

Глава 4

Разделяй и властвуй: деление в уме

Деление в уме — чрезвычайно полезный навык как для бизнеса, так и для повседневной жизни. Сколько раз в неделю вы сталкиваетесь с ситуациями, которые требуют от вас что-то равномерно распределить, например счет в ресторане? Точно такой же навык оказывается кстати, когда вы хотите выяснить стоимость одной упаковки корма для собак, или поделить выигрыш во время игры в покер, или узнать, сколько литров бензина можно купить на 20 долларов. Способность делить в уме избавит вас от необходимости постоянно обращаться к калькулятору, когда вам нужно что-либо посчитать.

При выполнении устного деления метод вычисления слева направо вступает в свои права. Именно ему нас учили в школе, так что вы будете заниматься естественным для себя делом. Помню, что, будучи ребенком, думал, будто метод деления слева направо олицетворяет то, какой арифметика должна быть в принципе. Я часто размышлял о том, что если бы в школе нашли способ преподавать и деление справа налево, они, вероятно, так бы и сделали!

ДЕЛЕНИЕ НА ОДНОЗНАЧНОЕ ЧИСЛО

Первый шаг при делении в уме — предположить, из скольких цифр будет состоять итоговый ответ. Чтобы понять, что я имею в виду, попробуйте решить вот такую задачу:

179 ÷ 7

Чтобы разделить 179 на 7, нужно найти такое число Q , которое 7 раз по Q составит 179. Очевидно, что поскольку 179 находится между $7 \times 10 = 70$ и $7 \times 100 = 700$, Q должно размещаться между 10 и 100. Стало быть, ответ является двузначным числом. Зная это, сначала определяем наибольшее кратное 10, которое может быть умножено на 7 и в итоге оказаться меньше 179. Нам известно, что $7 \times 20 = 140$ и $7 \times 30 = 210$, значит, ответ будет в диапазоне «20 плюс». Отталкиваясь от этого, мы уже можем реально проговорить число «20», так как это будет часть ответа, и она точно не изменится. Далее вычитаем $179 - 140 = 39$. Теперь наша задача сведена к делению $39 \div 7$. Так как $7 \times 5 = 35$, что на 4 меньше 39, у нас появилась вторая часть ответа «5» с остатком 4, или, если вы предпочитаете говорить так: 25 и $4/7$. Вот как выглядит данный процесс деления*.

$$\begin{array}{r}
 25 \\
 7 \overline{)179} \\
 \underline{- 140} \\
 39 \\
 \underline{- 35} \\
 4 \leftarrow \text{остаток}
 \end{array}$$

Ответ: 25 (остаток 4), или 25 (и $4/7$).

Попробуем решить похожую задачу, используя аналогичные расчеты.

675 ÷ 8

* Автор использует американскую нотацию для деления в столбик. В этой нотации сначала записывается делитель (число 7 в примере ниже), рядом делимое (число 179). Цифры ответа поочередно записываются над делимым. Число под делимым — это произведение делителя и первой цифры ответа (с соответствующим количеством нулей). Затем из разности делимого и этого числа вычитается произведение делителя и следующей цифры ответа, и так далее.

Как и раньше, если 675 находится между $8 \times 10 = 80$ и $8 \times 100 = 800$, то ответ должен быть меньше 100 и выражаться двузначным числом. Чтобы произвести деление, учтем, что $8 \times 80 = 640$ и $8 \times 90 = 720$. То есть ответ должен быть в диапазоне 80 «с хвостиком». Но с каким хвостиком? Чтобы это узнать, вычтите 640 из 675 для получения остатка 35. После произнесения вами «80» наша задача сведется к $35 \div 8$. Так как $8 \times 4 = 32$, итоговый ответ будет 84 с остатком 3, или 84 и $3/8$. Схематически данный пример представим так:

$$\begin{array}{r}
 84 \\
 8 \overline{)675} \\
 \underline{- 640} \\
 35 \\
 \underline{- 32} \\
 3 \leftarrow \text{остаток}
 \end{array}$$

Ответ: 84 (остаток 3), или 84 (и $3/8$).

Как и большинство устных вычислений, процесс деления можно рассматривать как процесс упрощения. Чем больше числа в первом действии, тем проще становится задача. То, что начиналось как $675 \div 8$, было сведено к меньшей задаче $35 \div 8$.

Теперь рассмотрим пример, при решении которого получается трехзначное число.

$$947 \div 4$$

На этот раз ответ будет содержать три цифры, потому что 947 находится между $4 \times 100 = 400$ и $4 \times 1000 = 4000$. Нам следует отыскать наибольшее кратное 100, наиболее близкое к 947. Поскольку $4 \times 200 = 800$, то есть «200 плюс», так что вперед, произнесите это! Вычитание 800 из 947 преподносит новую задачу на деление $147 \div 4$. Так как $4 \times 30 = 120$, теперь мы уже

можем сказать: «30». После вычитания 120 из 147 вычисляем $27 \div 4$ для получения остальной части ответа: 6 с остатком 3. В совокупности имеем 236 с остатком 3, или 236 и $3/4$.

$$\begin{array}{r}
 236 \\
 4 \overline{)947} \\
 \underline{- 800} \\
 147 \\
 \underline{- 120} \\
 27 \\
 \underline{- 24} \\
 3 \quad \leftarrow \text{остаток}
 \end{array}$$

Ответ: 236 (остаток 3), или 236 (и $3/8$).

Процесс деления четырехзначного числа на одну цифру столь же прост, как и следующий пример.

$$2196 \div 5$$

Здесь ответ будет исчисляться сотнями, потому что 2196 находится между $5 \times 100 = 500$ и $5 \times 1000 = 5000$. После вычитания $5 \times 400 = 2000$ из 2196 мы можем произнести «400», и наша задача сведется к деления 196 на 5, что вычисляется так же, как и в предыдущих примерах.

$$\begin{array}{r}
 439 \\
 5 \overline{)2196} \\
 \underline{- 2000} \\
 196 \\
 \underline{- 150} \\
 46 \\
 \underline{- 45} \\
 1 \quad \leftarrow \text{остаток}
 \end{array}$$

Ответ: 439 (остаток 1), или 439 (и $1/5$).

На самом деле существует более простой способ решения последней задачи. Ее можно упростить путем удвоения обоих чисел. Так как $2196 \times 2 = 4392$, то имеем $2196 \div 5 = 4392 \div 10 = 439,2$, или 439 и $2/10$. Мы рассмотрим другие способы упрощения при делении в следующем разделе.

УПРАЖНЕНИЕ: ДЕЛЕНИЕ НА ОДНУ ЦИФРУ

- | | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| 1. $318 \div 9$ | 2. $726 \div 5$ | 3. $428 \div 7$ |
| 4. $289 \div 8$ | 5. $1328 \div 3$ | 6. $2782 \div 4$ |

ПРАВИЛО БОЛЬШОГО ПАЛЬЦА

При делении в уме запоминание частей ответа может вызвать сложности в процессе вычислений. Одним из вариантов выхода из ситуации является, как мы практиковали ранее, проговаривание ответа вслух по ходу решения. Но для создания большего эффекта вы можете предпочесть (как и я) держать ответ в памяти с помощью пальцев и произносить его целиком в самом конце. Однако при этом вы рискуете столкнуться с проблемой при запоминании чисел, которые больше пяти, ведь у нас лишь пять пальцев на каждой руке. В этом вам поможет специальная техника, в основе которой лежит язык жестов. Я называю ее «Правило большого пальца». Она особенно эффективна для запоминания чисел, состоящих из трех и более цифр, и полезна не только в данной главе, но пригодится и в последующих, где придется иметь дело с задачами посложнее и числами подлиннее.

Вы уже догадались, что для запоминания чисел от 0 до 5 вам достаточно согнуть нужное количество пальцев на руке. Когда

в процесс вовлечен большой палец, будет легко запомнить числа от 6 до 9. Вот список правил большого пальца.

- Чтобы задать 6, поместите большой палец на верхней части мизинца.
- Чтобы задать 7, поместите большой палец на верхней части безымянного пальца.
- Чтобы задать 8, поместите большой палец на верхней части среднего пальца.
- Чтобы задать 9, поместите большой палец на верхней части указательного пальца.

При работе с трехзначным числом задайте цифры для сотен на левой руке и для десятков на правой. Когда дело дойдет до одной цифры, вы достигнете конечной точки решения (за исключением возможного остатка). Теперь произнесите число на левой руке, число на правой руке, последнюю цифру, которую только что посчитали, и остаток (что у вас в голове). И вот! Вы произнесли ответ!

Чтобы попрактиковаться, попробуйте решить следующую задачу на деление четырехзначного числа.

$$4579 \div 6$$

$$\begin{array}{r}
 763 \\
 6 \overline{)4579} \\
 \underline{- 4200} \\
 379 \\
 \underline{- 360} \\
 19 \\
 \underline{- 18} \\
 1 \leftarrow \text{остаток}
 \end{array}$$

Ответ: 763 (остаток 1), или 763 (и 1/6).

Пользуясь приемом большого пальца для запоминания ответа, вы зададите 7 на левой руке, соединив большой палец с безымянным, и 6 на правой, соединив большой палец с мизинцем. Как только вычислите последнюю цифру (она равна 3) и остаток (равный 1), можете «зачитать» итоговый ответ с ваших рук слева направо: «семь...шесть...три с остатком один».

Некоторые задачи на деление четырехзначных чисел дают четырехзначный ответ. В таком случае, поскольку у вас только две руки, вам придется вслух произнести цифру для тысячи и использовать правило большого пальца для запоминания остального ответа. Например:

$$\begin{array}{r}
 8352 \div 3 \\
 \underline{2784} \\
 3 \overline{)8352} \\
 \underline{- 6000} \\
 2352 \\
 \underline{- 2100} \\
 252 \\
 \underline{- 240} \\
 12 \\
 \underline{- 12} \\
 0
 \end{array}$$

Ответ: 2784.

Для решения этой задачи вы делите 8 на 3, чтобы получить цифру 2 для тысяч; произносите «две тысячи» вслух, затем делите 2352 на 3 привычным способом.

ДЕЛЕНИЕ НА ДВУЗНАЧНЫЕ ЧИСЛА

В этом разделе мы исходим из предположения, что вы уже освоили искусство деления на однозначные числа. Естественно, задачи на деление с увеличением делителя более сложные. К счастью, в моем рукаве есть немного магии, чтобы облегчить вам жизнь.

Начнем с относительно простой задачи.

$$597 \div 14$$

Так как 597 находится между 14×10 и 14×100 , ответ (так называемое частное) лежит между 10 и 100. Чтобы его найти, нужно в первую очередь задать вопрос: «Сколько раз по 14 даст в сумме 590?» Умножив $14 \times 40 = 560$, вы узнаете, что ответ будет в диапазоне «40 плюс»; так что можно смело произнести вслух «сорок».

Далее вычитаем 560 из 597 и получаем 37, что сводит задачу к делению 37 на 14. Так как $14 \times 2 = 28$, здесь ответ — 42. Вычитая 28 из 37, мы получаем остаток 9. Процесс решения задачи показан следующим образом.

$$\begin{array}{r}
 42 \\
 14 \overline{)597} \\
 \underline{- 560} \\
 37 \\
 \underline{- 28} \\
 9 \quad \leftarrow \text{остаток}
 \end{array}$$

Ответ: 42 (остаток 9), или 42 (и 9/14).

Следующая задачка немного сложнее, потому что делитель в ней больше.

$$682 \div 23$$

В данном примере ответ будет двузначным числом, так как 682 находится между $23 \times 10 = 230$ и $23 \times 100 = 2300$. Чтобы найти цифру для десятка двузначного числа, нужно подумать: «Сколько раз по 23 даст в сумме 680?» Если вы попробуете 30, то увидите, что здесь незначительный перебор, так как $23 \times 30 = 690$. Но теперь вы знаете, что ответ лежит в диапазоне «20 плюс» и можете произнести это вслух. Затем вычтите $23 \times 20 = 460$ из 682, чтобы получить 222. Так как $23 \times 9 = 207$, ответ — 29 и остаток $222 - 207 = 15$.

$$\begin{array}{r}
 29 \\
 23 \overline{)682} \\
 \underline{- 460} \\
 222 \\
 \underline{- 207} \\
 15 \leftarrow \text{остаток}
 \end{array}$$

Ответ: 29 (остаток) 9, или 29 (и 15/23).

Теперь вычислим:

$$491 \div 62$$

Так как 491 меньше, чем $62 \times 10 = 620$, ответ будет представлен одной цифрой с остатком. Можно попробовать 8, но $62 \times 8 = 496$, а это несколько больше делимого. Поскольку $62 \times 7 = 434$, ответ — 7 и остаток $491 - 434 = 57$, или 7 и 57/62.

$$\begin{array}{r}
 7 \\
 62 \overline{)491} \\
 \underline{- 434} \\
 57 \leftarrow \text{остаток}
 \end{array}$$

Ответ: 7 (остаток 57), или 7 (и 57/62).

Один отличный трюк может облегчить решение таких задач. Помните, как сначала мы пытались перемножить $62 \times 8 = 496$, но обнаружили, что это число больше, чем нужно? Но это действие оказалось не напрасным. Помимо информации о том, что ответ — 7, оно также позволяет сразу определить остаток. Поскольку 496 на 5 единиц больше 491, остаток будет на 5 единиц меньше делителя 62. Поскольку $62 - 5 = 57$, то ответ — 7 и $57/62$. Этот прием работает потому, что $491 = (62 \times 8) - 5 = 62 \times (7 + 1) - 5 = (62 \times 7 + 62) - 5 = (62 \times 7) + (62 - 5) = 62 \times 7 + 57$.

Теперь попробуйте решить пример $380 \div 39$, используя вышеописанную уловку. Итак, $39 \times 10 = 390$, что больше делимого на 10. Стало быть, ответ будет 9 с остатком $39 - 10 = 29$.

Следующий вызов для вас — деление четырехзначного числа на двузначное.

3657 ÷ 54

Так как $54 \times 100 = 5400$, то ответ будет двузначным числом. Для получения первой цифры ответа необходимо выяснить, сколько раз по 54 даст в сумме 3657. Исходя из того что $54 \times 70 = 3789$ (что немного больше делимого), ответ будет где-то в диапазоне «60 плюс».

Далее умножаем $54 \times 60 = 3240$ и вычитаем $3657 - 3240 = 417$. Как только вы произнесете «60», ваша задача упростится до $417 \div 54$. Поскольку $54 \times 8 = 432$ (что тоже немного больше 417), последняя цифра будет 7 с остатком $54 - 15 = 39$.

$$\begin{array}{r}
 67 \\
 54 \overline{)3657} \\
 \underline{- 3240} \\
 417 \\
 \underline{- 378} \\
 39 \leftarrow \text{остаток}
 \end{array}$$

Ответ: 67 (остаток 39), или 67 (и 39/54).

Теперь попробуйте свои силы в решении задачи с трехзначным частным:

$$9467 \div 13$$

$$\begin{array}{r}
 728 \\
 13 \overline{)9467} \\
 \underline{- 9100} \\
 367 \\
 \underline{- 260} \\
 107 \\
 \underline{- 104} \\
 3 \leftarrow \text{остаток}
 \end{array}$$

Ответ: 728 (остаток 3), или 728 (и 3/13).

Упрощение задач на деление

Если к этому моменту ваш мозг уже устал от перенапряжения, расслабьтесь. Как и было обещано, я поделюсь с вами несколькими приемами упрощения задач на деление в уме. Они основаны на принципе деления обеих частей задачи на общий множитель. Если оба числа в примере четные, вы можете вдвойне упростить проблему путем деления каждого числа на 2 перед началом вычислений. Например, задача $858 \div 16$ содержит два четных числа, и их деление на 2 ведет к значительно более простому действию $429 \div 8$.

$$\begin{array}{r}
 53 \\
 16 \overline{)858} \\
 \underline{- 800} \\
 58 \\
 \underline{- 48} \\
 10
 \end{array}$$

Ответ: 53 (и 10/16).

делим на 2

$$\begin{array}{r}
 53 \\
 8 \overline{)429} \\
 \underline{- 400} \\
 29 \\
 \underline{- 24} \\
 5
 \end{array}$$

Ответ: 53 (и 5/8).

Как видите, остатки 10 и 5 различны; но если записать их в виде дроби, получится $10/16$, что равно $5/8$. Поэтому в данном методе ответ всегда должен быть представлен в виде дроби.

Мы проделали оба типа вычислений для того, чтобы вы убедились, насколько второй способ легче. Теперь ваша очередь практиковаться:

$$3618 \div 54$$

$$\begin{array}{r} 67 \\ 54 \overline{)3618} \\ \underline{- 3240} \\ 378 \\ \underline{- 378} \\ 0 \end{array}$$

Ответ: 67.

Делим на 2

$$\begin{array}{r} 67 \\ 27 \overline{)1809} \\ \underline{- 1620} \\ 189 \\ \underline{- 189} \\ 0 \end{array}$$

Ответ: 67.

Пример справа гораздо легче решить в уме. Если вы все еще в этом не уверены, можете разделить обе части исходной задачи на 18 для получения еще более простой задачи: $201 \div \div 3 = 67$.

Высматривайте задачи, которые можно подвергнуть делению на 2 дважды, такие как $1652 \div 36$.

$$\begin{array}{rclclcl} 1652 \div 36 & = & 826 \div 18 & = & 413 \div 9 & = & \begin{array}{r} 45 \\ 9 \overline{)413} \\ \underline{- 360} \\ 53 \\ \underline{- 45} \\ 8 \end{array} \\ & \div 2 & & \div 2 & & & \end{array}$$

Ответ: 45 (и 8/9).

Разделяй и властвуй: деление в уме

Мне кажется, что проще дважды разделить числа на 2, чем делить каждое из чисел на 4. Теперь рассмотрим случай, когда оба числа оканчиваются на 0. В этой ситуации можно каждое число разделить на 10.

$$\begin{array}{rclcl} 580 \div 70 & = & 58 \div 7 & = & \begin{array}{r} 8 \\ 7 \overline{)58} \\ \underline{-56} \\ 2 \end{array} \\ & \div 10 & & & \end{array}$$

Ответ: 8 (и 2/7).

Если оба числа заканчиваются на 5, удвойте их, а затем разделите на 10 для упрощения задачи. Например:

$$\begin{array}{rclcl} 475 \div 35 & = & 950 \div 70 & = & 95 \div 7 & = & \begin{array}{r} 13 \\ 7 \overline{)95} \\ \underline{-70} \\ 25 \\ \underline{-21} \\ 4 \end{array} \\ & \times 2 & & \div 10 & & & \end{array}$$

Ответ: 13 (и 4/7).

Наконец, если делитель оканчивается на 5, а делимое на 0, умножьте оба на 2, а затем разделите на 10 и далее действуйте так, как мы делали выше.

$$\begin{array}{rclcl} 890 \div 45 & = & 1780 \div 90 & = & 178 \div 9 & = & \begin{array}{r} 19 \\ 9 \overline{)178} \\ \underline{-90} \\ 88 \\ \underline{-81} \\ 7 \end{array} \\ & \times 2 & & \div 10 & & & \end{array}$$

Ответ: 19 (и 7/9).

