Библиотечка СтатГрад

СтатГрад

Подготовка к ЕГЭ

ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

ЕГЭ 2017

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ЕГЭ 2017

ФГОС

Государственное автономное образовательное учреждение
дополнительного профессионального образования города Москвы
«Центр педагогического мастерства»

Математика

Подготовка к ЕГЭ в 2017 году

Диагностические работы

Профильный уровень

Библиотечка СтатГрад

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС)

Москва
Издательство МЦНМО
2017

УДК 373:51
ББК 22.1я72
М33

М33 Математика. Подготовка к ЕГЭ в 2017 году. Диагностические работы. Профильный уровень. — М.: МЦНМО, 2017.

ISBN 978-5-4439-1061-1

Данное пособие предназначено для отработки практических умений и навыков учащихся при подготовке к экзамену по математике в 11 классе в формате ЕГЭ на профильном уровне. Оно содержит варианты диагностических работ по математике, содержание которых соответствует контрольно-измерительным материалам, разработанным Федеральным институтом педагогических измерений для проведения единого государственного экзамена. В книгу входят также ответы к заданиям и критерии проверки и оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом. Авторы пособия являются разработчиками тренировочных и диагностических работ для системы СтатГрад (http://statgrad.org).

Материалы книги рекомендованы учителям и методистам для выявления уровня и качества подготовки учащихся по предмету, определения степени их готовности к единому государственному экзамену.

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

Оригинал-макет издания подготовлен в ГАОУ ДПО ЦПМ.

В сборнике использованы задания, предложенные
М. А. Волчкевичем, И. Р. Высоцким, Р. К. Гординым, О. Н. Косухиным,
А. Р. Рязановским, П. В. Семеновым, И. Н. Сергеевым, В. А. Смирновым,
А. И. Суздальцевым, Д. А. Федоровых, А. В. Хачатуряном, С. А. Шестаковым,
Д. Э. Шнолём, И. В. Ященко

Учебно-методическое издание

Математика. Подготовка к ЕГЭ в 2017 году.
Диагностические работы. Профильный уровень

Подписано в печать 07.07.2016 г. Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Тираж 5000 экз. Заказ №   .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в ООО «Принт Сервис Групп».
105187, Москва, ул. Борисовская, д. 14.

ISBN 978-5-4439-1061-1

Предисловие

СтатГрад – это всероссийский интернет-проект, созданный для того, чтобы обеспечить каждое образовательное учреждение качественными дидактическими и методическими материалами. Основные направления деятельности СтатГрада – система диагностики образовательных достижений учащихся, методическая поддержка систем внутришкольного контроля, учебно-методические материалы для подготовки учащихся к ЕГЭ и ОГЭ. СтатГрад предоставляет методические материалы по всем ведущим дисциплинам школьной программы: по математике, физике, биологии, русскому языку, литературе, истории, обществознанию, химии, информатике, географии, иностранным языкам. Использование на уроках и при самостоятельной работе тренировочных и диагностических работ в формате ЕГЭ и ОГЭ, диагностических работ для 5–11 классов позволит учителям выявить пробелы в знаниях учащихся, а учащимся – подготовиться к государственным экзаменам, заранее попробовать свои силы. Авторы и эксперты СтатГрада – специалисты высокого класса, кандидаты и доктора наук, авторы учебной литературы для средней и высшей школы. В настоящее время СтатГрад сотрудничает более чем с 13 000 образовательных организаций России.

Настоящий сборник содержит диагностические материалы, разработанные специалистами СтатГрада для подготовки учащихся выпускных классов к ЕГЭ по математике (профильный уровень). Материалы соответствуют нормативным документам ФИПИ 2016 года.

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Вариант 1

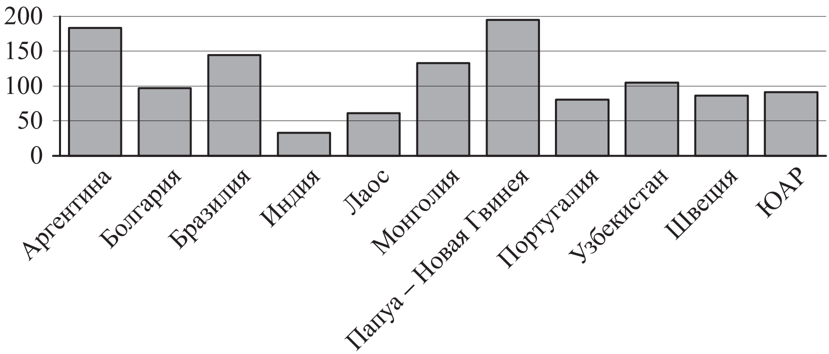
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Павел Иванович купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 45 миль в час? Считайте, что 1 миля равна 1609 м. Ответ округлите до целого числа.

