

С. ШЕСТАКОВ,
isser@yandex.ru,
г. Москва

Тема 4. Окончание. Начало см. в № 4/2014

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ И ДРУГИЕ НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ

ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ

4.3. Геометрические идеи

Рассмотрим задачи, в которых графические интерпретации основываются еще и на геометрических представлениях. Многие из таких задач связаны с уравнением окружности, формулой расстояния между двумя точками, уравнением прямой, то есть в сущности с расстояниями и методом координат. Действительно, между геометрическими и алгебраическими задачами, между языком алгебры («языком формул») и языком геометрии («языком расстояний») существует неоспоримая связь, ставшая со времен Декарта очевидной даже для не слишком искушенного взгляда. Решение многих геометрических задач сводится к решению систем алгебраических уравнений и требует умения применять соответствующий алгебраический инструментарий. Менее заметны (особенно школьнику) геометрические идеи, являющиеся основанием для решения ряда алгебраических задач: уравнений, неравенств, вычисления наибольшего и наименьшего значений некоторых выражений. Связано это, вероятнее всего, с тем, что алгебраический язык является своего рода первым математическим языком школьника, а геометрический язык – вторым. Изучение языка невозможно начинать без словаря или хотя бы разговорника. В нашем случае словарь довольно прост: в нем всего три строки. Для удобства приведем его в виде таблицы.

Алгебраический язык (язык формул)	Геометрический язык (язык расстояний)
Числа и буквы	Расстояния до координатных осей (координаты)
Модуль разности двух чисел	Расстояние между двумя точками координатной прямой
Сумма квадратов двух чисел	Квадрат расстояния между двумя точками координатной плоскости

Попытаемся теперь с помощью этого словаря заняться «переводом» с геометрического языка на алгебраический, написав переводы нескольких довольно употребительных фраз — основу нашего разговорника. При этом в левой колонке таблицы 1 будут записаны фразы на языке расстояний, а в правой — их перевод на язык формул, снабженный в некоторых случаях комментариями. Расстояние между фигурами A и B (это могут быть точки, прямые, плоскости и т.п.) будем обозначать $r(A; B)$. Напомним, что расстояние между двумя фигурами — **кратчайшее из всех возможных расстояний** от точки одной фигуры до точки другой.



Таблица 1

Язык расстояний	Перевод на язык формул
1. Расстояние от точки t числовой оси до точки -22 меньше 5	$ t + 22 < 5$ <i>Комментарий.</i> Расстояние между точками a и b числовой оси равно модулю разности чисел a и b , то есть $r(a; b) = a - b $
2. Сумма расстояний от точки x числовой оси до точек -3 и 5 равна 12	$ x + 3 + x - 5 = 12$
3. Точка 5 числовой оси равноудалена от точек $x - 1$ и $x^2 - 16$	$ x - 6 = x^2 - 21 $
4. Расстояние от точки, лежащей на прямой $y = 3x - 2$, до оси абсцисс в 5 раз больше расстояния до оси ординат	$ 3x - 2 = 5 x $ <i>Комментарий.</i> Расстояние от точки $(x; y)$ графика функции $y = f(x)$ до оси абсцисс равно $ f(x) $, а до оси ординат равно $ x $
5. Точка $M(a; b)$ принадлежит окружности с центром в начале координат и радиусом 3	$a^2 + b^2 = 9$
6. Сумма расстояний от точки $M(x; y)$ до точек $P(3; 4)$ и $K(-2; 5)$ не больше 6	$\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (y-5)^2} \leq 6$
7. Расстояние от точки $M(m; n)$ единичной окружности до точки $P(-4; 1)$ равно 3	$\begin{cases} m^2 + n^2 = 1, \\ \sqrt{(m+4)^2 + (n-1)^2} = 3 \end{cases}$
8. Расстояние от точки $M(p; q)$ окружности с центром $(-2; -4)$ и радиусом 2 до точки $P(a; b)$ окружности с тем же центром и радиусом 6 равно 8	$\begin{cases} (p+2)^2 + (q+4)^2 = 4, \\ (a+2)^2 + (b+4)^2 = 36, \\ \sqrt{(p-a)^2 + (q-b)^2} = 8 \end{cases}$
9. Сумма расстояний от точки M , лежащей на прямой $y = 2x - 1$, до точек $P(3; 4)$ и $K(-1; 1)$ равна 5	$\sqrt{(x-3)^2 + (2x-5)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (2x-2)^2} = 5$ <i>Комментарий.</i> Если точка лежит на прямой $y = 2x - 1$, то ее координаты $(x; 2x - 1)$
10. Расстояние от точки M , лежащей на прямой $y = x$, до точки P , лежащей на прямой $y = 2x - 3$, не меньше 9	$\sqrt{(a-b)^2 + (a-2b+3)^2} \geq 9$ <i>Комментарий.</i> В силу принадлежности точек данным прямым их координаты в общем виде можно записать так: $M(a; a)$, $P(b; 2b - 3)$, где a и b — произвольные действительные числа

