

ГИА-9

Под редакцией Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова



ГИА-9

МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА К ГИА

ЗАДАНИЯ
С ПАРАМЕТРОМ

9 класс

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ГИА»



Учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ГИА»

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

9 класс

Подготовка к ГИА

ЗАДАНИЯ С ПАРАМЕТРОМ

Учебно-методическое пособие



ЛЕГИОН
Ростов-на-Дону
2014

ББК 22.1

К 65

Рецензенты:

Ханин Д.И. — аспирант факультета математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета;

Дерезин С.В. — кандидат физико-математических наук.

Коннова Е.Г.

К 65 Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА. Задания с параметром. — Ростов-на-Дону, Легион, 2014. — 64 с. — (Готовимся к ГИА.)

ISBN 978-5-9966-0512-5

Материал, представленный в данном пособии, предназначен для формирования навыков в решении заданий с параметром, которые являются неотъемлемой частью КИМов по математике в 9 и 11 классах.

Книга основана на материале по математике 7 — 9 классов и состоит из 7 параграфов, каждый из которых разделён на пункты, посвящённые определённым типам задач и способам их решения. Также пособие содержит упражнения для самостоятельной работы и ответы к ним.

Предлагаемое издание адресовано учащимся старших классов общеобразовательных учреждений и учителям математики.

Книга является частью **учебно-методического комплекса «Математика. Подготовка к ГИА»**, включающего такие пособия, как «Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2014», «Математика. 9 класс. Тренажёр по новому плану экзамена: алгебра, геометрия, реальная математика» и т.д.

Продиагностировать уровень математической подготовки и в соответствии с полученными результатами оптимально подобрать необходимые пособия поможет брошюра «Готовимся к ГИА по математике. С чего начать?», содержащая всю информацию об учебно-методическом комплексе «Математика. Подготовка к ГИА» издательства «Легион».

ББК 22.1

ISBN 978-5-9966-0512-5

© ООО «Легион», 2014

Оглавление

От авторов	4
§ 1. Решение линейных уравнений с параметром	5
§ 2. Решение линейных неравенств с параметром	9
1. Линейные неравенства	9
2. Системы линейных неравенств	13
§ 3. Графики на плоскости <i>Oxy</i>	17
1. Уравнение прямой	17
2. Взаимное расположение прямых на плоскости. Системы линейных уравнений	19
3. График функции $y = k/x$	23
4. Окружность	26
5. Парабола	30
6. Кусочные графики	33
§ 4. Квадратные уравнения с параметром	35
§ 5. Разложение квадратного трёхчлена на множители. Формулы Виета	43
1. Разложение квадратного трёхчлена на множители	43
2. Теорема Виета	45
§ 6. Расположение корней квадратного уравнения отно- сительно заданных точек	48
1. Поиск корней и ограничения	48
2. Сравнение корней с нулём	50
3. Расположение корней квадратичной функции	52
§ 7. Использование свойств функций и алгебраических выражений	55
1. Использование симметрии алгебраических выражений	55
2. Использование монотонности функций	57
3. Использование ОДЗ и оценка множества значений	59
Ответы	62

От авторов

На государственной итоговой аттестации, как в 9, так и в 11 классе, обязательно встречаются задания с параметром. Кроме того, такие задачи — обязательная часть олимпиад различного уровня.

С помощью этих задач проверяются не базовые умения выпускников, а уровень математического и логического мышления и навыки исследовательской деятельности.

В школьных учебниках задачи с параметром относятся к заданиям повышенного уровня сложности и их решению уделяется мало внимания.

Настоящее пособие поможет учащимся подготовиться к решению таких задач на примере математического материала 7—9 классов.

Материал пособия разделён не только на параграфы, но и на пункты, каждый из которых посвящён определённому типу задач. Упражнения для самостоятельной работы приводятся после соответствующего пункта.

Эта книга может стать пособием для учебного курса в школе или для студентов педагогических институтов, будущих учителей математики.

Также она предназначена школьникам, которые хотят самостоятельно или под руководством учителя освоить способы решения задач с параметром.

Замечания и предложения, касающиеся данной книги, можно присылать по почте или на электронный адрес: legionrus@legionrus.com.

Обсудить пособие, оставить свои замечания и предложения, задать вопросы можно на официальном форуме издательства <http://legion-posobiya.livejournal.com>.

§ 1. Решение линейных уравнений с параметром

1. Решите уравнение $ax = p$ при всех значениях параметров a и p .

Решение: Сначала разберём случай, когда $a \neq 0$. Тогда уравнение имеет один корень $x = \frac{p}{a}$.

Если $a = 0$, то уравнение принимает вид $0 \cdot x = b$ или $0 = b$.

Это уравнение не имеет корней, если $b \neq 0$, и имеет бесконечно много корней, если $b = 0$ (x — любое число из области допустимых значений, в данном случае x — любое действительное число).

Ответ: Если $a \neq 0$, $x = \frac{p}{a}$.

Если $a = 0$, $b \neq 0$, нет корней.

Если $a = 0$, $b = 0$, x — любое число.

2. Решите уравнение $5(x - a) + 2a^2 = x$ при всех значениях параметра a .

Решение: Выполним преобразования.

$$5x - 5a + 2a^2 = x,$$

$$5x - x = 5a - 2a^2,$$

$$4x = 5a - 2a^2.$$

Поделим обе части уравнения на 4.

$$x = \frac{5a - 2a^2}{4}.$$

Ответ: $x = \frac{5a - 2a^2}{4}$.

3. Решите уравнение $a(x - 2) + 8a = 6(x - a^2)$ при всех значениях параметра a .

Решение: Выполним преобразования.

$$ax - 2a + 8a = 6x - 6a^2,$$

$$ax - 6x = -6a^2 - 6a,$$

$$(a - 6)x = -6a(a + 1).$$

Разберём два случая:

1) $a - 6 \neq 0$. Тогда $x = \frac{-6a(a + 1)}{a - 6}$.

2) $a - 6 = 0$, то есть $a = 6$. В этом случае уравнение примет вид $0 \cdot x = -6 \cdot 6 \cdot 7$, $0 \cdot x = -252$. Это равенство неверно, значит корней нет.

Ответ: Если $a = 6$, корней нет.

$$\text{Если } a \neq 6, x = \frac{-6a(a+1)}{a-6}.$$

4. Решите уравнение $a^2(x-2) = 2(2x-a-6)$ при всех значениях параметра a .

Решение: Преобразуем уравнение.

$$a^2x - 2a^2 = 4x - 2a - 12;$$

$$a^2x - 4x = 2a^2 - 2a - 12;$$

$$(a^2 - 4)x = 2(a^2 - a - 6);$$

$$(a-2)(a+2)x = 2(a+2)(a-3).$$

Рассмотрим возможные случаи:

$$1) (a-2)(a+2) \neq 0, \text{ то есть } a \neq 2, a \neq -2.$$

$$\text{В этом случае } x = \frac{2(a+2)(a-3)}{(a-2)(a+2)}; x = \frac{2(a-3)}{a-2}.$$

2) $a = 2$. Подставим $a = 2$ в уравнение. Получим $0 \cdot x = -8$. Это неверное равенство, какое бы значение ни принимало x . Поэтому корней при $a = 2$ уравнение не имеет.

3) $a = -2$. При таком значении a уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$, что верно при любом значении переменной x .

Ответ: При $a = 2$ нет корней.

При $a = -2$ x — любое число.

$$\text{При } a \neq \pm 2 \quad x = \frac{2(a-3)}{a-2}.$$

5. Найдите, при каких значениях параметра a уравнение $2a^2(x-1) = a - 3(ax+1)$ имеет корень, принадлежащий промежутку $[-3; 2)$.

Решение: Выясним, при каких значениях параметра a уравнение имеет корни.

$$2a^2x - 2a^2 = a - 3ax - 3;$$

$$2a^2x + 3ax = 2a^2 + a - 3;$$

$$ax(2a+3) = 2a^2 + a - 3.$$

Если $a(2a+3) \neq 0$, то есть $a \neq 0$ и $a \neq -1,5$, то $x = \frac{2a^2 + a - 3}{a(2a+3)}$;

$x = \frac{(2a+3)(a-1)}{a(2a+3)}$; $x = \frac{a-1}{a}$. Найдём, при каких значениях a корень уравнения принадлежит промежутку $[-3; 2)$.

$-3 \leq \frac{a-1}{a} < 2$. Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} \frac{a-1}{a} \geq -3, \\ \frac{a-1}{a} < 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{4a-1}{a} \geq 0, \\ \frac{-a-1}{a} < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a < 0 \text{ или } a \geq 0,25, \\ a < -1 \text{ или } a > 0. \end{cases}$$

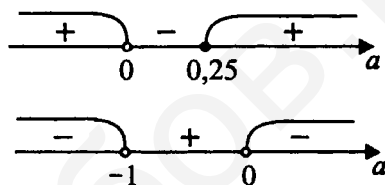


Рис. 1.

$a < -1$ или $a \geq 0,25$ (см. рис. 1).

Учитывая, что $a \neq -1,5$ и $a \neq 0$, получим

$$a \in (-\infty; -1,5) \cup (-1,5; -1) \cup [0,25; +\infty).$$

Если $a = 0$, уравнение принимает вид $0 \cdot x = -3$, корней нет.

Если $a = -1,5$, уравнение превращается в тождество $0 \cdot x = 0$. Корнем уравнения является любое действительное число, то есть при $a = -1,5$ уравнение имеет корни, принадлежащие промежутку $[-3; 2)$.

Значит, искомые $a \in (-\infty; -1) \cup [0,25; +\infty)$.

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup [0,25; +\infty)$.

6. Найдите, при каких значениях параметра a корень уравнения $ax^2 + 3x = 2a$ является корнем уравнения $ax^2 - 5a^2x = 2a$.

Решение: Если некоторое число $x = t$ является корнем как первого, так и второго уравнения, то выполняются оба равенства $at^2 + 3t - 2a = 0$ и $at^2 - 5a^2t - 2a = 0$.

Тогда $at^2 + 3t - 2a = at^2 - 5a^2t - 2a$, $3t + 5a^2t = 2a - 2a$,
 $(3 + 5a^2)t = 0$.

Так как $3 + 5a^2 > 0$ при любом значении a , равенство возможно только при $t = 0$. Мы получили, что если у заданных уравнений есть общий корень, то он равен 0.

Подставим нуль в первое исходное уравнение $a \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 2a$, $2a = 0$, $a = 0$.

Второе уравнение при $a = 0$ и $x = 0$ также превратится в равенство, т.е. $ax^2 - 5a^2x - 2a = 0$ при $x = t = 0$.

Ответ: 0.

7. Решите систему уравнений с двумя неизвестными $\begin{cases} ax + y = 7, \\ 5ax - 2y = 2 \end{cases}$ при всех значениях параметра a .

Решение: Выразим y из первого уравнения и подставим полученное выражение во второе уравнение системы.

$$y = 7 - ax, \quad 5ax - 2(7 - ax) = 2,$$

$$5ax - 14 + 2ax = 2,$$

$$7ax = 16,$$

$$ax = \frac{16}{7}.$$

$$\text{Если } a \neq 0, \quad x = \frac{16}{7a}, \quad y = 7 - ax = 7 - a \cdot \frac{16}{7a} = 4\frac{5}{7}.$$

$$\text{Если } a = 0, \quad 0 \cdot x = \frac{16}{7}, \text{ корней нет.}$$

Ответ: Если $a = 0$, нет решений.

$$\text{Если } a \neq 0, \quad x = \frac{16}{7a}, \quad y = 4\frac{5}{7}.$$

Упражнения

Решите уравнение при всех значениях параметра.

1.1. $8x = 40a$.

1.2. $18 - 7(x + a) = x - a^3$.

1.3. $(a + 2)x = 7a$.

1.4. $(1 - a^2)x = 2a + 2$.

1.5. $a^2(x - 1) = 3x + a(2x - 3)$.

1.6. Найдите, при каких значениях параметра a уравнение $a^2(x - 1) = 5(ax - 5)$ имеет корень, принадлежащий промежутку $[-4; -3]$.

1.7. Найдите, при каких значениях параметра a хотя бы один корень уравнения $2a^2t - at - 1 = 0$ является корнем уравнения $a^2t - at - t + a^2 = 0$.

1.8. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - ay = 3, \\ 3x + 2ay = 4 \end{cases}$ для всех значений параметра a .

§ 2. Решение линейных неравенств с параметром

1. Линейные неравенства

1. При каких значениях параметра a число 8 является решением неравенства $3x > 5a - 7a(x + 2)$?

Решение: Решение неравенства — такое значение неизвестного, которое при подстановке в неравенство превращает его в верное числовое неравенство.

$$3 \cdot 8 > 5a - 7a \cdot (8 + 2),$$

$$24 > 5a - 70a,$$

$$24 > -65a,$$

$$65a > -24,$$

$$a > -\frac{24}{65}.$$

Ответ: $a > -\frac{24}{65}$.

2. Решите неравенство $ax > b$ при всех значениях параметров a и b .

Решение: При решении линейных неравенств может возникнуть три принципиально разных случая:

1) $a > 0$. Тогда мы имеем право разделить обе части неравенства на a , получим $x > \frac{b}{a}$.

2) $a < 0$. Мы также можем разделить на a , но знак неравенства при этом нужно поменять на противоположный. Получим $x < \frac{b}{a}$.

3) $a = 0$. Неравенство превращается в числовое неравенство $0 > b$. Если $b < 0$, то неравенство верно и решением неравенства является любое число.

Если $b \geq 0$, то неравенство неверно и неравенство не имеет решений.

Ответ: Если $a > 0$, $x > \frac{b}{a}$.

Если $a < 0$, $x < \frac{b}{a}$.

Если $a = 0$, $b < 0$, то x — любое число.

Если $a = 0$, $b \geq 0$, то решений нет.

3. Решите неравенство $ax + 3 < 5(a + 2x)$ при каждом значении параметра a .

Решение: Выполним преобразования.

$$ax + 3 < 5a + 10x;$$

$$ax - 10x < 5a - 3;$$

$$(a - 10)x < 5a - 3.$$

Рассмотрим несколько случаев.

1) $a - 10 > 0$, $a > 10$. Тогда $x < \frac{5a - 3}{a - 10}$.

2) $a - 10 < 0$, $a < 10$. Тогда $x > \frac{5a - 3}{a - 10}$.

3) $a = 10$. Неравенство принимает вид $0 \cdot x < 47$, то есть $0 < 47$. Неравенство верно, поэтому любое число будет решением неравенства.

