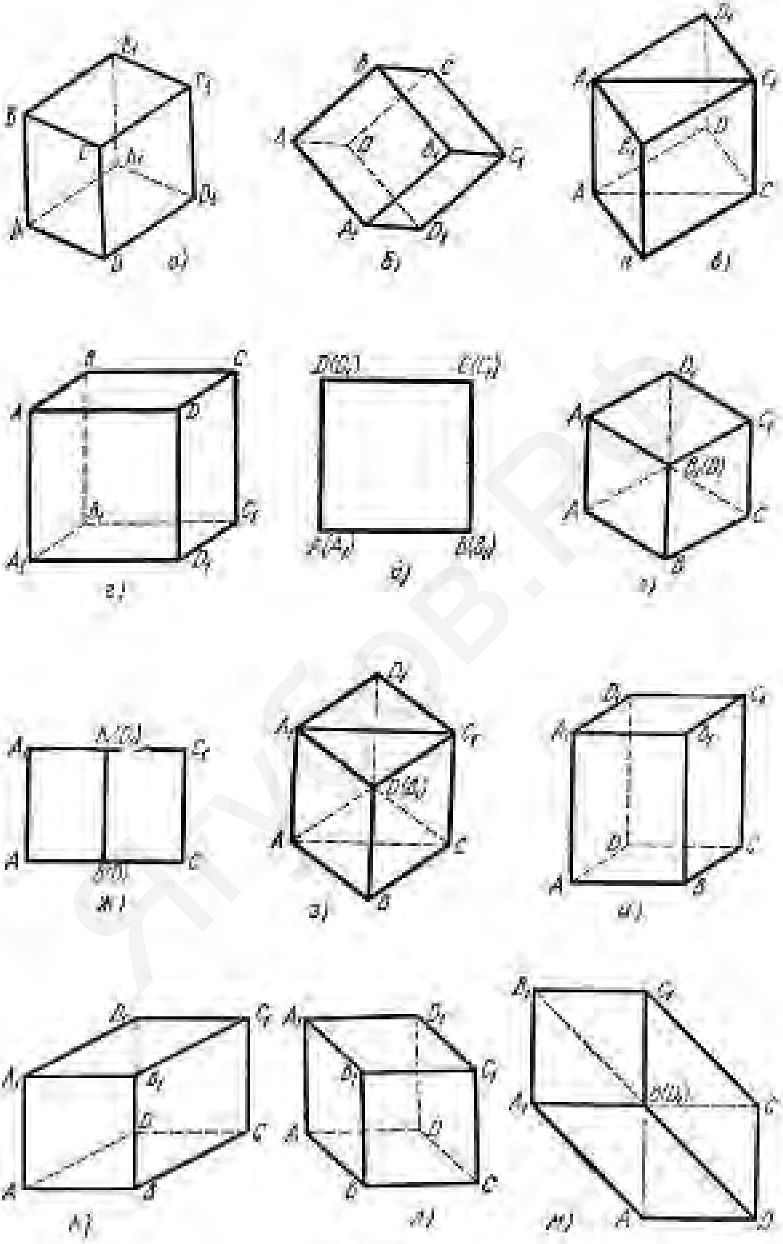


Рис. 33

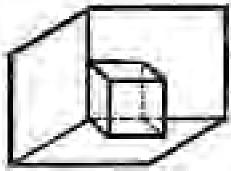


Рис. 94

один раз. Постройте путь наименьшей длины, если муха движется: а) из вершины A в D; б) из вершины A в D_1.

15.11*. Можно ли окрасить грани куба тремя данными красками так, чтобы соседние грани были окрашены в различные цвета?

§ 16. Прямоугольный параллелепипед

16.1. Как разрезать прямоугольный параллелепипед на две части так, чтобы из них можно было составить прямую шестиугольную и пятиугольную призмы?

16.2. Установите вид сечения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, которая проходит через B_1D и точку K, принадлежащую отрезку AB (рис. 95).

16.3. Существует ли прямоугольный параллелепипед, у которого диагональное сечение равно боковой грани?

16.4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB=3$, $BC=4$, $AA_1=5$; $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$. На рисунках 96—100 дано изображение этого параллелепипеда, на котором диагональное сечение ACC_1A_1 параллельно плоскости проекционного чертежа. Расскажите, какие свойства параллельных проекций, прямоугольного параллелепипеда, параллельных и перпендикулярных прямых и плоскостей использованы при построении следующих сечений параллелепипеда плоскостью, которая проходит через: 1) точки M, K, A_1; 2) точку K и параллельная MB и AC_1; 3) точку O и перпендикулярная A_1C; 4) точку M и перпен-

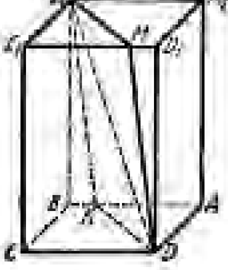


Рис. 95

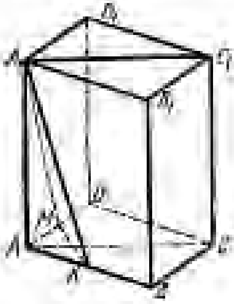


Рис. 96

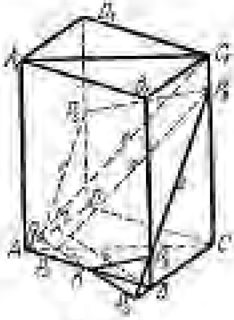


Рис. 97

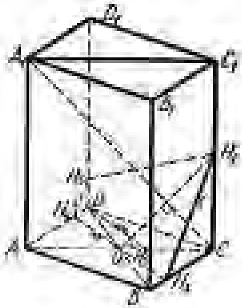


Рис. 98

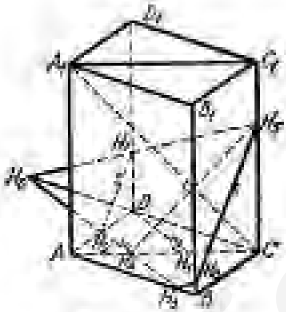


Рис. 99

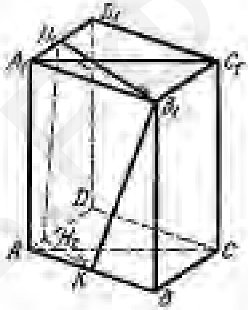


Рис. 100

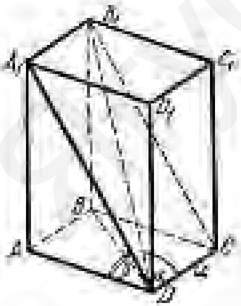


Рис. 101

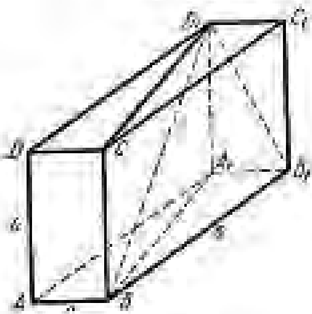


Рис. 102

дикулярная A_1C; 5) прямую KB_1 и перпендикулярная плоскости ACC_1.

16.5. На рисунке 101 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, где $CD = a$. Составьте устный план вычисления длины отрезка AD_1, площади четырехугольника

A_1B_1CD, величины двугранного угла между плоскостями CB_1D и B_1DB и объема параллелепипеда.

16.6. На рисунке 102 изображен прямоугольный параллелепипед.

а) Докажите, что плоскости ABB_1 и CBA перпендикулярны. б) Найдите тангенс угла прямой BD с плоскостью ABB_1. в) Изображен ли на рисунке 102 угол, равный углу между прямыми BD_1 и C_1B_1? г) Докажите, что угол D_1BB_1 больше угла A_1BB_1.

16.7. На рисунке 103 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка T — середина ребра A_1B_1. Четырехугольник $CATQ$ — сечение параллелепипеда плоскостью CAT.

а) Расскажите, как строили это сечение. б) Верно ли, что прямые CQ и AT пересекаются и их общая точка принадлежит прямой B_1B? в) Найдите объем фигуры $ABCTB_1Q$. г) Назовите фигуру, которая является ортогональной проекцией трапеции $CQTA$ на плоскость AA_1T.

16.8. На рисунке 104 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Какую часть объема параллелепипеда составляет объем пирамиды O_1ABCD? б) Сравните углы между плоскостями O_1AD и BAD, O_1DC и ABC. в) Докажите, что прямые BB_1 и CO_1 скрещивающиеся. г) Изображен ли на рисунке 104 угол между прямой O_1C и плоскостью ABC?

16.9. На рисунке 105 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Сравните углы между плоскостями BCC_1 и C_1CD, BOC_1 и OCD. б) Верно ли, что прямая HC перпендикулярна плоскости BC_1D, если прямая HC перпендикулярна прямой OC_1? в) Внутри какого из треугольников (BOC_1 или C_1OD) находится точка C_0, если прямая C_0C перпендикулярна плоскости BDC_1? г) $\overrightarrow{DC_2}=0{,}2\overrightarrow{DB}$. Верно ли, что $C_2C\perp BD$ и точка C_0 принадлежит прямой C_2C_1? д) Докажите, что треугольник BDC_1 остроугольный.

16.10. На рисунке 106 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Найдите одну из тригонометрических функций угла между плоскостями $D_1C_1B_1$ и MC_1B_1. б) Докажите, что двугранный угол, образованный полуплоскостями MB_1A_1 и C_1MB_1, — тупой.

16.11. На рисунке 107 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пересекаются ли плоскости A_1C_1B и D_1CA?

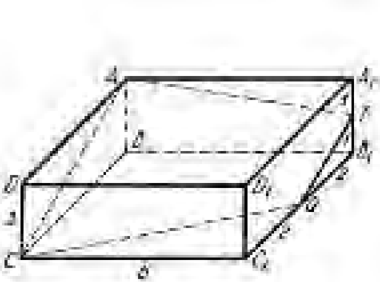


Рис. 103

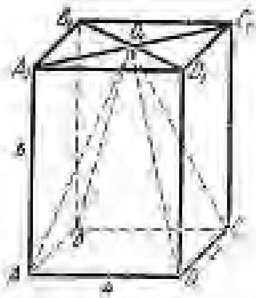


Рис. 104

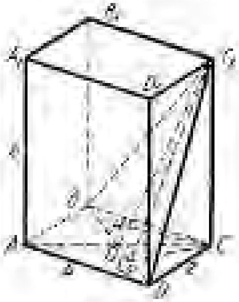


Рис. 105

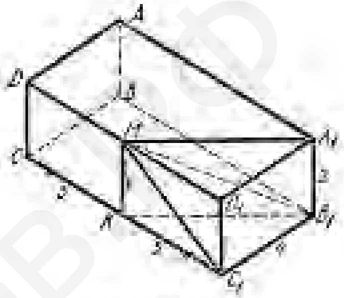


Рис. 106

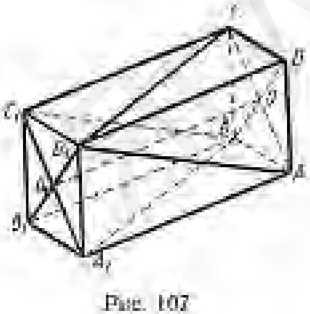


Рис. 107

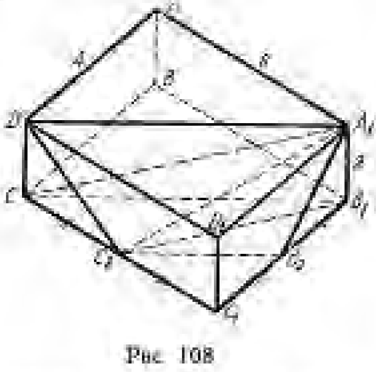


Рис. 108

16.12. На рисунке 108 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Какую часть объема параллелепипеда составляет объем многогранника $C_2B_2B_1A_1$? б) Найдите отношение объемов пирамид $C_2CDA_1B_1$ и $C_2CB_1A_1$. в) Найдите объем многогранника $CDA_1B_1B_2C_2$.