Обратим внимание на то, что условие принадлежности некоторой точки M той или иной фигуре (например, прямой или окружности), заданной уравнением, может быть записано с помощью различных букв, а не только с помощью букв x и y . Так, равенства $(p - 3)^2 + (q + 2)^2 = 16$ и $(m - 3)^2 + (n + 2)^2 = 16$ означают то, что точка с координатами $(p; q)$ и точка $(m; n)$ принадлежат окружности с центром $(3; -2)$ и радиусом 4, то есть окружности $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$ координатной плоскости Oxy .

Теперь сделаем несколько переводов с алгебраического языка на геометрический, оформив и их в виде таблицы 2.

Следует подчеркнуть, что переводы у различных переводчиков могут отличаться (это является особенностью «переводов» в математике). Так, в задании 3 вместо точки $(1; 3)$ можно было взять точку $(1; -3)$, а вместо точки $(-3; -4)$ рас-

сматривать точку $(-3; 4)$. В задании 5 сумма $(z - t)^2 + (z - 3t + 5)^2$ может означать квадрат расстояния между точками $(z; z)$ и $(t; 3t - 5)$ (то есть квадрат расстояния между точкой на прямой $y = x$ и точкой на прямой $y = 3x - 5$), а может означать и квадрат расстояния между точками $(z; z + 5)$ и $(t; 3t)$ (то есть квадрат расстояния между точкой на прямой $y = x + 5$ и точкой на прямой $y = 3x$). Впрочем, эта особенность присуща и переводам художественной литературы: при сохранении смысла и фабулы некоторые предложения в различных переводах могут отличаться весьма существенно. В нашем случае важно только, чтобы перевод был адекватен оригиналу: это позволит верно интерпретировать и решить задачу при любом правильном «перевод».

Теперь, после овладения определенными «языковыми навыками», можно перейти к решению задач.

Язык формул	Перевод на язык расстояний
1. Решить уравнение $ x - 5 = 2 x + 3 $	Найти все точки x числовой оси, расстояние от каждой из которых до точки 5 в два раза больше расстояния до точки -3
2. Имеет ли система уравнений $\begin{cases} p^2 + q^2 = 16, \\ r^2 + t^2 = 25, \\ (p-r)^2 + (q-t)^2 = 100 \end{cases}$ хотя бы одно решение?	Можно ли на каждой из концентрических окружностей с центром в начале координат, радиусы которых равны 4 и 5, найти по точке, расстояние между которыми равно 10?
3. Найти наименьшее значение функции $y = \sqrt{(x-1)^2 + 9} + \sqrt{(x+3)^2 + 16}$	На оси абсцисс найти точку, сумма расстояний от которой до точек $(1; 3)$ и $(-3; -4)$ минимальна. <i>Комментарий.</i> Число $\sqrt{(x-1)^2 + 9}$ равно расстоянию между точками $(x; 0)$ и $(1; 3)$; число $\sqrt{(x+3)^2 + 16}$ равно расстоянию между точками $(x; 0)$ и $(-3; -4)$
4. Найти наименьшее значение функции $y = \sqrt{(x+2)^2 + (2x+1)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (2x-5)^2}$	На прямой $y = 2x$ найти точку, сумма расстояний от которой до точек $(-2; -1)$ и $(3; 5)$ минимальна. <i>Комментарий.</i> Число $\sqrt{(x+2)^2 + (2x+1)^2}$ равно расстоянию между точками $(x; 2x)$ и $(-2; -1)$; число $\sqrt{(x-3)^2 + (2x-5)^2}$ равно расстоянию между точками $(x; 2x)$ и $(3; -5)$
5. Решить неравенство $(z-t)^2 + (z-3t+5)^2 \leq 18$	Найти все точки на прямой $y = x$ и все точки на прямой $y = 3x - 5$ такие, что квадрат расстояния от точки на прямой $y = x$ до точки на прямой $y = 3x - 5$ не превосходит 18. <i>Комментарий.</i> Сумма $(z-t)^2 + (z-3t+5)^2$ равна квадрату расстояния между точками $(z; z)$ и $(t; 3t-5)$
6. Решить уравнение с параметром: $ x = 5 ax - 3 $	На графике функции $y = ax + 3$ найти все точки, расстояние от каждой из которых до оси ординат в 5 раз больше расстояния до оси абсцисс
7. Найти все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений $\begin{cases} (m-3)^2 + (n-4)^2 = a^2, \\ m^2 + n^2 = 4 \end{cases}$	Найти радиус окружности с центром в точке $(3; 4)$, если известно, что эта окружность касается окружности, радиус которой равен 2, а центром является начало координат. <i>Комментарий.</i> Найденный радиус будет равен $ a $