Ответ: Если $a > 10$, $x < \frac{5a - 3}{a - 10}$.

Если $a < 10$, $x > \frac{5a - 3}{a - 10}$.

Если $a = 10$, x — любое число.

4. Решите неравенство $2(ax - 16) \geq a - 5x$ при всех значениях параметра a .

Решение: Преобразуем неравенство.

$$2(ax - 16) \geq a - 5x;$$

$$2ax - 32 \geq a - 5x;$$

$$(2a + 5)x \geq a + 32.$$

1) $2a + 5 > 0$, $a > -2,5$. Тогда $x \geq \frac{a + 32}{2a + 5}$.

2) $2a + 5 < 0$, $a < -2,5$. Тогда $x \leq \frac{a + 32}{2a + 5}$.

3) $a = -2,5$. Неравенство принимает вид $0 \cdot x \geq 29,5$, $0 \geq 29,5$. Данное числовое неравенство неверно, поэтому решений нет.

Ответ: Если $a > -2,5$, $x \geq \frac{a + 32}{2a + 5}$.

Если $a < -2,5$, $x \leq \frac{a + 32}{2a + 5}$.

Если $a = -2,5$, решений нет.

5. При каких значениях параметра p решением неравенства

$$9x - p + 7 \geq 2(p + x)$$
 будет промежуток $[3; +\infty)$?

Решение: $9x - p + 7 \geq 2(p + x)$,

$$9x - 2x \geq 2p + p - 7,$$

$$7x \geq 3p - 7,$$

$$x \geq \frac{3}{7}p - 1.$$

Решением этого неравенства будет промежуток $[3; +\infty)$, если

$$\frac{3}{7}p - 1 = 3, \quad \frac{3}{7}p = 4, \quad p = \frac{28}{3}; \quad p = 9\frac{1}{3}.$$

Ответ: $p = 9\frac{1}{3}$.

6. Найдите все значения параметра p , при которых хотя бы одно значение переменной x из промежутка $[-3; 2)$ является решением неравенства $8(-x + p) > 5$.

Решение: Решим неравенство.

$$-8x + 8p > 5;$$

$$-8x > -8p + 5;$$

$$x < \frac{-8p + 5}{-8};$$

$$x < p - \frac{5}{8}.$$

Изобразим множество решений неравенства на числовой оси (см. рис. 2).

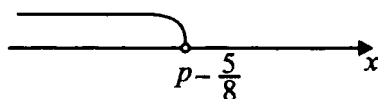


Рис. 2.

Нам нужно, чтобы хотя бы одно значение из промежутка $[-3; 2)$ являлось решением неравенства $x < p - \frac{5}{8}$. Чтобы понять, какие p нам подойдут, рассмотрим ряд случаев.

1. Все значения $[-3; 2)$ являются решениями неравенства (см. рис. 3).

В этом случае $2 \leq p - \frac{5}{8}$ и такие p нам подходят.

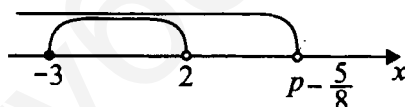


Рис. 3.

2. $-3 < p - \frac{5}{8} < 2$. В этом случае часть чисел из промежутка $[-3; 2)$ являются решениями неравенства, а часть не являются (см. рис. 4). Эти p нам тоже подходят.

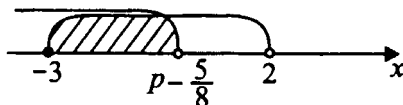


Рис. 4.

3. $p - \frac{5}{8} = -3$. Видим, что $x = -3$ не является решением неравенства в этом случае, а $x > -3$ не являются решениями тем более (см. рис. 5). Такое p нам не подходит.

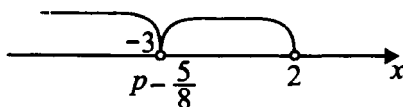


Рис. 5.

4. $p - \frac{5}{8} < -3$. В этом случае ни одно из чисел из промежутка $[-3; 2]$ не является решением неравенства (см. рис. 6), значит при $p - \frac{5}{8} < -3$ условие не выполняется.

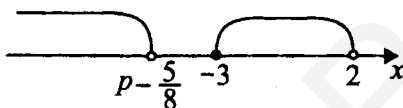


Рис. 6.

Мы получили, что при $p - \frac{5}{8} > -3$, т.е. $p > -2\frac{3}{8}$, условие выполнено.

Ответ: $p > -2\frac{3}{8}$.

2. Системы линейных неравенств

Напомним, решением системы неравенств является пересечение решений всех неравенств системы, другими словами, все значения переменной, при которых выполняются все неравенства.

1. Найдите все значения параметра a , при которых число 4 является решением системы неравенств
$$\begin{cases} 5ax - 7a > 3; \\ 8x + 2a \leq ax. \end{cases}$$

Решение: $x = 4$ — решение системы. Подставим его в оба неравенства системы и найдём те значения a , при которых неравенства верны.

$$\begin{cases} 5a \cdot 4 - 7a > 3, \\ 8 \cdot 4 + 2a \leq a \cdot 4; \end{cases} \quad \begin{cases} 13a > 3, \\ -2a \leq -32; \end{cases} \quad \begin{cases} a > \frac{3}{13}, \\ a \geq 16; \end{cases} \quad a \geq 16.$$

Ответ: $a \geq 16$.

2. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3x + 8 \geq 26, \\ x + 3 < a \end{cases}$ при всех значениях параметра a .

Решение: $\begin{cases} 3x \geq 26 - 8; \\ x < a - 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 6, \\ x < a - 3. \end{cases}$

Изобразим решения неравенств на числовой оси (см. рис. 7)



Рис. 7.

Возможны три случая.

1) $6 < a - 3$ (см. рис. 8), т.е. $a > 9$. Тогда $x \in [6; a - 3)$.



Рис. 8.

2) $a - 3 = 6$ (см. рис. 9), $a = 9$ — решений нет.

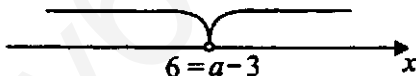


Рис. 9.

2) $a - 3 < 6$ (см. рис. 10), $a < 9$. В этом случае система также не имеет решений.

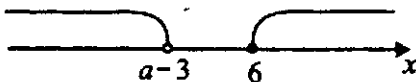


Рис. 10.

Ответ: Если $a > 9$, $x \in [6; a - 3)$.

Если $a \leq 9$, решений нет.

3. При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} 3x \leq 5 + ax, \\ 17(x - a) \geq 2(5x + 7) - 17a \end{cases} \quad \text{имеет хотя бы одно решение?}$$

Решение: Преобразуем систему:

$$\begin{cases} 3x \leq 5 + ax, \\ 17x - 17a \geq 10x - 17a + 14; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - ax \leq 5, \\ 7x \geq 14; \end{cases} \quad \begin{cases} (3-a)x \leq 5, \\ x \geq 2. \end{cases} \quad (1)$$

Решим первое неравенство системы.

Если $3 - a > 0$, т.е. $a < 3$, то $x \leq \frac{5}{3-a}$.

Если $3 - a < 0$, т.е. $a > 3$, то $x \geq \frac{5}{3-a}$.

Если $3 - a = 0$, т.е. $a = 3$, то $0 \leq 5$ — верное неравенство, решениями системы являются все решения второго неравенства, т.е. $x \geq 2$.

Рассмотрим систему (1).

$$1) a = 3, \quad \begin{cases} 0 \leq 5, \\ x \geq 2; \end{cases} \quad x \geq 2.$$

При $a = 3$ система (1) имеет решение.

$$2) a < 3, \quad \begin{cases} x \leq \frac{5}{3-a} \\ x \geq 2. \end{cases}$$

Эта система имеет хотя бы одно решение, если $\frac{5}{3-a} \geq 2$ (см. рис. 11).

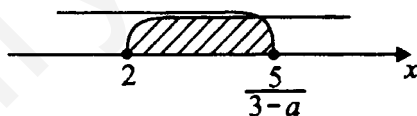


Рис. 11.

Так как в этом случае $a < 3$, т.е. $3-a > 0$, можно неравенство $\frac{5}{3-a} \geq 2$ умножить на $3-a$, получим $5 \geq 2(3-a)$, $5 \geq 6-2a$, $2a \geq 1$, $a \geq 0,5$.

При $\begin{cases} a \geq 0,5, \\ a < 3 \end{cases}$ система (1) имеет решения.

$$2) a > 3. \text{ В этом случае } \begin{cases} x \leq \frac{5}{3-a}, \\ x \leq 2. \end{cases}$$

Эта система при любом $a > 3$ имеет решения.

Учитывая все рассмотренные случаи, получаем, что исходная система имеет решения при $a \geq 0,5$.

Ответ: $a \geq 0,5$.

Упражнения

2.1. При каких значениях параметра a число 3 является решением неравенства $8x(a+4) \leq 3a(x-7)$?

Решите неравенство при каждом значении параметра.

2.2. $7x \geq 3a + 49$.

2.3. $x - 8 < 5(x + a)$.

2.4. $(a + 2)x > 6a$.

2.5. $a(5x - 3) \geq 1 + 2x$.

2.6. При каких значениях параметра p решением неравенства $8p - 2x + 3 < 6(p + x)$ будет промежуток $(2; +\infty)$?

2.7. Найдите все значения параметра m , при которых хотя бы одно значение x из промежутка $(1; 7]$ является решением неравенства $3(2p - x) \leq 5 + p$.

2.8. Найдите все значения параметра a , при которых число -8 является решением системы неравенств
$$\begin{cases} x - 5a < 3, \\ 3 - 2ax \leq a. \end{cases}$$

2.9. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} 2x - 4 < 15, \\ 5 - x > a \end{cases}$$
 при всех значениях параметра a .

2.10. При каких значениях параметра m система неравенств
$$\begin{cases} 8(a - x) + 28 \leq 3(2x + a) + 5a, \\ ax > 3 - 2x \end{cases}$$
 не имеет решений?

§ 3. Графики на плоскости Oxy

Некоторые задания с параметром удобно решать, представив условие в графическом виде. Для этого нужно уметь строить графики уравнений и семейства кривых, зависящих от параметра.

1. Уравнение прямой

Уравнение прямой можно записать так: $ax + by + c = 0$ или $y = kx + p$.

Уравнение прямой, проходящей параллельно оси абсцисс Ox , выглядит так: $y = c$, где c — ордината любой точки прямой (см. рис. 12а).

Уравнение прямой, проходящей параллельно оси ординат Oy , выглядит так: $x = p$, где p — абсцисса любой точки прямой (см. рис. 12б).

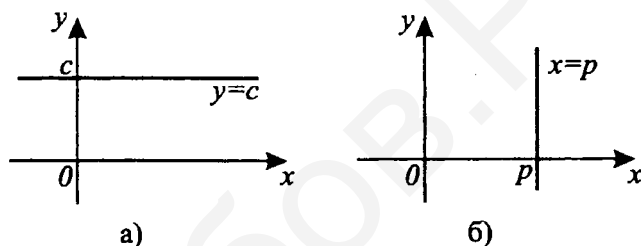


Рис. 12.

Рассмотрим уравнение прямой $ax + by + c = 0$.

Если $a = 0$, $b \neq 0$, то уравнение примет вид $by + c = 0$, $y = -\frac{c}{b}$.

Если $a \neq 0$, $b = 0$, то $ax + c = 0$, $x = -\frac{c}{a}$. Эти случаи мы уже разобрали.

Если $a \neq 0$, $b \neq 0$, то уравнение можно записать так $by = -c - ax$, $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, то есть в виде $y = kx + p$.

Выясним, как зависит вид прямой от параметров k и p .

Если $x = 0$, то $y = p$, значит прямые $y = kx + p$ проходят через точку $(0; p)$, то есть пересекают ось Oy в этой точке.

Например, $y = kx + 2$ — это семейство прямых, пересекающих ось Oy в точке $(0; 2)$. Некоторые из этих прямых показаны на рисунке 13. То есть

параметр p показывает, какая ордината у точки пересечения прямой с осью ординат. Назовём параметр p свободным коэффициентом.

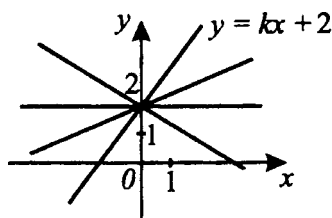


Рис. 13.

Выясним, что показывает значение параметра k в уравнении $y = kx + p$. Рассмотрим две точки с абсциссами x_0 и $x_0 + \Delta x$. Найдём их ординаты.

$$y(x_0) = kx_0 + p, \quad y(x_0 + \Delta x) = k(x_0 + \Delta x) + p,$$

$$y(x_0 + \Delta x) = k \cdot x_0 + p + k \cdot \Delta x.$$

Абсциссы этих точек отличаются на Δx , ординаты на $\Delta y = k\Delta x$. То есть $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k$. Другими словами, $k = \operatorname{tg} \alpha$ (см. рис. 14), где α — угол между прямой и положительным направлением оси Ox .

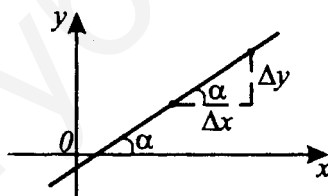


Рис. 14.

Число k называют угловым коэффициентом, так как он показывает, под каким углом к оси Ox проходит прямая.

Если $k = 0$, то прямая параллельна оси Ox , если $k > 0$, угол α острый, если же $k < 0$, угол α тупой (см. рис. 15).

Мы получили, что $y = kx + b$, где k — известное число, b — параметр — это семейство параллельных прямых с угловым коэффициентом k . Например, на рисунке 16 изображены некоторые из семейства прямых $y = -0,5x + b$.

Заметим, что прямые $y = k(x - x_0) + y_0$ проходят через точку $(x_0; y_0)$.

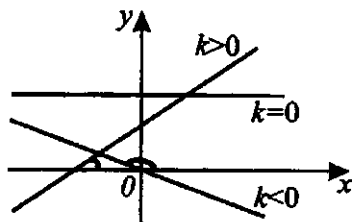


Рис. 15.

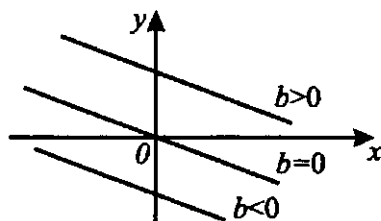


Рис. 16.

Рассмотрим задачу.