УПРАЖНЕНИЕ: ДЕЛЕНИЕ НА ДВУЗНАЧНЫЕ ЧИСЛА

Здесь вы найдете разнообразные задачи по делению на двузначные числа, которые проверят ваше ментальное мастерство и умение пользоваться простыми техниками упрощения, которые были объяснены в этой главе. Загляните в конец книги для получения объяснений и сверки ответов.

1. $738 \div 17$ 2. $591 \div 24$ 3. $321 \div 79$

4. $4268 \div 28$ 5. $7214 \div 11$ 6. $3074 \div 18$

РАЗВИВАЕМ СВОИ СПОСОБНОСТИ: ИЗУЧЕНИЕ ДЕСЯТИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Как вы уже, наверное, догадались, мне нравится заниматься магией, превращая обычные дроби в десятичные. В случае с дробями, в знаменателе которых есть только одна цифра, лучший способ превратить их в десятичные — это почерпнуть их значения из памяти. Это не так сложно, как кажется. Далее вы увидите, что большинство дробей, числители и знаменатели которых представлены однозначными числами (а также 10 или 11), обладают особыми свойствами, поэтому их сложно забыть. Каждый раз, когда вы можете сократить дробь до уже известного вам значения, это ускорит процесс вычислений.

Уверен, вы уже знаете десятичные эквиваленты для следующих дробей:

$$\frac{1}{2} = 0,50; \quad \frac{1}{3} = 0,333...; \quad \frac{2}{3} = 0,666... .$$

Подобно этому

$$\frac{1}{4} = 0,25; \quad \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,50; \quad \frac{3}{4} = 0,75.$$

Дроби с пятерками в знаменателе запомнить легче всего.

$$\frac{1}{5} = 0,20; \quad \frac{2}{5} = 0,40; \quad \frac{3}{5} = 0,60; \quad \frac{4}{5} = 0,80.$$

Дроби с шестерками в знаменателе требуют запоминания только двух новых значений.

$$\frac{1}{6} = 0,1666...; \quad \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0,333...; \quad \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,50;$$

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0,666...; \quad \frac{5}{6} = 0,8333... .$$

Через мгновение я вернусь к дробям с семерками в знаменателе. А сейчас дроби с восьмерками в знаменателе, преобразовать которые просто элементарно.

$$\frac{1}{8} = 0,125; \quad \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25;$$

$$\frac{3}{8} = 0,375 \left(3 \times \frac{1}{8} = 3 \times 0,125 = 0,375 \right); \quad \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,50;$$

$$\frac{5}{8} = 0,625 \left(5 \times \frac{1}{8} = 5 \times 0,125 = 0,625 \right); \quad \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0,75;$$

Дроби с девятками в знаменателе таят в себе особое волшебство.

$$\frac{1}{9} = 0,\bar{1}; \quad \frac{2}{9} = 0,\bar{2}; \quad \frac{3}{9} = 0,\bar{3}; \quad \frac{4}{9} = 0,\bar{4};$$

$$\frac{5}{9} = 0,\bar{5}; \quad \frac{6}{9} = 0,\bar{6}; \quad \frac{7}{9} = 0,\bar{7}; \quad \frac{8}{9} = 0,\bar{8}.$$

где черта над цифрой обозначает бесконечное повторение этой цифры (говорят, что это дробь в периоде). Например, $4/9 = 0,444...$.

Дроби с десятками в знаменателе нам уже известны.

$$\frac{1}{10} = 0,1; \quad \frac{2}{10} = 0,2; \quad \frac{3}{10} = 0,3;$$

$$\frac{4}{10} = 0,4; \quad \frac{5}{10} = 0,5; \quad \frac{6}{10} = 0,6;$$

$$\frac{7}{10} = 0,7; \quad \frac{8}{10} = 0,8; \quad \frac{9}{10} = 0,9.$$

Дроби со знаменателем 11 легко вычисляются, если вы запомните, что $1/11 = 0,0909$.

$$\frac{1}{11} = 0,\overline{09} = 0,0909...; \quad \frac{2}{11} = 0,\overline{18} = (2 \times 0,0909);$$

$$\frac{3}{11} = 0,\overline{27} = (3 \times 0,0909); \quad \frac{4}{11} = 0,\overline{36}; \quad \frac{5}{11} = 0,\overline{45};$$

$$\frac{6}{11} = 0,\overline{54}; \quad \frac{7}{11} = 0,\overline{63}; \quad \frac{8}{11} = 0,\overline{72};$$

$$\frac{9}{11} = 0,\overline{81}; \quad \frac{10}{11} = 0,\overline{90}.$$

Дроби со знаменателем 7 действительно выдающиеся. Как только вы запомните, что $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$, то сможете без труда получить значения других дробей с 7 в знаменателе.

$$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}; \quad \frac{2}{7} = 0,\overline{285714}; \quad \frac{3}{7} = 0,\overline{428571};$$

$$\frac{4}{7} = 0,\overline{571428}; \quad \frac{5}{7} = 0,\overline{714285}; \quad \frac{6}{7} = 0,\overline{857142}.$$

Обратите внимание, что последовательность цифр в периоде циклически повторяется в каждой дроби, при этом изменяется лишь начальная цифра последовательности. Ее можно определить путем умножения 0,14 на числитель дроби. Например, для дроби $2/7$ имеем $2 \times 0,14 = 0,28$. Поэтому последовательность должна начинаться с 2. Для дроби $3/7$ это $3 \times 0,14 = 0,42$, значит, последовательность начинается с 4. Другие дроби подчиняются тому же правилу.

Конечно, в процессе решения разнообразных задач вы обязательно столкнетесь с дробями, превышающими $10/11$. Поэтому постоянно обдумывайте способы упрощения таких задач. Например, можно упростить дробь $18/34$ путем деления числителя и знаменателя на 2, чтобы сократить задачу до $9/17$ (ее будет легче решить).

Если знаменатель дроби — четное число, можно упростить дробь, уменьшив ее вдвое, даже если числитель нечетный. Например,

$$\frac{9}{14} = \frac{4,5}{7}$$

Деление числителя и знаменателя на 2 сведет проблему к дроби с семеркой в знаменателе. Хотя ранее показанная последовательность дробей не предоставляет десятичного варианта для дроби $4,5/7$, как только вы начнете считать, заученное число неожиданно всплывет в памяти.

$$\begin{array}{r} 0,6428571 \\ 7 \overline{)4,5000000} \\ \underline{- 4,2} \\ 3 \end{array}$$

Как видите, вам не пришлось решать задачу целиком. Стоит вам разделить 3 на 7, и вы точно произведете огромное

впечатление на публику, отбарабанив этот длинный набор цифр почти мгновенно!*

Когда делитель заканчивается на 5, то почти всегда умножение на 2, а потом деление на 10 оправдывает себя. Например:

$$\frac{29}{45} = \frac{58}{90} = \frac{5,8}{9} = 0,6\overline{44}.$$

$\times 2 \qquad \qquad \div 10$

Числа, которые заканчиваются на 25 или 75, надо сначала умножить на 4 и затем разделить на 100.

$$\frac{31}{25} = \frac{124}{100} = 1,24$$

$\times 4 \qquad \qquad \div 100$

$$\frac{62}{75} = \frac{248}{300} = \frac{2,48}{3} = 0,82\overline{66}.$$

$\times 4 \qquad \qquad \div 100$

Этот трюк можно применять даже в середине расчетов. Если вам нужно вычислить дробь 3/16, произойдет вот что:

$$\begin{array}{r} 0,1 \\ 16 \overline{) 3,000} \\ \underline{- 16} \\ 14 \end{array}$$

Как только задача сведется к вычислению 14/16, можно привести ее к виду 7/8, что, как известно, равняется 0,875. Отсюда 3/16 = 0,1875**.

* Вычисления происходят следующим образом: $4,5/7 = 4,2/7 + 0,3/7 = 0,6 + 0,1 \times 3/7 = 0,6 + 0,1 \times 0,428571 = 0,6 + 0,0428571 = 0,6428571$.
Прим. ред.

** Здесь вычисления вновь требуют пояснений: $3/16 = 0,1 \times 30/16 = 0,1 \times 15/8 = 0,1 \times (1 + 7/8) = 0,1 + 0,1 \times 7/8 = 0,1 + 0,1 \times 0,875 = 0,1 + 0,0875 = 0,1875$. *Прим. ред.*

УПРАЖНЕНИЕ:
ПРИВЕДЕНИЕ ДРОБЕЙ К ДЕСЯТИЧНОЙ ФОРМЕ

Чтобы решить следующие задачи, не забудьте использовать полученные знания о десятичном виде различных «одноцифровых» дробей. Везде, где это целесообразно, упрощайте дроби, прежде чем преобразовать их в десятичные.

1. **$\frac{2}{5}$** 2. **$\frac{4}{7}$** 3. **$\frac{3}{8}$** 4. **$\frac{9}{12}$** 5. **$\frac{5}{12}$** 6. **$\frac{6}{11}$**
7. **$\frac{14}{24}$** 8. **$\frac{13}{27}$** 9. **$\frac{18}{48}$** 10. **$\frac{10}{14}$** 11. **$\frac{6}{32}$** 12. **$\frac{19}{45}$**

ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

В последнем разделе мы узнали, как упростить задачи на деление, если числитель и знаменатель поделить на общий множитель. В завершение этой главы обсудим, как определить, является ли одно число делителем другого. Это поможет упростить задачу на деление и ускорить процесс решения многих задач на умножение, а также пригодится, когда мы доберемся до продвинутого умножения, где часто придется искать способы разложить на множители двух-, трех- или даже пятизначные числа. Умение делать это окажется весьма полезным.

Проверить, делится ли число на 2, довольно просто. Вам нужно только определить, является ли последняя цифра четной. Если это 2, 4, 6, 8 или 0, то число целиком делится на 2.

Чтобы протестировать число на делимость на 4, проверьте, делятся ли на 4 две его последние цифры. Число 57 852 кратно 4, потому что $52 = 13 \times 4$. Число 69 346 не кратно 4, поскольку 46 не делится на 4 без остатка. Это правило работает потому, что 4 делит 100 и, следовательно, любое число, кратное 100.

Таким образом, поскольку 57 800 и 52 делятся на 4, то 4 поделит и их сумму, то есть 57 852.

Аналогично, так как 1000 делится на 8, для проверки кратности 8 достаточно выяснить, делятся ли на 8 последние три цифры числа. Например, для 14 918 надо проверить число 918 на делимость на 8. Однако при делении 918 на 8 имеем остаток ($918 \div 8 = 114 \frac{6}{8}$), из чего делаем вывод, что число 14 918 на 8 не делится. Можно также заметить, что 18 (две последние цифры числа 14 918) не делится на 4, а так как 14 918 не делится на 4, оно не может делиться и на 8.

Когда дело доходит до делимости на 3, предлагаю запомнить одно простое правило: число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма составляющих его цифр делится на 3 (независимо от того, сколько цифр в числе). Чтобы выяснить, делится ли 57 852 на 3, просто сложите $5 + 7 + 8 + 5 + 2 = 27$. Так как 27 кратно 3, то и 57 852 будет кратно 3. Столь же удивительное правило справедливо и для делимости на 9. Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма составляющих его цифр кратна 9. Поэтому 57 852 кратно 9, тогда как число 31 416, сумма цифр которого равна 15, на 9 не делится. Объясняется это правило тем, что числа 1, 10, 100, 1000, 10000 и т. д. всегда на единицу больше кратного 9.

Число делится на 6 только в том случае, если оно четное и делится на 3. Так что кратность 6 легко проверить.

Установить, делится ли число на 5, еще проще. Любое число, независимо от величины, кратно 5 тогда и только тогда, когда оно заканчивается на 5 или 0.

Выяснить делимость на 11 почти так же просто, как на 3 или на 9. Число делится на 11 тогда и только тогда, когда в результате попеременного вычитания и сложения составляющих его цифр вы получите либо 0, либо кратное 11.

Например, 73 958 не делится на 11, потому что $7 - 3 + 9 - 5 + 8 = 16$. Однако числа 8 492 и 73 194 кратны 11, так как $8 - 4 + 9 - 2 = 11$ и $7 - 3 + 1 - 9 + 4 = 0$. Это правило работает потому, что числа 1, 100, 10 000, 1 000 000 на единицу больше кратно 11, в то время как числа 10, 1000, 100 000 и т. д. на единицу меньше величины, кратной 11.

Проверка делимости на 7 несколько сложнее. Если вы прибавите (или вычтите) число, кратное 7, к проверяемому (или из проверяемого) и полученный результат будет делиться на 7, ответ положительный. Я всегда выбираю такое прибавляемое или вычитаемое кратное 7, чтобы в итоге сумма или разность заканчивалась на 0. Например, для проверки числа 5292 я вычитаю 42 (кратное 7), чтобы получить 5250. Далее избавляюсь от 0 на конце (так как деление на десять не влияет на проверку делимости на семь), получая в итоге 525. Затем повторяю процесс, прибавляя 35 (кратное 7), что дает мне 560. Когда я удалю 0, то останусь с числом 56, которое, как мне известно, кратно 7. Таким образом, исходное число 5292 делится на 7.

Этот метод работает не только для 7, но и для любого нечетного числа, кроме оканчивающегося на 5. Например, чтобы проверить, делится ли 8792 на 13, вычитаем $4 \times 13 = 52$ из 8792 и получаем 8740. Опуская 0, имеем 874. Затем прибавляем $2 \times 13 = 26$, выходит 900. Удаление двух нулей оставляет нас с числом 9, которое, очевидно, не кратно 13. Таким образом, 8792 не делится на 13.

УПРАЖНЕНИЕ: ПРОВЕРКА НА ДЕЛИМОСТЬ

В этом упражнении будьте особенно внимательны при проверке делимости на 7 и 17. Остальное не должно представлять для вас трудностей.

Делимость на 2

1. 53 428 2. 293 3. 7241 4. 9846

Делимость на 4

5. 3932 6. 67 348 7. 358 8. 57 929

Делимость на 8

9. 59 366 10. 73 488 11. 248 12. 6111

Делимость на 3

13. 83 671 14. 94 737 15. 7359 16. 3 267 486

Делимость на 6

17. 5334 18. 67 386 19. 248 20. 5991

Делимость на 9

21. 1234 22. 8469 23. 4 425 575 24. 314 159 265

Делимость на 5

25. 47 830 26. 43 762 27. 56 785 28. 37 210

Делимость на 11

29. 53 867 30. 4969 31. 3828 32. 941 369

Делимость на 7

33. 5784 34. 7336 35. 875 36. 1183

Делимость на 17

37. 694 38. 629 39. 8273 40. 13 855

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ

Если вы в состоянии управиться с целыми числами, то арифметические действия с дробями покажутся вам почти такими же легкими. В этом разделе мы сделаем обзор основных методов сложения, вычитания, умножения, деления и сокращения обыкновенных дробей. Те, кто знаком с дробями, могут спокойно его пропустить.

Умножение обыкновенных дробей

Чтобы перемножить две обыкновенные дроби, нужно просто перемножить их числители (верхние числа), а затем знаменатели (нижние числа). Например:

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}; \quad \frac{1}{2} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{18}.$$

Что может быть проще! Попробуйте следующие упражнения, прежде чем двигаться дальше.

УПРАЖНЕНИЕ: УМНОЖЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ

1. $\frac{3}{5} \times \frac{2}{7}$ 2. $\frac{4}{9} \times \frac{11}{7}$ 3. $\frac{6}{7} \times \frac{3}{4}$ 4. $\frac{9}{10} \times \frac{7}{8}$

Деление обыкновенных дробей

Деление дробей столь же легкое, как и умножение. Однако оно требует одного дополнительного действия. Сначала переверните вторую дробь с ног на голову (это называется обратная дробь), а затем умножайте. Например, обратная дробь для $4/5$ будет $5/4$. Следовательно,

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12}.$$

$$\frac{1}{2} \div \frac{5}{9} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{5} = \frac{9}{10}.$$

УПРАЖНЕНИЕ: ДЕЛЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ

Теперь ваша очередь. Поделите эти дроби.

1. $\frac{2}{5} \div \frac{1}{2}$

2. $\frac{1}{3} \div \frac{6}{5}$

3. $\frac{2}{5} \div \frac{3}{5}$

Сокращение обыкновенных дробей

Дроби можно рассматривать как маленькие задачки на деление. Например, $6/3$ то же самое, что и $6 \div 3 = 2$. Дробь $1/4$ то же самое, что и $1 \div 4$ (или 0,25 в десятичной форме). Известно, что если умножить любое число на 1, то это число не изменится. Например, $3/5 = 3/5 \times 1$. Но если заменить 1 дробью $2/2$, то получим $3/5 = 3/5 \times 1 = 3/5 \times 2/2 = 6/10$. Следовательно, $3/5 = 6/10$. По такому же принципу, заменив 1 дробью $3/3$, получим $3/5 = 3/5 \times 3/3 = 9/15$. Другими словами, если мы *умножаем* числитель и знаменатель на одно и то же число, то получаем дробь, равную исходной.

Вот еще пример:

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{5} = \frac{10}{15}.$$

Верно и то, что, *деля* числитель и знаменатель на одинаковое число, мы получаем дробь, равную исходной.

Например:

$$\frac{4}{6} = \frac{4}{6} \div \frac{2}{2} = \frac{2}{3}.$$

$$\frac{25}{35} = \frac{25}{35} \div \frac{5}{5} = \frac{5}{7}.$$

Это *сокращение* дроби.

УПРАЖНЕНИЕ: СОКРАЩЕНИЕ ДРОБЕЙ

Найдите дробь со знаменателем 12, равную дробям, представленным ниже.

1. $\frac{1}{3}$

2. $\frac{5}{6}$

3. $\frac{3}{4}$

4. $\frac{5}{2}$

Сокращение дробей.

5. $\frac{8}{10}$

6. $\frac{6}{15}$

7. $\frac{24}{36}$

8. $\frac{20}{36}$

Сложение дробей

Это действие можно считать простым, когда знаменатели равны. В этом случае складываются числители и сохраняется прежний знаменатель.

Например:

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}; \quad \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}.$$

Иногда можно упростить ответ. Например:

$$\frac{1}{8} + \frac{5}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

УПРАЖНЕНИЕ:**СЛОЖЕНИЕ ДРОБЕЙ (С РАВНЫМИ ЗНАМЕНАТЕЛЯМИ)**

1. $\frac{2}{9} + \frac{5}{9}$

2. $\frac{5}{12} + \frac{4}{12}$

3. $\frac{5}{18} + \frac{6}{18}$

4. $\frac{3}{10} + \frac{3}{10}$

Более коварный случай — различные знаменатели. Когда знаменатели не равны, нужно заменить исходные дроби дробями с равными знаменателями.