Пример 1. Найти наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 16x + 89}.$$

Решение. Решение этой задачи с помощью производной приведет, очевидно, к громоздким вычислениям, да и не во всех школьных учебниках можно найти формулу производной сложной функции. Попробуем перевести условие задачи с языка формул на язык расстояний. Для этого выделим полные квадраты в подкоренных выражениях:

$$y = \sqrt{(x-1)^2 + 4} + \sqrt{(x-8)^2 + 25}.$$

Каждое из слагаемых правой части последнего равенства представляет собой расстояние от

точки $A(x; 0)$ оси абсцисс до некоторой точки с фиксированными координатами, не зависящими от переменной x . Таким образом, решить задачу значит найти такую точку A оси абсцисс, сумма расстояний от которой до двух данных точек минимальна. Если данные точки B и C лежат по разные стороны от оси абсцисс, то искомая точка, очевидно, есть точка пересечения прямой BC с осью абсцисс, поскольку для любой другой точки A_1 оси абсцисс сумма расстояний от нее до точек B и C будет больше в силу неравенства треугольника:

$$AB + AC = BC, A_1B + A_1C > BC$$

(рис. 1). Абсциссы точек B и C известны — это 1

и 8, а квадраты их ординат равны соответственно 4 и 25.

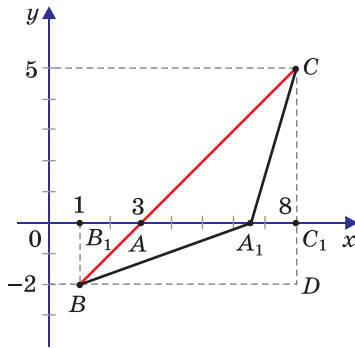


Рис. 1

Выберем знаки ординат точек B и C так, чтобы эти точки оказались лежащими по разные стороны от оси абсцисс: $B(1; -2)$ и $C(8; 5)$. Найти уравнение прямой BC не представляет труда (это можно сделать разными способами): $y = x - 3$. Тогда абсцисса точки A равна 3, а искомый минимум равен

$$\sqrt{(3-1)^2 + 4} + \sqrt{(3-8)^2 + 25},$$

то есть $7\sqrt{2}$.

Ответ: $7\sqrt{2}$.

Замечание 1. Найти расстояние BC можно и как гипотенузу прямоугольного треугольника BCD с катетами $BD = CD = 7$. Абсциссу точки A можно вычислить, не составляя уравнения прямой BC , а воспользовавшись подобием треугольников AB_1B и AC_1C , из которого находим $\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{BB_1}{CC_1} = \frac{2}{5}$, поскольку $B_1C_1 = 7$, получаем $AB_1 = 2$, а искомая абсцисса равна 3.