1. При каких значениях a прямая $y = 2ax + 7$

а) параллельна прямой $y = (a + 5)x - 3a$?

б) совпадает с этой прямой?

Решение: Прямые параллельны, если их угловые коэффициенты равны, но свободные коэффициенты не равны:

$$\begin{cases} 2a = a + 5, \\ 7 \neq -3a; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 5, \\ a \neq -\frac{7}{3}; \end{cases} \quad a = 5.$$

При $a = 5$ прямые параллельны.

Прямые совпадают, если равны и угловые, и свободные коэффициенты соответственно, то есть $\begin{cases} 2a = a + 5, \\ 7 = -3a. \end{cases}$

Эта система не имеет решений, поэтому эти прямые не могут совпадать.

Ответ: а) $a = 5$, б) нет таких a .

2. Взаимное расположение прямых на плоскости. Системы линейных уравнений

Прямые не имеют общих точек, если они параллельны. Если они совпадают, то общих точек бесконечно много.

Если прямые пересекаются, у них одна общая точка.

Давайте рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$

Их геометрическое представление на плоскости Oxy — две прямые, причём решение системы — пара (x_0, y_0) — является общей точкой двух этих прямых.

1) Если $a_2 b_2 \neq 0$, то возможны три случая.

а) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, тогда прямые пересекаются и система имеет одну общую точку.

б) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, $c_2 \neq 0$ или $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ и $c_1 = c_2 = 0$, тогда прямые совпадают и система имеет бесконечно много решений.

в) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, тогда прямые параллельны и система решений не имеет.

2) Рассмотрим случаи, когда $a_2 b_2 = 0$.

г) Если $\begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 = 0 \end{cases}$ и $b_2 \neq 0$, то прямые параллельны при $\frac{c_1}{c_2} = \frac{b_1}{b_2}$, когда $c_2 \neq 0$ либо при $c_1 = c_2 = 0$ или совпадают (при $c_1 \neq c_2$).

Аналогично, если $\begin{cases} b_1 = 0, \\ b_2 = 0 \end{cases}$ и $a_2 \neq 0$, то прямые параллельны при $\frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1}{a_2}$, когда $c_2 = 0$, и при $c_1 = c_2 = 0$.

д) Если $\begin{cases} a_1 \neq 0, \\ a_2 = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} b_1 \neq 0, \\ b_2 = 0, \end{cases}$ то прямые пересекаются.

2. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений $\begin{cases} 5x + ay = 18, \\ (a + 7)x + a^2y = 6 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

Решение: Рассмотрим два случая.

1) $a = 0$, тогда система примет вид $\begin{cases} 5x = 18, \\ 7x = 6. \end{cases}$

Эта система не имеет решений.

$$2) a \neq 0.$$

Система имеет одно решение, если $\frac{a+7}{5} \neq \frac{a^2}{a}$, то есть $(a+7)a \neq a^2 \cdot 5$,

$$a+7 \neq 5a,$$

$$4a \neq 7,$$

$$a \neq 1\frac{3}{4}.$$

Система имеет единственное решение при $a \neq 0$, $a \neq 1\frac{3}{4}$.

Значит, $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1\frac{3}{4}) \cup (1\frac{3}{4}; +\infty)$.

Ответ: $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1\frac{3}{4}) \cup (1\frac{3}{4}; +\infty)$.

3. Найдите все значения параметра a , при которых прямая $y = a(x-2) + 3$ имеет не менее двух общих точек с квадратом, вершины которого находятся в точках $(-5; 0)$, $(0; 3)$, $(-1; -1)$.

Решение: Построим квадрат $BCDE$ с заданными вершинами (см. рис. 17).

Найдём координату точки D . Так как $DC = BE$ и $DC \parallel BE$, то вектор $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$. Координаты $\overrightarrow{BE} \{-4; 1\}$, координаты $\overrightarrow{CD} \{x_D - x_C; y_D - y_C\}$, то есть $\{x_D - 0; y_D - 3\}$. У равных векторов — равные координаты, поэтому $x_D - 0 = -4$, $x_D = -4$, $y_D - 3 = 1$, $y_D = 4$. Получим $D(-4; 4)$.

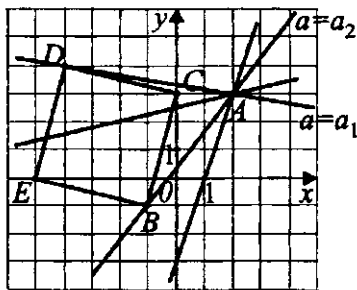


Рис. 17.

$y = a(x-2) + 3$ — семейство прямых, проходящих через точку $A(2; 3)$. Это легко доказать, подставив $x = 2$, $y = 3$ в уравнение прямой. Заметим,

что при увеличении углового коэффициента a прямые вращаются вокруг точки A против часовой стрелки.

По рисунку 17 видно, что при $a \in (a_1; a_2)$ прямая имеет с квадратом более одной общей точки.

Найдём a_1 . Прямая $y = a(x - 2) + 3$ проходит через точку $(-4; 4)$.

$$a(-4 - 2) + 3 = 4,$$

$$-6a = 1,$$

$$a = -\frac{1}{6}.$$

Найдём a_2 . Прямая проходит через точку $(-1; -1)$.

$$a(-1 - 2) + 3 = -1,$$

$$-3a = -4,$$

$$a = \frac{4}{3}.$$

Значит, искомые $a \in \left(-\frac{1}{6}; \frac{4}{3}\right)$.

Ответ: $a \in \left(-\frac{1}{6}; \frac{4}{3}\right)$.

Упражнения

3.1. Постройте прямую $y = a$, если:

а) $a = -3$,

б) $a = -1$,

в) $a = 0$,

г) $a = 4$.

3.2. Постройте прямую $x = a$, если:

а) $a = -3$,

б) $a = -1$,

в) $a = 0$,

г) $a = 4$.

3.3. Постройте прямую $y = kx - 3$, если:

а) $k = 0$,

б) $k = -1$,

в) $k = 0,5$,

г) $k = 2$.

3.4. Постройте прямую $y = \frac{1}{2}x + a$, если:

а) $a = 0$,

б) $a = -2$,

в) $a = 2$,

г) $a = 4$.

3.5. Постройте прямую $y = a(x - 3) - 2$, если:

а) $a = 0$,

б) $a = -1$,

в) $a = 0,5$,

г) $a = 3$.

3.6. Найдите k , при котором прямая $y = kx + 7$ проходит через точку $(2; 1)$.

3.7. Найдите a , при котором прямая $y = 2x + a$ проходит через точку $(-3; 5)$.

3.8. При каких значениях a прямая $y = 5ax + 8$

а) параллельна прямой $y = (a^2 + 2a)x + a + 5$?

б) совпадает с этой прямой?

3.9. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2ay = 6, \\ (a + 5)x - a^2y = 10 \end{cases} \text{ имеет}$$

а) ровно одно решение,

б) бесконечно много решений.

3.10. Найдите все значения параметра a , при которых прямая $y = a(x + 2) - 5$ имеет не более одной общей точки с квадратом, вершины которого находятся в точках $(-1; -2)$, $(3; 2)$, $(7; -2)$.

3. График функции $y = k/x$

Область допустимых значений $x \neq 0$. Графиком этой функции является гипербола (при $k \neq 0$).

Если $k > 0$, её ветви расположены в I и III четвертях (см. рис. 18а), если же $k < 0$, то во II и IV четвертях (см. рис. 18б).

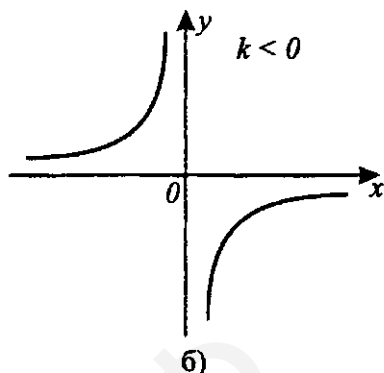
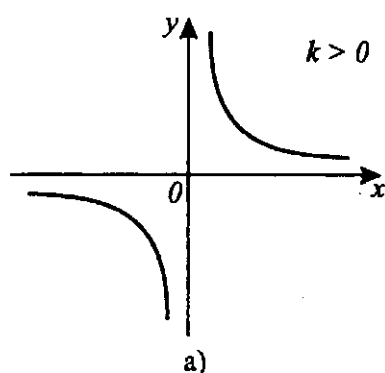


Рис. 18.

Иногда уравнение гиперболы записывают в виде $xy = k$, $k \neq 0$.

Если рассмотреть две гиперболы $y = \frac{k_1}{x}$ и $y = \frac{k_2}{x}$, где k_1 и k_2 одного знака и $|k_1| > |k_2|$, то ветви гиперболы $y = \frac{k_2}{x}$ будут лежать к осям координат ближе, чем ветви $y = \frac{k_1}{x}$ (см. рис. 19).

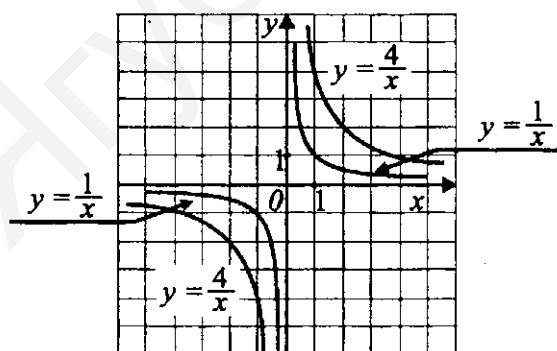


Рис. 19.

4. Найдите, при каких значениях параметра p уравнение $p \cdot |x| = \frac{3x - 6}{x^2 - 2x}$ имеет один корень.

Решение: Решим задачу графически.

Уравнение $p \cdot |x| = \frac{3x-6}{x^2-2x}$ имеет столько решений, сколько общих

точек имеют графики $y = p \cdot |x|$ и $y = \frac{3x-6}{x^2-2x}$.

При $x \geq 0$ график $y = p \cdot |x|$ — часть прямой $y = px$, при $x < 0$ — часть прямой $y = -px$. Несколько графиков такого вида можно увидеть на рисунке 20а.

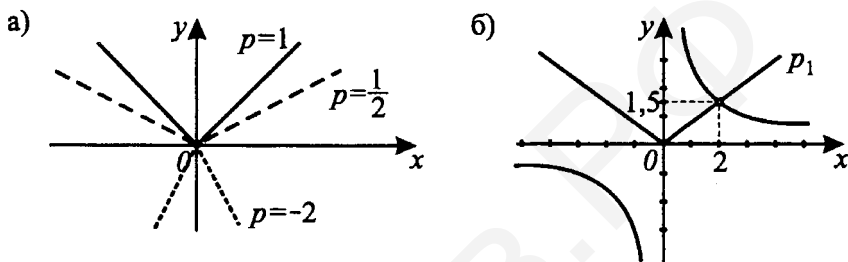


Рис. 20.

Построим график функции $y = \frac{3x-6}{x^2-2x}$. (1)

Найдём область допустимых значений аргумента $x^2 - 2x \neq 0$, $x \neq 0$, $x \neq 2$. Упростим уравнение (1):

$$\frac{3x-6}{x^2-2x} = \frac{3(x-2)}{x(x-2)} = \frac{3}{x}, \quad y = \frac{3}{x}.$$

График уравнения (1) — гипербола с выколотой точкой (так как $x \neq 2$). По рисунку 20б видно, что графики имеют одну общую точку, если $p \neq 0$ и если график $y = p_1 \cdot |x|$ не проходит через точку $A\left(2; \frac{3}{2}\right)$.

$$\text{Найдём } p_1. \quad y = p_1|x|, \quad \frac{3}{2} = p_1 \cdot |2|, \quad p_1 = \frac{3}{2} : 2 = \frac{3}{4}.$$

Значит, исходное уравнение имеет один корень при $p \neq 0$ и $p \neq \frac{3}{4}$.

Ответ: $p \neq 0, p \neq \frac{3}{4}$.

4. Окружность

Уравнение окружности имеет вид $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, при этом $(x_0; y_0)$ — координаты центра окружности, $r > 0$ — радиус окружности.

Например, окружность $x^2 + y^2 = R^2$ имеет центр в начале координат и радиус R .

5. Постройте окружность

а) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 1$,

б) $(x - 7)^2 + y^2 = 4$,

в) $x^2 + y^2 = 9$,

г) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$.

Решение: а) Это окружность с центром $(3; -2)$ и радиусом 1 (см. рис. 21а).

б) Это окружность с центром $(7; 0)$ и радиусом 2 (см. рис. 21б).

в) Это окружность с центром $(0; 0)$ и радиусом 3 (см. рис. 21в).

г) Преобразуем уравнение, выделив полные квадраты:

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y = 4, \quad x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 4 + 1 + 4, \quad (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9.$$

Строим окружность с центром $(1; -2)$ и радиусом 3 (см. рис. 21г).

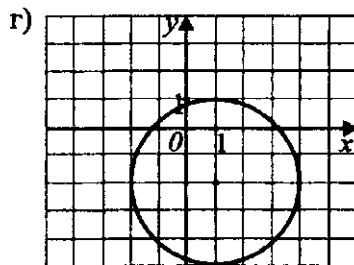
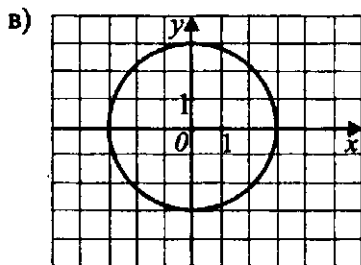
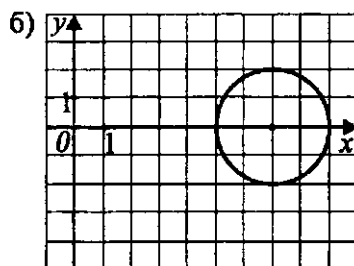
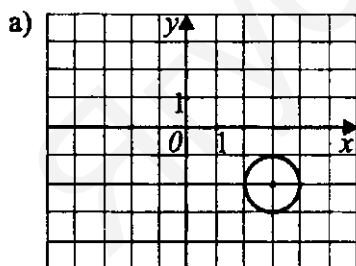


Рис. 21.

6. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений
- $$\begin{cases} x^2 + 6x + y^2 = a^2 - 9, \\ (x - 3)(y + 3) = 0 \end{cases}$$
- имеет нечётное число решений.

Решение: Решим задачу графически.