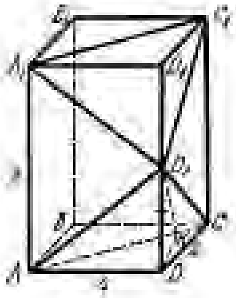


Рис. 109

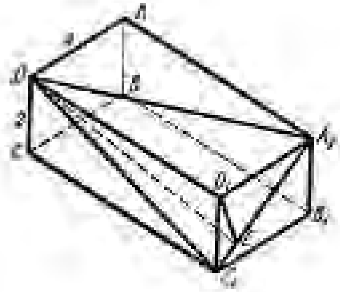


Рис. 110

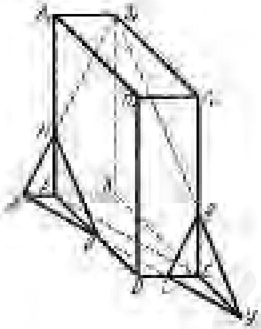


Рис. 111

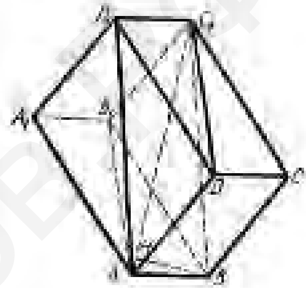


Рис. 112

16.13. На рисунке 109 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Отрезок DK перпендикулярен плоскости ACC_1.

а) В каком отношении точка K делит отрезок AC? б) Найдите тангенс двугранного угла, образованного плоскостями ADC и CAD_2. в) Докажите, что двугранный угол, образованный полуплоскостями $A_1C_1D_2$ и D_2AC, тупой.

16.14. На рисунке 110 изображен прямоугольный параллелепипед, $\overrightarrow{A_1E}=4\overrightarrow{EC_1}$.

а) Показан ли на рисунке линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями C_1A_1D и $C_1A_1D_1$? б) Докажите, что плоскости A_1C_1D и ED_1D перпендикулярны.

16.15*. На рисунке 111 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{DL}=\overrightarrow{LC}$. Расскажите по рисунку, как строилось сечение B_1NPLR параллелепипеда плоскостью B_1PL.

16.16 *. На рисунке 112 показан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Отрезок BH перпендикулярен прямой C_1A. Верно ли, что отрезок HB перпендикулярен плоскости B_1C_1D?

§ 17. Прямой и наклонный параллелепипед

17.1. Могут ли два неравных прямых параллелепипеда с равными высотами иметь одинаковые площади боковых поверхностей?

17.2. Два прямых параллелепипеда с равными высотами равновелики. Следует ли отсюда, что равны площади их полных поверхностей?

17.3. Два прямых параллелепипеда с равными высотами равновелики, а площади их боковых поверхностей равны. Следует ли отсюда, что такие параллелепипеды равные?

17.4. Докажите, что диагональная плоскость делит параллелепипед на две равные части.

17.5. Сколько данных достаточно, чтобы найти площадь полной поверхности прямого параллелепипеда?

17.6. На рисунке 113 показан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Основание $ABCD$ — ромб. Отрезок A_1H перпендикулярен плоскости ABC, и точка H принадлежит отрезку AC. Верно ли, что такой параллелепипед имеет плоскость симметрии?

17.7. Установите вид сечения параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки A, C, K (рис. 114).

17.8. На рисунке 115 показан наклонный параллелепипед, в основании которого лежит квадрат. Боковое ребро AA_1 составляет равные углы со смежными сторонами основания. Установите форму диагональных сечений параллелепипеда.

17.9. Существует ли наклонный параллелепипед с равными диагональными сечениями?

17.10. Основанием прямого параллелепипеда является ромб (с острым углом) (рис. 116). Назовите оси и плоскости симметрии этого параллелепипеда.

17.11 *. В прямом параллелепипеде все диагонали равны (рис. 117). Докажите, что этот параллелепипед является прямоугольным.

17.12 *. Диагональное сечение DBB_1D_1 прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно каждой из боковых граней. Что является основанием этого параллелепипеда?

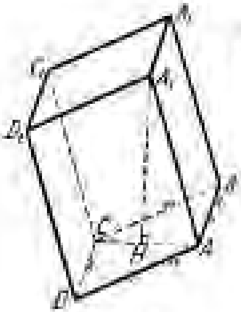


Рис. 113

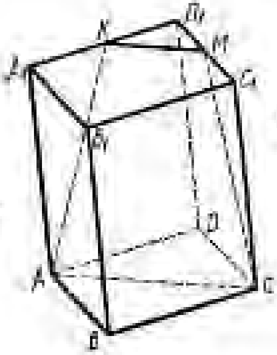


Рис. 114

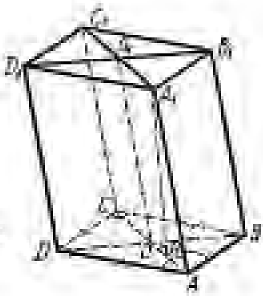


Рис. 115

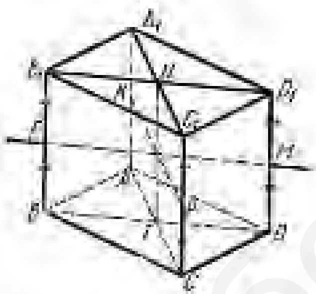


Рис. 116

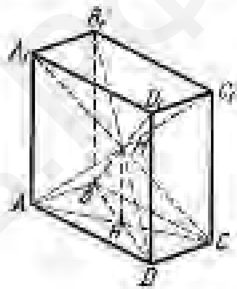


Рис. 117

§ 18. Призмы

18.1. Существуют ли неравные правильные шестиугольные призмы с данной стороной основания и данным объемом?

18.2. На рисунке 118 показана наклонная треугольная призма. Может ли развертка боковой поверхности этой призмы быть параллелограммом?

18.3. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 119) является правильный треугольник ABC. Треугольник AB_2C_2 — перпендикулярное сечение этой призмы. Верно ли, что треугольник AB_2C_2 — правильный?

18.4. Правильная пятиугольная призма пересечена диагональными плоскостями (рис. 120). Установите вид многогранника, боковыми ребрами которого являются линии пересечения этих диагональных плоскостей.

18.5. На рисунке 121 изображена наклонная шестиугольная призма, в основании которой лежит правильный

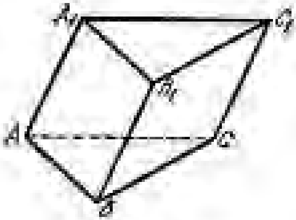


Рис. 118

Рис. 119

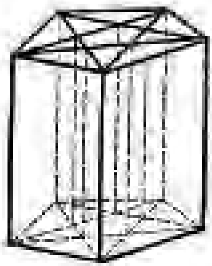


Рис. 120

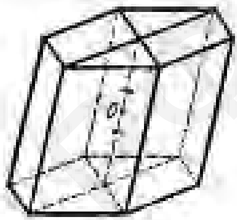


Рис. 121

шестиугольник. Имеет ли всякая такая призма центр, ось или плоскость симметрии?

18.6. Установите вид сечения треугольной призмы плоскостью, проходящей через сторону нижнего основания и середину скрещивающегося с ней бокового ребра.

18.7. Назовите некоторые свойства прямой призмы (наличие центра симметрии, оси симметрии, плоскостей симметрии; форму ее диагональных сечений), основанием которой является ромб и высота которой равна стороне основания.

18.8. Равновелики ли две правильные четырехугольные призмы, если их диагональные сечения равновелики?

18.9. Основанием прямой призмы является равнобочная трапеция, один из углов которой равен $100°$. Найдите величины двугранных углов при боковых ребрах призмы.

18.10. Существует ли треугольная призма, у которой каждый ее двугранный угол при боковых ребрах меньше (больше) $60°$?

18.11. Диагональные сечения ACC_1A_1 и DBB_1D_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, основанием которой является равнобочная трапеция $ABCD$, перпендикулярны соответственно граням BCC_1B_1 и ADD_1A_1 и делят острые двугранные углы при боковых ребрах AA_1 и BB_1 призмы пополам (рис. 122).

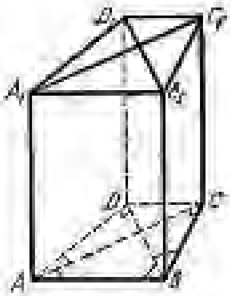


Рис. 122

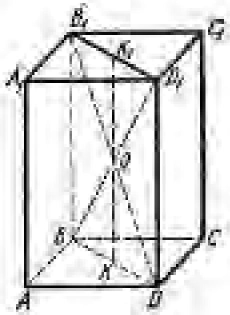


Рис. 123

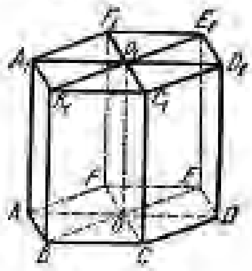


Рис. 124

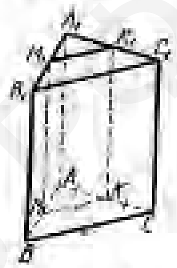


Рис. 125

Найдите величины двугранных углов при боковых ребрах призмы.

18.12. Существует ли призма, имеющая 74 ребра?

18.13. На рисунке 123 изображена правильная четырехугольная призма. Назовите ее центр симметрии, ось симметрии и плоскости симметрии.

18.14. На рисунке 124 изображена правильная шестиугольная призма. Назовите число осей симметрии и плоскостей симметрии.

18.15. Можно ли в сечении правильной четырехугольной призмы плоскостью получить восьмиугольник?

18.16. Можно ли от правильной треугольной призмы тремя плоскостями отсечь правильную шестиугольную призму?

18.17. Всегда ли прямая четырехугольная призма, у которой диагональные сечения равны и взаимно перпендикулярны, является правильной?

18.18. В какой правильной n-угольной призме все диагональные сечения равны между собой?

18.19. Основанием треугольной призмы является правильный треугольник. Одна из ее боковых граней является прямоугольником и перпендикулярна к плоскости основания. Верно ли, что это правильная призма?

18.20. Какое число данных достаточно для построения правильной n-угольной призмы?

18.21. Призма имеет k граней. Какой многоугольник лежит в ее основании?

18.22*. На рисунке 125 показана треугольная призма и ее сечение плоскостью, проходящей через средние линии оснований. В каком отношении находятся объемы полученных частей призмы?

18.23*. Докажите, что объем прямой четырехугольной призмы, диагональные сечения которой взаимно перпендикулярны, равен произведению площадей диагональных сечений, деленному на удвоенную высоту призмы.

§ 19. Правильная пирамида

19.1. Какую из фигур, показанных на рисунках 126—129, можно принять за изображение правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$?

19.2. Необходимое или достаточное условие выражает следующее утверждение: в правильной пирамиде двугранные углы при основании равны?

19.3. Является ли пирамида правильной, если ее боковые грани: а) равные треугольники; б) равные равнобедренные треугольники?