Замечание 2. В задачах на вычисление наибольшего или наименьшего значения функции обязательным является указание точки, в которой это значение достигается. Связано это с тем, что в таких задачах часто используется условие обращения некоторого нестрогого неравенства в равенство, что возможно далеко не всегда. И хотя в ответ записывается именно наибольшее или наименьшее значение функции, тем не менее без обоснования того, что это значение достигается, решение не может быть признано полным и засчитано. Для такого обоснования в большинстве случаев достаточно найти точку, в которой это значение достигается, что и было сделано при решении примера 1.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(x-6)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-4)^2} = 2\sqrt{13}, \\ \sqrt{(x-9)^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 3\sqrt{10}. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим на координатной плоскости Oxy точки $A(6; 0)$, $B(0; 4)$, $C(9; 0)$, $D(0; 3)$. Решить систему означает найти все точки $M(x; y)$, для каждой из которых

$$MA + MB = 2\sqrt{13}, \quad MC + MD = 3\sqrt{10}.$$

Но

$$AB = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}, \quad CD = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}$$

(рис. 2). Следовательно, $MA + MB = AB$ (то есть точка M принадлежит отрезку AB), $MC + MD = CD$ (то есть точка M принадлежит отрезку CD). Поэтому точку M можно найти как точку пересечения отрезков AB и CD .

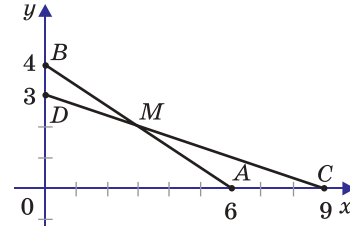


Рис. 2

Уравнения прямых AB и CD , координаты двух точек каждой из которых известны, находятся без труда: $y = -\frac{2}{3}x + 4$ — уравнение прямой AB ; $y = -\frac{1}{3}x + 3$ — уравнение прямой CD . Для вычисления абсциссы точки M осталось решить уравнение

$$-\frac{2}{3}x + 4 = -\frac{1}{3}x + 3,$$

откуда $x = 3$. Ордината точки M находится подстановкой полученной абсциссы в уравнение любой из прямых AB или CD : $y = -\frac{2}{3} \cdot 3 + 4 = 2$.

Ответ: $(3; 2)$.

Замечание 3. Найти уравнение прямой AB можно, в частности, воспользовавшись тем, что угловой коэффициент этой прямой отрицателен и равен $-\frac{|OB|}{|OA|}$, то есть $-\frac{2}{3}$, а начальная ордината (ордината точки пересечения прямой с осью ординат) равна 4, откуда $y = -\frac{2}{3}x + 4$. Аналогично находится и уравнение прямой CD .

В некоторых случаях, при определенном навыке решения подобных задач, можно обойтись и без рисунков, особенно когда используемые геометрические факты хорошо известны и не нуждаются в прямых иллюстрациях. Рассмотрим три таких примера.

Пример 3. Найти все значения параметра a , при каждом из которых модуль разности корней уравнения

$$x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$$

принимает наибольшее возможное значение.

Решение. Решим задачу двумя способами. Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения. Традиционное решение задачи состоит в вычислении наибольшего значения функции $f(a) = |x_1 - x_2|$, то есть функции

$$f(a) = 2\sqrt{-3 + 4a - a^2},$$

$$f(a) = 2\sqrt{1 - (a - 2)^2},$$

равного, очевидно, 2 при $a = 2$. Это решение требует определенной культуры вычислений. К тому же значительная часть учащихся, скорее всего, попытается провести исследование функции на наибольшее значение по традиционному алгоритму, требующему применения производной, и столкнется на этом пути с неизбежными и довольно значительными трудностями, связанными с дифференцированием сложной функции и преобразованием иррациональных выражений. Второй способ заключается в переводе условия данной задачи с алгебраического языка на геометрический. Для этого выделим полные квадраты в левой части уравнения и перепишем его в виде

$$(x - 3)^2 + (a - 2)^2 = 1.$$

Полученное уравнение является уравнением окружности в системе координат Oxa , а корни данного уравнения равны абсциссам точек пересечения окружности и прямой, параллельной оси абсцисс. Расстояние между этими точками максимально, если они являются концами диаметра окружности, равного 2.

Ответ: 2.