Уравнение $x^2 + 6x + y^2 = a^2 - 9$ можно привести к виду $(x+3)^2 + y^2 = a^2$, его график — окружность с центром в точке $A(-3; 0)$ и радиусом $R = |a|$.

$(x-3)(y+3) = 0$ равносильно совокупности $\begin{cases} x - 3 = 0, \\ y + 3 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 3, \\ y = -3. \end{cases}$ (1) (2)

Это две прямых, параллельных осям координат (см. рис. 22).

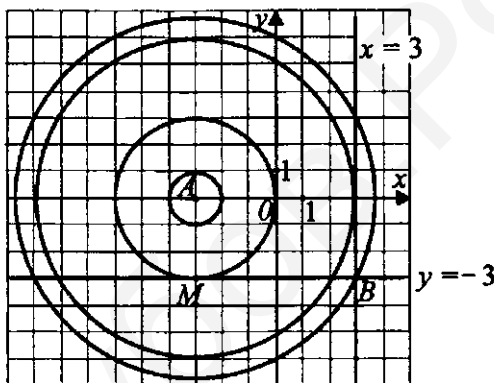


Рис. 22.

По рисунку видно, что расстояние от точки A до прямой $y = -3$ равно 3, а до прямой $x = 3$ равно 6. Значит, при $R < 3$ окружность и прямая (2) не имеют общих точек, при $R = 3$ имеют 1 общую точку M и при $R > 3$ имеют 2 точки пересечения. Аналогично при $R < 6$ окружность и прямая (1) не имеют общих точек, при $R = 6$ — одну и при $R > 6$ — две общих точки. Таким образом, система имеет нечётное число решений при $|a| = 3$, то есть при $a = \pm 3$, и при $|a| = 6$, то есть при $a = \pm 6$. Казалось бы, что других решений задача не имеет, но прямые $x = 3$ и $y = -3$ имеют общую точку $B(3; -3)$. Если окружность проходит через эту точку, система будет иметь 3 решения. Искомое значение a можно найти из прямоугольного $\triangle AMB$ или подставив значения $x = 3$, $y = -3$ в уравнение окружности. $|a| = \sqrt{45}$.

Ответ: $\pm 3; \pm 6; \pm \sqrt{45}$.

7. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} y = \sqrt{-x^2 - 6x - 5}, \\ y = a(x - 3) + 2 \end{cases} \quad \text{имеет решения.}$$

Решение: Построим график уравнения

$$y = \sqrt{-x^2 - 6x - 5}, \quad y = \sqrt{4 - (x^2 + 6x + 9)}.$$

Если $y \geq 0$, то $y^2 = 4 - (x + 3)^2$, $(x + 3)^2 + y^2 = 4$. При $y < 0$ нет точек, удовлетворяющих уравнению. Получилась полуокружность с центром $(-3; 0)$ и радиусом 2 (см. рис. 23).

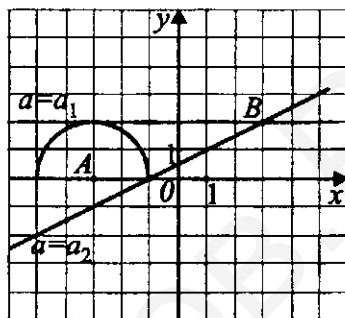


Рис. 23.

$y = a(x - 3) + 2$ — семейство прямых с угловым коэффициентом a , проходящих через точку $B(3; 2)$.

Рассмотрим рисунок 23.

Видно, что кривые имеют общие точки, то есть система уравнений имеет решения, если $a \in [a_1; a_2]$.

$a_1 = 0$. Найдём a_2 из условия, что прямая проходит через точку с координатами $(-1; 0)$.

$$a(-1 - 3) + 2 = 0; \quad -4a = -2, \quad a = \frac{1}{2}.$$

Значит, система имеет решения при $a \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Ответ: $a \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Упражнения

3.11. Постройте график функции $y = \frac{a}{x}$, если:

- а) $a = 1$,
- б) $a = 8$,
- в) $a = 0,2$,
- г) $a = -1$,
- д) $a = -4$.

3.12. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$a|x| = -\frac{8x + 24}{x^2 + 3x} \text{ не имеет корней.}$$

3.13. Постройте график окружности $x^2 + y^2 = a^2$, где:

- а) $a = 1$,
- б) $a = 2$,
- в) $a = 3$,
- г) $a = -2$.

3.14. Постройте график уравнения $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = a$, если:

- а) $a = 1$,
- б) $a = 4$,
- в) $a = 9$,
- г) $a = -4$.

3.15. Постройте график уравнения $(x - a)^2 + (y - 1)^2 = 4$, если:

- а) $a = -3$,
- б) $a = 0$,
- в) $a = 4$.

3.16. Постройте график уравнения $(x + 2)^2 + (y + a)^2 = 1$, если:

- а) $a = -3$,
- б) $a = 0$,
- в) $a = 4$.

3.17. Найдите все значения параметра a , при которых система уравне-

ний $\begin{cases} (x + 5)(y + 3) = 0, \\ (x + 3)^2 + y^2 - 4y = a^2 - 4 \end{cases}$ имеет нечётное число решений.

3.18. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} y = \sqrt{4x - x^2}, \\ y - 2 = a(x + 4) \end{cases} \text{ имеет решения.}$$

3.19. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = a^2, \\ x^2 + y^2 - 10x - 2y = a^2 + 2a - 25 \end{cases} \text{ имеет ровно два решения.}$$

5. Парабола

Рассмотрим график функции $y = x^2$. Это парабола (см. рис. 24) с вершиной в начале координат и ветвями, направленными вверх. Парабола имеет ось симметрии, проходящую через вершину параллельно оси ординат Oy .

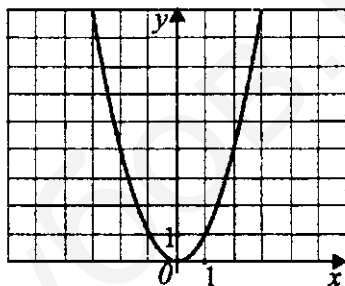


Рис. 24.

Парабола $y = (x - p)^2 + b$ получается из параболы $y = x^2$ сдвигом на вектор $\{p; b\}$. В точке $(p; b)$ находится вершина такой параболы. Например, $y = (x - p)^2 + 2$ — семейство парабол, вершина которых перемещается по прямой $y = 2$ (см. рис. 25).

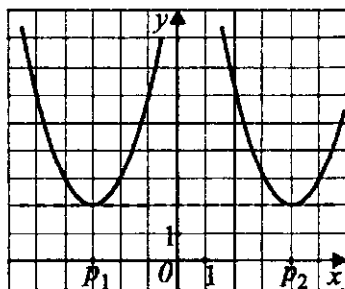


Рис. 25.

Вершины парабол $y = (x - 2)^2 + b$ перемещаются по прямой $x = 2$ (см. рис. 26).

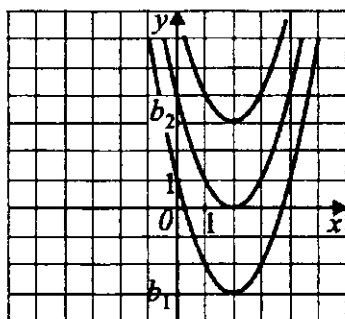


Рис. 26.

Параболы $y = ax^2$ ($a > 0$) получаются из графика $y = x^2$ растяжением в a раз вдоль оси ординат Oy (см. рис. 27).

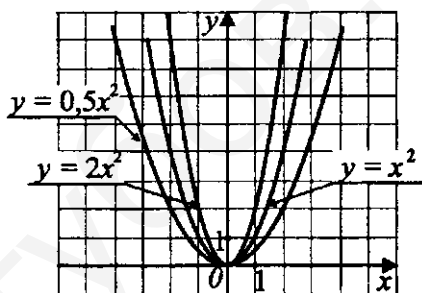


Рис. 27.

Рассмотрим параболу $y = -ax^2$. Она получается из параболы $y = ax^2$ отражением относительно оси абсцисс (см. рис. 28).

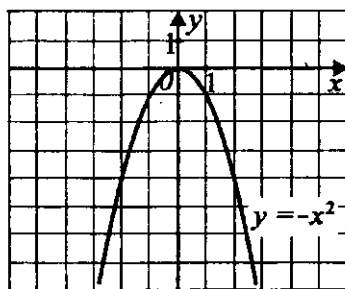


Рис. 28.

Если уравнение параболы имеет вид $y = ax^2 + bx + c$, то её вершину можно найти по формулам $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = y(x_0)$.

8. Найдите значение параметра a , при котором система

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 4x - 3, \\ y = ax - 5 - 3a \end{cases} \text{ имеет ровно одно решение.}$$

Решение: Построим графики уравнений.

$y = 2x^2 + 4x - 3$ — парабола с вершиной с координатами

$$x_0 = -\frac{4}{2 \cdot 2} = -1, \quad y_0 = -5 \text{ (см. рис. 29).}$$

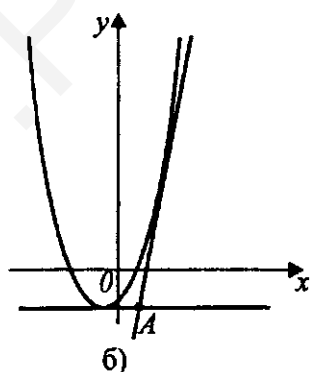
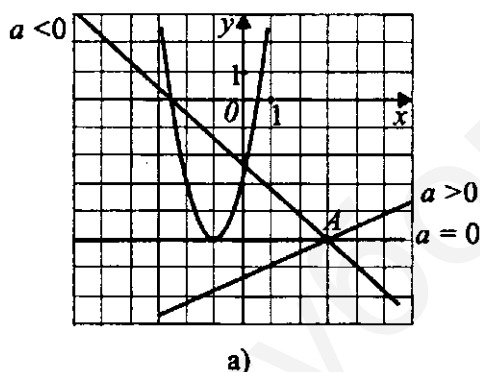


Рис. 29.

Уравнение $y = ax - 5 - 3a$ запишем в виде $y = a(x - 3) - 5$. Это семейство прямых, проходящих через точку $A(3; -5)$. Видим, что при $a < 0$ прямая и парабола имеют 2 общие точки, а при $a = 0$ у них ровно одна общая точка. Рассмотрим случай $a > 0$. На рисунке 29б построен рисунок в другом масштабе. На этом рисунке видно, что при $a = a_1$ прямая и парабола также имеют единственную общую точку. Найдём a_1 .

$$2x^2 + 4x - 3 = ax - 5 - 3a, \quad 2x^2 + (4 - a)x + 3a + 2 = 0.$$

Найдём дискриминант.

$$D = (4 - a)^2 - 4 \cdot 2(3a + 2) = 16 - 8a + a^2 - 24a - 16 = a^2 - 32a = a(a - 32).$$

Квадратное уравнение имеет один корень при $a = 0$ и $a = 32$.

Ответ: $a = 0$, $a = 32$.

6. Кусочные графики

Один из видов задач с параметром формулируется так: постройте график функции $y = f(x)$ (задаётся уравнением или системой условий) и определите, при каких значениях параметра m уравнение $f(x) = m$ имеет k (заданное число) корней. Рассмотрим несколько примеров.

9. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \leq 2, \\ (x-3)^2 - 1, & \text{если } 2 < x \leq 5, \\ 5,5 - 0,5x, & \text{если } x > 5. \end{cases} \quad (1)$$

При каких значениях m график уравнения $y = m$ имеет ровно три общие точки с графиком функции (1)?

Решение: Построим график (1).

$y = x$ и $y = -0,5x + 5,5$ — прямые.

$y = (x-3)^2 - 1$ — парабола с вершиной $(3; -1)$.

График функции (1) изображен на рисунке 30.

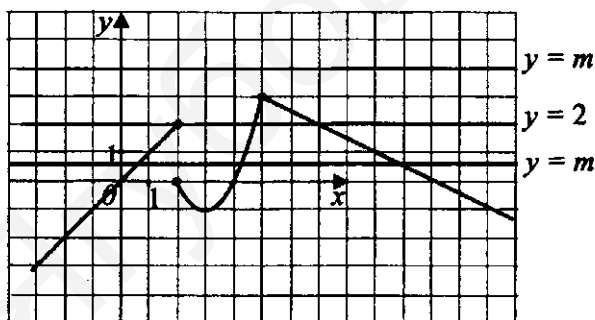


Рис. 30.

Прямые вида $y = m$ параллельны оси абсцисс. По рисунку видно, что три общие точки графики имеют при $m \in \{-1\} \cup [0; 2]$.

Ответ: $m \in \{-1\} \cup [0; 2]$.

Упражнения

3.19. Постройте график параболы $y = ax^2$, если:

а) $a = -2$,

б) $a = -1$,

- в) $a = 1$,
г) $a = 0,5$,
д) $a = 3$.

3.20. Постройте график уравнения $y = -x^2 + a$, если:

- а) $a = 0$,
б) $a = -3$,
в) $a = 4$.

3.21. Постройте график уравнения $y = (x + a)^2 + 5$, если:

- а) $a = 0$,
б) $a = -3$,
в) $a = 4$.

3.22. Постройте график уравнения $y = |x| + a$, если:

- а) $a = 0$,
б) $a = -3$,
в) $a = 4$.

3.23. Постройте график уравнения $y = |x + a| - 5$, если:

- а) $a = 0$,
б) $a = -3$,
в) $a = 4$.

3.24. Найдите значения параметра a , при котором система

$$\begin{cases} y - 2 = 6x - 3x^2, \\ x - 2 = a(y + 3) \end{cases} \text{ имеет ровно одно решение.}$$

3.25. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} -x - 2, & \text{если } x < -1, \\ 2x - x^2 + 2, & \text{если } -1 \leq x < 2, \\ 2x - 4, & \text{если } x \geq 2. \end{cases} \quad (1)$$

При каких значениях p график уравнения $y = p$ имеет ровно 3 общие точки с графиком функции (1)?

3.26. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} -\frac{3}{x}, & \text{если } x \leq -1, \\ 2 - x, & \text{если } -1 < x < 3, \\ x^2 - 10x + 26, & \text{если } x \geq 3. \end{cases} \quad (2)$$

При каких значениях p график уравнения $y = p$ имеет ровно 2 общие точки с графиком функции (2)?

3.27. Постройте график функции $y = \frac{x^3 - 4x}{x + 2}$. (3)

При каких значениях p график уравнения $y = p$ имеет ровно 1 общую точку с графиком функции (3)?