19.4. Установите форму сечения правильной треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания AB и середину высоты пирамиды $DABC$.

19.5. В правильной четырехугольной пирамиде угол между апофемами смежных боковых граней равен 60°. Найдите угол между апофемами несмежных боковых граней.

19.6. Существует ли правильная восьмиугольная пирамида, в которой боковой гранью является правильный треугольник?

19.7. Сформулируйте необходимые и достаточные условия существования правильной четырехугольной усеченной пирамиды.

19.8. Будет ли пирамида правильной, если у нее равны все плоские углы при вершине и двугранные углы при основании?

19.9. На рисунке 130 показана правильная четырехугольная пирамида, апофемы которой наклонены к плоско-

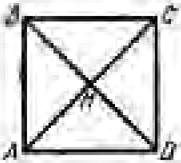


Рис. 126

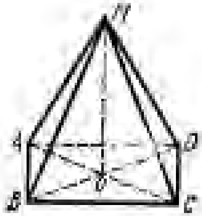


Рис. 127

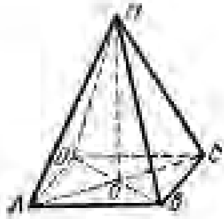


Рис. 128

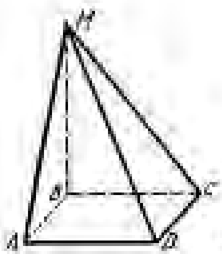


Рис. 129

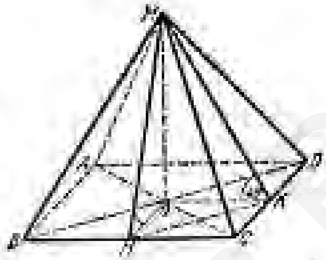


Рис. 130

Рис. 131

сти основания под углом 45°. Найдите угол между смежными апофемами пирамиды.

19.10. Правильная четырехугольная усеченная пирамида пересечена плоскостью, проходящей через середины боковых ребер. Пройдет ли эта плоскость через точку пересечения диагоналей пирамиды?

19.11. Сколько достаточно иметь данных для определения площади полной поверхности правильной пирамиды?

19.12. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды *MABCD* (рис. 131) в два раза больше площади основания. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости основания.

19.13*. Правильный тетраэдр рассечен шестью различными плоскостями, каждая из которых проходит через одно из ребер тетраэдра и середину противолежащего ребра и делит тетраэдр на две конгруэнтные части. На сколько частей делят тетраэдр все шесть плоскостей?

19.14*. Чему равна длина ребра наибольшего правильного тетраэдра, который можно поместить в коробку, имеющую форму куба с ребром длиной 1 дм?

19.15*. Почему правильный тетраэдр не имеет центра симметрии?

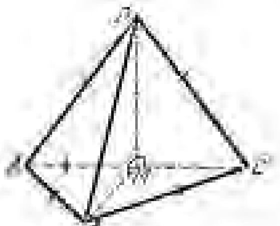


Рис. 132

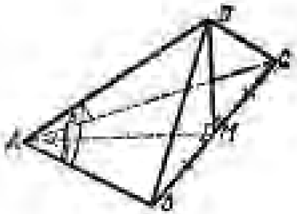


Рис. 133

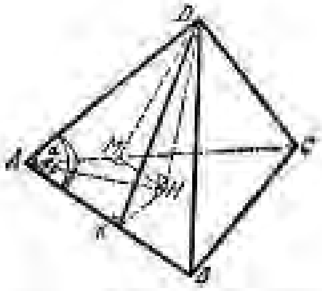


Рис. 134

Рис. 135

§ 20. Пирамида

20.1. По рисунку 132 составьте устный план решения задачи. Дано: $AC=AB=BC=a$, $\angle DAC=\angle ACD=45^\circ$, $\angle BMD=90^\circ$ (M — середина ребра AC). Найти: угол между плоскостями DBC и ABC; площадь боковой поверхности пирамиды и угол прямой BD с плоскостью ABC.

20.2. По рисунку 133 составьте устный план решения задачи. Дано: $AM=1$, $\angle BAC=\alpha$, $\angle BAD=\angle DAC=\beta$; точка M — середина ребра BC пирамиды $ABCD$; углы AMD, BMD и AMB прямые. Найти: величину угла DAM; угол между плоскостями BAD и ADM; объем пирамиды $DABC$.

20.3. По рисунку 134 составьте устный план решения задач.

а) Дано: $AD=1$, $\angle BAC=2\beta$, $\angle DAB=\angle DAC=\alpha$. Найти длину высоты DH пирамиды $DABC$.

б) Дано: $AD=1$, α, 2β. Найти угол между плоскостями DAB и ABC.

в) Дано: $AD=1$, $AC=AB=a$, α, 2β. Найти объем пирамиды $DABC$.

20.4. На рисунке 135 показана пирамида $DABC$. Угол ACB равен 120°, $AC=CB$, $DC=DB$, угол ACD прямой.

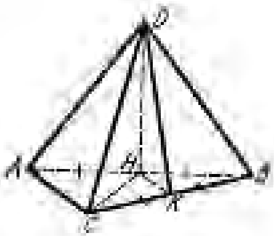


Рис. 136

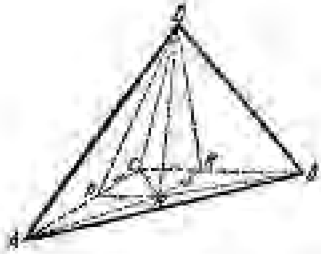


Рис. 137

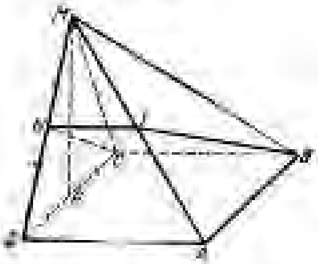


Рис. 138

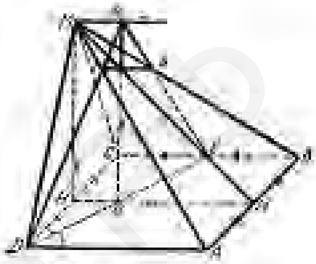


Рис. 139

Отрезок DH — высота пирамиды. Докажите, что углы DCH и DMH являются линейными углами двугранных углов при прямых AC и CB.

20.5. На рисунке 136 изображена пирамида $DABC$. Ребра AD, DB, AC и CB равны между собой. Углы ADB и ACB прямые. Плоскости ADB и ABC перпендикулярны. Докажите, что отрезок DH — высота пирамиды и отрезок DK — высота треугольника DBC. Найдите углы, образованные прямой CD с плоскостями ABC и ABD. Найдите угол между плоскостями DBC и BCA.

20.6. На рисунке 137 показана треугольная пирамида $DABC$. Отрезок DH — ее высота. Угол ACB прямой. Назовите линейные углы двугранных углов при прямых AC и BC. Назовите углы наклона прямых AD, DC и DB к плоскости ABC.

20.7. У некоторого многогранника одна грань четырехугольник, а остальные грани являются треугольниками. Можно ли утверждать, что этот многогранник является пирамидой?

20.8. Разделите куб на пять треугольных пирамид.

20.9. Докажите, что многогранник, у которого все грани, за исключением одной, имеют общую вершину, является пирамидой.

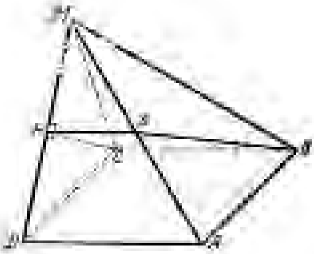


Рис. 140

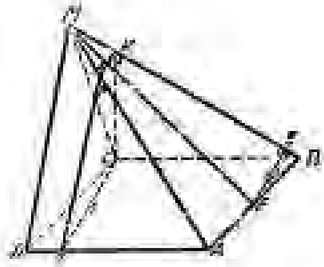


Рис. 141

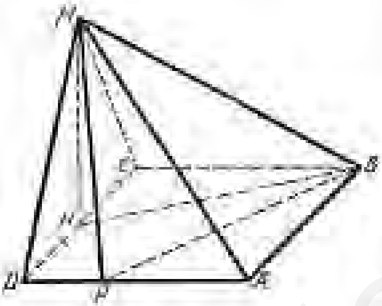


Рис. 142

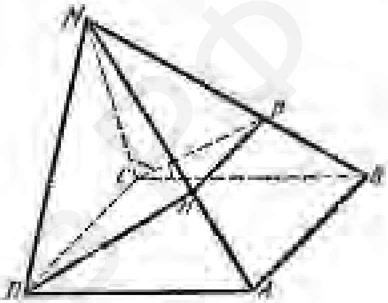


Рис. 143

20.10. Существует ли многогранник, у которого все грани являются трапециями?

20.11. Основанием четырехугольной пирамиды $MABCD$ является прямоугольник $ABCD$, у которого $AB=2$, $BC=4$. Боковая грань CMD — правильный треугольник, его плоскость перпендикулярна основанию пирамиды. На рисунках 138—143 даны различные сечения этой пирамиды. Найдите рисунок, на котором показано сечение пирамиды плоскостью, которая проходит через:

1) ребро CB и перпендикулярна плоскости ADM; 2) ребро CD и делит пополам угол MCB; 3) ребро BM и образует двугранный угол величиной 45° с плоскостью основания пирамиды; 4) вершину C и перпендикулярна прямой BM; 5) вершину B и перпендикулярна плоскостям ADM и DMC; 6) точку D, перпендикулярна плоскости ABC и одинаково наклонена к прямым DA и CD.

Дайте обоснование своим ответам.

20.12. Сколько граней, перпендикулярных к плоскости основания, может иметь пирамида?

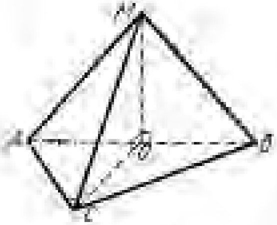


Рис. 144

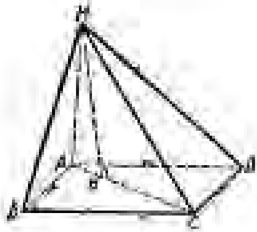


Рис. 145

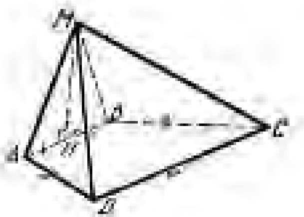


Рис. 146

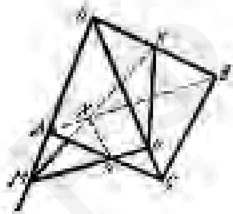


Рис. 147

20.13. На рисунке 144 изображена пирамида, основанием которой является прямоугольный треугольник, а высота проходит через середину его гипотенузы. Назовите свойства этой пирамиды.

20.14. Боковые грани четырехугольной пирамиды равны между собой. Какой четырехугольник может быть ее основанием?

20.15. На рисунке 145 изображена пирамида, основанием которой является квадрат, а основание высоты пирамиды лежит на диагонали основания. Назовите свойства этой пирамиды.

20.16*. На рисунке 146 показана пирамида, основанием которой является равнобочная трапеция, а высота проходит через середину меньшего основания. Назовите свойства этой пирамиды.

20.17*. Может ли неправильная пирамида иметь: а) ось симметрии; б) две плоскости симметрии?

20.18. Расскажите по рисунку 147, как строилось сечение $XYPK$ пирамиды $DABC$ плоскостью: а) XYP; б) PKM; в) MYX; г) XKP.