Например, сложите

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{15}.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{3} = \frac{5}{15}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{15} = \frac{5}{15} + \frac{2}{15} = \frac{7}{15}.$$

При сложении

$$\frac{1}{2} + \frac{7}{8}.$$

Замечаем, что

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8}.$$

Тогда

$$\frac{1}{2} + \frac{7}{8} = \frac{4}{8} + \frac{7}{8} = \frac{11}{8}.$$

При сложении

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5}.$$

Видим, что

$$\frac{1}{3} = \frac{5}{15} \quad \text{и} \quad \frac{2}{5} = \frac{6}{15}.$$

В итоге

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}.$$

УПРАЖНЕНИЕ:
СЛОЖЕНИЕ ДРОБЕЙ (С НЕРАВНЫМИ ЗНАМЕНАТЕЛЯМИ)

1. $\frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ 2. $\frac{1}{6} + \frac{5}{18}$ 3. $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ 4. $\frac{2}{7} + \frac{5}{21}$
5. $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ 6. $\frac{3}{7} + \frac{3}{5}$ 7. $\frac{2}{11} + \frac{5}{9}$

Вычитание дробей

Вычитание дробей похоже на их сложение. Мы покажем это действие на примерах и обеспечим вас тренировочными упражнениями.

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}; \quad \frac{4}{7} - \frac{2}{7} = \frac{2}{7}; \quad \frac{5}{8} - \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{15} = \frac{5}{15} - \frac{2}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5};$$

$$\frac{7}{8} - \frac{1}{2} = \frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8};$$

$$\frac{1}{2} - \frac{7}{8} = \frac{4}{8} - \frac{7}{8} = \frac{-3}{8}; \quad \frac{2}{7} - \frac{1}{4} = \frac{8}{28} - \frac{7}{28} = \frac{1}{28};$$

$$\frac{2}{3} - \frac{5}{8} = \frac{16}{24} - \frac{15}{24} = \frac{1}{24}.$$

УПРАЖНЕНИЕ: ВЫЧИТАНИЕ ДРОБЕЙ

1. $\frac{8}{11} - \frac{3}{11}$ 2. $\frac{12}{7} - \frac{8}{7}$ 3. $\frac{13}{18} - \frac{5}{18}$
4. $\frac{4}{5} - \frac{1}{15}$ 5. $\frac{9}{10} - \frac{3}{5}$ 6. $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$
7. $\frac{7}{8} - \frac{1}{16}$ 8. $\frac{4}{7} - \frac{2}{5}$ 9. $\frac{8}{9} - \frac{1}{2}$

Глава 5

Искусство приближенной оценки

До сих пор вы совершенствовали ментальные техники, необходимые для получения точных ответов в математических задачах. Однако часто бывает достаточно приблизительной оценки решения. Скажем, вы получаете расценки различных кредиторов рефинансирования кредита за ваш дом. Все, что вам действительно понадобится на данном этапе сбора информации, — это приблизительно оценить размер ежемесячного платежа. Или, скажем, вы оплачиваете счет в ресторане вместе с компанией друзей и не хотите вычислять в нем долю каждого до последней копейки. Методы приближенной оценки, описанные в данной главе, сделают обе эти задачи (и многие другие аналогичные) вполне решаемыми. Сложение, вычитание, деление и умножение — все поддается приближенной оценке. Как обычно, мы будем выполнять расчеты слева направо.

ПРИБЛИЖЕННАЯ ОЦЕНКА В СЛОЖЕНИИ

Приближенная оценка — хороший способ облегчить себе жизнь, когда при решении задачи список чисел для запоминания становится слишком длинным. Трюк сводится к округлению исходных чисел в большую или меньшую сторону.

$$\begin{array}{rcl} 8365 & & 8000 \\ + 5819 & \approx & + 6000 \\ \hline 14\ 186 & & 14\ 000 \end{array}$$

($\approx$ приближенные значения)

Джордж Биддер: инженер-«калькулятор»

У англичан тоже была своя когорта мастеров молниеносных вычислений. Например, устные выступления Джорджа Биддера (1806–1878), уроженца Девоншира, производили на зрителей неизгладимое впечатление. Как и большинство математических талантов, Биддер увлекся арифметическими задачами, еще будучи мальчишкой, и учился счету, сложению, вычитанию, умножению и делению в процессе игры с мраморными шариками. На гастроли со своим отцом юный Биддер отправился в возрасте девяти лет.

Почти ни один из задаваемых вопросов не был для него сложным. «Если Луна находится на расстоянии 123 256 миль от Земли, а звук движется со скоростью четыре мили в минуту, сколько времени понадобится звуку для путешествия с Земли на Луну?» Молодой Биддер, сморщив ненадолго в раздумье лоб, выпалил: «Двадцать один день, девять часов, тридцать четыре минуты». (Сегодня-то мы знаем, что это расстояние чуть ближе к 240 000 милям, а звук не может перемещаться через вакуум.) В десять лет Биддер мысленно извлек квадратный корень из 119 550 66 121, получив ответ 345 761 всего за 30 секунд. В 1818 году Биддер и молниеносный вычислитель из США Зера Колберн сошлись в ментальной счетной дуэли, в которой Биддер, по-видимому, «численно» превзошел Колберна.

На волне славы Джордж Биддер поступил в университет Эдинбурга и впоследствии стал одним из наиболее уважаемых инженеров в Англии. В парламентских дебатах по поводу

железнодорожных конфликтов Биддер часто выступал в качестве свидетеля, от чего его оппонентов бросало в дрожь. Кто-то сказал: «Природа наделила его определенными качествами, которые лишали его соперников справедливого положения». В отличие от Колберна, покинувшего семейство молниеносных вычислителей в возрасте двадцати лет, Биддер сохранял свой статус на протяжении всей жизни. Так, в 1878 году, незадолго до смерти, Биддер рассчитал число световых волн, попадающих в глаз за одну секунду, основываясь на том, что существует 36 918 волн красного света на дюйм и что свет передвигается со скоростью примерно 190 тысяч миль в секунду.

Обратите внимание: мы округлили первое число в большую сторону до ближайшей тысячи, а второе — в меньшую, тоже до ближайшей тысячи. Так как точный ответ равен 14 186, погрешность относительно мала.

Если хотите получить более точный ответ, вместо того чтобы округлять в сторону ближайшей тысячи, округляйте в сторону ближайшей сотни.

$$\begin{array}{r} 8365 \\ + 5819 \\ \hline 14\ 186 \end{array} \approx \begin{array}{r} 8400 \\ + 5800 \\ \hline 14\ 200 \end{array}$$

Ответ лишь на 14 единиц отличается от точного ответа: относительная погрешность меньше чем 0,1%. Вот это я называю отличной приближенной оценкой!

Попробуйте задачу на сложение пятизначных чисел, округляя их до ближайшей сотни.

$$\begin{array}{r} 46\ 187 \\ + 19\ 378 \\ \hline 65\ 565 \end{array} \approx \begin{array}{r} 46\ 200 \\ + 19\ 400 \\ \hline 65\ 600 \end{array}$$

Благодаря округлению до ближайшей сотни погрешность нашего ответа всегда будет меньше 100. Если ответ больше 10 000, приближенная оценка будет в пределах 1% от точного ответа.

Теперь попробуем что-нибудь посложнее.

$$\begin{array}{rcl}
 \begin{array}{r} 23\,859\,379 \\ +\,7\,426\,087 \\ \hline 31\,285\,466 \end{array} & \approx & \begin{array}{r} 24\,000\,000 \\ +\,7\,000\,000 \\ \hline 31\,000\,000 \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{r} 23\,900\,000 \\ +\,7\,400\,000 \\ \hline 31\,300\,000 \end{array}
 \end{array}$$

Если вы округлите до ближайшего миллиона, то получите ответ в 31 миллион, что примерно на 285 000 меньше истинного значения. Неплохо, конечно, но вы можете улучшить ответ, округляя до ближайших ста тысяч, как показано в последнем столбце. В этом случае приближенная оценка снова будет в пределах находиться 1% от точного ответа. Если вы научитесь находить точные ответы для таких задач с меньшими числами, то сможете приблизительно оценить ответ в любой задаче.

Приближенная оценка в супермаркете

Рассмотрим пример из реальной жизни. Придя в магазин, вы когда-нибудь интересовались общей суммой покупки до того, как кассир пробил чек? Для оценки общей суммы я использую технику округления цен до ближайших 50 центов. Например, пока кассир складывает числа, показанные слева, я мысленно суммирую числа, показанные справа.

1,39	1,50
0,87	1,00
2,46	2,50
0,61	0,50
3,29	3,50

2,99	3,00
0,20	0,00
1,17	1,00
0,65	0,50
2,93	3,00
3,19	3,00
19,75	19,50

Моя итоговая цена, как правило, колеблется в пределах одного доллара от точного значения.

ПРИБЛИЖЕННАЯ ОЦЕНКА ПРИ ВЫЧИТАНИИ

Способ получения приближенной оценки при вычитании такой же, как и при сложении: округляем до ближайшей тысячи или сотни (последнее предпочтительнее).

$$\begin{array}{r}
 8367 \\
 - 5819 \\
 \hline
 2548
 \end{array}
 \approx
 \begin{array}{r}
 8000 \\
 - 6000 \\
 \hline
 2000
 \end{array}
 \text{ или }
 \begin{array}{r}
 8400 \\
 - 5800 \\
 \hline
 2600
 \end{array}$$

Как видите, округление до ближайшей тысячи делает ответ не совсем корректным. Благодаря округлению второй цифры (до сотен в нашем примере) погрешность обычно колеблется в пределах 3%. В данной задаче приближенное решение отклоняется от истинного ответа лишь на 52, поэтому относительная погрешность составляет 2%. Если округлять третью цифру, то относительная погрешность обычно будет меньше 1%. Например:

$$\begin{array}{r}
 439\,412 \\
 - 24\,936 \\
 \hline
 414\,476
 \end{array}
 \approx
 \begin{array}{r}
 440\,000 \\
 - 20\,000 \\
 \hline
 420\,000
 \end{array}
 \text{ или }
 \begin{array}{r}
 439\,000 \\
 - 25\,000 \\
 \hline
 414\,000
 \end{array}$$

Путем округления третьей цифры вместо второй можно значительно улучшить точность оценки.

ПРИБЛИЖЕННАЯ ОЦЕНКА ПРИ ДЕЛЕНИИ

Первый и самый важный шаг расчета приближенного ответа для задачи на деление — это определить величину частного.

$$\begin{array}{r} 9\ 187,5 \\ 6 \overline{) 57\ 867,0} \end{array} \approx \begin{array}{r} 9 \\ 6 \overline{) 58\ 000} \\ \underline{54} \\ 4 \end{array}$$

Ответ ≈ 9 и $2/3$ тысячи, или 9 667

Следующий шаг — округление большего из чисел до ближайшей тысячи, то есть замена 57 867 на 58 000. Деление 58 на 6 дает 9 с остатком. Но самый важный элемент решения данной задачи — это поиск местоположения цифры 9.

Например, в результате умножения 6×90 получается 540, тогда как $6 \times 900 = 5400$. Оба варианта дают слишком малые числа. Но $6 \times 9000 = 54\ 000$, что достаточно близко к делимому. Это говорит о том, что ответ будет 9 000 плюс «что-то». Можно прикинуть это «что-то», сначала отняв $58 - 54 = 4$. В этом случае вам нужно снести 0 и разделить 40 на 6 и т. д. Но если вы внимательны, то поймете, что деление 4 на 6 дает $4/6 = 2/3$, что приблизительно равно 0,667. Поскольку ваш ответ «9 000 плюс что-то», теперь можно сказать «9 667». В действительности точный ответ будет 9 645. Чертовски близко!

Деление чисел на таком уровне кажется довольно простым. Но как быть с большими задачами на деление? Скажем, мы хотим посчитать, забавы ради, сколько зарабатывает

профессиональный спортсмен в день, если его зарплата за год составляет 5 000 000 долларов.

$$365 \text{ дней} \overline{) 5\,000\,000}$$

Первым делом нужно оценить примерный ответ. Этот игрок зарабатывает каждый день тысячи? Ну, если $365 \times 1000 = 365\,000$, то получается слишком мало.

Или десятки тысяч? Ну, $365 \times 10\,000 = 3\,650\,000$. Это уже больше похоже на правду. Для получения приближенной оценки разделите первые две цифры (50 на 36), и у вас получится 1 и $14/36$, или 1 и $7/18$. Так как 70 — это примерно 4 раза по 18, выходит, что спортсмен зарабатывает около 14 000 долларов в день. Точный ответ — 13 698,63 доллара. Неплохая точность. (И неплохая зарплата!)

А вот астрономический расчет. Сколько секунд необходимо свету, чтобы долететь от Солнца до Земли? Свет перемещается со скоростью 186 282 мили в секунду, а Солнце находится на расстоянии (в среднем) 92 960 130 миль от Земли. Я сомневаюсь, что вы очень хотите решить эту задачку вручную. К счастью, приближенную оценку ответа достаточно легко получить. Сначала упростим задачу.

$$186\,282 \overline{) 92\,690\,130} \approx 186 \overline{) 93\,000}$$

Теперь разделим 930 на 186, что даст нам 5 без остатка. Потом добавим два 0, которые забрали у 93 000, и получим 500 секунд. Точный ответ — 499,02 секунды. Этот пример показывает, что приближенная оценка может заслуживать большого уважения.

ПРИБЛИЖЕННАЯ ОЦЕНКА ПРИ УМНОЖЕНИИ

Для приблизительной оценки ответов в задачах на умножение используются примерно те же приемы, что и описанные выше. Например:

$$\begin{array}{r} 88 \\ \times 54 \\ \hline 4752 \end{array} \approx \begin{array}{r} 90 \\ \times 50 \\ \hline 4500 \end{array}$$

Округление до ближайшего кратного 10 значительно упрощает задачу, но ответ все еще на 252 меньше истинного (погрешность около 5%). Можно улучшить ситуацию, округлив оба числа на одинаковую величину в разных направлениях. Так, если округлить 88 до 90, то 54 следует уменьшить на 2.

$$\begin{array}{r} 88 \\ \times 54 \\ \hline 4752 \end{array} \approx \begin{array}{r} 90 \\ \times 52 \\ \hline 4680 \end{array}$$

Итак, вместо задачи на умножение типа «2 на 2» теперь мы имеем дело с умножением типа «2 на 1», что не должно быть для вас сложным. В данном случае приближенная оценка отклоняется от истинного значения всего на 1,5%.

Если приближенный ответ для задачи на умножение получен путем округления большего числа в большую сторону и меньшего в меньшую, то он будет несколько занижен. Если округлить большее число в меньшую сторону, а меньшее в большую (тогда, возможно, числа станут достаточно близкими), приближенный ответ получится слегка завышенным. Чем больше величина, на которую вы округляете в ту или иную сторону, тем большее отклонение будет иметь приближенная оценка. Например:

$$\begin{array}{r} 73 \\ \times 65 \\ \hline 4745 \end{array} \approx \begin{array}{r} 70 \\ \times 68 \\ \hline 4760 \end{array}$$

Поскольку после округления числа стали близки друг к другу, приближенная оценка получилась слегка завышенной.

$$\begin{array}{r} 67 \\ \times 67 \\ \hline 4489 \end{array} \approx \begin{array}{r} 70 \\ \times 64 \\ \hline 4480 \end{array}$$

Так как перемножаемые числа не близки друг к другу, приближенная оценка ответа занижена, но ненамного. Нетрудно заметить, что метод приближенной оценки весьма эффективно работает для примеров на умножение. Кроме того, обратите внимание, что данный пример — это задача на возведение в квадрат 67^2 , и наше приближение — всего лишь первый шаг в технике возведения в квадрат. Рассмотрим еще один пример.

$$\begin{array}{r} 83 \\ \times 52 \\ \hline 4316 \end{array} \approx \begin{array}{r} 85 \\ \times 50 \\ \hline 4250 \end{array}$$

Заметим, что приближение будет наиболее точным, когда исходные числа близки друг к другу. Попробуйте оценить ответ для задачи типа «3 на 2».

$$\begin{array}{r} 728 \\ \times 63 \\ \hline 45\ 864 \end{array} \approx \begin{array}{r} 731 \\ \times 60 \\ \hline 43\ 860 \end{array}$$

Путем округления 63 до 60 и 728 до 731 создается задача на умножение типа «3 на 1», что отдаляет приближенную оценку на величину 2004 от точного ответа. Здесь погрешность составляет 4,3%.

Попробуйте дать приблизительную оценку следующей задаче «3 на 3».

$$\begin{array}{r} 368 \\ \times 492 \\ \hline 180\ 564 \end{array} \approx \begin{array}{r} 359 \\ \times 500 \\ \hline 179\ 500 \end{array}$$

Как видите, хотя мы округлили оба числа на 8 в разные стороны, приближенный ответ отклоняется более чем на 1000 от точного значения. Так происходит потому, что перемножаемые числа в данной задаче большие и число, на которое они округляются, тоже большое. Поэтому получившаяся в результате оценка будет отклоняться на бóльшую величину. Но относительная погрешность по-прежнему меньше 1%.

Насколько далеко можно зайти, используя систему приближенной оценки для задач на умножение? На столько, на сколько пожелаете. Просто нужно знать названия больших чисел. Тысяча тысяч — это миллион, тысяча миллионов — миллиард. Зная это, попробуйте решить задачу со следующими числами.

$$\begin{array}{r} 28\ 657\ 497 \\ \times 13\ 864 \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{r} 29\ 000\ 000 \\ \times 14\ 000 \\ \hline \end{array}$$

Как и ранее, она сводится к округлению чисел, для того чтобы они стали простыми, такими как 29 000 000 и 14 000. Отбросив все нули, получим обычную задачу «2 на 2»: $29 \times 14 = 406$ ($29 \times 14 = 29 \times 7 \times 2 = 203 \times 2 = 406$). Следовательно, ответ равен приблизительно 406 миллиардам, так как тысяча миллионов — это миллиард.

ОЦЕНКА КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ: ДЕЛЕНИЕ И УСРЕДНЕНИЕ

Корень квадратный из n (обозначается $\sqrt{n}$) — это число, которое при умножении само на себя дает n . Например, квадратный корень из 9 равен 3, поскольку $3 \times 3 = 9$. Квадратный корень используется при решении многих научных и инженерных задач и почти всегда рассчитывается на калькуляторе. Следующий метод обеспечивает точную оценку ответа.

При оценке квадратного корня основная цель — найти число, которое при умножении само на себя приближается к исходному. Так как квадратный корень из большинства чисел не целое число, ваша оценка, вероятно, тоже будет содержать дробную часть.

Начнем с приближенной оценки квадратного корня из 19. Первое действие — выяснить, какое число при умножении само на себя будет максимально приближаться к 19. Берем два возможных варианта: $4 \times 4 = 16$ и $5 \times 5 = 25$. Так как 25 слишком много, ответ должен быть 4 плюс «что-то». Следующий шаг — деление 19 на 4, дающее 4,75. Поскольку 4×4 меньше, чем $4 \times 4,75 = 19$ (что, в свою очередь, меньше произведения $4,75 \times 4,75$), получается, что 19 (или $4 \times 4,75$) находится между 4^2 и $4,75^2$. Следовательно, квадратный корень из 19 лежит где-то между 4 и 4,75.

Я бы предположил, что он будет посередине, на отметке 4,375. В действительности это 4,359, так что наша оценка довольно близка к истинному значению. Проиллюстрируем данную процедуру следующим образом.

Деление:

$$\begin{array}{r} 4,75 \\ 4 \overline{)19,0} \\ \underline{16} \\ 30 \\ \underline{28} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 0 \end{array}$$

Среднее:

$$\frac{4 + 4,75}{2} = 4,375$$

На самом деле данный ответ можно получить другим, более простым способом. Мы знаем, что 4 в квадрате равно 16, что меньше 19 на 3 единицы. Чтобы уточнить нашу оценку, *прибавим к ней погрешность, деленную на удвоенное предположение*. То есть к 4 прибавим 3, деленное на 8, чтобы получить $4\frac{3}{8} = 4,375$. Заметим, что этот метод всегда будет давать ответ немного больше точного.