§ 4. Квадратные уравнения с параметром

Напомним, что квадратным называют уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, в котором $a \neq 0$. Если $a = 0$, то уравнение становится линейным. Если значения параметров b или c равны нулю, то уравнение называют неполным.

Решим неполное уравнение $ax^2 + bx = 0$, $b \neq 0$. Вынесем за скобку общий множитель, получим $x(ax + b) = 0$. Уравнение равносильно совокупности $\begin{cases} x = 0, \\ ax + b = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ x = -\frac{b}{a}. \end{cases}$ (На a можно разделить, так как $a \neq 0$). Уравнение имеет два корня.

Решим неполное уравнение $ax^2 + c = 0$, $c \neq 0$. $ax^2 = -c$, $x^2 = -\frac{c}{a}$.

Если $-\frac{c}{a} < 0$ (т.е. $ac > 0$), то корней нет.

Если же $-\frac{c}{a} > 0$ (т.е. $ac < 0$), то $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Если же $b = 0$ и $c = 0$, то уравнение сводится к виду $ax^2 = 0$. Это уравнение имеет единственный корень $x = 0$.

Рассмотрим теперь полное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \cdot b \cdot c \neq 0$ (то есть все коэффициенты отличны от нуля).

Тогда $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (1), если $b^2 - 4ac \geq 0$,

а если $b^2 - 4ac < 0$, то уравнение не имеет корней.

Выражение $b^2 - 4ac$ называют дискриминантом квадратного уравнения и обозначают буквой D .

Итак, если $D > 0$, квадратное уравнение имеет два корня,
если $D = 0$, один корень,
если $D < 0$, корней нет.

Если квадратное уравнение неполное, то формула (1) для него справедлива, но её использование не целесообразно.

1. При каких значениях p уравнение $x^2 + 3x - 2 = p$ имеет ровно один корень?

Решение: Это квадратное уравнение. Решим его двумя способами.

I способ — аналитический.

Запишем уравнение в виде $x^2 + 3x - 2 - p = 0$, $x^2 + 3x - (2 + p) = 0$.
Квадратное уравнение имеет один корень, если дискриминант равен нулю.
 $D = 3^2 - 4 \cdot (-2 - p) = 9 + 8 + 4p = 4p + 17$.

$$4p + 17 = 0, \quad p = -\frac{17}{4} = -4\frac{1}{4}.$$

II способ — графический.

Построим графики уравнений $y = x^2 + 3x - 2$ и $y = p$.

Первый из них — уравнение параболы с вершиной

$x_0 = -\frac{3}{2}$, $y_0 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} - 2 = -4\frac{1}{4}$, ветви которой направлены вверх.

Прямая $y = p$ проходит параллельно оси Ox (см. рис. 31) и пересекают ось ординат в точке с координатами $(0; p)$.

Видим, что прямая и парабола имеют одну общую точку при $p = -4\frac{1}{4}$.

Ответ: $-4\frac{1}{4}$.

2. При каких значениях p два различных корня имеет уравнение

а) $6x^2 - px = 0$;

б) $x^2 + px - 8 = 0$;

в) $9x^2 + px + 4 = 0$;

г) $px^2 - 3 = 0$?

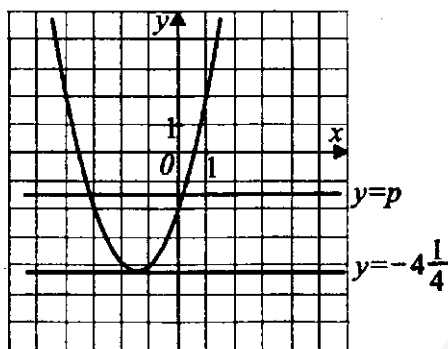


Рис. 31.

Решение:

$$а) 6x^2 - px = 0, x(6x - p) = 0, \begin{cases} x = 0, \\ 6x - p = 0; \end{cases} \quad x_1 = 0, x_2 = \frac{p}{6}.$$

Казалось бы, это уравнение при любом p имеет два корня. Но если $x_1 = x_2$, а это возможно при $\frac{p}{6} = 0$, то есть при $p = 0$, уравнение будет иметь только один корень. Значит, два корня уравнение имеет при $p \neq 0$.

б) $x^2 + px - 8 = 0$. Это квадратное уравнение при любом значении p . У него два корня, если дискриминант больше нуля.

$$D = p^2 - 4 \cdot (-8) = p^2 + 32.$$

Понятно, что $p^2 \geq 0$, тогда $p^2 + 32 > 0$ при любом значении p .

в) $9x^2 + px + 4 = 0$. Аналогично предыдущему пункту, два корня в этом уравнении будет при $D > 0$.

$$D = p^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = p^2 - 12^2 = (p - 12) \cdot (p + 12).$$

$$(p - 12) \cdot (p + 12) > 0 \text{ при } p > 12 \text{ или } p < -12.$$

г) $px^2 - 3 = 0$. Рассмотрим случай, когда это уравнение не является квадратным, то есть $p = 0$. Оно превращается в неверное равенство $0 - 3 = 0$, значит корней не имеет.

Если $p \neq 0$, то $x^2 = \frac{3}{p}$. Это уравнение имеет два корня $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3}{p}}$, если

$$\frac{3}{p} > 0, \text{ что верно при } p > 0.$$

Ответ: а) $p \neq 0$, б) p — любое, в) $p < -12$ или $p > 12$, г) $p > 0$.

3. При каких значениях параметра m уравнение $mx^2 + 3x - 2 = 0$ имеет единственный корень?

Решение: При $m = 0$ уравнение становится линейным $3x - 2 = 0$. Оно имеет единственный корень $x = \frac{2}{3}$.

При $m \neq 0$ уравнение квадратное, оно имеет один корень при $D = 0$.

$$\text{Дискриминант } D = 3^2 - 4 \cdot m \cdot (-2) = 9 + 8m.$$

$$D = 0, \text{ если } 9 + 8m = 0, \text{ то есть } m = -\frac{9}{8}.$$

Значит, уравнение имеет единственный корень при $m = 0$ и $m = -\frac{9}{8}$.

Ответ: $0; -1\frac{1}{8}$.

4. При каких значениях параметра a уравнение $(a - 8)x^2 + 2ax + a + 1 = 0$ имеет корни?

Решение: Если $a - 8 = 0$ ($a = 8$), то уравнение не является квадратным. Подставим $a = 8$ в исходное уравнение $16x + 8 + 1 = 0$, $x = -\frac{9}{16}$ — корень уравнения.

Если $a \neq 8$, то уравнение имеет корни при $D \geq 0$.

$$D = (2a)^2 - 4 \cdot (a - 8) \cdot (a + 1) = 4a^2 - 4(a^2 - 7a - 8) = 28a + 32.$$

$D \geq 0$ при $28a + 32 \geq 0$, т.е. $a \geq -\frac{32}{28}$, $a \geq -1\frac{1}{7}$. В этом случае мы должны были бы исключить $a = 8$, но при этом значении параметра уравнение тоже имеет корень, значит подойдут все $a \geq -1\frac{1}{7}$.

Ответ: $\left[-1\frac{1}{7}; +\infty\right)$.

5. Решите уравнение $x^2 - 5px + 6p^2 = 0$.

Решение: $D = (5p)^2 - 4 \cdot 6p^2 = p^2$.

$$x_{1,2} = \frac{5p \pm \sqrt{p^2}}{2}, \quad x_1 = \frac{5p + p}{2} = 3p, \quad x_2 = \frac{5p - p}{2} = 2p.$$

Ответ: $3p, 2p$.

6. Решите уравнение $x^2 + 2px - x = p - p^2 + 6$.

Решение: Преобразуем уравнение

$$x^2 + (2p - 1)x + p^2 - p - 6 = 0.$$

$$D = (2p - 1)^2 - 4(p^2 - p - 6) = 4p^2 - 4p + 1 - 4p^2 + 4p + 24 = 25,$$

$$x_1 = \frac{-(2p - 1) + \sqrt{25}}{2} = \frac{-2p + 6}{2} = 3 - p.$$

$$x_2 = \frac{-(2p - 1) - 5}{2} = \frac{-2p - 4}{2} = -p - 2.$$

Ответ: $3 - p$, $-p - 2$.

7. Решите уравнение $(p - 3)x^2 + (3p - 4)x - 4p + 7 = 0$.

Решение: Если $p - 3 \neq 0$, т.е. $p \neq 3$, то

$$D = (3p - 4)^2 - 4(p - 3)(-4p + 7) = 9p^2 - 24p + 16 - 4(-4p^2 + 19p - 21) = \\ = 9p^2 - 24p + 16 + 16p^2 - 76p + 84 = 25p^2 - 100p + 100 = (5p - 10)^2.$$

$$x_{1,2} = \frac{-(3p - 4) \pm (5p - 10)}{2(p - 3)},$$

$$x_1 = \frac{-3p + 4 + 5p - 10}{2(p - 3)} = \frac{2p - 6}{2p - 6} = 1.$$

$$x_2 = \frac{-3p + 4 - 5p + 10}{2(p - 3)} = \frac{-8p + 14}{2(p - 3)} = \frac{-4p + 7}{p - 3}.$$

Если $p = 3$, то уравнение становится линейным, $5x - 5 = 0$, $x = 1$.

Ответ: Если $p = 3$, $x = 1$;

если $p \neq 3$, то $x = 1$, $x = \frac{7 - 4p}{p - 3}$.

8. Решите уравнение $(p - 7)x^2 + x + 3 = 0$.

Решение: Если $(p - 7) = 0$, $p = 7$, то уравнение линейное $x + 3 = 0$, $x = -3$.

Если $p \neq 7$, то уравнение квадратное. Найдём дискриминант квадратного уравнения.

$$D = 1^2 - 4(p - 7) \cdot 3 = 1 - 12p + 84 = 85 - 12p.$$

Если $85 - 12p < 0$, $p > \frac{85}{12}$, то корней нет.

Если $85 - 12p = 0$, $p = \frac{85}{12}$, то уравнение имеет один корень

$$x = -\frac{1}{2\left(\frac{85}{12} - 7\right)} = -6.$$

Если $D > 0$, $p < \frac{85}{12}$, то $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{85 - 12p}}{2(p - 7)}$.

Ответ: Если $p = 7$, то $x = -3$;

если $p = \frac{85}{12}$, то $x = -6$;

если $p < \frac{85}{12}$, $p \neq 7$, то $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{85 - 12p}}{2(p - 7)}$;

если $p > \frac{85}{12}$, то корней нет.

9. Решите уравнение $(a^2 - 1)x^2 + (3a - 3)x + 2a - 2 = 0$ при всех значениях параметра a .

Решение: Разберём несколько случаев.

1) $a^2 - 1 \neq 0$, $a \neq \pm 1$. Тогда

$$D = (3a - 3)^2 - 4(a^2 - a)(2a - 2) = 9(a - 1)^2 - 4(a - 1)(a + 1) \cdot 2(a - 1) = \\ = (a - 1)^2 \cdot (9 - 8(a + 1)) = (a - 1)^2 \cdot (1 - 8a).$$

Т.к. $a \neq 1$, $(a - 1)^2 > 0$. Учитывая это, получаем $D < 0$ при $1 - 8a < 0$, то есть $a > \frac{1}{8}$.

При $a \in \left(\frac{1}{8}; 1\right) \cup (1; +\infty)$ корней нет.

При $a = \frac{1}{8}$ ($D = 0$) уравнение имеет один корень

$$x = -\frac{(3a - 3)}{2(a^2 - 1)} = -\frac{3}{2(a + 1)} = -\frac{3}{2 \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right)} = -\frac{4}{3}.$$

При $D > 0$, $1 - 8a > 0$, $a < \frac{1}{8}$.

Уравнение имеет два корня.

$$x_{1,2} = \frac{-(3a-3) \pm \sqrt{(a-1)^2(1-8a)}}{2a^2-2}.$$

$$x_1 = \frac{-3(a-1) + (a-1)\sqrt{1-8a}}{2(a^2-1)} = \frac{-3 + \sqrt{1-8a}}{2(a+1)},$$

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{1-8a}}{2(a+1)}.$$

Нам осталось разобрать два случая: $a = 1$ и $a = -1$.

При $a = 1$ уравнение превращается в тождество $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 = 0$. Его корнем будет любое действительное число.

При $a = -1$ уравнение станет линейным $(-3-3)x - 2 - 2 = 0$, $-6x - 4 = 0$, $x = -\frac{2}{3}$.

Мы разобрали все возможные случаи и можно выписать ответ.

Ответ: Если $a = 1$, x — любое число;

если $a = -1$, $x = -\frac{2}{3}$;

если $a < -1$ или $-1 < a < \frac{1}{8}$, то $x_{1,2} = -\frac{-3 \pm \sqrt{1-8a}}{2(a+1)}$;

если $a = \frac{1}{8}$, то $x = -\frac{4}{3}$;

если $\frac{1}{8} < a < 1$ или $a > 1$, то корней нет.

Давайте посмотрим, как можно было упростить решение, если заметить, что в левой части уравнения $(a^2-1)x^2 + (3a-3)x + 2a-2 = 0$ есть общий множитель $(a-1)$.

Вынесем его за скобку.

$(a-1)((a+1)x^2 + 3x + 2) = 0$. Очевидно, что при $a = 1$ уравнение обращается в тождество при любом действительном x .

Если $a \neq 1$, получим уравнение $(a+1)x^2 + 3x + 2 = 0$.

При $a = -1$ оно линейное вида $3x + 2 = 0$, $x = -\frac{2}{3}$.

При $a \neq -1$ оно квадратное, тогда его дискриминант $D = 3^2 - 4(a+1) \cdot 2 = 9 - 8a - 8 = 1 - 8a$.

Если $D > 0$, $1 - 8a > 0$, $a < \frac{1}{8}$, то корни уравнения $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1 - 8a}}{2(a+1)}$.

Если $D = 0$, $a = \frac{1}{8}$, то $x = -\frac{4}{3}$.

Если $D < 0$, $a > \frac{1}{8}$, то корней нет.

10. Найдите значения k , при которых прямая $y = kx - 8$ и парабола $y = x^2 + 5x - k$ имеют ровно одну общую точку.

Решение: Чтобы заданные парабола и прямая имели ровно одну общую точку, нужно, чтобы уравнение $kx - 8 = x^2 + 5x - k$ имело ровно один корень.

Выполним преобразования.

$$x^2 - kx + 5x - k + 8 = 0,$$

$$x^2 - (k-5)x - k + 8 = 0;$$

Получившееся квадратное уравнение имеет единственный корень при $D = 0$.