20.19. Расскажите по рисунку 148, как строилось сечение BED пирамиды $KPAM$ плоскостью: а) XYB; б) EXY; в) DYX; г) EDY.

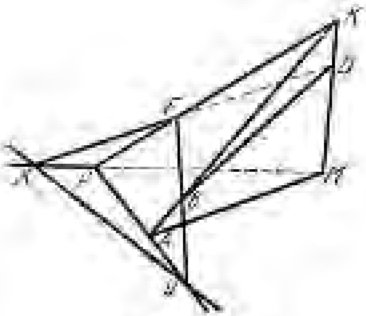


Рис. 148

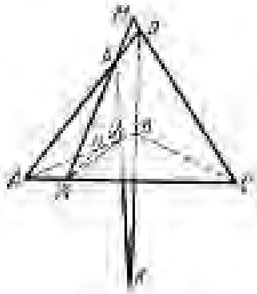


Рис. 149

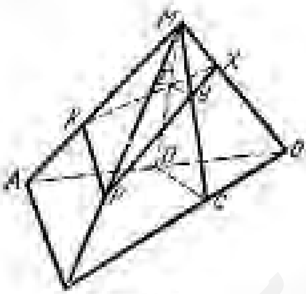


Рис. 150

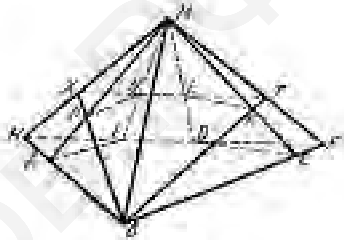


Рис. 151

20.20. Расскажите по рисунку 149, как строилось сечение *PYX* пирамиды *DABC* плоскостью: а) *XYK*; б) *MPK*; в) *KXM*.

20.21. По рисунку 150 расскажите, как строилось сечение *KEYP* пирамиды *MABCD* плоскостью *PKE*.

20.22. По рисунку 151 расскажите, как строилось сечение *YLKBP* пирамиды *MABCDE* плоскостью: а) *BPK*; б) *BYL*; в) *BPL*.

§ 21. Развертки многогранников

21.1. Постройте развертку куба так, чтобы она имела четыре оси симметрии.

21.2. На рисунке 152 дана часть развертки куба (три его боковые грани и части верхнего и нижнего оснований). Достройте этот многоугольник до полной развертки куба.

21.3. Постройте развертку куба так, чтобы она была двенадцатиугольником.

21.4. На рисунке 153 дана развертка куба. Постройте новую развертку этого куба так, чтобы отрезки XY, AB и CD были частями контура новой развертки.

21.5. На рисунке 154, *а* дана развертка куба. На рисунке 154, *б* изображены одинаковые по величине кубы. Разверткой каких из них может быть фигура, данная на рисунке 154, *а*?

21.6. На рисунке 155, *а* дана развертка куба. Одна из ее граней и части двух других граней закрашены. На рисунке 155, *б* изображены кубы. Разверткой каких из них может быть фигура, показанная на рисунке 155, *а*?

21.7. На рисунке 156 изображено по три развертки двух различно раскрашенных кубов. Найдите развертки каждого из этих кубов.

21.8. Постройте развертку куба (рис. 157), разрезав его поверхность по отрезкам AB, BC, AA_1, A_1D_1, A_1B_1, A_1C_1.

21.9. На рисунке 158 даны изображения кубов. Постройте развертки этих кубов и постройте те отрезки, которые показаны на изображении куба.

21.10. Постройте такую развертку куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, чтобы точки D_1, B_1 и A на этой развертке являлись вершинами прямоугольного треугольника.

21.11. Даны две части развертки куба (рис. 159). Отметьте цифрами на его изображении отрезки, разрезав по которым поверхность, мы сможем развернуть ее в данные фигуры.

21.12. Постройте развертку правильного тетраэдра так, чтобы она имела три оси симметрии.

21.13. На рисунке 160 дана развертка пирамиды $MABCD$, основанием которой является квадрат $ABCD$. Какие элементы развертки следует измерить, чтобы найти:

а) высоту пирамиды; б) угол наклона ребра AM к плоскости основания пирамиды; в) величину двугранного угла, образованного плоскостями ABM и ABC.

21.14. Постройте развертку правильной четырехугольной пирамиды так, чтобы у нее было четыре оси симметрии.

21.15. Постройте развертку правильной четырехугольной пирамиды так, чтобы у нее была только одна ось симметрии.

21.16. Постройте развертку прямоугольного параллелепипеда так, чтобы она имела центр симметрии.

21.17. Постройте развертку правильного тетраэдра так, чтобы она имела только две оси симметрии и центр симметрии.

21.18. Найдите среди фигур (рис. 161—168) те, которые можно считать развертками куба.

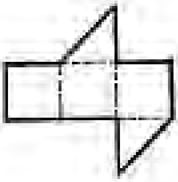


Рис. 152

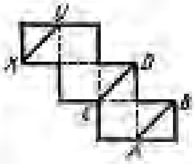


Рис. 153

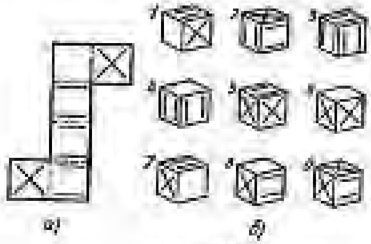


Рис. 154

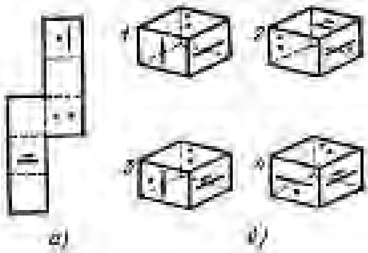


Рис. 155

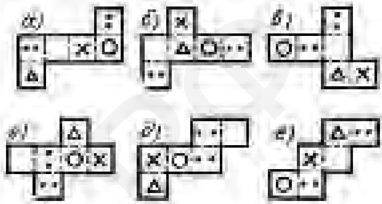


Рис. 156

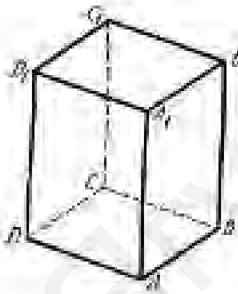


Рис. 157

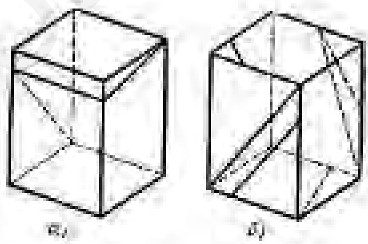


Рис. 158

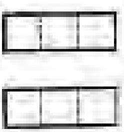


Рис. 159

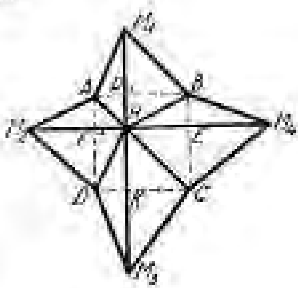


Рис. 160

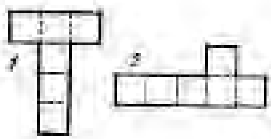


Рис. 161

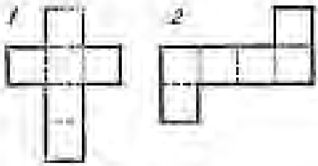


Рис. 162

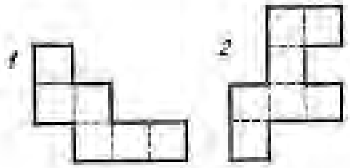


Рис. 163

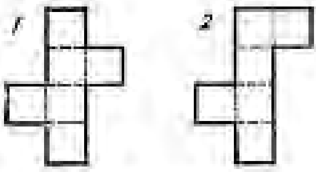


Рис. 164

Рис. 165

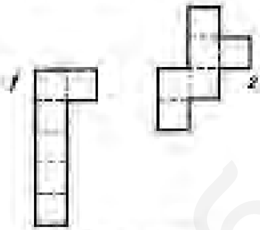


Рис. 166

Рис. 167

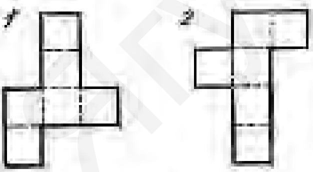


Рис. 168

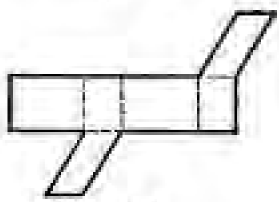


Рис. 169

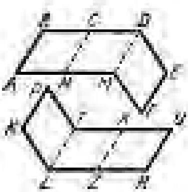


Рис. 170

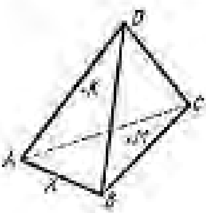


Рис. 171

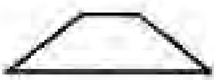


Рис. 172

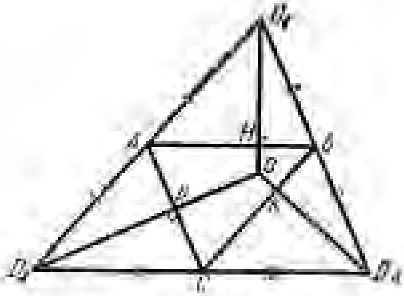


Рис. 173

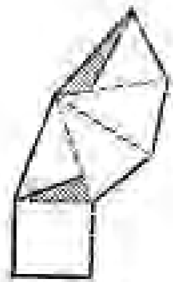


Рис. 174

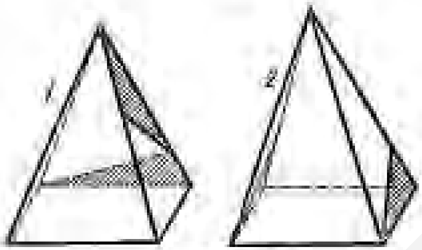


Рис. 175

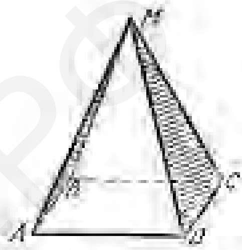


Рис. 176

21.19. Может ли параллелограмм быть разверткой боковой поверхности наклонного параллелепипеда?

21.20. Является ли данная на рисунке 169 фигура разверткой некоторого параллелепипеда?

21.21. Построенная развертка наклонного параллелепипеда по одному из ребер была разрезана на части, которые показаны на рисунке 170. Найдите на этих частях развертки части их контуров, которые до разрезания совпадали.

21.22. Дана правильная треугольная пирамида $DABC$. На гранях ABC и ABD отмечены произвольные точки M и K (рис. 171). Как построить точку X на ребре AB так, чтобы сумма $KX+XM$ была наименьшей?

21.23. Может ли треугольник быть разверткой боковой поверхности правильной треугольной пирамиды?

21.24. Проверьте, является ли данный на рисунке 172 четырехугольник боковой гранью некоторой правильной усеченной четырехугольной пирамиды.

21.25. На рисунке 173 дана развертка треугольной пирамиды $DABC$, все грани которой — равные остроугольные треугольники. Докажите: а) точка O — основание высоты DO пирамиды; б) отрезок OD_3 перпендикулярен прямой BC.

21.26. На рисунке 174 дана развертка правильной четырехугольной пирамиды. Некоторые части ее заштрихованы. На рисунке 175 изображены правильные четырехугольные пирамиды. Разверткой каких из них может быть фигура, данная на рисунке 174?