Теперь попробуйте решить более сложный пример. Чему равен квадратный корень из 87?

Деление:

$$\begin{array}{r} 9,66 \\ 9 \overline{)87,0} \end{array}$$

Среднее:

$$\frac{9 + 9,66}{2} = 9,33$$

Сначала определим приблизительный итог исходя из того, что $9 \times 9 = 81$ и $10 \times 10 = 100$. Это означает, что ответом будет 9 с хвостиком. Поделив 87 на 9 (до десятых), получим 9,66. Чтобы улучшить приближенную оценку, возьмем среднее между 9 и 9,66, которое равно 9,33 — точный квадратный корень из 87, округленный до десятых! Другим способом приближенная оценка равна $9 + (\text{погрешность})/18 = 9 + 6/18 = 9,33$.

Использование этой техники делает приближенную оценку квадратного корня довольно-таки легкой для двузначных чисел. Но как насчет трехзначных? Здесь ситуация ненамного сложнее. Могу сразу сообщить, что все трехзначные и четырехзначные числа имеют двузначные квадратные корни (с точностью до десятых). И процедура их вычисления такая же, независимо от того, насколько велико число. Например, чтобы извлечь квадратный корень из 679, сначала нужно оценить ответ. Поскольку 20 — это квадратный корень из 400, а 30 — квадратный корень из 900, квадратный корень из 679 должен лежать между 20 и 30.

Если разделить 679 на 20, выйдет примерно 34. Усреднение 20 и 34 дает приблизительную оценку 27, но есть вариант получше. Если вы знаете, что 25 в квадрате 625, то погрешность $679 - 625 = 54$. Разделив это число на 50, получим $54/50 = 1,08/100 = 1,08$. Следовательно, улучшенная оценка составит $25 + 1,08 = 26,08$. (Для еще более точной оценки: если вы знаете, что 26 в квадрате 676, погрешность будет 3, так что прибавьте $3/52$ (приблизительно равно 0,06) и получите 26,06.) С точностью до сотых ответ будет равен 26,06.

Чтобы приближенно оценить квадратный корень из четырехзначного числа, взгляните на его первые две цифры. Например, чтобы найти квадратный корень из 7369, оцените квадратный корень из 73. Так как $8 \times 8 = 64$, а $9 \times 9 = 81$, то 8 должна быть первой цифрой квадратного корня. Значит, равняемся на «80 плюс...». Теперь приступим к обычному методу решения. Деление 7369 на 80 дает 92 плюс дробь, так что хорошим приближением будет 86^* . Если возвести в квадрат 86, что

* Здесь надо пояснить, откуда взялась цифра 6. Это половина разности $92 - 80 = 12$. *Прим. ред.*

равняется 7396, то это число на 27 больше 7369. Теперь делим разность 27 на удвоенное число 86, получаем $27/172$, что приближенно равно 0,16. Отсюда следует, что улучшенная оценка $86 - 0,16 = 85,84$.

Приближенная оценка квадратного корня из шестизначного числа вроде 593 472 может показаться невозможной для непосвященного. Но вы даже не успеете устать. Так как $700^2 = 490\,000$ и $800^2 = 640\,000$, квадратный корень из 593 472 должен находиться между 700 и 800. На самом деле все пяти- и шестизначные числа имеют трехзначные квадратные корни. На практике вам нужно извлечь квадратный корень только из первых двух цифр шестизначного числа (или из первой цифры пятизначного). Выяснив, что квадратный корень из 59 лежит между 7 и 8, вы определите, что ответ равен «700 плюс...».

Теперь перейдем к привычному способу представления.

Деление:

$$\begin{array}{r} 847 \\ 700 \overline{) 593\,472} \end{array} \approx \begin{array}{r} 847 \\ 7 \overline{) 5934} \end{array}$$

Среднее:

$$\frac{700 + 847}{2} = 773,5$$

Квадратный корень из 593 472 равен 770,37, так что вы довольно близки к правильному решению. Но можно приблизиться еще больше. Как это сделать, покажет следующий прием.

Обратите внимание, что первые две цифры 59 ближе к 64 (8×8), чем к 49 (7×7). Благодаря этому можно начать оценку с цифры 8 и продолжить, отталкиваясь от нее.

Деление:

$$\begin{array}{r} 741 \\ 800 \overline{) 593\,472} \end{array} \approx \begin{array}{r} 741 \\ 8 \overline{) 5934} \end{array}$$

Среднее:

$$\frac{800 + 741}{2} = 770,5$$

Просто ради забавы сделаем что-нибудь с настоящей громадиной: извлечем квадратный корень из 28 674 529. Это не так трудно, как может показаться. Первый шаг — округление до наибольшего ближайшего числа. В данном случае надо просто найти квадратный корень из 29.

Деление:

$$\begin{array}{r} 5,8 \\ 5 \overline{)29,0} \\ \underline{25} \\ 40 \end{array}$$

Среднее:

$$\frac{5 + 5,8}{2} = 5,4$$

Все семизначные и восьмизначные числа имеют четырехзначные квадратные корни. Таким образом, 5,4 становится 5400 — это оценка. А более точный ответ — 5354,8. Неплохо!

На этом мы завершим главу о приближенных оценках в математике. После выполнения упражнений, представленных в ее конце, переходите к следующей главе о математике с ручкой и бумагой: вы научитесь записывать ответы в задачах быстрее, чем делали это раньше.

Математическая дуэль Эвариста Галуа

Трагическая история французского математика Эвариста Галуа (1811–1832), убитого в возрасте двадцати лет на дуэли из-за «печально известной кокетки», стала легендарной в истории математики. Не по годам развитый блестящий студент, Галуа заложил основу для раздела математики, известного как теория групп. Легенда гласит, что он изложил на бумаге эту теорию в ночь перед дуэлью, предвидя кончину и желая оставить свое наследие математическому сообществу. За несколько часов до смерти 30 мая 1832 года Галуа написал Огюсту

Шевалье: «Я сделал несколько новых открытий в анализе. Первое касается теории уравнений, остальные — интегральных функций». После этого он попросил друга: «Обратитесь с публичной просьбой к Якоби или Гауссу, чтобы высказали свое мнение не по поводу истинности, а насчет важности этих теорем. Я надеюсь, что кому-нибудь покажется интересным и полезным разобраться в этом беспорядке».

Романтическая легенда и историческая правда, однако, не всегда совпадают. То, что Галуа написал в ночь перед смертью, представляло собой исправления и редакторские правки в документах, принятых Академией наук задолго до этого. Более того, первоначальные документы Галуа были представлены за три года до дуэли, когда ему исполнилось всего семнадцать! Именно после этого он оказался втянутым в политический конфликт, был арестован, провел какое-то время в темнице и в конечном счете ввязался в ссору из-за женщины и был убит.

Осознавая свою преждевременную зрелость, Галуа отмечал: «Я проводил исследования, которые остановят других ученых». На протяжении более чем ста лет так и происходило.

СОВЕТЫ ПО ПОВОДУ СОВЕТОВ

В главе 0 мы рассказывали, как в большинстве случаев проще вычислить сумму чаевых. Например, чтобы подсчитать 10% чаевых, надо всего-навсего умножить счет на 0,1 (или поделить его на 10). Например, если счет равен 42 долларам, то 10% чаевых составят 4,20 доллара. Для вычисления 20% чаевых надо просто умножить счет на 0,2 или удвоить величину 10% чаевых. Так, 20% чаевых по счету в 42 доллара будут равны 8,40 доллара.

Для вычисления 15% чаевых имеется несколько приемов. Если вы освоили техники из главы 2 и подружились

с умножением, то вы просто можете умножить сумму счета на 15 и затем разделить полученный результат на 100. Например, при счете 42 доллара: $42 \times 15 = 42 \times 5 \times 3 = 210 \times 3 = 630$, что легко делится на 100 и дает чаевые в размере 6,30 доллара. Другой метод: взять среднее от 10% и 20% чаевых. В соответствии с нашими ранними вычислениями это выглядит так:

$$\frac{\$4,20 + \$8,40}{2} = \frac{\$12,60}{2} = \$6,30.$$

Наверное, самый популярный способ подсчета 15% чаевых состоит в том, чтобы взять 10% от общего счета, разделить их на два (что соответствует 5%), а затем сложить полученные значения. Например, при счете 42 доллара надо сложить 4,20 доллара и половину этой величины, то есть 2,10 доллара:

$$4,20 + 2,10 = 6,30.$$

Применим все три метода, чтобы вычислить 15% от счета в 67 долларов. Прямой метод: $67 \times 3 \times 5 = 201 \times 5 = 1005$, что при делении на 100 дает 10,05 доллара. Метод усреднения: усредняем 10% чаевых в виде 6,70 доллара и 20% в виде 13,40 доллара и получаем:

$$\frac{\$6,70 + \$13,40}{2} = \frac{\$20,10}{2} = \$10,05.$$

Используя последний метод, прибавляем 6,70 доллара к половине данной величины, равной 3,35 доллара, чтобы получить

$$6,70 + 3,35 = 10,05.$$

Наконец, для подсчета 25% чаевых мы предлагаем два метода. Либо умножьте сумму на 25, а затем разделите на 100, либо разделите сумму на 4 (возможно, путем двойного деления

числа на два). Например, при счете в 42 доллара можно вычислить $42 \times 25 = 42 \times 5 \times 5 = 210 \times 5 = 1050$, что при делении на 100 дает чаевые в размере 10,50 доллара. Или можно разделить исходную величину на 4, или сократить ее наполовину дважды: половина 42 долларов — 21 доллар, и еще пополам — 10,50 доллара. При счете в 67 долларов я бы, вероятно, разделил прямо на 4: так как $67 \div 4 = 16 \frac{3}{4}$, получаем 25% чаевых в размере 16,75 доллара.

НЕОБРЕМЕНТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ НАЛОГОВ

В этом разделе я продемонстрирую метод устной оценки величины налога с продаж. Для некоторых налоговых ставок, таких как 5%, или 6%, или 10%, требуются прямые вычисления. Например, чтобы посчитать налог 6%, нужно просто умножить цену на 6 и разделить на 100. Допустим, цена составляет 58 долларов, тогда $58 \times 6 = 348$, что при делении на 100 дает точный размер налога с продаж 3,48 доллара. (При этом общая сумма будет равна 61,48 доллара.)

Но как посчитать налог в 6,5% от 58 долларов? Я покажу вам несколько способов, как это сделать, а вы выберете тот, который покажется вам наиболее приемлемым. Наверное, самый легкий способ прибавить полпроцента к любой сумме в долларах состоит в ее делении пополам и последующем переводе в центы. В примере с 58 долларами их половина составляет 29. Поэтому просто прибавьте 29 центов к 6% налога (уже посчитанным 3,48 доллара) и получите налог в размере 3,77 доллара.

Другой метод расчета ответа (или хорошей устной оценки) состоит в следующем: берем налог в 6%, делим его на 12, затем складываем эти два числа. Например, 6% от 58 долларов равно

3,48 доллара, а 348 при делении на 12 даст почти 30, поэтому прибавляем 30 центов для получения оценки в 3,78 доллара, что отличается от точного значения всего на один цент. Если вы предпочитаете делить на 10 вместо 12, попробуйте. Вы вычислите 6,6% вместо 6,5% (так как $6/10 = 0,6$), но это все еще будет хорошей оценкой. Здесь вы возьмете 3,48 доллара и прибавите 34 цента для получения 3,82 доллара.

Попробуем другие процентные ставки налога с продаж. Как посчитать 7,25% от 124 долларов? Вначале вычислите 7% от 124. С помощью методов, показанных в главе 2, вы найдете, что $124 \times 7 = 868$. Значит, 7% от 124 будет 8,68 доллара. Чтобы прибавить четверть процента, можно разделить исходную сумму в долларах на 4 (или сократить ее наполовину дважды) и перевести доллары в центы. Здесь $124 \div 4 = 31$, поэтому прибавьте 31 цент к 8,68 доллара и получите точный размер налога — 8,99 доллара.

Еще один способ прийти к 31 центу: возьмите налог с продаж 7% (8,68 доллара) и разделите его на 28. Причина, по которой это работает, заключается в том, что $7/28 = 1/4$. Для быстрой устной оценки я бы, вероятно, разделил 8,68 доллара на 30, чтобы получить около 29 центов. Тогда приблизительный налог с продаж будет равен 8,97 доллара.

Деля на 30, в действительности вы вычисляете налог в размере 7 и $7/30\%$, что приблизительно составляет 7,23% вместо 7,25%.

Как бы вы посчитали налог с продаж в размере 7,75%? Вероятно, для большинства приближений достаточно сказать, что это немного меньше 8%. Здесь вы найдете несколько предложений для получения лучших приближений. Как вы убедились в прошлом примере, если вы с легкостью можете

вычислить корректировку в 0,25%, то, просто утроив это число, можно получить корректировку в 0,75%. Например, чтобы найти 7,75% от 124 долларов, вы сначала рассчитываете 7%, что составит 8,68 доллара. Если вы вычислите, что $0,25\% = 31$ цент, то 0,75% будет равно 93 центам; для получения общего итога сложим $8,68 + 0,93 = 9,61$ доллара. Для быстрой оценки можно использовать тот факт, что $7/9 = 0,777$ приблизительно равно 0,75. Поэтому можно разделить 7% налога на 9, чтобы получить оценку, несколько превышающую 0,75%. В данном примере, если при делении 8,68 доллара на 9 получим около 96 центов, то просто складываем $8,68 + 0,96 = 9,64$ доллара, что почти совпадает с точным значением, хоть и с незначительным превышением.

Такую процедуру приближения можно использовать для любых налогов с продаж. Вот общая формула: чтобы оценить налог с продаж в размере $A, B\%$ долларов, сначала умножьте цену на $A\%$. Затем разделите эту величину на число D , где A/D равняется $0, B$. (Таким образом, $D = A/B$.) Сумма этих чисел составит общий размер налога. (Или его оценку, если вы округлили D до некоторого числа для упрощения вычислений.) Например, с налогом 7,75% магический делитель D равен $7 \times 4/3 = 28/3 = 9 \frac{1}{3}$, что мы округлим до 9 в меньшую сторону. Для налога с продаж в размере 6 и $3/8\%$ сначала посчитайте налог в размере 6%, затем разделите полученное число на 16, так как $6/16 = 3/8$. (Чтобы разделить число на 16, разделите его дважды на 4, или сначала на 8, а затем на 2.) Попробуйте придумать метод для расчета налога с продаж в вашем регионе. Вы поймете, что эта задача не столь сложна, как кажется!

НЕСКОЛЬКО ИНТЕРЕСНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

В этом разделе мы вкратце рассмотрим несколько практических задач, связанных с процентами, временем увеличения суммы ваших сбережений и сроками погашения кредита.

Начнем со знаменитого *Правила 70*, которое гласит: **чтобы найти число лет, необходимых для удвоения ваших денег, разделите число 70 на годовую процентную ставку**. Предположим, вам предложили инвестиционную возможность, которая сулит выплаты в размере 5% годовых. Так как $70 \div 5 = 14$, потребуется около 14 лет, чтобы ваши деньги удвоились. Например, если вы разместили 1000 долларов на депозите под такую процентную ставку, то после 14 лет на нем будет $1000 \times (1,05)^{14} = 1979,93$ доллара. С процентной ставкой 7%, согласно правилу 70, вам понадобится около 10 лет для удвоения денег. В самом деле, если вы вложите 1000 долларов по этой годовой процентной ставке, то через 10 лет получите $1000 \times (1,07)^{10} = 1967,15$ доллара. Что касается ставки в 2%, то для удвоения сбережений в данном случае понадобится около 35 лет!

$$1000 \times (1,02)^{35} = 1999,88$$

Еще одно похожее правило называется *Правило 110*; оно определяет, как долго ваши деньги будут утраиваться. Например, при ставке в 5%, так как $110 \div 5 = 22$, потребуется около 22 лет для того, чтобы 1000 долларов превратилась в 3000 долларов. Это подтверждается вычислением $1000 \times (1,05)^{22} = 2\,925,26$ доллара. Правило 70 и Правило 110 основаны на свойствах числа $e = 2,71828...$ и «натуральных логарифмах», но, к счастью, нам нет нужды использовать высшую математику, чтобы применять их.

Предположим, вы заняли деньги и рано или поздно должны их вернуть. Например, вы взяли кредит 360 000 долларов с годовой ставкой 6% (то есть 0,5% ставки каждый месяц) на 30 лет. Сколько примерно придется выплачивать ежемесячно? Прежде всего, каждый месяц вам понадобится 1800 долларов (360 000 долларов умножить на 0,5% = 1800 долларов) только для того, чтобы покрыть проценты. (Хотя на самом деле ваши долги по процентам будут распределяться равномерно.) Так как вы совершите $30 \times 12 = 360$ месячных выплат, то выплата дополнительной тысячи долларов каждый месяц покроет остаток вашего займа. Итак, верхняя граница ежемесячных выплат будет равна 1800 долларов + 1000 долларов = 2800 долларов. К счастью, вам не придется платить столько сверху. Вот мое правило большого пальца для оценки месячных платежей.

Обозначим буквой i вашу *месячную* процентную ставку. (Годовая ставка, деленная на 12.) Тогда для выплаты кредита в размере P долларов за N месяцев месячная выплата M будет приблизительно равна:

$$M = \frac{Pi(1+i)^N}{(1+i)^N - 1}.$$

В нашем последнем примере $P = 360\,000$ долларов и $i = 0,005$. Формула показывает, что месячная выплата должна составлять:

$$M = \frac{\$360\,000 \times 0,005 \times (1,005)^{360}}{(1,005)^{360} - 1}.$$

Обратите внимание, что первые два числа в числителе при умножении дают 1800 долларов. С помощью калькулятора (для разнообразия) подсчитаем $(1,005)^{360} = 6,02$, тогда месячная

выплата должна равняться $1800 \times (6,02)/5,02$, что примерно составляет 2160 долларов в месяц.

Еще один пример. Предположим, вы взяли машину в кредит и после первоначального взноса должны выплатить 18 000 долларов за 5 лет с годовой ставкой 4%. Без процентов вы должны были бы платить 300 долларов ($18\,000 \div 60$) в месяц. Так как ставка процента за первый месяц будет составлять $18\,000 \times 0,04/12 = 720/12 = 60$ долларов, отсюда следует, что платить в месяц нужно не больше $300 + 60 = 360$ долларов. Здесь месячный процент $i = 0,04/12 = 0,00333$. Применим нашу формулу и получим:

$$M = \frac{\$18\,000 \times 0,00333 \times (1,00333)^{60}}{(1,00333)^{60} - 1}.$$

Так как $(1,00333)^{60} = 1,22$, размер месячной выплаты составит $60 \times 1,22/0,22 = 333$ доллара.

Подведем итоги этой главы упражнениями, которые, надеюсь, поддержат ваш интерес к представленным здесь темам.