Найдём дискриминант.

$$D = (k-5)^2 - 4 \cdot (-k+8) = k^2 - 10k + 25 + 4k - 32 = k^2 - 6k - 7.$$

$$k^2 - 6k - 7 = 0 \text{ при } k = -1, k = 7.$$

Ответ: $-1; 7$.

11. Найдите значение p , при котором парабола $y = -3x^2 + px + 1$ и прямая $y = 2x + p$ пересекаются в точке с абсциссой $x = 3$.

Решение: Если графики пересекаются, то их ординаты в точке пересечения равны. Получаем $-3x^2 + px + 1 = 2x + p$.

Если $x = 3$, то $-3 \cdot 3^2 + 3p + 1 = 2 \cdot 3 + p$, $2p = 32$, $p = 16$.

Ответ: 16.

Упражнения

4.1. При каких значениях параметра m уравнение $3x^2 - 5x + 1 - m = 0$ имеет а) ровно один корень?

б) два корня?

4.2. При каких значениях параметра p два различных корня имеет уравнение:

а) $2x^2 - px = 0$;

б) $x^2 - px - 2 = 0$;

в) $25x^2 - px + 9 = 0$;

г) $px^2 + 18 = 0$?

4.3. При каких значениях параметра p уравнение $px^2 - 2x + 4 = 0$ имеет единственный корень?

4.4. При каких значениях параметра a уравнение $(a+4)x^2 - 2ax + a - 3 = 0$ имеет корни?

Решите уравнения:

4.5. $x^2 + 8px - 9p^2 = 0$.

4.6. $x^2 + (2a + 3)x + a^2 + 3a = 0$.

4.7. $x^2 + 5x - ax - 2a^2 - a + 6 = 0$.

4.8. $(p + 2)x^2 + (2p - 4)x - 3p - 2 = 0$.

4.9. $(p + 5)x^2 - x - 1 = 0$.

4.10. $(a^2 - 4)x^2 - (3a + 6)x - 5a - 10 = 0$.

4.11. Найдите все значения k , при которых прямая $y = kx + 3$ и парабола $y = x^2 + 3x + k$ имеют ровно одну общую точку.

4.12. Найдите значение p , при котором прямая $y = 2x - 3p$ и парабола $y = 6x^2 - px - 5$ пересекаются в точке с абсциссой $x = 2$.

§ 5. Разложение квадратного трёхчлена на множители. Формулы Виета

1. Разложение квадратного трёхчлена на множители

Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни x_1 и x_2 , то трёхчлен $ax^2 + bx + c$ можно разложить на множители следующим образом:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Если дискриминант соответствующего квадратного уравнения равен нулю, то в уравнении один корень x_1 и $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$. Если при этом $a > 0$, то $ax^2 + bx + c = (\sqrt{a}(x - x_1))^2$ и трёхчлен является полным квадратом.

1. Напишите квадратное уравнение, корнями которого являются числа 3 и $5p$.

Решение: Нам нужно написать любое квадратное уравнение, корни которого 3 и $5p$.

Напишем приведённое квадратное уравнение вида $x^2 + bx + c = 0$. Пусть $x_1 = 3$, $x_2 = 5p$. Тогда $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) = (x - 3)(x - 5p) = x^2 - 3x - 5px + 15p = x^2 - (3 + 5p)x + 15p$.

Ответ: $x^2 - (3 + 5p)x + 15p = 0$.

2. Найдите значение p , при котором уравнение $2x^2 + 3px + 90 + p = 0$ имеет корни $-p$ и -5 .

Решение: Если квадратное уравнение имеет корни $-p$ и -5 , то его можно записать в виде $a(x + p)(x + 5) = 0$, $a(x^2 + (p + 5)x + 5p) = 0$.

В искомом уравнении $a = 2$, тогда $2x^2 + (2p + 10)x + 10p = 0$ — искомое. По условию $2p + 10 = 3p$ и $10p = p + 90$.

Получим $p = 10$.

Ответ: $p = 10$.

3. При каких числовых значениях m выражение $(4 - m)x^2 + (m + 2)x + m$ является полным квадратом?

Решение: Квадратный трёхчлен является полным квадратом, если его можно представить в виде $(px + q)^2$ или (что то же самое) в виде $a(x - x_0)^2$, где $a > 0$. Значит, заданное выражение является полным квадратом, если $4 - m > 0$ и при этом дискриминант D квадратного уравнения $(4 - m)x^2 + (m + 2)x + m = 0$ равен нулю.

Найдём D .

$D = (m + 2)^2 - 4(4 - m) \cdot m = m^2 + 4m + 4 - 16m + 4m^2 = 5m^2 - 12m + 4$.
 $5m^2 - 12m + 4 = 0$, если $m = 2$ или $m = \frac{2}{5}$.

$4 - m > 0$ при $m < 4$. Очевидно, что оба значения m удовлетворяют требуемому условию.

Ответ: $2; \frac{2}{5}$.

2. Теорема Виета

Для приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ (1), имеющего корни x_1 и x_2 , выполняются следующие формулы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = q. \end{cases} \quad (2)$$

При этом, если дискриминант равен нулю, то считают $x_1 = x_2$.

Справедлива также теорема, обратная теореме Виета.

Если для чисел x_1, x_2, p, q справедливы формулы (2), то x_1 и x_2 — корни уравнения (1) и других корней нет.

Для квадратного уравнения общего вида $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) с корнями x_1 и x_2 верны формулы Виета $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$, а также и обратная теорема Виета, аналогичная указанной выше.

4. Дано уравнение $x^2 - (3p^2 - p + 2)x + 7p + 3 = 0$. Известно, что сумма его корней равна 4. Найдите произведение его корней и число p .

Решение: По теореме Виета, если данное квадратное уравнение имеет корни x_1 и x_2 , то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3p^2 - p + 2, \\ x_1 x_2 = 7p + 3. \end{cases}$$

По условию $x_1 + x_2 = 4$, тогда $3p^2 - p + 2 = 4$, $3p^2 - p - 2 = 0$, $p_1 = 1$, $p_2 = -\frac{2}{3}$.

Если $p = 1$, $x_1 x_2 = 7 \cdot 1 + 3 = 10$, если $p = -\frac{2}{3}$, $x_1 x_2 = 7 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 3 = -1\frac{2}{3}$.

Однако мы не нашли x_1 и x_2 , а потому нельзя утверждать, что уравнение будет иметь вещественные корни при найденных значениях p . При $p = 1$ уравнение $x^2 - 4x + 10 = 0$ не имеет вещественных корней, при

$p = -\frac{2}{3}$ уравнение $x^2 - 4x - \frac{5}{3} = 0$ имеет вещественные корни.

Ответ: $x_1 x_2 = -1\frac{2}{3}$, $p = -\frac{2}{3}$.

5. При некотором значении параметра p корни квадратного уравнения $5px^2 + (p^2 - 16)x - 2p + 1 = 0$ являются противоположными числами. Найдите эти корни и значения p .

Решение: По теореме Виета для корней уравнения x_1 и x_2 выполняется: $x_1 + x_2 = -\frac{p^2 - 16}{5p}$, $x_1 x_2 = \frac{1 - 2p}{5p}$, если $p \neq 0$. По условию $x_2 = -x_1$. Получаем $x_1 + (-x_1) = 0$, $x_1 x_2 = x_1(-x_1) = -x_1^2$.

$$-\frac{(p^2 - 16)}{5p} = 0, \text{ тогда } p_1 = 4, p_2 = -4. \text{ Отсюда при } p = 4, \\ -x_1^2 = \frac{1 - 2p}{5p} = \frac{1 - 8}{20} = -\frac{7}{20}, x_1^2 = \frac{7}{20}, x_1 = \sqrt{\frac{7}{20}} \text{ или } x_1 = -\sqrt{\frac{7}{20}}.$$

$$\text{При } p = -4, -x_1^2 = \frac{1 - 2 \cdot (-4)}{5 \cdot (-4)} = -\frac{9}{20}, x_1^2 = \frac{9}{20}, x_1 = \frac{3}{\sqrt{20}} \text{ или } \\ x_1 = -\frac{3}{\sqrt{20}}.$$

Ответ: При $p = -4$ корни $\frac{3}{\sqrt{20}}$ и $-\frac{3}{\sqrt{20}}$;

при $p = 4$ корни $\sqrt{\frac{7}{20}}$ и $-\sqrt{\frac{7}{20}}$.

6. Корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $x^2 + 4tx - 11t^2 = 0$ удовлетворяют условию $x_1^2 + x_2^2 = 38$. Найдите t .

Решение: По теореме Виета $x_1 + x_2 = -4t$, $x_1 x_2 = -11t^2$. По условию $x_1^2 + x_2^2 = 38$. Выразим $x_1^2 + x_2^2$ через $x_1 + x_2$ и $x_1 x_2$.
 $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (-4t)^2 - 2(-11t^2) = 16t^2 + 22t^2 = 38t^2$,
 $38t^2 = 38$, $t^2 = 1$, $t_{1,2} = \pm 1$. Очевидно, что при $t = \pm 1$ уравнение имеет вещественные корни.

Ответ: 1; -1.

7. Разность корней уравнения $2x^2 - 4x + p = 0$ равна 4. Найдите значение p и корни уравнения.

Решение: По теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{-4}{2}$, $x_1 x_2 = \frac{p}{2}$. По условию

$$x_1 - x_2 = 4. \text{ Составим систему уравнений } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 x_2 = \frac{p}{2}, \\ x_1 - x_2 = 4. \end{cases}$$

Из системы $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$ найдем $x_1 = 3$ и $x_2 = -1$.

Тогда $\frac{p}{2} = 3 \cdot (-1)$, $p = -3 \cdot 2 = -6$.

Ответ: $p = -6$, $x_1 = 3$, $x_2 = -1$.

8. Напишите приведённое квадратное уравнение, корнями которого являются $p + 1$ и $2p - 9$.

Решение: Будем искать уравнение в виде $x^2 + kx + q = 0$, корни которого x_1 и x_2 удовлетворяют формулам Виета: $x_1 + x_2 = -k$, $x_1 x_2 = q$.

По условию $x_1 = p + 1$, $x_2 = 2p - 9$.

Получаем $q = (p + 1)(2p - 9) = 2p^2 - 7p - 9$,

$-k = (p + 1) + (2p - 9) = 3p - 8$, $k = 8 - 3p$.

Искомое уравнение $x^2 + (8 - 3p)x + 2p^2 - 7p - 9 = 0$.

Ответ: $x^2 + (8 - 3p)x + 2p^2 - 7p - 9 = 0$.

Упражнения

5.1. Напишите приведённое квадратное уравнение, корнями которого являются числа:

а) 4 и p

б) -8 и $p + 3$

в) $p - 8$ и $3p - 4$

г) 0 и $8p$

5.2. Найдите значения параметра p , при которых уравнение

$3x^2 + (p + 6)x - 2p - 10 = 0$ имеет корни $\frac{4}{3}$ и $-p$.

5.3. Дано уравнение $x^2 + (6t^2 + t - 5)x + 8 - 3t = 0$. Известно, что произведение его корней равно 2. Найдите число t и сумму его корней.

5.4. При каких значениях m выражение $(m - 1)x^2 - (6 + 4m)x + 7m + 3 = 0$ является полным квадратом?

5.5. Дано уравнение $x^2 + (6t^2 + t - 5)x + 3t + 2 = 0$. Известно, что сумма его корней равна -2 . Найдите число t и произведение его корней.

5.6. При некотором значении параметра p корни квадратного уравнения $3px^2 + (p^2 - 25)x - 20 + p = 0$ являются противоположными числами. Найдите значение p и эти корни.

5.7. Корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $x^2 + 6mx + 8m^2 = 0$ удовлетворяют условию $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{8}$. Найдите m .

5.8. Один из корней уравнения $6x^2 + 5px + 2p = 0$ в 4 раза меньше другого и не равен нулю. Найдите p .

5.9. Напишите приведённое квадратное уравнение, корнями которого являются числа

а) $2p$ и $3p$;

б) $p - 5$ и $3p + 2$;

в) $7p + 1$ и 0 .

§ 6. Расположение корней квадратного уравнения относительно заданных точек

Если в уравнении с параметром дискриминант оказывается полным квадратом, несложно найти корни уравнения и сопоставить их с заданной точкой (точками).

Разберём несколько подобных задач.

1. Поиск корней и ограничения

1. Найдите все значения параметра a , при которых только один корень квадратного уравнения $x^2 - (3p + 9)x + 30p - 10 = 0$ меньше 7.

Решение: Найдём корни данного уравнения.

$$D = (3p + 9)^2 - 4(30p - 10) = 9p^2 + 54p + 81 - 120p + 40 =$$

$$= 9p^2 - 66p + 121 = (3p - 11)^2. \quad x_1 = \frac{3p + 9 + (3p - 11)}{2} = \frac{6p - 2}{2} = 3p - 1,$$

$$x_2 = \frac{3p + 9 - (3p - 11)}{2} = \frac{20}{2} = 10.$$

Так как $x_2 = 10 > 7$, то x_1 должен быть меньше 7, поскольку один из корней должен быть меньше семи. $3p - 1 < 7$, $3p < 8$, $p < 2\frac{2}{3}$.

Замечание: Поиск корней уравнения упрощается, если записать его в виде $x^2 - ((3p - 1) + 10)x + 10(3p - 1) = 0$. По теореме, обратной теореме Виета, $x_1 = 3p - 1$, $x_2 = 10$.

Ответ: $p < 2\frac{2}{3}$.

2. Найдите все значения параметра m , при которых один из корней уравнения $x^2 - (m + 3)x - 2m^2 + 3m + 2 = 0$ находится между числами 2 и 4, а второй — между числами -2 и 1.

Решение: Данное квадратное уравнение имеет дискриминант $D = (m + 3)^2 - 4 \cdot (-2m^2 + 3m + 2) = m^2 + 6m + 9 + 8m^2 - 12m - 8 = 9m^2 - 6m + 1 = (3m - 1)^2 \geq 0$, поэтому его корни

$$x_1 = \frac{m + 3 + (3m - 1)}{2} = 2m + 1, \quad x_2 = \frac{m + 3 - (3m - 1)}{2} = -m + 2.$$

Мы не знаем, какой из корней больше, поэтому разберём два случая, чтобы найти искомые значения параметра.