21.27*. Постройте такую развертку правильной четырехугольной пирамиды (рис. 176), чтобы заштрихованная часть поверхности пирамиды на развертке состояла из двух центрально-симметричных фигур.

21.28*. Постройте развертку правильного тетраэдра так, чтобы она имела центр симметрии.

§ 22. Цилиндр

22.1. Сколько имеет цилиндр: а) осей симметрии? б) плоскостей симметрии?

22.2. Докажите, что цилиндр имеет центр симметрии.

22.3. Цилиндр катится по плоскости. Какая фигура описывается при этом его осью?

22.4. Можно ли в сечении цилиндра плоскостью получить равнобедренный треугольник?

22.5. Какую фигуру представляет собой сечение цилиндра плоскостью, параллельной его образующей?

22.6. Диаметр одного круглого бревна в три раза больше диаметра второго бревна. Как относятся объемы этих бревен, если их длины одинаковы?

22.7. Проволоку диаметром 4 мм и длиной 1 м вытягивают в проволоку диаметром 2 мм. Во сколько раз увеличится длина проволоки?

22.8. Изменится ли объем цилиндра, если диаметр его основания увеличить в два раза, а высоту уменьшить в четыре раза?

22.9*. Два цилиндра образованы вращением одного и того же прямоугольника (его размеры — 3×2) вокруг каждой из неконгруэнтных его сторон. Как относятся объемы цилиндров?

§ 23. Конус

23.1. В усеченный конус вписан шар. Под каким углом образующая конуса видна из центра шара?

23.2. Может ли сектор, дуга которого равна 210°, быть разверткой боковой поверхности конуса?

23.3. Высота треугольной пирамиды находится вне этой пирамиды. Можно ли вокруг этой пирамиды описать конус?

23.4. В конус вписана треугольная пирамида, основанием которой является прямоугольный треугольник. Каким свойством обладает высота этой пирамиды?

23.5. Всегда ли высота конуса, вписанного в треугольную пирамиду, является и высотой пирамиды?

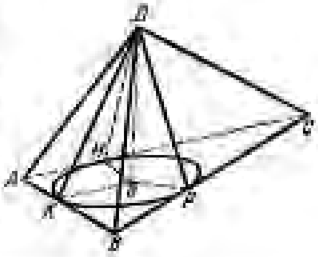


Рис. 177

23.6. Докажите, что вершина конуса, вписанного в треугольную пирамиду, одинаково удалена от сторон основания пирамиды (рис. 177).

23.7 Каким условиям должна удовлетворять треугольная пирамида, чтобы: а) вокруг нее можно было описать конус; б) в нее можно было вписать конус?

23.8. Сколько имеет конус: а) осей симметрии; б) плоскостей симметрии; в) центров симметрии?

§ 24. Сфера и шар

24.1. Что тяжелее: один железный шарик радиусом 5 см или 5 железных шариков диаметром 0,5 см?

24.2. Имеется два равных кубических ящика. В один из них положен большой железный шар, диаметр которого равен высоте ящика. В другой положили 1000 маленьких железных шариков (их диаметры в 10 раз меньше диаметра большого железного шара). Который ящик тяжелее?

24.3. Из березы выточено два шара диаметром 2 и 10 см. Во сколько раз второй шар тяжелее первого?

24.4. Какую фигуру представляет собой осевое сечение: а) шарового сектора; б) шарового сегмента?

24.5. Какая фигура получается при пересечении двух больших кругов одного и того же шара?

24.6. Даны два круга. Как узнать, являются ли они сечениями одного и того же шара?

24.7. Проекцией каких фигур может быть круг?

24.8. Внутренний диаметр трехметровой трубы равен 4 см. С одного конца в трубу вводят шар диаметром 3 см, с другого — шар диаметром 2 см. Можно ли с помощью стержня протолкнуть каждый шар сквозь трубу?

24.9. Чему равно наибольшее число точек, которые можно разместить на сфере так, чтобы расстояния между любыми двумя точками были равны?

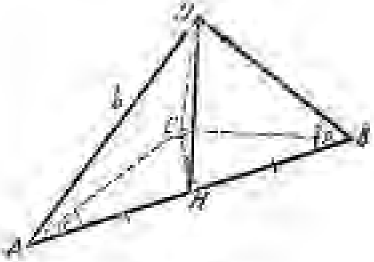


Рис. 178

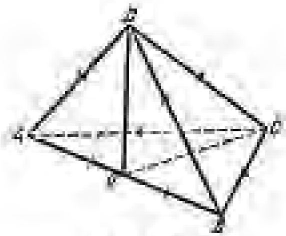


Рис. 179

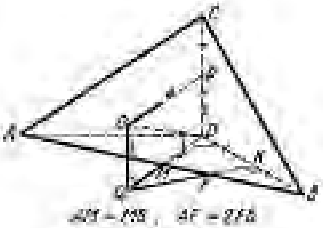


Рис. 180

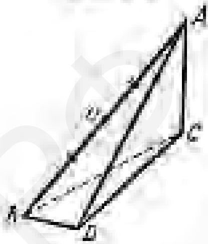


Рис. 181

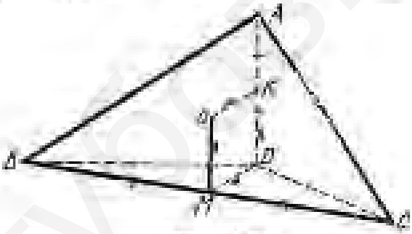


Рис. 182

24.10. На рисунке 178 изображена пирамида $DABC$. Назовите свойства этой пирамиды. Составьте устный план вычисления радиуса шара, описанного вокруг пирамиды.

24.11. На рисунке 179 изображена пирамида $DABC$, у которой угол ACB прямой. $AC=CB=CD=DB=AD=2$. Докажите, что отрезок DO — высота пирамиды и O — центр сферы, описанной вокруг пирамиды. Найдите:

а) угол между плоскостями DAB и ABC; б) угол между прямой CD и плоскостью ACB; в) угол между плоскостями DCB и CBA; г) угол между прямой DA и плоскостью ACB.

24.12. На рисунке 180 показана треугольная пирамида $CADB$, у которой $AD=DB$, ребро DC перпендикулярно плоскости ADB и угол ADB равен 120°. Докажите, что точка O — центр сферы, описанной вокруг пирамиды.

24.13. На рисунке 181 изображена пирамида $ABCD$, у которой ребро AC перпендикулярно плоскости BCD и угол BDC прямой. Докажите, что точка O — центр сферы, описанной вокруг пирамиды.

24.14. На рисунке 182 изображена пирамида $DABC$, у которой углы ADC, CDB и ADB прямые. Докажите, что точка O является центром сферы, описанной вокруг пирамиды.

24.15*. При каком условии в правильную четырехугольную усеченную пирамиду можно вписать сферу?

Ответы. Указания. Решения

§ 1

1.1. *Может.* Пример показан на рисунке 184. **1.2.** Нет. **1.3.** Тоже центральная симметрия. **1.4.** Потому что у треугольника нечетное число вершин. **1.5.** Строим произвольный выпуклый четырехугольник $ABCD$ и точку O — середину стороны DA. Строим точки B_1 и C_1, симметричные точкам B и C относительно точки O. Шестиугольник $ABCDB_1C_1$ — искомая фигура. **1.6.** $D_1(m-(a-m);\ n-(b-n))$ (рис. 185). **1.7.** $y=-2x+6$ (рис. 186). **1.8.** $y=-2^{-x}$. **1.9.** $\overrightarrow{OA_1}=-\overrightarrow{OA}$ (O — начало координат). **1.10.** Да. **1.12.** Только тогда, когда точка является центром окружности или принадлежит ей. **1.13.** Провести любую прямую, проходящую через центр симметрии параллелограмма. **1.14.** Нет. **1.15.** Точка O — центр симметрии параллелограмма $ABCD$. Точки K и H симметричны точкам P и M относительно точки O. Поэтому точка O — центр симметрии четырехугольника $MPHK$. **1.16.** а) Нет; б) нет; в) верно. **1.17.** Лучи должны быть противоположно направленными. **1.18.** Возможны два случая (рис. 187): а) рассматриваемая фигура не имеет центра симметрии; б) если прямая пересекает полосу, то центром симметрии является середина отрезка AB. **1.19.** Ни одного. **1.20.** Такие прямые проходят через центр симметрии. **1.21.** Прямоугольник $ABCD$. **1.22.** По часовой стрелке.

§ 2

2.1. Точка B. **2.2.** а) Точка O; б) точка P; в) точка P; г) не существует такого поворота (рис. 188). **2.3.** Потому что вокруг треугольника можно описать только одну окружность. **2.4.** Общей частью треугольников BHC и BH_1A_1 является четырехугольник $BHMH_1$, а их объединением — четырехугольник BA_1MC (рис. 189). **2.5.** $A_1(-b;\ a)$. **2.6.** $A_1(b;\ -a)$. **2.7.** $B_1(a-(n-b);\ b+(m-a))$. **2.8.** $B_1(0;\ -1)$. **2.9.** Одна точка. Таких прямых нет. **2.10.** $B(3;\ 1)$, $C(1;\ 3)$. *Можно.* **2.11.** Из трех правильных равных треугольников можно составить равнобочную трапецию, которая не имеет центра поворота. **2.12.** $B_1(3;\ 4)$, $C_1(1;\ 4)$.

§ 3

3.1. Не более одной оси симметрии. **3.2.** Да. Пример показан на рисунке 190. **3.3.** Одну ось симметрии (рис. 191). **3.4.** Одну ось симметрии (рис. 192). **3.5.** Осевая симметрия относительно прямой AC переводит точку B в такую точку B_1, что $AB_1=AB$. Но $AD\neq AB$. Поэтому точка B_1 не совпадает с точкой D. **3.6.** *Угол BMK не прямой.* **3.7.** Прямая MB не является осью симметрии треугольника ACB, потому что отрезок CA не перпендикулярен прямой MB (рис. 193). **3.8.** $K(a;\ 2n-b)$ (рис. 194). **3.9.** Все углы, кроме развернутого и полно-

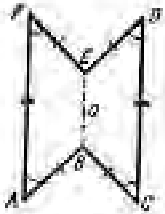


Рис. 184

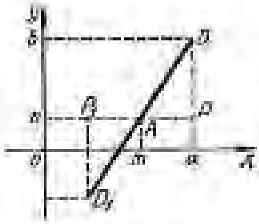


Рис. 185

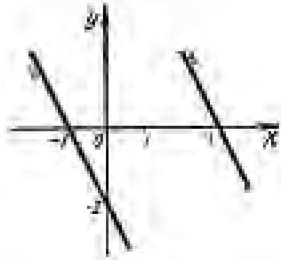


Рис. 186

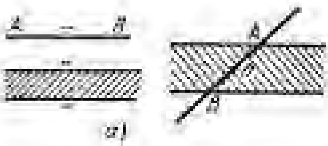


Рис. 187

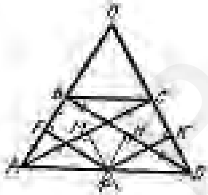


Рис. 188

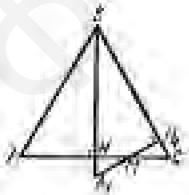


Рис. 189

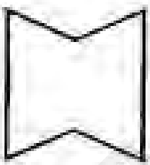


Рис. 190

Рис. 191

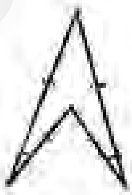


Рис. 192

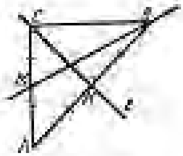


Рис. 193

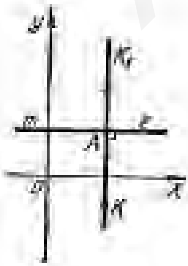


Рис. 194

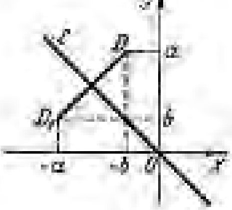


Рис. 195

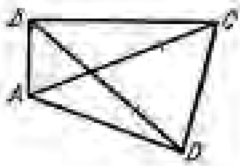


Рис. 196

го, имеют одну ось симметрии. Углы в 180° и 360° имеют сколько угодно осей симметрии. 3.10. $D_1(-a; b)$ (рис. 195). 3.11. Бесконечное множество неподвижных точек и одна неподвижная прямая. 3.12. Да. (Данный луч принадлежит оси симметрии.) 3.13. Осевой симметрией относительно прямой, параллельной данной прямой. 3.14. Да. 3.15. Нет. 3.16. $y=x+3$, $y=x-3$. 3.17. $A(-1; 1)$, $B(4; -1)$. 3.18. $y=4x-3$ и $y=-4x+3$. 3.19. $y=-x-7$, $y=x-7$. 3.20. $A(-2; 6)$, $B(2; 6)$. 3.21. Нет.