УПРАЖНЕНИЯ НА ПРИБЛИЖЕННУЮ ОЦЕНКУ

Решите следующие упражнения на вычисление приближенной оценки; затем сверьте свои ответы и ход вычислений с ответами в конце книги.

УПРАЖНЕНИЕ: ПРИБЛИЖЕННАЯ ОЦЕНКА ПРИ СЛОЖЕНИИ

Округлите эти числа в ту или иную сторону и посмотрите, насколько вы близки к точному ответу.

- | | | | | | | | |
|----|---------------|----|-----------------|----|-----------------|----|--------------------|
| 1. | 1479 | 2. | 57 293 | 3. | 312 025 | 4. | 8 971 011 |
| | + 1105 | | + 37 421 | | + 79 419 | | + 4 016 367 |

Устно оцените сумму для следующего столбика чисел, округляя их до ближайших 50 центов.

2,67
1,95
7,25
9,21
0,49
11,21
0,12
6,14
8,31

УПРАЖНЕНИЕ:
ПРИБЛИЖЕННАЯ ОЦЕНКА ПРИ ВЫЧИТАНИИ

Оцените ответы следующих задач на вычитание, используя округление до второй или третьей цифры.

1. **4926** 2. **67 221** 3. **526 978** 4. **8 349 241**
 - 1659 **- 9 874** **- 42 009** **- 6 103 839**

УПРАЖНЕНИЕ: ПРИБЛИЖЕННАЯ ОЦЕНКА
ПРИ ДЕЛЕНИИ

Скорректируйте числа таким образом, чтобы у вас появилась возможность дать приближенную оценку результатам деления.

1. **7)4379** 2. **5)23 958** 3. **13)549 213**
4. **289)5 102 357** 5. **203 637)8 329 483**

УПРАЖНЕНИЕ:
ПРИБЛИЖЕННАЯ ОЦЕНКА ПРИ УМНОЖЕНИИ

Скорректируйте числа таким образом, чтобы у вас появилась возможность дать приближенную оценку результатам умножения.

- | | | | | |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 1. 98 | 2. 76 | 3. 88 | 4. 539 | 5. 312 |
| $\times \underline{27}$ | $\times \underline{42}$ | $\times \underline{88}$ | $\times \underline{17}$ | $\times \underline{98}$ |
-
- | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| 6. 639 | 7. 428 | 8. 51 276 | 9. 104 972 | 10. 5 462 741 |
| $\times \underline{107}$ | $\times \underline{313}$ | $\times \underline{489}$ | $\times \underline{11\ 201}$ | $\times \underline{203\ 413}$ |

УПРАЖНЕНИЕ:
ПРИБЛИЖЕННАЯ ОЦЕНКА КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ

Оцените квадратные корни следующих чисел, используя методы деления и усреднения.

1. $\sqrt{17}$ 2. $\sqrt{35}$ 3. $\sqrt{163}$ 4. $\sqrt{4279}$ 5. $\sqrt{8039}$

УПРАЖНЕНИЕ: КАЖДОДНЕВНАЯ МАТЕМАТИКА

1. Вычислите 15% от 88 долларов.
2. Вычислите 15% от 53 долларов.
3. Вычислите 25% от 74 долларов.
4. Сколько времени потребуется для удвоения денег при годовой ставке в 10%?
5. Сколько времени потребуется для удвоения суммы при годовой ставке в 6%?
6. Сколько времени понадобится для утроения суммы при годовой ставке в 7%?

Искусство приближенной оценки

7. Сколько времени потребуется для увеличения средств в 4 раза при годовой ставке в 7%?
8. Оцените размер месячной выплаты за кредит в 100 000 долларов при процентной ставке 9% в течение 10 лет?
9. Оцените размер месячной выплаты за кредит в 30 000 долларов при процентной ставке 5% в течение 4 лет?

Глава 6

Математика с ручкой и бумагой

Во введении я упоминал о выгодах, которые вы получите от умения считать в уме. В этой главе я расскажу о том, как ускорить вычисления на бумаге. С тех пор как появились калькуляторы, они успели взять на себя бóльшую часть выполнения арифметических действий во многих ситуациях. Поэтому в этой главе я предпочел сосредоточиться на забытом искусстве вычисления квадратных корней и методе «крест-накрест» для перемножения больших чисел. Надо сказать, что в основном для разминки мозга, а не для практического применения, я сначала затрону сложение и вычитание и покажу вам парочку любопытных приемов для ускорения этого процесса. Вообще-то эти техники можно успешно использовать в повседневной жизни, в чем вы вскоре убедитесь.

Если вы готовы встретиться с более трудными задачами на умножение, можете пропустить эту главу и сразу перейти к главе 7, критически важной для освоения навыков работы с большими задачами из главы 8. Если же вам нужен перерыв и вы просто хотите немного развлечься, рекомендую прочитать эту главу — вы получите удовольствие от того, что вновь обратились к ручке и бумаге.

СТОЛБИКИ ЧИСЕЛ

Сложение длинных столбиков чисел — как раз та самая задача, с которой вы можете столкнуться по работе или во время подсчета собственных доходов и расходов. Суммируйте числа из следующего столбика привычным способом, а затем посмотрите, как это сделал я.

$$\begin{array}{r}
 4328 \\
 884 \\
 620 \\
 1477 \\
 617 \\
 + 725 \\
 \hline
 8651
 \end{array}$$

Когда у меня есть ручка и бумага, я складываю числа сверху вниз и справа налево, как учили в школе. Практикуясь, вы сможете решать эти задачи в уме так же быстро (или быстрее), как и на калькуляторе. Когда я суммирую цифры, единственные числа, которые я «слышу», — это частичные суммы. Я всегда сначала суммирую крайнюю справа колонку: $8 + 4 + 0 + 7 + 7 + 5$ и слышу: 8... 12... 19... 26... 31. Затем я записываю 1, держа в уме 3. Следующая колонка звучит так: 3... 5... 13... 15... 22... 23... 25. Получив итоговый ответ, я записываю его, а затем проверяю свои вычисления путем сложения чисел снизу вверх и обычно получаю такой же результат.

Например, суммирую цифры первой колонки снизу вверх: $5 + 7 + 7 + 0 + 4 + 8$ (у меня в голове при этом звучит 5... 12... 19... 23... 31), затем мысленно переношу цифру 3 и складываю $3 + 2 + 1 + 7 + 2 + 8 + 2$ и т. д. Благодаря сложению чисел в другом порядке вы снижаете вероятность совершить одинаковую

ошибку дважды. Конечно, если ответы отличаются, то хотя бы одно из вычислений было неправильным.

МОДУЛЬНЫЕ СУММЫ

Когда я не уверен в ответе, я проверяю решение, используя метод, который называю «модульные суммы» (потому что он основан на элегантной математике из раздела модульной арифметики^{*}). Он также известен под названиями «цифровые корни» и «метод сравнений по модулю 9». Признаю, что этот метод не слишком практичен, зато он легок в применении.

В методе модульных сумм вы складываете цифры каждого из чисел до тех пор, пока не останется одна-единственная цифра. Например, чтобы вычислить модульную сумму числа 4328, сложите $4 + 3 + 2 + 8 = 17$. Затем суммируйте цифры числа 17, получится $1 + 7 = 8$. Следовательно, модульная сумма числа 4328 равна 8. Для предыдущей задачи модульная сумма каждого из чисел вычисляется таким образом:

4328	→ 17	→ 8
884	→ 20	→ 2
620	→ 8	→ 8
1477	→ 19 → 10	→ 1
617	→ 14	→ 5
+ 725	→ 14	→ + 5
8651		29
↓		↓
20		11
↓		↓
2		2

^{*} Точнее, из теории чисел, где используются так называемые сравнения по модулю. *Прим. ред.*

Как показано выше, следующий шаг — сложение всех модульных сумм $8 + 2 + 8 + 1 + 5 + 5$. Получается 29, что дает модульную сумму 11, которая, в свою очередь, дает модульную сумму 2. Обратите внимание, что модульная сумма числа 8651 тоже равняется 2. Это не совпадение! Если вы посчитали ответ и модульную сумму правильно, то ваша итоговая модульная сумма должна быть такой же. Если они различаются, то вы определенно допустили где-то ошибку: существует вероятность (около 1 к 9), что совпадение модульных сумм будет случайным. При наличии ошибки этот метод позволит обнаружить ее в 8 случаях из 9.

Метод модульных сумм больше известен математикам и бухгалтерам как «метод сравнений по модулю 9», потому что модульная сумма числа обычно равна остатку, полученному в результате деления на 9. В случае числа 8651 модульная сумма равна 2: если вы разделите 8651 на 9, то в ответе будет 961 с остатком 2. Существует одно небольшое исключение. Напомним, что сумма цифр любого числа, кратного 9, тоже кратна 9. Значит, если число кратно 9, оно будет иметь модульную сумму 9, даже если остаток равен 0.

ВЫЧИТАНИЕ НА БУМАГЕ

Нельзя вычитать столбцы чисел таким же способом, как складывать. Предпочтительнее последовательно отнимать число за числом. Это означает, что все задачи на вычитание включают лишь два числа. Еще раз повторю: с карандашом и бумагой легче вычитать справа налево. Чтобы проверить ответ, прибавьте его ко второму числу. Если все правильно, то должно получиться вычитаемое число.

Если хотите, то для проверки ответа можно использовать модульные суммы. Разница здесь (по сравнению со сложением) в том, что нужно вычитать их и затем сравнить полученное число с модульной суммой ответа.

$$\begin{array}{rcl}
 65\,717 & \rightarrow & 8 \\
 - 38\,491 & \rightarrow & \underline{-7} \\
 \hline
 27\,226 & \rightarrow & 1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 19 & \rightarrow & 10
 \end{array}$$

Существует еще одно ухищрение. Если разница модульных сумм отрицательна или равна 0, прибавьте к ней 9. Например:

$$\begin{array}{rcl}
 42\,689 & & 2 \\
 - 18\,764 & & \underline{-8} \\
 \hline
 23\,925 & & -6 + 9 = 3 \\
 \downarrow & & \\
 21 & & \\
 \downarrow & & \\
 3 & &
 \end{array}$$

КВАДРАТНЫЕ КОРНИ НА БУМАГЕ

С появлением карманных калькуляторов метод ручки и бумаги для вычисления квадратных корней практически ушел в небытие. Вы уже научились устно оценивать квадратные корни. Сейчас я покажу, как найти точное значение квадратного корня с помощью ручки и бумаги.

Помните, как в разделе приближенной оценки квадратных корней мы вычисляли квадратный корень из девятнадцати? Взглянем на задачу еще раз, используя метод, который даст вам точное значение квадратного корня.

$$\begin{array}{r}
 4, 3 \ 5 \ 8 \\
 \sqrt{19,000000} \\
 4^2 = \underline{16} \\
 8_ \times _ \leq \underline{3 \ 00} \\
 \underline{83} \times \underline{3} = \underline{2 \ 49} \\
 86_ \times _ \leq \underline{5100} \\
 \underline{865} \times \underline{5} = \underline{4325} \\
 870_ \times _ \leq \underline{77500} \\
 \underline{8708} \times \underline{8} = \underline{69664}
 \end{array}$$

Я опишу этот метод как универсальный, который годится для любой ситуации, и проиллюстрирую примером, приведенным выше.

Шаг 1. Если количество цифр до десятичной запятой равно 1, 3, 5, 7 или любому другому нечетному числу, то первая цифра ответа (или частного) будет наибольшим числом, квадрат которого меньше *первой* цифры исходного числа. Если количество цифр до запятой равно 2, 4, 6 или любому другому четному числу, то первая цифра частного будет наибольшим числом, квадрат которого меньше *первых двух* цифр делимого. В данном случае 19 — двузначное число, поэтому первая цифра частного будет наибольшим числом, квадрат которой меньше 19. Это число 4.

Шаг 2. Вычитаем квадрат числа, найденного на шаге 1, из исходного числа и затем сносим еще две цифры. Так как $4^2 = 16$, вычитаем $19 - 16 = 3$. Сносим два нуля, получая 300 в качестве текущего остатка.

Шаг 3. Удваиваем существующее частное (игнорируя знаки после запятой) и оставляем после него пустое место. Здесь $4 \times 2 = 8$. Запишите $8_ \times _$ слева от текущего остатка (300 в данном случае).

Шаг 4. Следующая цифра частного будет наибольшим числом, которое может заполнить пропуски таким образом, чтобы результат умножения был меньше или равен текущему остатку. В данном случае это 3, поскольку $83 \times 3 = 249$, тогда как $84 \times 4 = 336$, что превышает остаток 300. Запишите это число в верхней строчке, где записываете ответ, над второй цифрой следующих двух чисел; в данном случае цифра 3 будет находиться над вторым нулем. Теперь имеем ответ в виде 4,3.

Шаг 5. Если вы хотите получить больше цифр в ответе, вычтите произведение из остатка (например, $300 - 249 = 51$) и снимите следующие две цифры; в данном случае 51 превратится в 5100, что станет текущим остатком. Теперь повторите шаги 3 и 4.

Для получения третьей цифры квадратного корня удвойте частное, снова игнорируя все цифры после запятой: $43 \times 2 = 86$. Поместите $86_ \times _$ слева от 5100. Цифра 5 даст нам $865 \times 5 = 4325$, наибольшее произведение, которое меньше 5100. Пятерка будет стоять в ответе сверху над следующими двумя числами, в данном случае над двумя нулями. Теперь ответ: 4,35. Для получения большего количества цифр после запятой повторите процедуру, как мы сделали в примере.

А вот пример нечетного количества цифр перед запятой.

$$\begin{array}{r}
 \text{2 8, 9 7} \\
 \sqrt{839,4000} \\
 2^2 = \underline{4} \\
 4_ \times _ \leq \underline{439} \\
 48 \times 8 = \underline{384} \\
 56_ \times _ \leq \underline{5540} \\
 569 \times 9 = \underline{5121} \\
 578_ \times _ \leq \underline{41900} \\
 5787 \times 7 = \underline{40509}
 \end{array}$$

Теперь вычислим квадратный корень из четырехзначного числа. В данном случае (как и с двузначными числами) учитываем первые две цифры примера для определения первой цифры квадратного корня.

$$\begin{array}{r}
 82,06 \\
 \sqrt{6735,0000} \\
 8^2 = 64 \\
 16_ \times _ \leq 335 \\
 162 \times 2 = 324 \\
 164_ \times _ \leq 1100 \\
 1640 \times 0 = 0 \\
 1640_ \times _ \leq 110000 \\
 16406 \times 6 = 98436
 \end{array}$$

Наконец, если число, из которого извлекается квадратный корень, имеет правильный (полный) квадрат, то узнать об этом можно, если в итоге получается нулевой остаток. Например:

$$\begin{array}{r}
 3,3 \\
 \sqrt{10,89} \\
 3^2 = 9 \\
 6_ \times _ \leq 189 \\
 63 \times 3 = 189 \\
 0
 \end{array}$$

УМНОЖЕНИЕ НА БУМАГЕ

Для умножения с ручкой и бумагой я использую *метод крест-накрест*, который позволяет записать весь ответ целиком в одну строчку и нигде не фиксировать промежуточные результаты! Это одна из самых впечатляющих демонстраций магии чисел, когда в вашем распоряжении есть ручка

и бумага. Многие вычислители из прошлого заработали себе репутацию «молниеносных» именно этим методом. Они получали два огромных числа и записывали ответ почти мгновенно. Методу крест-накрест лучше всего обучаться на примере.

$$\begin{array}{r} 47 \\ \times 34 \\ \hline 1598 \end{array}$$

Шаг 1. Сначала умножьте 4×7 и получите 28, запишите 8 и мысленно перенесите 2 на следующее вычисление.

$$\begin{array}{r} 4 \quad 7 \\ \quad | \\ 3 \quad 4 \end{array}$$

Шаг 2. Сложите $2 + (4 \times 4) + (3 \times 7) = 39$, запишите 9 и мысленно перенесите 3 на вычисления ниже.

$$\begin{array}{r} 4 \quad 7 \\ \quad \times \\ 3 \quad 4 \end{array}$$

Шаг 3. Закончите сложением $3 + (3 \times 4) = 15$ и запишите 15 для получения итогового ответа.

$$\begin{array}{r} 4 \quad 7 \\ | \\ 3 \quad 4 \end{array}$$

Вы только что записали ответ: 1598.

Решим другую задачу «2 на 2», используя метод крест-накрест.

$$\begin{array}{r} 83 \\ \times 65 \\ \hline 5395 \end{array}$$

Последовательность шагов и схемы вычислений представим следующим образом:

Шаг 1. $5 \times 3 = \underline{15}$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 3 \\ 6 \quad 5 \end{array}$$

Шаг 2. $1 + (5 \times 8) + (6 \times 3) = \underline{59}$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 3 \\ 6 \quad 5 \end{array}$$

Шаг 3. $5 + (6 \times 8) = \underline{53}$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 3 \\ 6 \quad 5 \end{array}$$

Ответ: 5395.

Метод крест-накрест немного усложняется в задачах типа «3 на 3».

$$\begin{array}{r} 853 \\ \times 762 \\ \hline 649986 \end{array}$$

Процесс вычислений представлен ниже.

Шаг 1. $2 \times 3 = \underline{6}$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 5 \quad 3 \\ 7 \quad 6 \quad 2 \end{array}$$

Шаг 2. $(5 \times 2) + (6 \times 3) = \underline{28}$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 5 \quad 3 \\ 7 \quad 6 \quad 2 \end{array}$$

Шаг 3. $2 + (8 \times 2) + (7 \times 3) + (5 \times 6) = \underline{69}$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 5 \quad 3 \\ 7 \quad 6 \quad 2 \end{array}$$

Шаг 4. $6 + (8 \times 6) + (7 \times 5) = \underline{89}$

8	5	3
7	6	2

Шаг 5. $8 + (8 \times 7) = \underline{64}$

8	5	3
7	6	2

Ответ: 649 986.

Обратите внимание, что количество умножений в каждом шаге составляет 1, 2, 3, 2 и 1 соответственно. Математика, лежащая в основе метода крест-накрест, не более чем распределительный закон. Например, $853 \times 762 = (800 + 50 + 3) \times (700 + 60 + 2) = (3 \times 2) + [(5 \times 2) + (6 \times 3)] \times 10 + [(8 \times 2) + (7 \times 3) + (5 \times 6)] \times 100 + [(8 \times 6) + (7 \times 5)] \times 1000 + (8 \times 7) \times 10\,000$, что в точности соответствует вычислениям по методу крест-накрест.

Можно проверить ответ с помощью модульной суммы путем перемножения модульных сумм двух чисел и вычисления модульной суммы получившегося в итоге числа. Сравните его с модульной суммой ответа. Если ответ правильный, то две модульные суммы должны совпадать. Например,

853	7
$\times \quad 762$	$\times \quad 6$
<u>649 986</u>	<u>42</u>
↓	↓
42	6
↓	
6	

Если модульные суммы не совпадают, вы допустили ошибку. Данный метод распознает ее в среднем в 8 случаях из 9.