Пример 4. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения

$$(a - d)^2 + (b + p)^2 + (c - q)^2,$$

если числа a, b, c, d, p, q таковы, что

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 9, \\ d^2 + p^2 + q^2 = 16. \end{cases}$$

Решение. Переведем условие задачи на язык расстояний: выражение $(a - d)^2 + (b + p)^2 + (c - q)^2$ представляет собой квадрат расстояния между точками $(a; b; c)$ и $(d; -p; q)$, первая из которых лежит на сфере с центром в начале координат и радиусом 3, вторая — на сфере с тем же центром и радиусом 4. Наибольшее расстояние между точками этих сфер равно сумме радиусов, то есть 7, а наименьшее расстояние равно разности радиусов, то есть 1. Поэтому искомые значения равны 49 и 1. Значение 49 достигается, например, при $a = d = c = q = 0, b = 3, p = 4$. Значение 1 достигается, например, при $a = d = c = q = 0, b = 3, p = -4$.

Ответ: 49; 1.

Пример 5. Найти все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (x + 2a - 1)^2 + (y + 5a - 2)^2 = 4, \\ (x - 3a + 1)^2 + (y - 6a + 5)^2 = 9. \end{cases}$$

Решение. На геометрическом языке условие задачи означает, что требуется найти все значения параметра a , при каждом из которых окружность с центром в точке $(-2a + 1; -5a + 2)$ и радиусом 2 касается окружности с центром в точке $(3a - 1; 6a - 5)$ и радиусом 3. Это возможно в том и только том случае, если расстояние между центрами окружностей равно сумме радиусов (внешнее касание) или разности радиусов (внутреннее касание). Таким образом, получаем два уравнения:

$$\sqrt{(5a - 2)^2 + (11a - 7)^2} = 5,$$

$$\sqrt{(5a - 2)^2 + (11a - 7)^2} = 1.$$

Корнями первого уравнения являются числа $\frac{14}{73}$ и 1, а второе уравнение не имеет корней.

Ответ: $\frac{14}{73}; 1$.

В заключение рассмотрим несколько более сложных задач, связанных с геометрическими интерпретациями, предлагавшихся в разные годы на Едином государственном экзамене по математике (задача С5).

Пример 6. Найти все значения параметра, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + (y - 4)^2 = 16, \\ \sqrt{x^2 + (y - 12)^2} + \sqrt{(x - a)^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + 144}. \end{cases}$$

Решение. Первое уравнение системы является уравнением окружности с центром $C(0; 4)$ и радиусом 4. Левая часть второго уравнения равна сумме расстояний от точки $M(x; y)$ координатной плоскости Oxy до точек $A(0; 12)$ и $B(a; 0)$ этой плоскости. Заметим, что длина отрезка AB равна

$$\sqrt{(0 - a)^2 + (12 - 0)^2} = \sqrt{a^2 + 144},$$

то есть равна правой части второго уравнения системы. Поэтому $MA + MB = AB$, откуда следует, что точка $M(x; y)$ принадлежит отрезку AB . Теперь условие задачи можно перевести с языка формул на язык расстояний: решить задачу значит найти все значения параметра a , при каждом из которых существует единственная точка $M(x; y)$ координатной плоскости Oxy , которая принадлежит как окружности с центром $C(0; 4)$ и радиусом 4, так и отрезку с концами $A(0; 12)$

и $B(a; 0)$. Таким образом, требуется найти такое положение точки $B(a; 0)$ на оси абсцисс, при котором прямая AB касается окружности в точке $M(x; y)$. Последнее возможно в двух случаях (рис. 3), при этом соответственные значения параметра равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

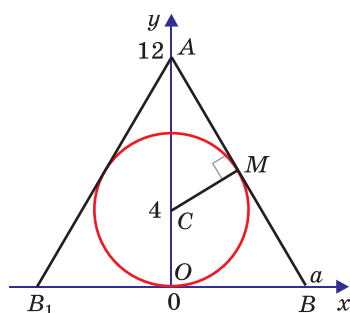


Рис. 3

В любом случае отрезок CM является радиусом, проведенным в точку касания, то есть $CM = 4$. Но $CA = 8$, значит, $\angle CAM = 30^\circ$. Поэтому

$$OB = OA \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 12 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

(где точка O — начало координат). Следовательно, но, $a = \pm 4\sqrt{3}$.

Ответ: $a = \pm 4\sqrt{3}$.