§ 4

4.1. а) Прямые AB и CD перпендикулярны; б) точка A принадлежит лучу DC, и точка C лежит между точками A и D; в) точка C принадлежит отрезку AB, и $CA : CB = 1 : 3$; г) точка A принадлежит отрезку CD, и $CA : CD \leqslant 2$. 4.2. а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}=0$; б) $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}$, k — любое число; в) $\overrightarrow{BA}=k\overrightarrow{BC}$, $0 \leqslant k \leqslant 1$; г) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$; д) $\overrightarrow{AC}=0{,}5\overrightarrow{CD}$; е) $\overrightarrow{AD}=n\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}$; ж) $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$. 4.3. $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+0{,}5\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{AB}-0{,}5\overrightarrow{AD}$. 4.4. а) $\overrightarrow{KM}=0{,}5(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$; б) $\overrightarrow{XT}=\overrightarrow{AD}-0{,}5\overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{AD}+0{,}25\overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+1{,}5\overrightarrow{AD}$. 4.5. а) $x=y=0$; б) $x=y=0$; в) $x=-2$, $y=-4$; г) $y=2$, $x=5$. 4.6. 1, 2, 3, 5, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 18, 19, 20. 4.7. Сколько угодно. 4.8. Окружности одинаковых радиусов. 4.9. Углы с сонаправленными сторонами. 4.10. Нет. 4.11. Да. 4.12. Отрезки должны быть параллельными и иметь равную длину. 4.13. $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}=p\overrightarrow{AC}$. 4.14. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB} \neq k\overrightarrow{AD}$. 4.15. $\overrightarrow{AM}=k(0{,}6\overrightarrow{AB}+0{,}4\overrightarrow{AC})$, $0 \leqslant k \leqslant 1$. 4.16. Постройте отрезок CM, который получается из отрезка BA тем параллельным переносом, который переводит точку B в точку C. 4.17. Треугольник MHC (рис. 14). 4.18. $C_1(x+m; y+n)$. 4.19. $y=(x+4):(x-2)$. 4.20. Параллельным переносом. 4.21. $y=(x-2):(x-4)$. 4.23. Если эти параллельные переносы задаются формулами $x'=x+a$, $y'=y+b$ и $x''=x'-a$, $y''=y'-b$. 4.24. а) Это можно сделать при помощи параллельного переноса $x'=x-7$, $y'=y+7$; б) при помощи поворота на прямой угол по ходу часовой стрелки вокруг начала координат и параллельного переноса $x'=x+4$, $y'=y+4$. 4.25. График функции $y=x^2+1$ переводится в график функции $y=(x-2)^2$ при помощи параллельного переноса $x'=x+2$, $y'=y-1$. 4.26. Параллельный перенос $x'=x+1$, $y'=y-4$. 4.27. $B_1(2; 1)$, $C_1(7; 0)$, $D_1(0; 5)$.

§ 5

5.1. 30 квадратов и 48 треугольников. 5.2. Девять треугольников. 5.3. Если бы такая прямая существовала, то по обе стороны от нее лежало бы одно и то же число вершин многоугольника. 5.4. Да. 5.5. Не могут быть, потому что $1+2+4+8=15<16$. 5.6. Основание треугольника равно 40 см. 5.7. Параллелограмм. 5.8. На рисунке 196 показан четырехугольник, у которого две равные диагонали и прямой угол, но он не является прямоугольником. 5.9. Примените теорему косинусов. Так как $2^2+3^2<4^2$, то данный треугольник тупоугольный. 5.10. Нет. 5.11. Например, для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, недостаточно и не необходимо, чтобы у четырехугольника был острый угол. 5.12. а) Нет; б) верно. 5.13. Да. 5.14. а) Четырехугольники, у которых есть пара параллельных сторон; б) многоугольники; в) имеют центр симметрии и ось симметрии. 5.16. В прямоугольном равнобедренном треугольнике. 5.17. Нет. 5.18. Это условие является только необходимым. 5.19. а) Верно; б) нет; в) верно. 5.20. Расстояния между прямыми MK и AD, MK и BC равны; точка P меньше удалена от прямой BC, чем от прямой AD. 5.22. Из равенства треугольников BDC и DBA следует равенство углов BCD и BAD. Получаем также, что $BC=AD$ и $AB=CD$ или $BC=AB$ и $AD=DC$. Из равенства треугольников ABC и DCA следуют аналогичные свойства углов и сторезков. 5.26. Равносильность первого и второго утверждений доказана. Докажем равносильность второго и третьего утверждений. Из второго утверждения получаем $a<b+c$, $b-c<a$, $c-b<a$, или $a<b+c$, $|b-c|<a$ (это третье утверждение). Выполняя рассуждение в обратном порядке, получаем, что из третьего утверждения следует второе. Из равносильности второго и третьего получаем равносильность первого и третьего утверждений.

§ 6

6.1. В каждый из этих правильных треугольников вписывается круг K, радиус которого в два раза меньше радиуса данного круга. Ответ: Круг K. 6.2. Данный круг. 6.3. Центр круга. 6.4. Данный круг. 6.5. Получается не окружность, потому что при таком движении цепь все время наматывается или сматывается с дуба, т. е. изменяется расстояние ученого кота от дуба. 6.6. Четыре сегмента. 6.7. Сектор круга является сегментом, если центральный угол сектора равен 180°. 6.8. Диаметр увеличивается. 6.9. Нет.

§ 7

7.2. 20°. 7.3. Углы равны. 7.4. Нет. 7.5. Три. 7.6. Углы CAB и CBA подобны. 7.7. Коэффициент подобия треугольников ABP и OMD равен 2. 7.8. Нет. 7.9. Не существует, потому что всякое движение и подобное преобразование переводит угол в равный ему. 7.10. а) 1,5°, так как при подобном преобразовании угол не меняет своей величины; б) в четыре раза. 7.11. Треугольники подобны. 7.12. Да. 7.13. Нет. 7.14. Не подобны между собой, так как у них неравные углы. 7.15. Если длина прямоугольника 1, а высота x, то $1:x=x:2$ или $1:x=2x$. 7.17. Треугольники BOC и DOA подобны, $AO:OC=2:1$, $BO:OD=1:2$.

§ 8

8.2. а) Прямые гомотетичны, потому что они параллельны. б) прямые не параллельны, потому что они и не гомотетичны. 8.3. Когда стороны таких прямоугольников пропорциональны. 8.4. В том случае, если соответствующие углы этих треугольников образованы сонаправленными или противоположно направленными сторонами. 8.6. $M_1(4; -6)$. 8.7. Прямая, проходящая через центр гомотетии, отображается сама на себя. 8.8. При всякой гомотетии ее центр переходит в себя. 8.9. Эти углы равны. 8.10. Не существует. 8.11. $y=-2x+6$. 8.12. Последовательно выполненные осевая симметрия относительно прямой QM и гомотетия с коэффициентом 2 относительно точки M. 8.13. Да. Центр гомотетии в точке $(-6; 0)$ и $k=2$. 8.14. $(-14; 0)$. 8.15. Треугольник MNT переводится в треугольник MPL последовательно выполненными осевой симметрией относительно прямой QM и гомотетией с коэффициентом 2 относительно центра M. 8.17. Такие треугольники на рисунке 26 не показаны. 8.18. $y=-4+(x+3)^2$. 8.19. Если второй треугольник получается из первого гомотетией с коэффициентом k_1, а третий треугольник получается из второго гомотетией с коэффициентом k_2, то третий треугольник можно получить из первого гомотетией с коэффициентом k_1k_2 ($k_1 \cdot k_2 \neq 1$). 8.20. Нет. 8.21. $(5; 2)$, $(9; 2)$, $(9; 4)$, $(5; 8)$. 8.22. Решив систему уравнений: $y=x^2$, $y=4x$, получаем $A_1(4; 16)$. Отсюда ясно, что $\overrightarrow{OA_1}=4\overrightarrow{OA}$.

§ 9

9.1. Восемью способами (рис. 197). 9.6. Решение показано на рисунке 198. 9.7. Решение показано на рисунке 199. 9.8. Решение показано на рисунке 200. 9.9. Строим угол в 60°. 9.10. Решение показано на рисунке 201. 9.11. Решение показано на рисунке 202. 9.12. Решение показано на рисунке 203. 9.13. Возможные решения: 1) $9=8+1=7+2=6+3$; 2) $9+1=8+2=7+3=6+4$; 3) $9+2=8+3=7+4=6+5$ и т. д. 9.16. Можно, если дуга сектора содержит больше 180°. 9.17. Можно, если сегмент является полукругом. 9.18. Решение показано на рисунке 204. 9.19. Одно из возможных решений показано на рисунке 205. 9.20. Решение показано на рисунке 206. 9.21. Решение показано на рисунке 207. 9.22. Решение показано на рисунке 208. 9.23. Нельзя, потому что каждая костяшка покрывает одно белое поле и одно черное поле. 9.24. Ответ показан на рисунке 209.

§ 10

10.1. Да. 10.2. За единицу длины принимается один метр, представляющий собой сорокамиллионную часть парижского меридиана. 10.3. Площадь треугольника ABC в 100 раз больше площади треугольника $A_1B_1C_1$. 10.4. В 25 раз. 10.5. Да. 10.7. В 11 раз. 10.8. Четырем. 10.9. Длина прямоугольника — 6, ширина — 5. 10.10. Нет (все возможные пути имеют одну и ту же длину). 10.11. $MP=OK=1$. 10.12. В пять раз. 10.13. Докажите, что $(x-5)\cdot(x+5)<x^2$. 10.14. Допустим, что углы AMD и DMC равны. Тогда треугольники AMB и CMB равны и $AB=BC$. Полученное противоречие и доказывает утверждение задачи. 10.15. Площади треугольников ABM и MCD равны. Треугольники ABK и KCD равновелики. Площадь треугольника ABM в 2 раза больше площади треугольника BMC. Площадь треугольника BMC в 4 раза меньше площади треугольника AMD. 10.17. Площадь правильного шестиугольника равна 3. 10.18. Может. Это следует из формулы $R=a:2\sin\alpha$ (для упрощения обоснования рассмотрите равнобедренный треугольник с тупым углом α). 10.19. Два полукруга, пристроенные к квадрату, могут заполнить круглое отверстие в середине листа. 10.20. Площадь треугольника BPK больше площади треугольника PMA (рис. 210). 10.22. Треугольники COD и BAD равны (рис. 57). Теперь докажите, что $\angle OBD=45°$. 10.25. $\frac{2}{3}$. 10.27. 1,4.