Что касается примера «3 на 2», процедура аналогичная, за исключением того, что вы рассматриваете сотни второго числа как нули:

$$\begin{array}{r} 846 \\ \times \quad 037 \\ \hline 31\ 302 \end{array}$$

Шаг 1. $7 \times 6 = \underline{42}$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 4 \quad 6 \\ 0 \quad 3 \quad 7 \end{array}$$

Шаг 2. $4 + (4 \times 7) + (6 \times 3) = \underline{50}$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 4 \quad 6 \\ 0 \quad 3 \quad 7 \end{array}$$

Шаг 3. $5 + (8 \times 7) + (0 \times 6) +$
 $+ (4 \times 3) = \underline{73}$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 4 \quad 6 \\ 0 \quad 3 \quad 7 \end{array}$$

Шаг 4. $7 + (8 \times 3) + (0 \times 4) = \underline{31}$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 4 \quad 6 \\ 0 \quad 3 \quad 7 \end{array}$$

Шаг 5. $3 + (8 \times 0) = \underline{3}$

$$\begin{array}{r} 8 \quad 4 \quad 6 \\ 0 \quad 3 \quad 7 \end{array}$$

Ответ: 31 302.

Конечно, на практике, как правило, просто игнорируется умножение на нуль. Метод крест-накрест подойдет для решения задач с любым количеством цифр в числе. Например, для решения задачи «5 на 5», которая приводится ниже, потребуются девять шагов. Количество умножений на каждом шаге будет 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1 (в сумме 25).

$$\begin{array}{r}
 42\ 867 \\
 \times \quad 52\ 049 \\
 \hline
 2\ 231\ 184\ 483
 \end{array}$$

Шаг 1. $7 \times 9 = \underline{63}$

4	2	8	6	7
5	2	0	4	9

Шаг 2. $6 + (6 \times 6) +$
 $+ (4 \times 7) = \underline{88}$

4	2	8	6	7
			6	7
5	2	0	4	9

Шаг 3. $8 + (8 \times 9) +$
 $+ (0 \times 7) + (4 \times 6) = \underline{104}$

4	2	8	6	7
		8	6	7
5	2	0	4	9

Шаг 4. $10 + (2 \times 9) + (2 \times 7) +$
 $+ (4 \times 8) + (0 \times 6) = \underline{74}$

4	2	8	6	7
	2	8	6	7
5	2	0	4	9

Шаг 5. $7 + (4 \times 9) + (5 \times 7) +$
 $+ (4 \times 2) + (2 \times 6) +$
 $+ (0 \times 8) = \underline{98}$

4	2	8	6	7
4	2	8	6	7
5	2	0	4	9

Шаг 6. $9 + (4 \times 4) + (5 \times 6) +$
 $+ (0 \times 2) + (2 \times 8) = \underline{71}$

4	2	8	6	7
4	2	8	6	7
5	2	0	4	9

Шаг 7. $7 + (0 \times 4) + (5 \times 8) +$
 $+ (2 \times 2) = \underline{51}$

4	2	8	6	7
4	2	8	6	7
5	2	0	4	9

Шаг 8. $5 + (2 \times 4) + (5 \times 2) = \underline{23}$

4	2	8	6	7
4	2	8	6	7
5	2	0	4	9

Шаг 9. $2 + (5 \times 4) = \underline{22}$

4	2	8	6	7
5	2	0	4	9

Ответ: 2 231 184 483.

Вы можете проверить ответ, используя метод модульных сумм.

	42 867 →	9	
×	52 049 →	×	2
	2 231 184 483		18
	↓		↓
	36		9
	↓		
	9		

Шакунтала Деви: это не поддается расчету!

В 1976 году New York Times сообщила, что индийская женщина по имени Шакунтала Деви (р. 1939) сложила $25\,842 + 111\,201\,721 + 370\,247\,830 + 55\,511\,315$, а затем умножила полученную сумму на 9878 и дала правильный ответ 5 559 369 456 432 менее чем за двадцать секунд. С трудом верится, однако, что необразованная дочь обедневших родителей сделала себе имя в Соединенных Штатах Америки и Европе в качестве молниеносного вычислителя.

К сожалению, большинство по-настоящему удивительных подвигов Деви, которые были совершены благодаря маленьким хитростям, скудно документированы. Ее величайшее заявленное достижение — умножение на время двух тринадцатизначных чисел на бумаге — появилось в Книге рекордов Гиннеса как пример «человека-компьютера». Однако время вычислений в лучшем случае вызывает сомнения. Деви,

мастер метода крест-накрест, перемножила $7\,686\,369\,774\,870 \times 2\,465\,099\,745\,799$ — числа, как сообщается, сгенерированные случайным образом в компьютерном отделе Имперского колледжа в Лондоне 18 июня 1980 года. Правильный ответ ($18\,947\,668\,177\,995\,426\,773\,730$) был, якобы, воспроизведен ею за невероятные двадцать секунд. Гиннесс предлагает следующую оговорку: «Некоторые видные математики ставят под сомнение условия, при которых это было достигнуто и предсказывают, что для нее повторить такой подвиг под чрезвычайно строгим наблюдением было бы невозможно». Поскольку Деви предстояло решить 169 задач на умножение и 167 на сложение, то есть в общей сложности выполнить 336 операций, то она должна была бы производить каждый расчет в пределах десятой доли секунды без ошибок, затрачивая время на то, чтобы записать все 26 цифр ответа. Время вычисления само по себе возводит данный рекорд в категорию «это не поддается подсчету!».

Несмотря на это, Деви подтвердила свои способности путем выполнения быстрых расчетов и даже написала об этом книгу.

МЕТОД СРАВНЕНИЙ ПО МОДУЛЮ ОДИННАДЦАТИ

Чтобы перепроверить полученный ответ другим способом, можно использовать метод, известный как *сравнение по модулю 11*. Он похож на метод сравнения по модулю 9 за исключением того, что здесь вы сокращаете число, поочередно вычитая и прибавляя цифры справа налево, игнорируя десятичную запятую. Если результат отрицательный, к нему надо прибавить одиннадцать. (Вам может показаться заманчивым складывать и вычитать слева направо, как в случае с модульными суммами, но чтобы метод работал, необходимо это делать справа налево.)

Например:

$$\begin{array}{rcl} 234,87 & \rightarrow & 7 - 8 + 4 - 3 + 2 = 2 \rightarrow 2 \\ + \underline{58,61} & \rightarrow & 1 - 6 + 8 - 5 = -2 \rightarrow 9 \\ 293,48 & \rightarrow & 8 - 4 + 3 - 9 + 2 = 0 \rightarrow 11 \rightarrow 0 \end{array}$$

Этот же метод применим и для задач на вычитание:

$$\begin{array}{rcl} 65,717 & \rightarrow & 14 \rightarrow 3 \\ - \underline{38,491} & \rightarrow & -(-9) \rightarrow +9 \\ 27,226 & \rightarrow & 12 \rightarrow 1 \\ \downarrow & & \\ 1 & & \end{array}$$

Точно так же он работает и для задач на умножение:

$$\begin{array}{rcl} 853 & \rightarrow & 6 \\ \times \underline{762} & \rightarrow & \times 3 \\ 649\,986 & \rightarrow & 18 \\ \downarrow & & \downarrow \\ -4\, (+11) & & 7 \\ \downarrow & & \\ 7 & & \end{array}$$

Если модульные числа не совпадают, значит, где-то допущена ошибка. Но даже если они совпадают, ошибка не исключена. В среднем этот метод распознает ошибку в 10 случаях из 11. Поэтому она имеет шанс пробраться сквозь караул числа одиннадцать (1 к 11) и числа девять (1 к 9), и только с шансом 1 к 99 будет незамеченной при использовании обоих типов проверки. За дополнительной информацией об этих и других очаровательных волшебных приемах предлагаю обратиться к любой из книг Мартина Гарднера по «занимательной математике»*.

* См., например: Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. М. : АСТ, Зебра, 2010. Прим. ред.

Итак, теперь вы готовы к последней задаче на умножение в этой книге, решаемой с помощью ручки и бумаги: «10 на 10»! Хотя в ней отсутствует какая-либо практическая ценность, кроме возможности покрасоваться! (Лично мне кажется, что умножение пятизначных чисел уже и так достаточно впечатляющее действо, особенно с тех пор, как их решение перешло в сферу ответственности калькуляторов.) Я представлю здесь этот пример только для того, чтобы доказать: это выполнимо. Перекрестные умножения следуют тем же базовым схемам, что и при решении задачи «5 на 5». Вам предстоит девятнадцать шагов с вычислениями, а на десятом шаге — целых 10 перекрестных умножений! Поехали!

$$\begin{array}{r} 2\ 766\ 829\ 451 \\ \times 4\ 425\ 575\ 216 \\ \hline \end{array}$$

Вот как это считают:

Шаг 1. $1 \times 6 = \underline{6}$.

Шаг 2. $(5 \times 6) + (1 \times 1) = \underline{31}$.

Шаг 3. $3 + (4 \times 6) + (2 \times 1) + (5 \times 1) = \underline{34}$

Шаг 4. $3 + (9 \times 6) + (5 \times 1) + (4 \times 1) + (5 \times 2) = \underline{76}$

Шаг 5. $7 + (2 \times 6) + (1 \times 7) + (9 \times 1) + (5 \times 5) + (4 \times 2) = \underline{68}$

Шаг 6. $6 + (8 \times 6) + (5 \times 1) + (2 \times 1) + (7 \times 5) + (9 \times 2) + (5 \times 4) = \underline{134}$

Шаг 7. $13 + (6 \times 6) + (5 \times 1) + (8 \times 1) + (5 \times 5) + (2 \times 2) + (7 \times 4) + (9 \times 5) = \underline{164}$

Шаг 8. $6 + (6 \times 6) + (2 \times 1) + (6 \times 1) + (5 \times 5) + (8 \times 2) + (5 \times 4) + (2 \times 5) + (7 \times 9) = \underline{194}$

Шаг 9. $19 + (7 \times 6) + (4 \times 1) + (6 \times 1) + (2 \times 5) + (6 \times 2) + (5 \times 4) + (8 \times 5) + (5 \times 9) + (2 \times 7) = \underline{212}$

Шаг 10. $21 + (2 \times 6) + (4 \times 1) + (7 \times 1) + (4 \times 5) + (6 \times 2) + (2 \times 4) + (6 \times 5) + (5 \times 9) + (8 \times 7) + (5 \times 2) = \underline{225}$

$$\text{Шаг 11. } 22 + (1 \times 2) + (4 \times 5) + (2 \times 7) + (4 \times 4) + (5 \times 6) + \\ + (2 \times 9) + (7 \times 6) + (5 \times 2) + (5 \times 8) = 214$$

$$\text{Шаг 12. } 21 + (2 \times 2) + (4 \times 4) + (5 \times 7) + (4 \times 9) + (7 \times 6) + \\ + (2 \times 2) + (5 \times 6) + (5 \times 8) = 228$$

$$\text{Шаг 13. } 22 + (5 \times 2) + (4 \times 9) + (7 \times 7) + (4 \times 2) + (5 \times 6) + \\ + (2 \times 8) + (5 \times 6) = 201$$

$$\text{Шаг 14. } 20 + (7 \times 2) + (4 \times 2) + (5 \times 7) + (4 \times 8) + (5 \times 6) + \\ + (2 \times 6) = 151$$

$$\text{Шаг 15. } 15 + (5 \times 2) + (4 \times 8) + (5 \times 7) + (4 \times 6) + (2 \times 6) = 128$$

$$\text{Шаг 16. } 12 + (5 \times 2) + (4 \times 6) + (2 \times 7) + (4 \times 6) = 84$$

$$\text{Шаг 17. } 8 + (2 \times 2) + (4 \times 6) + (4 \times 7) = 64$$

$$\text{Шаг 18. } 6 + (4 \times 2) + (4 \times 7) = 42$$

$$\text{Шаг 19. } 4 + (4 \times 2) = 12$$

Если вы сумели договориться с этой невероятно трудной задачей с первого раза, то вы на этапе перехода из разряда подмастерья в категорию мастера математической магии!

$$\begin{array}{r} 2\ 766\ 829\ 451 \rightarrow 5^* \\ \times 4\ 425\ 575\ 216 \rightarrow 5 \\ \hline 12\ 244\ 811\ 845\ 244\ 486\ 416 \rightarrow 7 \end{array}$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ С БУМАГОЙ И РУЧКОЙ

УПРАЖНЕНИЕ: СТОЛБЦЫ ЧИСЕЛ

Просуммируйте следующие столбцы чисел, проверяя свои ответы путем суммирования данных снизу вверх, а затем

* Для тех, кто не догадался, сообщаю, что здесь приведены модульные суммы, которые показывают, что вычисления выполнены правильно, так как $5 \times 5 = 25 \rightarrow 7$. *Прим. ред.*

с помощью метода модульных сумм. Если две модульные суммы не совпадают, проверьте сложение.

$$\begin{array}{r}
 672 \\
 1367 \\
 107 \\
 7845 \\
 358 \\
 210 \\
 + 916 \\
 \hline
 \end{array}$$

Просуммируйте этот столбик долларов и центов.

$$\begin{array}{r}
 21,56 \\
 19,38 \\
 211,02 \\
 9,16 \\
 26,17 \\
 + 1,43 \\
 \hline
 \end{array}$$

УПРАЖНЕНИЕ: ВЫЧИТАНИЕ НА БУМАГЕ

Вычитайте следующие числа, используя метод модульных сумм для проверки ответа, а затем путем сложения ответа и вычитаемого.

$$\begin{array}{llll}
 1. \quad 75\,423 & 2. \quad 876\,452 & 3. \quad 3\,249\,202 & 4. \quad 45\,394\,358 \\
 - 46\,298 & - 593\,876 & - 2\,903\,445 & - 36\,472\,659 \\
 \hline & \hline & \hline & \hline
 \end{array}$$

УПРАЖНЕНИЕ: ВЫЧИСЛЕНИЕ КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ

Для следующих чисел найдите точный квадратный корень, используя техники удвоения и деления.

$$1. \quad \sqrt{15} \qquad 2. \quad \sqrt{502} \qquad 3. \quad \sqrt{439,2} \qquad 4. \quad \sqrt{361}$$

УПРАЖНЕНИЕ: УМНОЖЕНИЕ НА БУМАГЕ

Для решения этих упражнений примените метод крест-накрест, чтобы найти точный ответ. Проверьте ответы с помощью метода модульных сумм.

- | | | | | | |
|----|----------------------|----|------------------------|----|---------------------------|
| 1. | 54 | 2. | 273 | 3. | 725 |
| | <u>× 37</u> | | <u>× 217</u> | | <u>× 609</u> |
| 4. | 3309 | 5. | 52 819 | 6. | 3 923 759 |
| | <u>× 2868</u> | | <u>× 47 820</u> | | <u>× 2 674 093</u> |

Глава 7

Запоминающаяся глава для запоминания чисел*

Наиболее часто мне задают вопрос о моей памяти. Нет, сразу скажу я вам, она у меня не феноменальная. Скорее, я применяю систему мнемотехники, которая может быть изучена любым человеком и описана на следующих страницах. Научные эксперименты показали, что обычный человек со средним интеллектом может освоить их и развить способность запоминать числа.

В этой главе мы расскажем, как улучшить память на числа. Это не только имеет такие очевидные практические выгоды, как запоминание дат или телефонных номеров, но и позволяет решать в уме большие вычислительные задачи. А в следующей главе мы покажем, как, применяя методы из этой главы, умножать в уме пятизначные числа!

* Эта глава оказалась самой трудной для перевода и редактирования, поскольку здесь для чисел используется английский фонетический код. После долгих раздумий было решено сохранить оригинальный английский фонетический код, приводя, где это возможно, русский фонетический код для чисел. Сразу уточним, что среди многочисленных русских фонетических кодов выбрана система О. Степанова как наиболее часто рекомендуемая. Литературу по русской мнемотехнике можно найти в конце книги в разделе «Библиография». *Прим. ред.*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МНЕМОНИКИ

Метод, который здесь представлен, — это пример мнемоники, то есть инструмента для улучшения памяти в процессе запоминания и извлечение данных. Мнемоника работает путем преобразования непонятных данных (например, последовательностей цифр) в нечто более подходящее. Попробуйте найти минутку для того, чтобы запомнить следующую фразу:

My turtle Pancho will, my love, pick up my new mover, Ginger.

(«Моя черепаха Панчо, моя любовь, забрать мой новый двигатель, имбирь».)

Прочитайте ее несколько раз. Не перелистывайте следующие страницы, чтобы увидеть, как выглядит черепаха Панчо или узнать, кто забрал мой новый двигатель и что означает имбирь. Просто запомните эту фразу. Запомнили?

Поздравляю! Вы только что запомнили первые двадцать четыре цифры математического выражения числа π (пи). Напомню: число π — это отношение длины окружности к ее диаметру и, как учили в школе, приблизительно равно 3,14, или $22/7$. На самом деле π иррациональное число (в нем цифры после запятой продолжают бесконечно без повторяющихся последовательностей цифр). Современные компьютеры рассчитали для π миллиарды знаков после запятой.

ФОНЕТИЧЕСКИЙ КОД

Я уверен, что вам интересно, как фраза, которую вы запомнили, преобразуется в 24 знака числа π .

Чтобы узнать это, в первую очередь необходимо запомнить фонетический код, представленный ниже, где каждой цифре от 0 до 9 назначается соответствующий звук.

<i>Английский фонетический код</i>	<i>Русский фонетический код</i>
1 — звук <i>t</i> или <i>d</i>	1 — звук <i>p</i>
2 — звук <i>n</i>	2 — звук <i>д</i> или <i>г</i>
3 — звук <i>m</i>	3 — звук <i>т</i> или <i>з</i>
4 — звук <i>r</i>	4 — звук <i>ч</i> или <i>к</i>
5 — звук <i>l</i>	5 — звук <i>н</i> или <i>б</i>
6 — звук <i>j, ch</i> или <i>sh</i>	6 — звук <i>ш</i> или <i>ж</i>
7 — звук <i>k</i> или твердое <i>g</i>	7 — звук <i>с</i>
8 — звук <i>f</i> или <i>v</i>	8 — звук <i>в</i> или <i>ф</i>
9 — звук <i>p</i> или <i>b</i>	9 — звук <i>м</i>
0 — звук <i>z</i> или <i>s</i>	0 — звук <i>н</i> или <i>л</i>

Запомнить этот код не так сложно, как кажется. С одной стороны, заметьте, что в тех случаях, когда одной цифре соответствует более одной буквы, эти буквы имеют похожее произношение. С другой — вы можете положиться на следующие подсказки, которые помогут вам запомнить код.

1. Машинописные *t* и *d* имеют только 1 идущий вниз штрих.
2. Машинописная *n* имеет 2 идущих вниз штриха.
3. Машинописная *m* имеет 3 идущих вниз штриха.
4. Число 4 (four) заканчивается буквой *r*.
5. Форма руки с четырьмя поднятыми вверх пальцами, когда большой палец повернут на 90 градусов, — это 5 пальцев в виде буквы L (прописной).
6. Буква J (прописная) похожа на повернутую в обратную сторону 6.
7. Букву K (прописную) можно нарисовать, сложив две семерки спиной к спине.
8. Строчная буква *f*, написанная курсивом, выглядит как 8.

9. Число 9 выглядит как повернутая в обратную сторону буква *p* или как перевернутая буква *b*.
0. Слово *zero* (ноль) начинается с буквы *z*.