Пример 7. Найти все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (|x| - 6)^2 + (y - 12)^2 = 4, \\ (x + 1)^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$

Решение. При $x \geq 0$ уравнение

$$(|x| - 6)^2 + (y - 12)^2 = 4$$

является уравнением окружности ω_1 с центром в точке $C_1(6; 12)$ и радиусом 2. При $x < 0$ это уравнение является уравнением окружности ω_2 с центром в точке $C_2(-6; 12)$ и тем же радиусом (рис. 4).

Если $a = 0$, второе уравнение данной системы принимает вид $(x + 1)^2 + y^2 = 0$, откуда $x = -1$, $y = 0$. Эти числа не являются решением первого уравнения системы. Если $a \neq 0$, второе уравнение данной системы является уравнением окружности ω с центром в точке $C(-1; 0)$ и радиусом $r = |a|$. Таким образом, требуется найти все отличные от нуля значения параметра a , при каждом из которых окружность ω имеет единственную общую точку с объединением окружностей ω_1 и ω_2 .

Из точки C проведем луч CC_1 и обозначим через A_1 и B_1 точки его пересечения с окружностью ω_1 , где A_1 лежит между C и C_1 . Так как

$$CC_1 = \sqrt{(6+1)^2 + 12^2} = \sqrt{193},$$

то

$$CA_1 = \sqrt{193} - 2, \quad CB_1 = \sqrt{193} + 2.$$

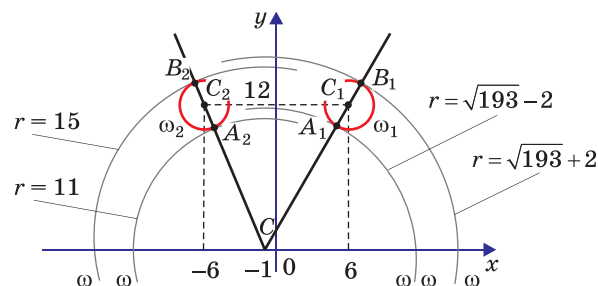


Рис. 4

При $r < CA_1$ или $r > CB_1$ окружности ω и ω_1 не пересекаются.

При $CA_1 < r < CB_1$ окружности ω и ω_1 имеют две общие точки.

При $r = CA_1$ или $r = CB_1$ окружности ω и ω_1 касаются.

Из точки C проведем луч CC_2 и обозначим через A_2 и B_2 точки его пересечения с окружностью ω_2 , где A_2 лежит между C и C_2 . Так как

$$CC_2 = \sqrt{(-6+1)^2 + 12^2} = 13,$$

то

$$CA_2 = 13 - 2 = 11, \quad CB_2 = 13 + 2 = 15.$$

При $r < CA_2$ или $r > CB_2$ окружности ω и ω_2 не пересекаются.

При $CA_2 < r < CB_2$ окружности ω и ω_2 имеют две общие точки.

При $r = CA_2$ или $r = CB_2$ окружности ω и ω_2 касаются.

Данная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность ω касается ровно одной из двух окружностей ω_1 и ω_2 и не имеет ни одной общей точки с другой окружностью. Так как

$$CA_2 < CA_1 < CB_2 < CB_1,$$

то условию задачи удовлетворяют только числа $r = 11$ и $r = \sqrt{193} + 2$, откуда $a = \pm 11$ или $a = \pm(\sqrt{193} + 2)$.

Ответ: $-\sqrt{193} - 2; -11; 11; \sqrt{193} + 2$.

Пример 8. Найти все значения параметра a , при каждом из которых имеет ровно три различных решения система уравнений

$$\begin{cases} (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 9, \\ y = |x - a| + 1. \end{cases}$$

Решение. Первое уравнение системы является уравнением окружности с центром в точке $(4; 4)$ и радиусом 3. График функции $y = |x - a| + 1$ получается параллельным переносом на вектор $\vec{l}(a; 1)$ графика функции $y = |x|$. Поскольку график функции $y = |x|$ представляет собой прямой угол с вершиной в точке $(0; 0)$ и сторонами, лежащими на прямых $y = x$ и $y = -x$ выше оси абсцисс, график функции $y = |x - a| + 1$ также представляет собой прямой угол, но с вершиной в точке $(a; 1)$ и сторонами, параллельными прямым $y = x$ и $y = -x$ (рис. 5). Сразу же заметим, что прямая $y = 1$, на которой лежит вершина угла, является касательной к окружности.