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} 2 < 2m + 1 < 4, \\ -2 < -m + 2 < 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 < 2m < 3, \\ -4 < -m < -1; \end{cases} \quad \begin{cases} 0,5 < m < 1,5, \\ 1 < m < 4; \end{cases} \\ & 1 < m < 1,5. \\ 2) & \begin{cases} 2 < -m + 2 < 4, \\ -2 < 2m + 1 < 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < -m < 2, \\ -3 < 2m < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -2 < m < 0, \\ -1,5 < m < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $-1,5 < m < 0$ или $1 < m < 1,5$.

Если поиск корней квадратного уравнения приводит к нахождению дискриминанта, который не является полным квадратом, то становится технически менее сложным не выписывать и решать неравенства относительно

но корней уравнения, а воспользоваться теоремой Виета или свойствами квадратичной функции.

2. Сравнение корней с нулём

1°. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$). Если $x_1 \cdot x_2 < 0$, то x_1 и x_2 — числа разного знака. Другими словами, если $\frac{c}{a} < 0$, то данное уравнение имеет два корня, один из которых больше нуля, а другой меньше нуля.

Показать, что уравнение имеет корни при $\frac{c}{a} < 0$ достаточно просто.

Так как $\frac{c}{a} < 0$, то и $ac < 0$, тогда дискриминант уравнения $D = b^2 - 4ac > 0$, и мы получили, что в уравнении два различных корня.

2°. Выясним, при каких условиях уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два положительных корня.

В квадратном уравнении есть действительные корни, если $D \geq 0$. (Если корни должны быть разные, то $D > 0$).

Рассмотрим числа x_1 и x_2 . Они положительны ($x_1 > 0$, $x_2 > 0$) только тогда, когда их сумма и произведение положительны, то есть $x_1 \cdot x_2 > 0$ и $x_1 + x_2 > 0$. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Получаем, что $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, если

$$\begin{cases} \frac{c}{a} > 0, \\ -\frac{b}{a} > 0, \\ D \geq 0. \end{cases}$$

Аналогично $x_1 < 0$, $x_2 < 0$, если

$$\begin{cases} \frac{c}{a} > 0, \\ -\frac{b}{a} < 0, \\ D \geq 0. \end{cases}$$

3. Найдите p , при которых корни уравнения $3x^2 + (p+6)x + p = 0$:

а) разного знака (один положительный, другой — отрицательный);

б) положительные;

в) отрицательные.

Решение: Найдём дискриминант уравнения

$$D = (p+6)^2 - 12p = p^2 + 36.$$

Уравнение при любом значении p имеет два различных корня, т.к. $D > 0$.

а) Корни разного знака (один положительный, другой — отрицательный), если $x_1 \cdot x_2 = \frac{p}{3} < 0$, то есть при $p < 0$.

б) Оба корня положительные, если $x_1 \cdot x_2 = \frac{p}{3} > 0$ и

$$x_1 + x_2 = -\frac{p+6}{3} > 0; \quad \begin{cases} p > 0, \\ p+6 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} p > 0, \\ p < -6; \end{cases} \quad \text{таких } p \text{ нет.}$$

в) Оба корня отрицательные, если

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{p}{3} > 0, \\ x_1 + x_2 = -\frac{p+6}{3} < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} p > 0, \\ p+6 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} p > 0, \\ p > -6; \end{cases} \quad p > 0.$$

Ответ: а) $p < 0$; б) нет таких p ; в) $p > 0$.

4. Найдите p , при которых корни уравнения $x^2 - 6x - 5 - p = 0$ больше числа 2.

Решение: Найдём дискриминант. $D = 36 - 4(-5 - p) = 56 + 4p$. В условии не сказано, что должно быть два различных корня, поэтому $D \geq 0$.

Также необходимо, чтобы корни x_1 и x_2 удовлетворяли условиям $x_1 > 2$, $x_2 > 2$.

Рассмотрим два числа $x_1 - 2 > 0$ и $x_2 - 2 > 0$. Эти условия будут выполняться, если

$$\begin{cases} (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0, \\ (x_1 - 2) + (x_2 - 2) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0, \\ (x_1 + x_2) - 4 > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Используя формулы Виета, получим $x_1 + x_2 = 6$, $x_1 \cdot x_2 = -5 - p$. Подставим выражение для суммы и произведения в систему (1) и учтём условие $D \geq 0$.

$$\begin{cases} -5 - p - 2 \cdot 6 + 4 > 0, \\ 6 - 4 > 0, \\ 56 + 4p \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} p < -13, \\ p \geq -14; \end{cases} \quad -14 \leq p < -13.$$

Ответ: $-14 \leq p < -13$.

В этой задаче мы воспользовались сведением сравнения корней квадратного уравнения с некоторым числом к сравнению корней с нулём. К сожалению, этот метод работает только в том случае, если оба корня сравниваются с одним и тем же числом.

3. Расположение корней квадратичной функции

5. При каких значениях параметра a число 2 находится между корнями квадратного уравнения $x^2 + (3a + 4)x + 2 - a = 0$?

Решение: Обозначим левую часть исходного уравнения через $f(x)$. Парабола $y = f(x)$ должна пересекать ось абсцисс в двух точках $x_1 < 2$ и $x_2 > 2$. Графически этот случай показан на рисунке 32.

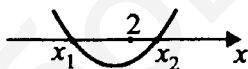


Рис. 32.

Видим, что если $f(x) < 0$, то при условии того, что ветви параболы направлены вверх, этого необходимо и достаточно для выполнения условия $x_1 < 2 < x_2$. Причём при этом обязательно будет два различных корня.

$$f(2) = 2^2 + (3a + 4) \cdot 2 + 2 - a = 14 + 5a. \quad 14 + 5a < 0, \quad a < -2,8.$$

Ответ: $a < -2,8$.

Запишем условия, при которых число β лежит между корнями квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Достаточно рассмотреть два случая в зависимости от знака a (см. рис. 33).

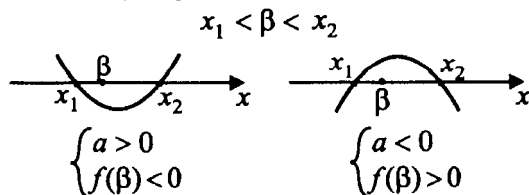


Рис. 33.

Совокупность этих двух систем равносильна неравенству $af(\beta) < 0$.

Теперь найдём условия, при которых корни квадратичной функции принадлежат заданному промежутку, то есть $\beta < x_1 < x_2 < \gamma$ для чисел β и γ .

Рассмотрим функцию $f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$). Чтобы упростить рассуждения, умножим все коэффициенты на a . Тогда корни уравнения $f(x) = 0$ будут совпадать с корнями уравнения $a \cdot f(x) = 0$, но ветви соответствующей параболы будут направлены вверх, так как $a^2 > 0$. Графическое представление условия $\beta < x_1 < x_2 < \gamma$ на рисунке 34.

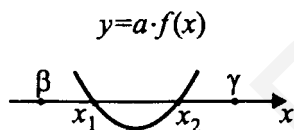


Рис. 34.

Чтобы корни были, нужно условие $D > 0$ или $D \geq 0$ (в зависимости от того, что сказано в условии о количестве корней). Чтобы корни принадлежали промежутку $(\beta; \gamma)$, должны выполняться условия.

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ a \cdot f(\beta) > 0, \\ a \cdot f(\gamma) > 0, \\ \beta < x_0 < \gamma; \end{cases}$$

здесь $x_0 = -\frac{b}{2a}$ — абсцисса вершины параболы.

Задач, связанных с расположением корней квадратичной функции, много, но если понять принцип, то практически любую из них можно решить подобным образом.

При этом важно помнить, что требование $a \cdot f(\beta) < 0$ обеспечивает положение числа β между корнями, а $a \cdot f(\beta) > 0$ обуславливает положение числа β вне промежутка между корнями (если корни есть). Положение вершины параболы x_0 показывает, с какой стороны от числа β в этом случае находятся корни.

6. При каких значениях a любой корень уравнения $x^2 + 6x + 5 = 0$ меньше любого корня уравнения $(a - 3)x^2 + 2x - 1 = 0$?

Решение: Корнями уравнения $x^2 + 6x + 5 = 0$ являются числа -1 и -5 . Значит, нам нужно, чтобы все корни второго уравнения были больше числа $\beta = -1$.

Рассмотрим $f(x) = (a-3)x^2 + 2x - 1$.

Если $a-3 = 0$, то $x = 0,5$ и этот случай нам подходит. Обозначим через D дискриминант, а через x_0 — абсциссу вершины параболы $y = f(x)$.

Если $a-3 \neq 0$, то уравнение квадратное и имеет корень, только если

$$D \geq 0, \quad -1 < x_1 < x_2 \text{ (см. рис. 35), если } \begin{cases} D \geq 0, \\ (a-3)f(-1) > 0, \\ x_0 > -1. \end{cases}$$

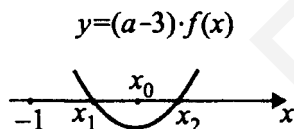


Рис. 35.

$$D = 4 - 4 \cdot (a-3) \cdot (-1) = 4a - 8, \quad f(-1) = (a-3) \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 1 = a - 6,$$

$$x_0 = -\frac{2}{2 \cdot (a-3)} = -\frac{1}{a-3}.$$

$$\begin{cases} 4a - 8 \geq 0, \\ (a-3)(a-6) > 0, \\ -\frac{1}{a-3} > -1; \end{cases} \quad \begin{cases} a \geq 2, \\ a < 3 \text{ или } a > 6, \\ 1 - \frac{1}{a-3} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \leq a < 3 \text{ или } a > 6 \\ \frac{a-4}{a-3} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \leq a < 3 \text{ или } a > 6 \\ a < 3 \text{ или } a > 4; \end{cases} \quad 2 \leq a < 3 \text{ или } a > 6.$$

Учитывая, что $a = 3$ подходит, получаем $2 \leq a \leq 3$ или $a > 6$.

Ответ: $2 \leq a \leq 3$ или $a > 6$.

Упражнения

6.1. Найдите все значения параметра p , при которых только один корень квадратного уравнения $x^2 + (2p-11)x + 24-6p = 0$ больше 2.

6.2. Найдите все значения параметра p , при которых один из корней уравнения $x^2 - 2px - 3p^2 + 4p - 1 = 0$ находится между числами -2 и 0 , а другой — между числами 1 и 4 .

6.3. Найдите все значения параметра p , при которых оба корня уравнения $x^2 - (8p + 1)x + 7p^2 + 7p = 0$ меньше -12 .

6.4. Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $5x^2 + (a + 2)x - a = 0$:

- а) разного знака (один — положительный, другой — отрицательный),
- б) положительные,
- в) отрицательные.

6.5. Найдите все значения параметра p , при которых оба корня уравнения $x^2 - 12x + p + 32 = 0$ меньше числа 7 и различны.

6.6. При каких значениях параметра a число 3 находится между корня-ми квадратного уравнения $x^2 + (2a + 1)x - 12a - 3 = 0$?

6.7. При каких значениях параметра k число 2 находится между корня-ми уравнения $kx^2 + 2x - 3 = 0$?

6.8. При каких значениях параметра a любой корень уравнения $x^2 + 5x + 7 - 2p = 0$ больше числа -5 ?

6.9. При каких значениях параметра p любой корень уравнения $x^2 - 5x + 4 = 0$ больше любого корня уравнения $(2 - p)x^2 - x - 5 = 0$?

§ 7. Использование свойств функций и алгебраических выражений

1. Использование симметрии алгебраических выражений

Иногда в задаче требуется единственность или нечётность числа корней уравнения. Допустим, мы при этом заметили, что в этой задаче выражения симметричны, то есть не меняются, например, при замене x на $-x$ или, в случае присутствия двух переменных, при перемене местами x и y (график уравнения имеет ось симметрии $y = x$). Возникает желание воспользоваться этой симметрией.

В таком случае полезно помнить, что если координаты некоторой точки A являются решением этой системы, то и координаты симметричной точки являются решением, и тогда для выполнения требования единственности решения необходимо (но не достаточно), чтобы точка A (решение) лежала на оси симметрии. При этом на оси симметрии может лежать не одна точка

из решения, или возможен случай, когда одна точка лежит на оси, а другие не лежат. То есть при использовании симметрии, как правило, необходима проверка.

7. При каких значениях параметра a уравнение $(2a - 3)x^4 + (a + 7)x^2 - 2a^2 - 14a = 0$ имеет единственное решение?

Решение: Заметим, что при замене x на $-x$ уравнение не изменится, поэтому если x_0 является корнем уравнения, то и $-x_0$ тоже будет корнем. Значит, необходимое условие единственности корня следующее: $x_0 = -x_0$, то есть $x_0 = 0$ — корень уравнения.

Подставим в уравнение $x = 0$.

$$-2a^2 - 14a = 0, \quad -2a(a + 7) = 0, \quad a = 0 \text{ или } a = -7.$$

Теперь нужно проверить, сколько корней при этих значениях a . Тот факт, что $x = 0$ является корнем, ещё не означает, что других корней нет.

$$1) a = 0, \quad (2 \cdot 0 - 3)x^4 + (0 + 7)x^2 - 0 = 0, \quad -3x^4 + 7x^2 = 0, \\ x^2(7 - 3x^2) = 0, \quad \begin{cases} x^2 = 0, \\ 7 - 3x^2 = 0, \end{cases} \quad x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Получаем 3 корня.

$$2) a = -7, \quad (2 \cdot (-7) - 3)x^4 + 0 - 0 = 0, \quad -17x^4 = 0, \quad x = 0.$$

Получаем 1 корень.

Значит, корень единственный при $a = -7$

Ответ: -7 .

8. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} y = x^2 + 20a, \\ x = y^2 + 20a \end{cases}$ имеет единственное решение?

Решение: Заметим, что при одновременной замене x на y и y на x система не меняется. Значит, вместе с каждым решением $(x_0; y_0)$ система имеет решение $(y_0; x_0)$. Отсюда, необходимое условие единственности решения — существование решения вида $x = y$ (и единственность решения такого вида).