Аналогичные подсказки для русской кодировки:

1. С буквы *Р* начинается слово «раз».
2. С буквы *Д* начинается слово «два», а буква *Г*, набранная курсивом, напоминает цифру 2.
3. С буквы *Т* начинается слово «три», а буква *З* похожа на цифру 3.
4. С буквы *Ч* начинается слово «четыре», а с буквы *К* — слово «квадрат».
5. С буквы *П* начинается слово «пять», а буква *Б* внешне и по звучанию похожа на цифру 5.
6. С буквы *Ш* начинается слово «шесть», а буква *Щ* звучит похоже.
7. С буквы *С* начинается слово «семь».
8. С буквы *В* начинается слово «восемь», а буква *Ф* имеет сходное звучание.
9. С буквы *М* начинается слово «много», так как 9 самая большая цифра.
0. Буквы *Н* и *Л* в слове «НоЛь».

Запомнить этот список достаточно просто, если выучить имя Tony Marloshkovips!*

Попрактикуйтесь в заучивании списка. Минут через десять вы должны четко знать все согласные буквы и звуки, которые соответствуют всем цифрам. Затем можно приступить к преобразованию чисел в слова, помещая гласные вокруг или

* Согласные буквы в этом имени совпадают (хотя бы по звучанию) с буквами, которые приписываются цифрам. *Прим. ред.*

между согласных. Например, число 32 можно представить любым из следующих слов: *tap, ten, mine, mane, moon, map, money, тени, атен, отен, атино, мини, минни* и т. д. Обратите внимание, что слово *minnie* допустимо, так как звук *n* (а не буква *n*) здесь появляется только один раз.

Следующие слова не могут представлять число 32, потому что в них используются другие согласные звуки: *mourn, melon, mint*. Эти слова представляют числа 342, 352 и 321. Согласные *h, w* и *y* можно свободно добавлять в слова, так как их нет в списке. Поэтому число 32 можно также представить словами *human, woman, yeoman* или *my honey*.

Следующий список дает хорошее представление о тех словах, которые можно создать с помощью фонетического кода и которые обозначают числа от 0 до 100. Не ставьте себе цель обязательно запомнить этот список, используйте его по своему усмотрению для вдохновения и изучения возможностей фонетического кода.

1 tie	26 notch	51 light	76 cage
2 knee	27 neck	52 lion	77 cake
3 emu	28 knife	53 lamb	78 cave
4 ear	29 knob	54 lure	79 cap
5 law	30 mouse	55 lily	80 face
6 shoe	31 mat	56 leash	81 fight
7 cow	32 moon	57 log	82 phone
8 ivy	33 mummy	58 leaf	83 foam
9 bee	34 mower	59 lip	84 fire
10 dice	35 mule	60 cheese	85 file
11 tot	36 match	61 sheet	86 fish
12 tin	37 mug	62 chain	87 fog
13 tomb	38 movie	63 chum	88 fife
14 tire	39 map	64 cherry	89 V.I.P.

15 towel	40 rose	65 jail	90 bus
16 dish	41 rod	66 judge	91 bat
17 duck	42 rain	67 chalk	92 bun
18 dove	43 ram	68 chef	93 bomb
19 tub	44 rear	69 ship	94 bear
20 nose	45 roll	70 kiss	95 bell
21 nut	46 roach	71 kite	96 beach
22 nun	47 rock	72 coin	97 book
23 name	48 roof	73 comb	98 puff
24 Nero	49 rope	74 car	99 puppy
25 nail	50 lace	75 coal	100 daisies

Список число — слово

Для закрепления в памяти переведите следующие числа в слова, а затем проверьте ниже правильность перевода. Заметьте, что перевод числа в слово выполняется неоднозначно, поскольку можно придумать множество слов, которые могут соответствовать данному числу.

42
74
67
86
93
10
55
367
826
951
620

Вот некоторые слова, которые я придумал для этих чисел.

<i>Английские эквиваленты чисел</i>	<i>Русские эквиваленты чисел</i>
42 rain, rhino, Reno, ruin, urn	чага, кади
74 car, cry, guru, carry	сок, сечь
67 jug, shock, chalk, joke, shake, hijack	шасси, щас
86 fish, fudge	ваш, ваще
93 bum, bomb, beam, palm, pam	мать, мазь
10 toss, dice, toes, dizzy, oats, hats	рана, ралли, руль
55 lily, lola, hallelujah!	папа, баба, бип
826 finch, finish, vanish	видишь
951 pilot, plot, belt, bolt, bullet	Мольер
620 jeans, chains, genius	Шаганэ
367 magic!	ту шасси

В качестве упражнения переведите следующие слова в числа.

dog
oven
cart
fossil
banana
garage
pencil
Mudd
multiplication
Cleveland
Ohio

Ответы:

dog:	17
oven:	82
cart:	741
fossil:	805

banana:	922
garage:	746
pencil:	9 205
Mudd:	31
multiplication:	35 195 762
Cleveland:	758 521
Ohio:	нет числа

Хотя обычно число можно преобразовать в слова несколькими способами, слово преобразуется только в одно-единственное число. Это очень важное свойство для применения фонетического кодирования, поскольку оно позволяет запоминать и вспоминать конкретные числа.

Данная система позволяет перевести любое число или ряд чисел (например, номера телефонов, карточек социального страхования, водительских прав, цифры числа π) в слово или предложение. Вот как работает фонетический код для представления первых двадцати четырех цифр числа π .

3 1415 926 5 3 58 97 9 3 2 384 6264
My turtle Pancho will, my love, pick up my new mover, Ginger.

Напомню, что в фонетическом коде *g* является твердым согласным звуком, как в слове *grass*, тогда как мягкий *g* (как в слове *Ginger*) звучит как *j* и представляет цифру 6. Кроме того, слово *will* фонетически созвучно *L* и представляет цифру 5. Звук *w* можно свободно использовать, так как он не применяется в кодах цифр. Поскольку это предложение можно преобразовать в двадцать четыре цифры, как показано выше, то вы фактически запомнили число π до двадцати четырех цифр!

Этот код позволяет запоминать бесконечно большое количество чисел. Например, следующие два предложения

в добавление к приведенному выше предложению «Моя черепаха Панчо...» позволяют запомнить первые шестьдесят цифр π .

3 38 327 950 2 8841 971
My movie monkey plays in a favorite bucket.

А также

69 3 99 375 1 05820 97494
Ship my puppy Michael to Sullivan's backrubber.

Если вы запомнили шестьдесят цифр, будет нетрудно запомнить и все сто цифр.

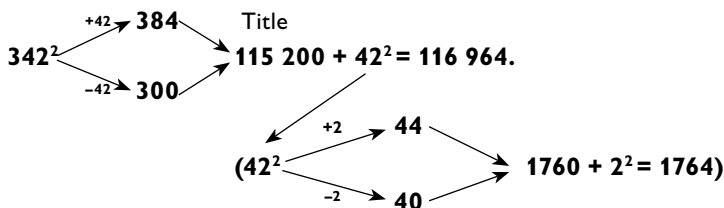
45 92 307 81 640 62 8 620
A really open music video cheers Jenny F. Jones.

8 99 86 28 0 3482 5 21 1 7067
Have a baby fish knife so Marvin will marinate the goosechick.

Вы сможете гордиться собой, как только эти предложения начнут бойко слетать с вашего языка и вы станете быстро переводить их в числа. Но у вас есть шанс пойти на мировой рекорд. Хироюки Гото из Японии в 1995 году по памяти перечислил 42 195 цифр числа π за семнадцать часов и двадцать одну минуту.

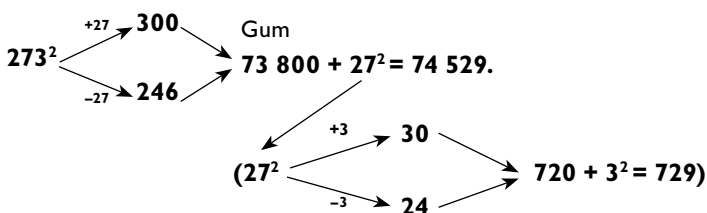
КАК МНЕМОТЕХНИКА ОБЛЕГЧАЕТ УСТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Помимо улучшения способности запоминать длинные последовательности цифр, мнемоника помогает запоминать частичные результаты в середине процесса решения трудной вычислительной задачи. Например, вот как можно использовать фонетический код при возведении в квадрат трехзначного числа.



Как вы помните из главы 3, чтобы возвести в квадрат число 342, надо сначала перемножить 384×300 , что даст 115 200, а затем к полученному числу прибавить 42^2 . Но к тому времени, когда вы возведете 42 в квадрат, вы можете забыть число 115 200. Вот здесь система мнемотехники и придет на помощь. Для сохранения в памяти числа 115 200 запомните 200 по руке, зажав два пальца, и преобразуйте 115 в слово, скажем, *title**. Повторите слово *title* про себя один или два раза. Его проще запомнить, чем число 115 200, особенно после запуска процесса вычисления 42^2 . После того как найдете $42^2 = 1764$, можно прибавить к этому числу число *title* 2, то есть 115 200, и получить итоговый результат 116 964.

Вот еще один пример.



* По-русски для этого числа трудно придумать фонетический эквивалент. *Прим. ред.*

После умножения $300 \times 246 = 73\,800$ преобразуем 73 в *gut** и запомним 800 с помощью пальцев. Вычислив $27^2 = 729$, вам останется лишь прибавить к этому числу число *gut* 8, то есть 73 800, и получить ответ 74 529. Это может поначалу показаться немного громоздким, но постепенно преобразование чисел в слова и обратно станет вашей второй натурой.

Вы видели, как легко двузначные числа переводятся в простые слова. Но вот с трехзначными числами дело обстоит несколько сложнее. Если вы не можете придумать простое слово с помощью мнемонической техники, подберите необычное слово или просто придумайте новое. Например, если нет простых слов для чисел 286 или 638 и ничего быстро не приходит на ум, воспользуйтесь словосочетанием *no fudge* или новым словом, таким как *jam-off*. Даже эти необычные слова легче в течение длительного расчета удерживать в памяти, чем числа 286 или 638. Для решения некоторых больших задач из следующей главы приемы мнемотехники незаменимы.

Части числа π Александра Крейга Эйткена

Возможно, один из самых впечатляющих подвигов устного счета был совершен профессором математики Эдинбургского университета Александром Крейгом Эйткеном (1895–1967), который не только знал значение π до 1000 знаков, но и быстро выпалил первые 250 цифр π , когда его во время лекции попросили продемонстрировать свою удивительную память. Затем его попросили пропустить ряд цифр, начать с 551-й цифры и перечислить далее 150 цифр. Он успешно с этим справился, не сделав ни единой ошибки.

* Здесь проблем с придумыванием фонетического эквивалента нет. Например, подойдет слово «сеть». *Прим. ред.*

Как у него это получалось? Эйткен объяснил слушателям, что «секрет, на его взгляд, кроется в релаксации (расслаблении), полной противоположности концентрации, которая принимается за правило». Техника Эйткена была более слуховой, чем обычно. Он разбил число на куски по пятьдесят цифр и запомнил их в своеобразном ритме. С обескураживающим доверием он объяснил: «Этот подвиг оказался бы предсудительно бесполезным, если бы совершить его не было так просто».

То, что Эйткен помнил тысячу знаков числа π , не делает его молниеносным вычислителем. Однако он умел легко перемножать в уме пятизначные числа. Математик по имени Томас О'Бейрн вспоминает, как Эйткену демонстрировали калькулятор при покупке. «Продавец, — пишет О'Бейрн, — сказал что-то вроде: “Теперь мы умножим 23 586 на 7 283”. Эйткен сразу выпалил: “И получите 171 776 838”. Продавец был настолько увлечен продажей, что не обратил внимания на слова Эйткена, но его менеджер, который наблюдал за происходящим, заметил. Убедившись, что Эйткен прав, он чуть было не закатил истерику (как и я!)».

Как ни странно, Эйткен отметил, что после покупки настоящего калькулятора его умственные способности быстро ухудшились. Предвидя ожидаемое будущее, он посоветовал: «Ментальные вычислители, как тасманийцы или маори, обречены на вымирание. Поэтому может быть почти антропологический интерес к этим любопытным особям, а некоторые из моих знакомых в году примерно 2000-м смогут сказать “Да, я знал, одного из таких”». К счастью, его прогноз не оправдался!

МАГИЯ ПАМЯТИ

Без использования мнемотехники обычная человеческая память (включая мою) способна удерживать только семь или

восемь цифр одновременно. Однако техника замены чисел словами позволяет значительно расширить ее объем. Попросите кого-нибудь медленно перечислить шестнадцать цифр, и пусть другой человек записывает их на доске или листе бумаги. Как только они будут записаны, вы сможете повторить их в точном обратном порядке, не глядя на доску или бумагу! На недавней лекционной демонстрации мне дали следующий ряд цифр:

1, 2, 9, 7, 3, 6, 2, 7, 9, 3, 3, 2, 8, 2, 6, 1

Как только цифры были названы, я использовал фонетический код, чтобы превратить их в слова, а затем объединить в замысловатую историю. При этом число 12 стало словом *tiny* (крошечный), 97 — *book* (книга), 362 — *machine* (машина), 793 — *kaboom*^{*}, 32 — *moon* (луна) и 8261 — *finished* (окончание).

Я объединил эти слова-числа в глупую историю, которая помогла мне их запомнить. Я представил крошечную книгу (*tiny book*) и поместил ее внутрь машины (*machine*). Затем машина с грохотом (*kaboom*) разогналась и забросила меня на Луну (*moon*), где все и закончилось (*finished*). Эта история может показаться нелепой, но в том-то и фокус: чем она смешнее, тем легче запоминается и, кроме того, поднимает настроение.

* Придуманное слово по звучанию соответствует «шуму» или «грохоту». Прим. ред.

Глава 8

Сложное делаем легким: продвинутое умножение

К настоящему моменту (если вы к нему шли глава за главой) вы научились выполнять устное сложение, вычитание, умножение и деление так же хорошо, как и овладели искусством приближенной оценки, карандашно-бумажной магии чисел и создания фонетического кода чисел для запоминания. Эта глава для серьезных, несгибаемых математиков, которые хотят раздвинуть границы своего разума для устных вычислений. Задачи здесь варьируются от возведения в квадрат четырехзначных чисел до самых больших, которые я решал на публике: умножение двух пятизначных чисел.

Для решения этих задач особенно важно чувствовать себя уверенно при использовании фонетического кода и достаточно быстро его применять. И хотя, если вы заглянете вперед на несколько страниц, проблемы могут казаться действительно трудными, позвольте мне вновь заявить о двух основных посылах этой книги: во-первых, любой навык устных вычислений может быть освоен почти каждым, во-вторых, ключ состоит в упрощении всех примеров и их превращении в более простые задачи, которые легко решаются. В этой главе (да и любой другой) нет ни одной задачи, которая была бы неподвластна средствам техник упрощения, изученных вами в предыдущих главах. Так как мы предполагаем, что вы

овладели всеми необходимыми для этого приемами, будем учить вас преимущественно с использованием схем вычислений, а не проходить задачки слово за словом. Напомним, что многие из простых задач, встроенных в эти громадные примеры, уже встречались вам в предыдущих главах.

Начнем с возведения в квадрат четырехзначных чисел. Удачи!

КВАДРАТ ЧЕТЫРЕХЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

В качестве подготовительного навыка для развития умения возводить в квадрат четырехзначные числа вам необходимо освоить решение задач на умножение типа «4 на 1». Такую задачу мы разбиваем на две подзадачи типа «2 на 1», как показано ниже.

$$\begin{array}{r}
 4\ 867\ (4800 + 67) \\
 \times \quad 9 \\
 \hline
 9 \times 4\ 800 = 43\ 200 \\
 9 \times 67 = + \quad 603 \\
 \hline
 43\ 803
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2\ 781\ (2700 + 81) \\
 \times \quad 4 \\
 \hline
 4 \times 2\ 700 = 10\ 800 \\
 4 \times 81 = + \quad 324 \\
 \hline
 11\ 124
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6\ 718\ (6700 + 18) \\
 \times \quad 8 \\
 \hline
 8 \times 6\ 700 = 53\ 600 \\
 8 \times 18 = + \quad 144 \\
 \hline
 53\ 744
 \end{array}$$

Сложное делаем легким: продвинутое умножение

$$\begin{array}{r}
 4\ 269\ (4200 + 69) \\
 \times \quad 5 \\
 \hline
 5 \times 4\ 200 = 21\ 000 \\
 5 \times 69 = +\ 345 \\
 \hline
 21\ 345
 \end{array}$$

Овладение навыками умножения «4 на 1» будет означать, что вы готовы возводить в квадрат четырехзначные числа. Попробуем на примере числа 4267. Используя такой же метод, как и при возведении в квадрат двух- и трехзначных чисел, сделаем это с числом 4267, округлив его в меньшую сторону на 267 до 4000 и в большую — на 267 до 4534. Умножим 4534×4000 (задача «4 на 1») и затем прибавим квадрат числа, на которое вы изменили исходное (267^2), как показано ниже.

$$\begin{array}{rcl}
 & +267 & 4\ 534 \\
 4\ 267^2 & \swarrow & \searrow \\
 & -267 & 4\ 000
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \text{Damage} \\
 18\ 136\ 000\ (4\ 534 \times 4\ 000) \\
 +\ 71\ 289\ (267^2) \\
 \hline
 18\ 207\ 289
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 & +33 & 300 \\
 267^2 & \swarrow & \searrow \\
 & -33 & 234
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 70\ 200\ (300 \times 234) \\
 +\ 1\ 089\ (33^2) \\
 \hline
 71\ 289
 \end{array}$$

Сейчас уже очевидно, сколько действий происходит внутри этого примера. Я осознаю, что одно дело сказать: «Прибавьте квадрат 267», и совсем другое — сделать это и запомнить число, которое следует приплюсовать. Поэтому, как только умножите 4534×4 и получите 18 136, можете произнести первую часть ответа вслух: «Восемнадцать миллионов...». Вы можете так сказать, потому что исходное число всегда округляется до ближайшей тысячи. Поэтому наибольшее трехзначное число, которое придется возводить в квадрат на следующем

шаге, будет 500. Квадрат 500 равен 250 000. А поскольку остаток вашего ответа (в данном случае 136 000) меньше 750 000, это означает, что число миллионов не изменится.

После того как вы произнесете слова «восемнадцать миллионов...», вам нужно закрепить в памяти число 136 000, прежде чем возводить в квадрат 267. Вот где мнемонические приемы из предыдущей главы придут на помощь! Благодаря фонетическому коду число 136 можно преобразовать в слово *damage* ($1 = d, 3 = m, 6 = j$)*. Теперь смело приступайте к следующей части задачи, просто запомнив *damage* (и существование еще трех нулей в конце числа). Если в какой-то момент посреди вычислений вы забудете изначальную задачу, можете либо бросить взгляд на исходные числа, либо, если они не записаны, попросить аудиторию повторить задание (чтобы создать иллюзию, будто вы заново приступаете к решению, в то время как вы уже сделали некоторые расчеты)!

В результате возведения в квадрат трехзначного числа (изученным ранее способом) вы получите 71 289. Мне раньше было сложно запоминать сотни в ответе (в данном случае 2). Я справился с этим, прибегнув к помощи пальцев (здесь — двух пальцев). Если вы забыли две последние цифры (89), то можете вернуться к исходному числу (4267), возвести последние две цифры в квадрат ($67^2 = 4489$) и взять последние две цифры полученного числа.