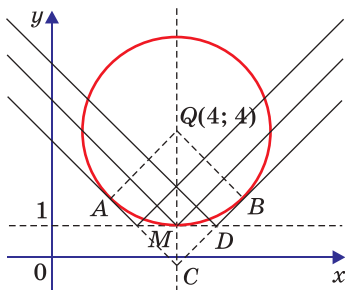


Рис. 5

Ровно три общие точки фигуры имеют в следующих случаях.

1. Вершина прямого угла лежит в точке M касания окружности и прямой $y = 1$, а его стороны пересекают окружность в двух точках (первый случай). Это возможно, только если $a = 4$.

2. Одна из сторон прямого угла пересекает окружность в двух точках, а другая касается окружности в точке A (второй случай) или в точке B (третий случай). Найдем значения параметра для этих двух случаев. Поскольку радиус окружности, проведенный в точку касания окружности и прямой, перпендикулярен прямой, четырехугольник $BQAC$ является квадратом со стороной 3 и диагональю $3\sqrt{2}$. Тогда

$$MD = MC = QC - QM = 3\sqrt{2} - 3.$$

Следовательно,

$$a = 3\sqrt{2} - 3 + 4 = 1 + 3\sqrt{2}.$$

Для касания стороны угла и окружности в точке A получаем аналогично еще одно значение параметра:

$$a = 4 - (3\sqrt{2} - 3) = 7 - 3\sqrt{2}.$$

При $a < 7 - 3\sqrt{2}$ или $a > 1 + 3\sqrt{2}$ прямой угол имеет не более двух общих точек с окружностью.

При $7 - 3\sqrt{2} < a < 4$ или $4 < a < 1 + 3\sqrt{2}$ прямой угол имеет четыре общие точки с окружностью.

Ответ: $7 - 3\sqrt{2}$; 4; $1 + 3\sqrt{2}$.

Пример 9. Найти все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы одно решение $(x; y; z)$ система уравнений

$$\begin{cases} (x - 4 \sin z)^2 + (y + 4 \cos z)^2 = 1, \\ |x| + |y| = a. \end{cases}$$

Решение. При любом действительном значении z первое уравнение данной системы является уравнением окружности ω в плоскости Oxy с радиусом, равным 1, и центром в точке $(x_0; y_0)$, где $x_0 = 4 \sin z$, $y_0 = -4 \cos z$. Поскольку $x_0^2 + y_0^2 = 16$, центр окружности ω в свою очередь лежит на окружности с центром в начале координат и радиусом 4. Таким образом, множество всех точек $(x; y)$ плоскости Oxy , координаты которых удовлетворяют первому уравнению данной системы, является кольцо, заключенное между двумя концентрическими окружностями (включая сами эти окружности), с центром в начале координат и радиусами 3 и 5 (рис. 6).

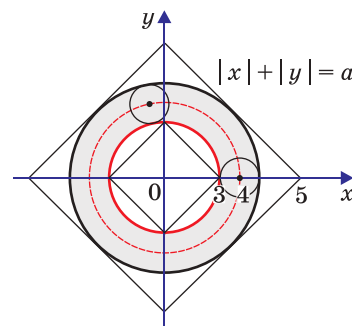


Рис. 6

Если $a \leq 0$, данная система, очевидно, решений не имеет. Если $a > 0$, множеством всех точек $(x; y)$ плоскости Oxy , координаты которых удовлетворяют второму уравнению данной системы, является квадрат с диагональю $2a$ и стороной $a\sqrt{2}$, ограниченный прямыми $y = a - x$ (при $x \geq 0, y \geq 0$), $y = a + x$ (при $x \leq 0, y \geq 0$), $y = -a - x$ (при $x \leq 0, y \leq 0$) и $y = -a + x$ (при $x \geq 0, y \leq 0$). Данная система имеет хотя бы одно решение в тех и только тех случаях, когда квадрат либо вписан в меньшую окружность, ограничивающую кольцо (в этом случае $a = 3$), либо описан около большей окружности, ограничивающей кольцо (в этом случае $\frac{a\sqrt{2}}{2} = 5$, откуда $a = 5\sqrt{2}$), либо занимает промежуточное положение между двумя этими положениями (в этом случае $3 < a < 2\sqrt{5}$).

Ответ: $[3; 5\sqrt{2}]$.