§ 11

11.1. Бесконечное множество. 11.2. Нет. Нужно сказать, что каждая точка биссектрисы угла одинаково удалена от сторон этого угла. 11.4. Да. 11.5. 1) Прямая, которой принадлежит одна из средних линий квадрата; 2) луч AC. 11.8. 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 22, 23, 29, 30 (в, г). 11.9. 2, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 21, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 37, 41, 42, 43, 45, 46, 49, 50. 11.10. Нет (все подобные углы равны). 11.12. Решение показано на рисунке 211.

§ 12

12.1. Верно. 12.2. Нет. 12.3. 1, 2, 3, 5, 9. 12.4. 3. 12.5. 2, 3, 5, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17. 12.6. 1, 2, 5. 12.7. 1, 3, 4, 5, 7, 8. 12.8. 1, 3, 5. 12.9. 1, 2, 3, 4, 5. 12.10. 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9.

§ 13

13.1. 1, 2, 3. 13.2. 1, 2, 3, 4, 5, 7. 13.3. 3, 4, 6. 13.4. 1, 2, 3, 4, 5. 13.5. 1, 5, 6, 7, 8, 11, 12. 13.6. 1, 2, 3, 4, 6. 13.7. 1, 2, 3, 5, 6, 8. 13.8. 2, 3. 13.9. 1, 3, 5, 6, 9, 10. 13.10. 1. 13.11. 2, 4, 5.

§ 14

14.1. 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 21. 14.2. 1, 3, 6, 7, 9, 10. 14.3. 1, 2, 4, 5. 14.4. 1, 2, 3, 5. 14.5. 1, 2, 4, 5, 6, 8, 10. 14.6. 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 13. 14.7. 1, 3, 4, 5. 14.8. 1, 2, 3, 5, 6. 14.9. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12. 14.10. 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8. 14.11. 1, 2, 3, 5. 14.12. Нет. 14.13. 45°. 14.19. Да (рис. 212). 14.20. В каждом случае можно построить сколько угодно прямых двугранных углов.

§ 15

15.1. а) Нет; б) да. 15.2. Десять маленьких кубиков легче. 15.3. Прямоугольники. $S_{AM_1M_2D}=S_{ABCD}\cdot\cos\varphi$, $S_{DK_1K_2A}=S_{ADD_1A_1}:\cos(90°-\varphi)$. 15.6. Решение показано на рисунке 213. 15.7. Да. 15.8. а) Рисунки 93 (б, г, д, к, л, м); б) рисунки 93 (а, в, е, ж, з, и); в) параллельно прямой DD_1 (д), прямой B_1D_1 (г), прямой B_1D_1 (л), при-

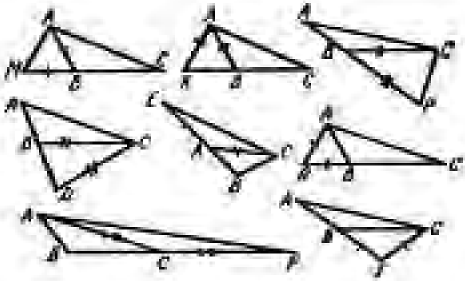


Рис. 197

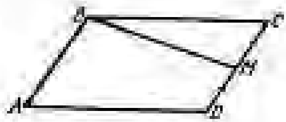


Рис. 198

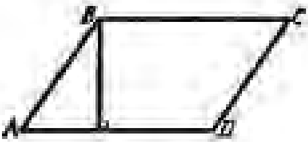


Рис. 199

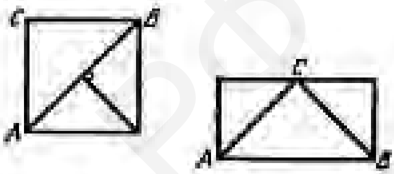


Рис. 200

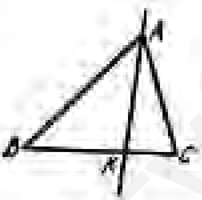


Рис. 201

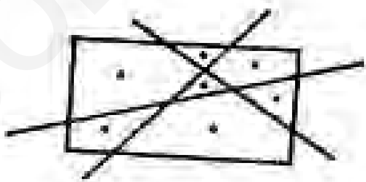


Рис. 202

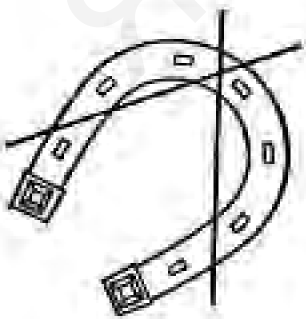


Рис. 203

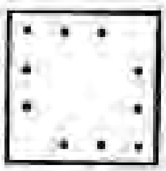


Рис. 204

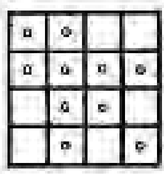


Рис. 205

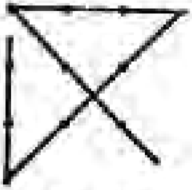


Рис. 206

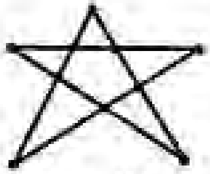


Рис. 207

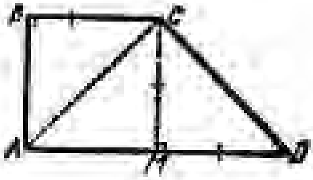


Рис. 208

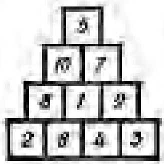


Рис. 209

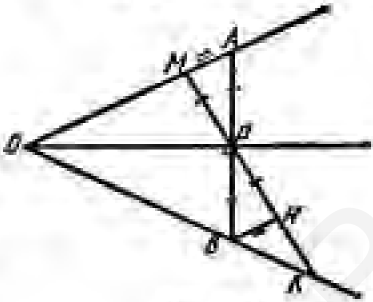


Рис. 210

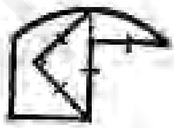


Рис. 211

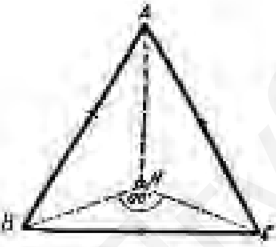


Рис. 212

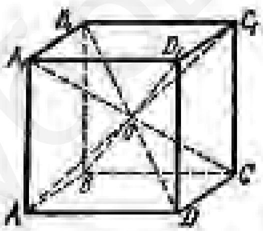


Рис. 213

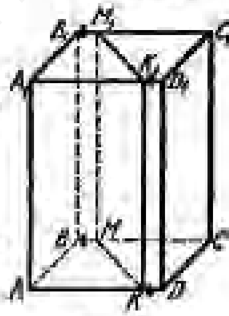


Рис. 214

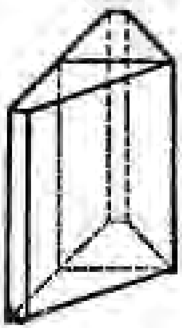


Рис. 215

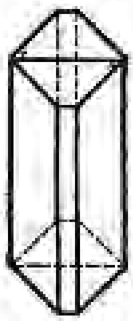


Рис. 216

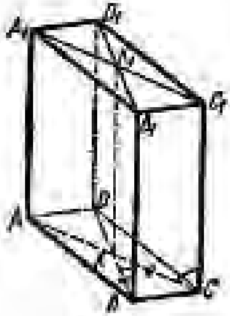


Рис. 217

мой $D_1B_1(л)$, прямой B_1F, где F — середина отрезка $DD_1(к)$; прямой B_1M, где M — центр грани $ADDA_1(л)$. 15.9. При желании можно увидеть любое из двух этих положений. 15.10. а) $A—A_1—D_1—C_1—B_1—B—C—D$; б) $A—D—C—B—C_1—B_1—A_1—D_1$. 15.11. Для этого противоположные грани куба окрашиваются в одинаковый цвет.

§ 16

16.1. Решения показаны на рисунках 214—216. 16.2. Параллелограмм DKB_1M. 16.3. Такого параллелепипеда не существует, потому что диагональ основания не конгруэнтна ни одной стороне этого основания. 16.11. Плоскости A_1C_1B и D_1CA не пересекаются. 16.16. Прямая HB не перпендикулярна плоскости $B_1C_1D_1$, потому что прямая HB не перпендикулярна прямой AD.

§ 17

17.1. Из равенства площадей боковых поверхностей и равенства высот параллелепипедов следует равенство периметров их оснований. Но из этого не следует равенство этих оснований. Поэтому два неравных прямых параллелепипеда с равными высотами могут иметь одинаковые площади боковых поверхностей. 17.2. Из условия задачи следует, что основания параллелепипедов равновелики. Но из этого не следует, что равны периметры этих оснований. 17.3. Из условия задачи следует, что у этих параллелепипедов равновелики основания и периметры оснований. Но из этого не следует, что основания равны. 17.4. Диагональная плоскость проходит через центр симметрии параллелепипеда. 17.5. Для решения задачи достаточно знать высоту параллелепипеда, периметр основания и его площадь. 17.6. Такой параллелепипед имеет плоскость симметрии, потому что точки D и B симметричны относительно плоскости CAA_1. 17.7. Трапеция $AKMC$. 17.8. Прямоугольник DBB_1D_1. Параллелограмм CAA_1C_1. 17.9. Построим треугольную наклонную призму $KBCK_1B_1C_1$, у которой $KB=KC$ и $\angle KBB_1=\angle KCC_1$ (рис. 217). Достроим эту призму до параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Этот параллелепипед удовлетворяет условиям задачи. 17.10. Плоскости симметрии ACC_1, BDD_1, FPM. Оси симметрии TH, FM, KP. 17.11. В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отрезок MH перпендикулярен плоскости ABC, потому что прямые MH и DD_1 параллельны, а прямая DD_1 перпендикулярна плоскости ABC. Отрезки BH, HD, AH, HC — ортогональные проекции наклонных на (ABC). Поэтому отрезки BH, HD, AH, HC равны. Следовательно, $ABCD$ — прямоугольник. 17.12. Ромб с углом в 60°.

§ 18

18.1. Нет. 18.2. Не может быть, так как прямая AA' не перпендикулярна прямой AA_1 (рис. 218). 18.3. Нет. 18.4. Невыпуклая прямая призма, основанием которой является правильная пятиугольная звезда. 18.5. Имеет только центр симметрии. 18.6. Треугольник. 18.8. Нет. 18.9. 80° и 100°. 18.10. Нет. 18.11. 60° и 120°. 18.12. Такой призмы не существует, потому что число ребер призмы кратно трем. 18.14. 13 осей и 7 плоскостей симметрии. 18.15. Нет. 18.16. Можно. 18.17. Нет. На рисунке 219 показана призма, удовлетворяющая условию задачи и не являющаяся правильной. 18.18. В четырехугольной и пятиугольной правильных призмах. 18.19. Да. 18.20. Три. 18.21. $(n-2)$-угольника. 18.22. 1 : 3.