Для вычисления итогового ответа нужно прибавить 71 289 к *damage* (то есть к числу 136 000) и их сумму 207 289 уже можно проговорить вслух.

* В соответствии с русским фонетическим кодом число 136 можно представить словом «ретушь». *Прим. ред.*

Томас Фуллер: ученые мужи и большие дураки

Трудно отнять первое место по количеству проблем в обучении у Хелен Келлер*, но темнокожий раб Томас Фуллер, родившийся в Африке в 1710 году, буквально наступает ей на пятки. Он не только был неграмотным, но ни одного дня в своей жизни не учился. Будучи «собственностью» Элизабет Кокс, Томас Фуллер работал на полях Вирджинии. Он сам освоил счет до 100, после чего развил свои «вычислительные способности» путем подсчета предметов, которые всегда под рукой, например зерен в бушелях пшеницы, семян льна и количества волос в коровьем хвосте (2 872 волоска).

Отталкиваясь от простого счета, Фуллер научился вычислять, сколько черепицы потребуется для покрытия крыши дома; сколько столбов понадобится для его ограждения и тому подобные вещи. Его поразительные навыки развивались, а с ними вместе росла его репутация. Уже в преклонном возрасте он принял вызов двух пенсильванцев, согласившись продемонстрировать свои способности в вычислении чисел в уме, причем таких, какие вызвали бы трудности у лучших молниеносных вычислителей. Например, они спросили: «Предположим, фермер имеет шесть свиноматок, каждая из них родит шесть самок в первый год, и все они будут размножаться в той же прогрессии в течение восьми лет; сколько свиноматок в конечном итоге будет иметь фермер?» Задача может быть записана как $7^8 \times 6$, то есть $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 6$. Буквально через десять минут Фуллер выдал ответ: 34 588 806.

После его смерти в 1790 году газета *Columbian Centinel* сообщила, что «Фуллер мог вычислить число ярдов, футов,

* Хелен Келлер (1880–1968) — слепоглая американская писательница, общественный деятель и преподаватель. Первый слепоглохой человек, получивший высшее образование. За активную общественную деятельность награждена Президентской медалью Свободы и введена в Зал женской славы. *Прим. ред.*

дюймов и трети дюймов* для любого заданного расстояния, назвать диаметр земной орбиты, а по результатам каждого расчета давал правильный ответ за меньшее время, чем девяносто девять человек из ста сделали бы это на бумаге». Когда Фуллера спросили, жалеет ли он о том, что так и не получил традиционного образования, он ответил: «Нет. Лучшее, что у меня есть, это отсутствие образования: среди многих ученых мужей найдутся большие дураки».

Возведем в квадрат еще одно четырехзначное число: 8431^2 .

$$\begin{array}{rcl}
 & +431 & 8\ 862 \\
 8\ 431^2 & \swarrow & \searrow \\
 & 70\ 896\ 000 & (8\ 862 \times 8\ 000) \\
 & -431 & 8\ 000 \\
 & + & 185\ 761 \\
 & \hline
 & 71\ 081\ 761 & (431^2)
 \end{array}$$

Foppish

$$\begin{array}{rcl}
 & +31 & 462 \\
 431^2 & \swarrow & \searrow \\
 & 184\ 800 & (400 \times 462) \\
 & -31 & 400 \\
 & + & 961 \\
 & \hline
 & 185\ 761 & (31^2)
 \end{array}$$

Я не буду повторно описывать все действия, как в последней задаче, обращаю ваше внимание лишь на некоторые моменты. После выполнения действия $8 \times 8862 = 70\ 896$ становится ясно, что 896 больше 750, поэтому возможен перенос единицы в старший разряд. Действительно, так как 431^2 больше $400^2 = 160\ 000$, то определенно нужен перенос единицы во время прибавления числа 431^2 к $896\ 000$. Следовательно, на этом этапе можно без опаски произнести вслух: «Семьдесят один миллион...»

* Средний размер ячменного зерна; старинная мера длины. *Прим. пер.*

При возведении в квадрат 431 получаем 185 761. Складываем 185 и 896, выходит 1081, и произносим остаток ответа. Но помните, что мы уже предвосхитили перенос единицы, поэтому просто скажите: «...81 тысяча...761». Работа выполнена!

На еще один тонкий момент в вычислениях мы укажем в примере 2753^2 .

$$\begin{array}{rcl}
 & +247 & \mathbf{3\ 000} \\
 \mathbf{2\ 753^2} & \swarrow & \searrow \\
 & -247 & \mathbf{2\ 506} \\
 & + & \mathbf{7\ 518\ 000\ (3\ 000 \times 2\ 506)} \\
 & & \mathbf{+ \ 61\ 009\ (247^2)} \\
 & & \hline
 & & \mathbf{7\ 579\ 009}
 \end{array}$$

Light off

$$\begin{array}{rcl}
 & +47 & \mathbf{294} \\
 \mathbf{247^2} & \swarrow & \searrow \\
 & -47 & \mathbf{200} \\
 & & \mathbf{+ \ 58\ 800\ (200 \times 294)} \\
 & & \mathbf{+ \ 2\ 209\ (47^2)} \\
 & & \hline
 & & \mathbf{61\ 009}
 \end{array}$$

Так как мы округлили исходное число 2753 до 3000, то будем умножать 3000 на другое число из области «2000 плюс». Можно, конечно, вычесть $2753 - 247 = 2506$, но это сложнее. Чтобы получить последние три цифры этой разности, удвойте 753 — выйдет 1506. Последние три цифры данного результата (506) — это последние три цифры числа «2000 плюс»: 2506! Это прием срабатывает, поскольку сумма двух перемножаемых чисел всегда равна удвоенному исходному числу.

Затем работаем в обычном режиме, перемножив $3000 \times 2506 = 7\ 518\ 000$; преобразуем 518 в слова* *light off* и произносим вслух первую часть ответа: «Семь миллионов...». Здесь это можно утверждать, так как 518 меньше 750, поэтому переноса единицы не будет.

* В соответствии с русским фонетическим кодом число 518 можно представить словом «право». *Прим. ред.*

Далее прибавляем квадрат числа 247. Не забудьте, что 247 можно быстро получить как дополнение для 753. Затем переходим к окончательному ответу, как это сделано в предыдущем примере.

УПРАЖНЕНИЕ: КВАДРАТЫ ЧЕТЫРЕХЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1. 1234² | 2. 8639² | 3. 5312² |
| 4. 9863² | 5. 3618² | 6. 2971² |

УМНОЖЕНИЕ «3 НА 2»

В ходе решения задач типа «2 на 2» мы уже убедились в существовании нескольких путей решения одного и того же примера. Многообразие методов увеличивается параллельно росту количества цифр в задаче. В случае задач «3 на 2» я предпочитаю «предварительный просмотр» для определения самого оптимального метода расчета.

Методы разложения

Самые легкие задачи типа «3 на 2» — те, в которых двузначные числа можно разложить на сомножители. Например:

$$\begin{array}{r} 637 \\ \times 56 \quad (8 \times 7) \end{array}$$

$$637 \times 56 = 637 \times 8 \times 7 = 5\,096 \times 7 = 35\,672$$

Потрясающе, что здесь не нужно ничего складывать. Вы просто представляете 56 как 8×7 , затем решаете пример на умножение типа «3 на 1» ($637 \times 8 = 5096$) и, наконец, пример типа «4 на 1» ($5096 \times 7 = 35\,672$). Больше не требуется никаких дополнительных действий, и необходимости запоминать промежуточные результаты тоже нет.

Сложное делаем легким: продвинутое умножение

Свыше половины всех двузначных чисел раскладываются на сомножители, среди которых число 11 и меньшие числа. Поэтому данный метод подойдет для многих задач. Вот пример:

$$\begin{array}{r} 853 \\ \times 44 (11 \times 4) \\ \hline \end{array}$$
$$853 \times 11 \times 4 = 9383 \times 4 = 37\,532.$$

Чтобы умножить 853×11 , представьте 853 в виде $850 + 3$ и далее рассуждайте так:

$$\begin{array}{r} 850 \times 11 = 9350 \\ 3 \times 11 = + 33 \\ \hline 9383 \end{array}$$

Теперь умножим 9383×4 , представив 9383 как $9300 + 83$, следующим образом:

$$\begin{array}{r} 9\,300 \times 4 = 37\,200 \\ 83 \times 4 = + 332 \\ \hline 37\,532 \end{array}$$

Если двузначное число не раскладывается на сомножители (или они большие), рассмотрите возможность разложения трехзначного числа.

$$\begin{array}{r} 144 (6 \times 6 \times 4) \\ \times 76 \\ \hline \end{array}$$

$$76 \times 144 = 76 \times 6 \times 6 \times 4 = 456 \times 6 \times 4 = 2736 \times 4 = 10\,944.$$

Обратите внимание, что последовательность умножений выстроилась из задач типа «2 на 1», «3 на 1» и, наконец, «4 на 1». Это те задачи, которые вы уже умеете решать с легкостью. Поэтому тип примеров «3 на 2» не должен оказаться сложным для вас.

Еще один пример, где не двузначное число подвергается разложению, а трехзначное.

$$\begin{array}{r} 462 (11 \times 7 \times 6) \\ \times 53 \\ \hline \end{array}$$

$$53 \times 11 \times 7 \times 6 = 583 \times 7 \times 6 = 4081 \times 6 = 24\,486.$$

Здесь последовательность задач типа «2 на 2», «3 на 1» и «4 на 1». Но если трехзначное число имеет множитель 11, можно использовать метод умножения на 11 (как описано в главе 4) и получить простой пример типа «2 на 2» ($53 \times 11 = 583$). В данном случае нахождение сомножителя 11 у числа 462 оправдывает себя.

Если двузначное число не раскладывается на «хорошие» сомножители, а трехзначное раскладывается только на сомножители в виде «2 на 1», с задачей все еще можно легко справиться путем умножения типа «2 на 2», а затем «4 на 1», как показано в следующем примере:

$$\begin{array}{r} 423 (47 \times 9) \\ \times 83 \\ \hline \end{array}$$

$$83 \times 47 \times 9 = 3901 \times 9 = 35\,109.$$

Здесь необходимо учесть, что 423 делится на 9 и исходная задача преобразуется в $83 \times 47 \times 9$. В данном случае пример «2 на 2» не настолько прост, но если представить 83 в виде $80 + 3$, получится следующее:

$$\begin{array}{r} 83 (80 + 3) \\ \times 47 \\ \hline 80 \times 47 = 3\,760 \\ 3 \times 47 = + 141 \\ \hline 3\,901 \end{array}$$

Теперь решаем задачу типа «4 на 1» в виде 3901×9 для получения итогового ответа 35 109.

Метод сложения

Когда двух- и трехзначные числа в задаче типа «3 на 2» не поддаются простому разложению, можно прибегнуть к методу сложения.

$$\begin{array}{r} 721 \text{ (720 + 1)} \\ \times \quad 37 \\ \hline 720 \times 37 = 26\,640 \text{ (представляем } 72 = 9 \times 8) \\ 1 \times 37 = + \quad 37 \\ \hline 26\,677 \end{array}$$

Данный метод предполагает суммирование ответов задач на умножение типа «2 на 2» и «2 на 1». Такого рода задачи включают в себя более сложные элементы (нежели те, которые имеют место в методе разложения), поскольку при решении примера «2 на 1» приходится держать в уме пятизначное число, а затем складывать результаты. Возможно, проще решить эту задачу путем разложения 721 на 103×7 и последующего вычисления $37 \times 103 \times 7 = 3811 \times 7 = 26\,677$.

Вот другой пример:

$$\begin{array}{r} 732 \text{ (730 + 2)} \\ \times \quad 57 \\ \hline 730 \times 57 = 41\,610 \text{ (представляем } 73 = 70 + 3) \\ 2 \times 57 = + \quad 114 \\ \hline 41\,724 \end{array}$$

Хотя обычно при использовании метода сложения на слагаемые разбивается трехзначное число, порой разбиение двузначного числа более удобно, в особенности если его последние цифры равны 1 или 2, как в следующем примере.

$$\begin{array}{r}
 386 \\
 \times 51 \text{ (} 50 + 1 \text{)} \\
 \hline
 50 \times 386 = 19\,300 \\
 1 \times 386 = + 386 \\
 \hline
 19\,686
 \end{array}$$

Это превращает задачу «3 на 2» в «3 на 1», делая ее абсолютно легкой, так как второе действие представляет собой умножение на 1. Заметьте, кстати, 5 здесь умножается на четное число, что дает дополнительный 0 в ответе. Поэтому в задаче на сложение надо суммировать только две цифры.

Другой пример умножения 5 на четное число показан в следующей задаче:

$$\begin{array}{r}
 835 \\
 \times 62 \text{ (} 60 + 2 \text{)} \\
 \hline
 60 \times 835 = 50\,100 \\
 2 \times 835 = + 1\,670 \\
 \hline
 51\,770
 \end{array}$$

При умножении 6 (из 60) на 5 (из числа 835) появляется дополнительный 0 в ответе, что максимально упрощает задачу на сложение.

Метод вычитания

Как и в задачах на умножение типа «2 на 2», иногда проще решить задачу «3 на 2» путем вычитания вместо сложения, как в следующих примерах.

$$\begin{array}{r}
 629 \text{ (} 630 - 1 \text{)} \\
 \times 38 \\
 \hline
 630 \times 38 = 23\,940 \text{ (} 63 = 9 \times 7 \text{)} \\
 -1 \times 38 = - 38 \\
 \hline
 23\,902
 \end{array}$$

Сложное делаем легким: продвинутое умножение

$$\begin{array}{r} 758 \text{ (760 - 2)} \\ \times \quad 43 \\ \hline 760 \times 43 = 32\,680 \text{ (43 = 40 + 3)} \\ -2 \times 43 = -\quad 86 \\ \hline 32\,594 \end{array}$$

Чтобы сравнить методы вычитания и сложения, применим метод сложения к задаче, которая показана выше.

$$\begin{array}{r} 758 \text{ (750 + 8)} \\ \times \quad 43 \\ \hline 750 \times 43 = 32\,250 \text{ (75 = 5 \times 5 \times 3)} \\ 8 \times 43 = +\quad 344 \\ \hline 32\,594 \end{array}$$

Мое предпочтение при ее решении — использование метода вычитания, потому что я всегда стараюсь оставить максимально легкую задачу на сложение или вычитание на самый конец. В данном случае я бы лучше вычел 86, чем прибавил 344, даже притом, что решить задачу типа «2 на 2» (см. выше) методом вычитания немного сложнее, чем методом сложения.

Метод вычитания тоже можно применять для трехзначных чисел, которые меньше кратного 100 или близки к кратному 1000, как в следующих двух примерах.

$$\begin{array}{r} 293 \text{ (300 - 7)} \\ \times \quad 87 \\ \hline 300 \times 87 = 26\,100 \\ -7 \times 87 = -\quad 609 \\ \hline 25\,491 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 988 \text{ (1000 - 12)} \\ \times \quad 68 \\ \hline 1000 \times 68 = 68\,000 \\ -12 \times 68 = -\quad 816 \text{ (12 = 6 \times 2)} \\ \hline 67\,184 \end{array}$$

Последние три цифры ответа получены путем использования дополнения для числа 816.

В следующем примере мы умножили на двузначное число с помощью метода вычитания. Обратите внимание, как мы отняли 736 путем вычитания 1000 и обратного прибавления дополнения:

736	44 160
$\times \underline{59} (60 - 1)$	$- 1\ 000$
60 × 736 = 44 160	43 160
-1 × 736 = - 736	$+ \underline{264}$ (дополнение для 736)
43 424	43 424

**УПРАЖНЕНИЕ: УМНОЖЕНИЕ «3 НА 2»
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ РАЗЛОЖЕНИЯ,
СЛОЖЕНИЯ И ВЫЧИТАНИЯ**

Решите представленные ниже задачи типа «3 на 2» с использованием методов разложения, сложения или вычитания. Разложение, если оно возможно, обычно облегчает задачу. Сверьтесь с ответами в конце книги.

- | | | | |
|---|---|---|---|
| 1. 858
$\times \underline{15}$ | 2. 796
$\times \underline{19}$ | 3. 148
$\times \underline{62}$ | 4. 773
$\times \underline{42}$ |
| 5. 906
$\times \underline{46}$ | 6. 952
$\times \underline{26}$ | 7. 411
$\times \underline{93}$ | 8. 967
$\times \underline{51}$ |
| 9. 484
$\times \underline{75}$ | 10. 126
$\times \underline{87}$ | 11. 157
$\times \underline{33}$ | 12. 616
$\times \underline{37}$ |
| 13. 841
$\times \underline{72}$ | 14. 361
$\times \underline{41}$ | 15. 218
$\times \underline{68}$ | 16. 538
$\times \underline{53}$ |

Сложное делаем легким: продвинутое умножение

$$\begin{array}{r} 17. \quad \mathbf{817} \\ \times \mathbf{61} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 18. \quad \mathbf{668} \\ \times \mathbf{63} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 19. \quad \mathbf{449} \\ \times \mathbf{25} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 20. \quad \mathbf{144} \\ \times \mathbf{56} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21. \quad \mathbf{281} \\ \times \mathbf{44} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 22. \quad \mathbf{988} \\ \times \mathbf{22} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 23. \quad \mathbf{383} \\ \times \mathbf{49} \\ \hline \end{array}$$

Следующие примеры типа «3 на 2» появятся в разделах по возведению в квадрат пятизначных чисел и умножению типа «5 на 5».

$$\begin{array}{r} 24. \quad \mathbf{589} \\ \times \mathbf{87} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 25. \quad \mathbf{286} \\ \times \mathbf{64} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 26. \quad \mathbf{853} \\ \times \mathbf{32} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 27. \quad \mathbf{878} \\ \times \mathbf{24} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28. \quad \mathbf{423} \\ \times \mathbf{45} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 29. \quad \mathbf{154} \\ \times \mathbf{19} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 30. \quad \mathbf{834} \\ \times \mathbf{34} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 31. \quad \mathbf{545} \\ \times \mathbf{27} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32. \quad \mathbf{653} \\ \times \mathbf{69} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 33. \quad \mathbf{216} \\ \times \mathbf{78} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 34. \quad \mathbf{822} \\ \times \mathbf{95} \\ \hline \end{array}$$

ВОЗВЕДЕНИЕ В КВАДРАТ ПЯТИЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

Освоение задач на умножение типа «3 на 2» требует значительно больше практики, но как только вы освоитесь с ними, можете сразу переходить к задачам по возведению пятизначных чисел в квадрат, потому что они упрощаются до умножения типа «3 на 2» плюс возведение в квадрат двух- и трехзначных чисел. Например, чтобы возвести в квадрат число 46 792, можно выполнить следующие действия:

$$\begin{array}{r} \mathbf{46\ 000 + 792} \\ \times \mathbf{46\ 000 + 792} \\ \hline \end{array}$$

Используя распределительный закон, разделим задачу на такие операции:

$$\mathbf{46\ 000 \times 46\ 000 + 2(46\ 000)(792) + 792 \times 792.}$$