При $x = y$ получим уравнение $x = x^2 + 20a, x^2 - x + 20a = 0$. Оно имеет единственное решение, если дискриминант $1 - 80a$ равен нулю. Имеем

$$a = \frac{1}{80}.$$

$$\text{При } a = \frac{1}{80} \text{ получаем } \begin{cases} y = x^2 + \frac{1}{4}, \\ x = y^2 + \frac{1}{4}. \end{cases} \quad (1)$$

Сложим уравнения системы

$$x + y = x^2 + y^2 + \frac{1}{2},$$

$$x^2 + y^2 - x - y + \frac{1}{2} = 0,$$

$$4x^2 + 4y^2 - 4x - 4y + 2 = 0,$$

$$4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 - 4y + 1 = 0,$$

$$(2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 = 0.$$

Сумма двух неотрицательных выражений равна нулю только при условии, что каждое из них равно нулю: $\begin{cases} 2x - 1 = 0, & \begin{cases} x = 0,5, \\ y = 0,5. \end{cases} \\ 2y - 1 = 0; \end{cases}$

Чтобы проверить, является ли пара $(0,5; 0,5)$ решением системы (1), подставим это значение в любое из уравнений системы. $0,5 = 0,5^2 + \frac{1}{4}$,

верно. Значит, при $a = \frac{1}{80}$ исходная система имеет единственное решение.

Ответ: $\frac{1}{80}$.

2. Использование монотонности функций

Решение ряда задач можно упростить, если использовать некоторые свойства монотонных функций.

1) Если функция $y = f(x)$ монотонная (то есть возрастает (убывает) при всех допустимых x), то уравнение $f(x) = a$ имеет не более одного корня (см. рис. 36).

2) Если функция $y = f(x)$ возрастает, а функция $y = g(x)$ убывает при всех допустимых x , то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня (см. рис. 37). Подчеркнем, что такие уравнения могут иметь единственный корень или вообще не иметь корней.

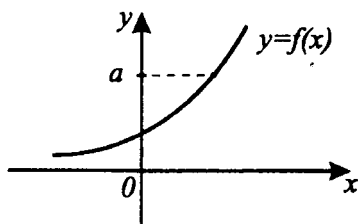


Рис. 36.

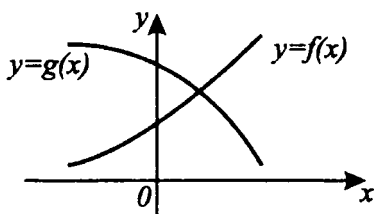


Рис. 37.

3) Сумма возрастающих функций — возрастающая функция.

9. Решите уравнение $x^2 - a^4 = |a| - \sqrt{x}$ при всех значениях параметра a .

Решение: Запишем уравнение в виде $x^2 + \sqrt{x} = a^4 + |a|$. Заметим, что $x = a^2$ — корень уравнения при любом значении a . Найдем ОДЗ: $x \geq 0$. При этих x функции $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ возрастают, значит возрастает и их сумма $y = x^2 + \sqrt{x}$. Правая часть уравнения — число. Значит, это уравнение имеет единственное решение $x = a^2$.

Ответ: $x = a^2$.

10. При всех $a > 0$ найдите корни уравнения $\frac{a}{x} = x^2 - 2x + a + 1$, удовлетворяющие условию $x \geq 1$.

Решение: Попробуем решить эту задачу графически.

$$\text{Перепишем условие } \begin{cases} a > 0, \\ y = \frac{a}{x}, \quad (1) \\ y = (x-1)^2 + a, \\ x \geq 1. \end{cases} \quad (2)$$

График уравнения (1) — гипербола, при $a > 0$ её ветви расположены в I и III четвертях (см. рис. 38).

$y = (x-1)^2 + a$ — парабола, ветви которой направлены вверх, вершина расположена в точке $(1; a)$.

При $x \geq 1$ $y = (x-1)^2 + a$ возрастает, а $y = \frac{a}{x}$ убывает.

Значит, у них не более одной общей точки.

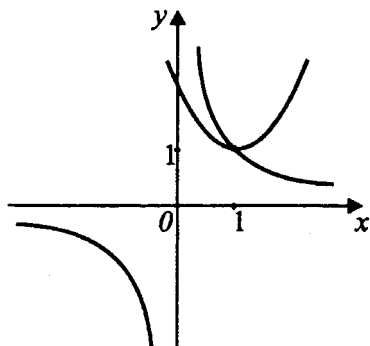


Рис. 38.

Заметим, что при $x = 1$ значения этих двух функций совпадают. Значит, $x = 1$ — единственный корень уравнения, удовлетворяющий заданному условию.

Ответ: $x = 1$.

3. Использование ОДЗ и оценка множества значений

Иногда после нахождения ОДЗ нам остаётся проверить, являются ли некоторые числа корнями уравнения.

11. Решите уравнение $\sqrt{x-5} + (a-2)x = 7\sqrt{15-3x} + a^2 - 24$ при всех значениях параметра a .

Решение: Найдем ОДЗ.

$$\begin{cases} x-5 \geq 0; \\ 15-3x \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 5; \\ x \leq 5; \end{cases} \quad x = 5.$$

Множество допустимых значений переменной x состоит из одного числа. Проверим, при каких a число 5 будет корнем уравнения.

$$\sqrt{5-5} + (a-2) \cdot 5 = 7\sqrt{15-3 \cdot 5} + a^2 - 24,$$

$$5a - 10 = a^2 - 24, \quad a^2 - 5a - 14 = 0, \quad a_1 = -2, \quad a_2 = 7.$$

При других a корней нет.

Ответ: Если $a = -2$, $a = 7$, то $x = 5$; если $a \neq -2$, $a \neq 7$, то корней нет.

Метод оценки (использующий ограниченность некоторых выражений и функций) также позволяет легко решить некоторые задачи.

12. Найдите, при каких значениях m и n выражение $n^2 + m^2 - 6m + 18n + 3$ принимает наименьшее значение. Какое это значение?

Решение: Обозначим через A и преобразуем заданное выражение.

$$\begin{aligned} A &= n^2 + 18n + m^2 - 6m + 3 = (n^2 + 18n + 81) - \\ &- 81 + (m^2 - 6m + 9) - 9 + 3 = (n + 9)^2 + (m - 3)^2 - 87. \end{aligned}$$

Полный квадрат некоторого выражения принимает наименьшее значение (нуль), если это выражение равно нулю. Так как $(n + 9)^2 \geq 0$, $(m - 3)^2 \geq 0$, то $A \geq -87$, причём $A = -87$, только если

$$\begin{cases} n + 9 = 0, \\ m - 3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} n = -9, \\ m = 3. \end{cases}$$

Ответ: $n = -9$, $m = 3$; наименьшее значение -87 .

13. При каких значениях параметра a уравнение $|x + 3a + 7| + (x - a + 15)^2 = 0$ имеет хотя бы один корень?

Решение: $|x + 3a + 7| \geq 0$, $(x - a + 15)^2 \geq 0$.

Их сумма может быть равна нулю, только если оба эти выражения равны нулю.

Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x + 3a + 7 = 0, \\ x - a + 15 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3a - 7, \\ 4a - 8 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2, \\ x = -13. \end{cases}$$

Исходное уравнение имеет корень при $a = 2$.

Ответ: 2.

Упражнения

7.1. При каких значениях параметра a уравнение $(3a - 7)x^4 + (2 - a)x^2 - 4a + 2a^2 = 0$ имеет единственное решение?

7.2. При каких значениях параметра b система $\begin{cases} 2y = 2x^2 + 5b, \\ 2x = 2y^2 + 5b \end{cases}$ имеет единственное решение?

7.3. Решите уравнение $x^6 + 2x^4 - 2a^2 = |a|(a^2 + 3) - 3(\sqrt{x})^4$ при всех значениях параметра a .

7.4. Для всех положительных значений a найдите корни уравнения $\frac{3a}{x} = x^2 - 4x + a + 3$, удовлетворяющие условию $x \geq 2$.

7.5. Решите уравнение $\sqrt{24 - 3x} + (p + 3)x = 2\sqrt{2x - 16} - p^2 - 2p$ при всех значениях параметра p .

7.6. Найдите, при каких значениях p и t выражение $p^2 + 4t^2 - 8p + 4t + 1$ принимает наименьшее значение. Какое это значение?

7.7. При каких значениях параметра a уравнение $(x + 2a - 3)^2 + \sqrt{x + a - 1} = 0$ имеет хотя бы один корень?

7.8. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $(x + a^2)^2 + |3x - a + 4| + |9x + 16| = 0$ имеет корни.

Ответы

Решение линейных уравнений с параметром

- 1.1. $x = 5a$. 1.2. $x = \frac{-7a + a^3 + 18}{8}$. 1.3. Если $a = -2$, то корней нет; если $a \neq -2$, то $x = \frac{7a}{a+2}$. 1.4. Если $a \neq \pm 1$, то $x = \frac{2}{1-a}$; если $a = -1$, то x — любое число; если $a = 1$, то корней нет. 1.5. Если $a = 3$, то x — любое число; если $a = -1$, то корней нет; если $a \neq 3, a \neq -1$, то $x = \frac{a}{a+1}$. 1.6. $a = 5, -1\frac{1}{4} < a \leq -1$. 1.7. $a = 1, a = \frac{1}{2}$. 1.8. Если $a = 0$, то решений нет; если $a \neq 0$, то $x = 2, y = -\frac{1}{a}$.

Решение линейных неравенств с параметром

- 2.1. $a \leq -2\frac{2}{3}$. 2.2. $x \geq \frac{3}{7}a + 7$. 2.3. $x > \frac{5a+8}{-4}$. 2.4. Если $a = -2$, x — любое число; если $a > -2$, $x > \frac{6a}{a+2}$; если $a < -2$, $x < \frac{6a}{a+2}$. 2.5. Если $a = \frac{2}{5}$, нет решений; если $a > \frac{2}{5}$, $x \geq \frac{3a+1}{5a-2}$; если $a < \frac{2}{5}$, $x \leq \frac{3a+1}{5a-2}$. 2.6. $p = 6,5$. 2.7. $p \leq 5,2$. 2.8. $-2,2 < a \leq -0,2$. 2.9. Если $a < -6$, то $x < 11$; если $a \geq -6$, то $x < 5 - a$. 2.10. $a \leq -2$.

Графики на плоскости Oxy

- 3.6. $k = -3$. 3.7. $a = 11$. 3.8. а) $a = 0$, б) $a = 3$. 3.9. а) $a \neq 0, a \neq 10$, б) $a = 0$. 3.10. $a \leq -0,2, a \geq 3$. 3.12. $a = 0, a = \frac{8}{9}$. 3.17. $\pm 2; \pm 5; \pm \sqrt{29}$. 3.18. $-0,5; 0$. 3.19. $a > 1$. 3.25. $a = 0$. 3.26. $0 \leq p \leq 2, p = 3$. 3.27. $0 < p < 1, 3 < p \leq 5$. 3.28. $p = -1, p = 8$.

Квадратные уравнения с параметром

- 4.1. а) $-1\frac{1}{12}$; б) $m > -1\frac{1}{12}$. 4.2. а) $p \neq 0$; б) при любом p ; в) $p > 30$ или $p < -30$; г) $p < 0$. 4.3. $p = 0, p = -3$. 4.4. $a \leq 12$. 4.5. $p, -9p$. 4.6. $-a$,

$-a - 3$. 4.7. $a + 2$, $3 - 2a$. 4.8. 1, $\frac{-3p-2}{p+2}$. 4.9. Если $p = -5$, $x = -1$;

если $p < -5\frac{1}{4}$, нет корней; если $-5\frac{1}{4} < p < -5$, $p > -5$, $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{4p+21}}{2(p+5)}$.

4.10. Если $a = -2$, то x — любое число; если $a = 2$, то $x = 1\frac{2}{3}$; если $1,55 \leq a < 2$,

$a > 2$, $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{20a-31}}{2(a-2)}$; если $a < 1,55$, то корней нет. 4.11. $k = 3$, $k = 7$.

4.12. $p = -15$.

Разложение квадратного трёхчлена на множители

5.1. а) $x^2 - (4+p)x + 4p = 0$; б) $x^2 + (5-p)x - 8p - 24 = 0$; в) $x^2 + (12-4p)x + 3p^2 - 28p + 32 = 0$; г) $x^2 - 8px = 0$. 5.2. $p = 5$. 5.3. $t = 2$, $x_1 + x_2 = -21$.

5.4. $m = 6$. 5.5. $t = -\frac{7}{6}$, $x_1x_2 = -1,5$. 5.6. При $p = 5$, $x_{1,2} = \pm 1$. 5.7. -2 .

5.8. 3. 5.9. а) $x^2 - 5px + 6p^2 = 0$; б) $x^2 + (3-4p)x + 3p^2 - 13p - 10 = 0$;
в) $x^2 - (7p+1)x = 0$.

Расположение корней квадратного уравнения относительно заданных точек

6.1. $p \geq 3$ и $p = 2,5$; (указание: не забудьте рассмотреть случай $D = 0$).
6.2. $-\frac{1}{3} < p < 0$; $1 < p < \frac{5}{3}$. 6.3. $p < -13$. 6.4. а) $a > 0$, б) $a < -12 - \sqrt{140}$,
в) $-12 + \sqrt{140} < a < 0$. 6.5. $3 < p < 4$. 6.6. $a > 1,5$. 6.7. $-0,25 < k < 0$.
6.8. $\frac{3}{8} \leq p < \frac{7}{2}$. 6.9. $a < -4$, $2 < a \leq 2,05$.

Использование свойств функций и алгебраических выражений

7.1. 2. 7.2. $\frac{1}{10}$. 7.3. Если $a \geq 0$, $x = \sqrt{a}$; если $a < 0$, $x = \sqrt{-a}$. 7.4. $x = 3$.
7.5. Если $p \neq -2$, $p \neq 12$, то корней нет; если $p = -2$, $p = 12$, то $x = 8$. 7.6. $p = 4$,
 $t = -0,5$, значение -16 . 7.7. $a = 2$. 7.8. $a = -1\frac{1}{3}$.

Учебное издание

Коннова Елена Генриевна

**МАТЕМАТИКА. 9 КЛАСС
ПОДГОТОВКА К ГИА. ЗАДАНИЯ С ПАРАМЕТРОМ**

Под редакцией **Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова**

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Обложка **В. Кириченко**

Компьютерная верстка **Г. Безуглова**

Корректор **Н. Коновалова**

Подписано в печать с оригинал-макета 06.02.2014.

Формат 60x84¹/₁₆. Бумага типографская.

Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 3,72.

Тираж 5000 экз. Заказ № 20.

Издательство ООО «Легион» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009, зарегистрирован в Минюст России 15.01.2010 № 15987.

ООО «ЛЕГИОН»

Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.

Адрес редакции: 344011, г. Ростов-на-Дону, ул. Согласия, 7.

www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных
диапозитивов в ЗАО «Полиграфобъединение»
347900, г. Таганрог, ул. Лесная биржа, 6В.