§ 19

19.1. Все фигуры. 19.2. Необходимое условие. 19.3. а) Нет; б) нет. 19.4. Равнобедренный треугольник AHB. 19.5. 90°. 19.6. Нет. 19.8. Не обязательно. 19.9. 60°. 19.10. Нет. 19.11. Три. 19.12. 60°. 19.13. На 24 части, так как секущие плоскости разбивают каждую грань тетраэдра на 6 треугольников, каждый из которых служит основанием тетраэдра с вершиной O в центре данного тетраэдра (рис. 220). 19.14. 12 ли

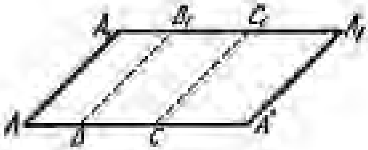


Рис. 218

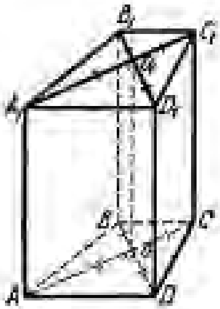


Рис. 219

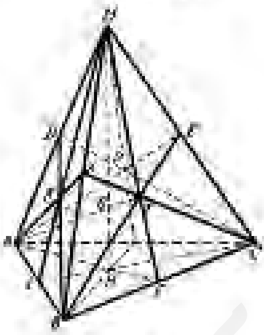


Рис. 220

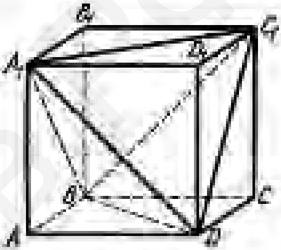


Рис. 221

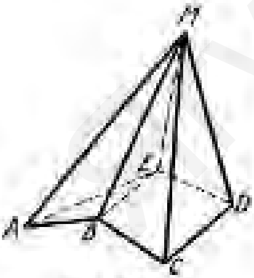


Рис. 222

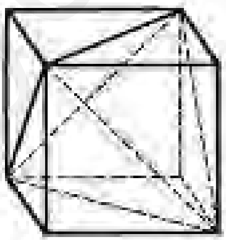


Рис. 223

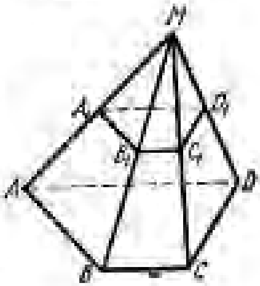


Рис. 224

(рис. 221). 19.15. При центральной симметрии отрезок отображается на равный и параллельный ему отрезок. Но у правильных тетраэдров нет параллельных ребер.

§ 20

20.7. На рисунке 222 изображен многогранник, который удовлетворяет требованиям задачи, но не является пирамидой (плоскости ABE и BCD не совпадают). 20.8. Решение показано на рисунке 223. 20.10. Усеченная четырехугольная пирамида $ABCDA_1B_1C_1D_1$, основанием которой является трапеция (рис. 224). 20.12. Сколько угодно.

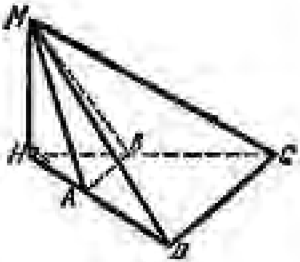


Рис. 225

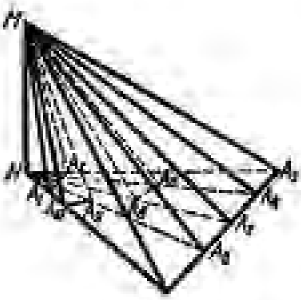


Рис. 226

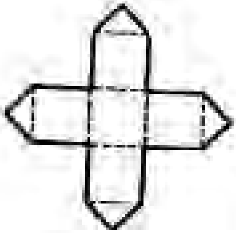


Рис. 227

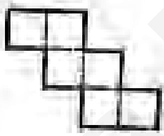


Рис. 228

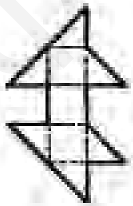


Рис. 229

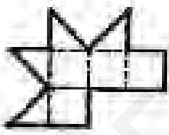


Рис. 230

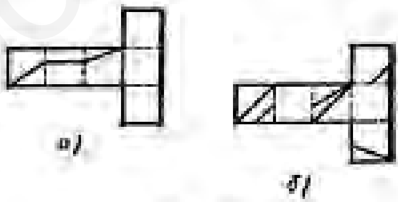


Рис. 231

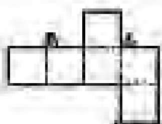


Рис. 232

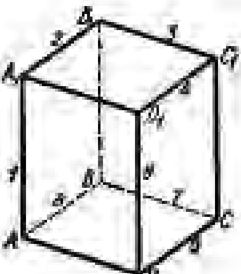


Рис. 233

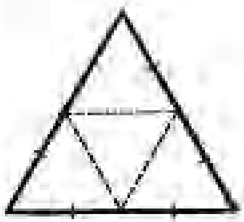


Рис. 234

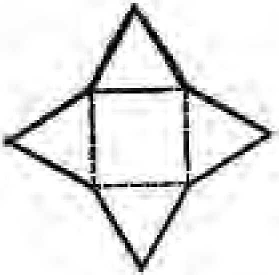


Рис. 235

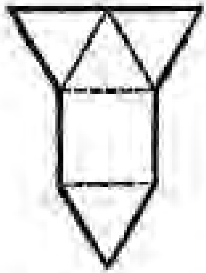


Рис. 236

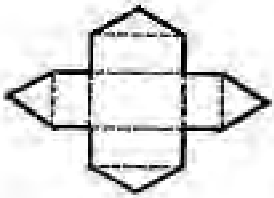


Рис. 237

Рис. 238

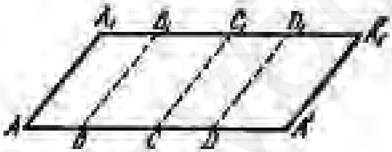


Рис. 239

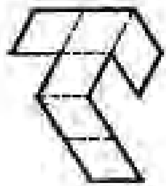


Рис. 240

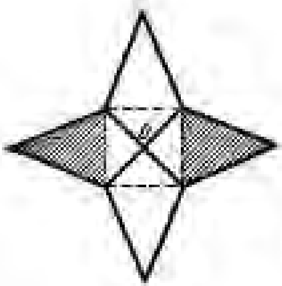


Рис. 241

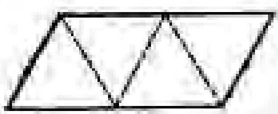


Рис. 242

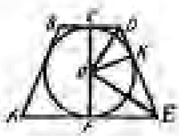


Рис. 243

Например, на рисунке 225 показана четырехугольная пирамида $MABCD$, у которой противоположные грани MBC и MAD перпендикулярны плоскости основания. На рисунке 226 изображена десятиугольная пирамида $MA_1A_2...A_{10}$, основание H высоты MH которой есть пересечение прямых A_2A_3, A_4A_5, A_6A_7, A_8A_9, A_1A_{10}. Ее основание — простой невыпуклый десятиугольник $A_1A_2...A_{10}$. Ее боковые грани MA_2A_3, MA_4A_5, MA_6A_7, MA_8A_9, MA_1A_{10} перпендикулярны плоскости основания. **20.14.** Ромб (в частном случае, квадрат).

§ 21

21.1. Решение показано на рисунке 227. **21.3.** Решение показано на рисунке 228. **21.4.** Ответ смотрите на рисунке 229. **21.5.** Фигура 7, 8. **21.8.** Решение показано на рисунке 230. **21.9.** Решение показано на рисунке 231. **21.10.** Ответ смотрите на рисунке 232. **21.11.** На рисунке 233 цифрами 1—8 показаны ребра, по которым надо разрезать поверхность куба. **21.12.** Решение показано на рисунке 234. **21.14.** Решение показано на рисунке 235. **21.15.** Решение показано на рисунке 236. **21.16.** Решение показано на рисунке 237. **21.17.** Решение смотрите на рисунке 238. **21.19.** Фигура, показанная на рисунке 239, не может быть разверткой боковой поверхности параллелепипеда, потому что прямая AA' не перпендикулярна прямой AA_1. **21.21.** Одно из решений показано на рисунке 240. **21.22.** Построить развертку пирамиды $OABC$. Соединить на ней точки K и M отрезком. Этот отрезок пересекает прямую AB в точке X. **21.23.** Нет. **21.24.** Нет (острый угол данной равнобочной трапеции меньше 45°). **21.27.** Решение показано на рисунке 241. **21.28.** Решение смотрите на рисунке 242.

§ 22

22.2. Все осевые сечения цилиндра являются прямоугольниками, которые имеют общий центр симметрии. **22.3.** Полоса, параллельная данной плоскости. **22.4.** Нет. **22.5.** Отрезок или прямоугольник. **22.6.** 9 : 1. **22.7.** В четыре раза. **22.8.** Нет. **22.9.** 3 : 2.

§ 23

23.1. 90° (на рисунке 243 показано осевое сечение усеченного конуса и вписанного в него шара). **23.2.** Да. **23.3.** Можно описать конус, если боковые ребра пирамиды равны. **23.4.** Высота пирамиды совпадает с высотой конуса. **23.5.** Да. **23.7.** а) Для этого необходимо, чтобы основание высоты пирамиды совпадало с центром окружности, описанной вокруг основания пирамиды; б) для этого необходимо, чтобы основание высоты пирамиды совпадало с центром круга, вписанного в основание пирамиды. **23.9.** а) Одну; б) сколько угодно; в) ни одного.

§ 24

24.1. Отношение объемов шаров равно отношению кубов их радиусов. Поэтому объем малого шарика в 125 раз меньше объема большого шара. Отсюда ясно, что масса большого шара больше массы пяти малых шариков. **24.2.** Масса маленького шарика в 10^3 раз меньше массы большого шара. Поэтому масса большого шара равна общей массе 1000 маленьких шариков. **24.3.** В $(10 : 2)^3$ раз. **24.4.** а) Круговой сектор; б) круговой сегмент. **24.5.** Отрезок. **24.6.** Проведем перпендикуляры через центры кругов. Если эти перпендикуляры совпадают или пересекаются, то эти круги являются сечением одного и того же шара. **24.7.** Круга, цилиндра, шара, шарового сегмента. **24.8.** Можно (если шары проталкивать не одновременно, а по очереди). **24.9.** Четыре точки. Эти точки служат вершинами правильного тетраэдра, вписанного в данную сферу. **24.10.** В правильную четырехугольную усеченную пирамиду можно вписать сферу, если сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через середину стороны основания и перпендикулярной этой стороне, есть равнобочная трапеция, в которую можно вписать окружность.

Оглавление

Александр Борисович Василевский

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ ПО ГЕОМЕТРИИ

VI—X классы

Пособие для учителя

Редактор *В. В. Амбражевич*. Обложка художника *В. С. Жарковой*. Художественный редактор *Н. Л. Шавырлова*. Технический редактор *Л. П. Сопот*. Корректоры *В. С. Бабеня, М. Г. Виноградова*.

ИБ № 1288

Сдано в набор 04.03.83. Подписано в печать 22.06.83. Формат 84×108[1/32]. Бумага тип. № 1. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 4,2. Усл. кр.-отт. 4,52. Уч.-изд. л. 4,07. Тираж 38 000 экз. Заказ 2863. Цена 10 к.

Издательство «Народная асвета» Государственного комитета БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 220600, Минск, проспект Машерова, 11. Минский ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат МППО им. Я. Коласа. 220005 Минск, Красная, 23.

15 к.