Ответ: ___________________________.

2 На диаграмме показано распределение выплавки меди в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимала Папуа – Новая Гвинея, одиннадцатое место — Индия. Какое место занимала Португалия?



Ответ: ___________________________.

3 Найдите длину диагонали прямоугольника, вершины которого имеют координаты $(2;1)$, $(2;4)$, $(6;1)$, $(6;4)$.

Ответ: ___________________________.

4

Вероятность того, что на тестировании по математике учащийся П. верно решит больше 7 задач, равна 0,78. Вероятность того, что П. верно решит больше 6 задач, равна 0,89. Найдите вероятность того, что П. верно решит ровно 7 задач.

Ответ: ___________________________.

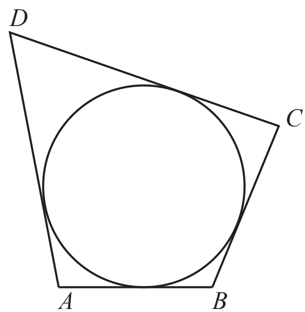
5

Найдите корень уравнения $(2x+3)^2=(2x+9)^2$.

Ответ: ___________________________.

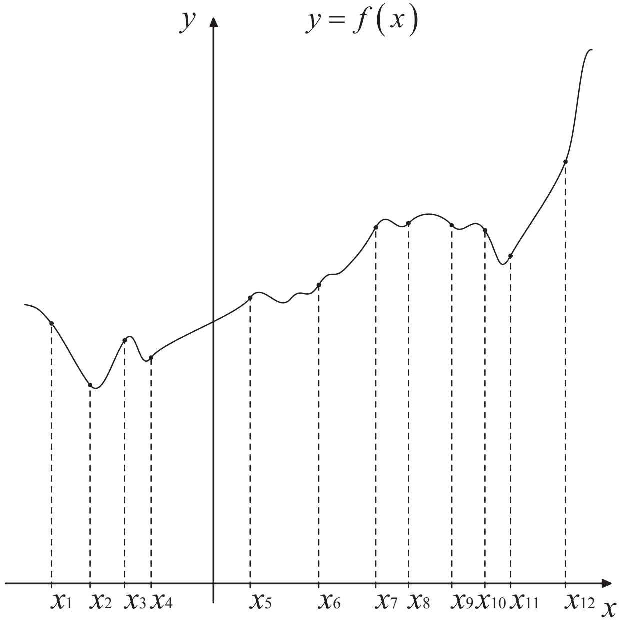
6

В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB=41$, $CD=46$. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$.



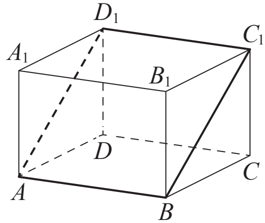
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



Ответ: ____________________________.

8 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 16$, $AD = 21$, $AA_1 = 28$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, B и C_1.



Ответ: ____________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $(\log_3 243)\cdot(\log_2 256)$.

Ответ: ___________________________.

10 Для поддержания навеса планируется использовать цилиндрическую колонну. Давление P (в паскалях), оказываемое навесом и колонной на опору, определяется по формуле $P=\frac{4mg}{\pi D^2}$, где $m=7500$ кг — общая масса навеса и колонны, D — диаметр колонны (в метрах). Считая, что ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2, а $\pi=3$, определите наименьший возможный диаметр колонны, если давление, оказываемое на опору, не должно быть больше 400 000 Па. Ответ выразите в метрах.

Ответ: ___________________________.

11 Первые 140 км автомобиль ехал со скоростью 50 км/ч, следующие 160 км — со скоростью 60 км/ч, а затем 120 км — со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции $y=x+\frac{64}{x}+13$ на отрезке $[0{,}5;\,19]$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\frac{2\cos x+1}{\operatorname{tg} x-\sqrt{3}}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\,\frac{7\pi}{2}\right]$.

14 Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны 6. Основание высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1, M — середина ребра AS, точка L лежит на ребре BC так, что $BL:LC=1:2$.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью S_1LM — равнобокая трапеция.

б) Вычислите длину средней линии этой трапеции.

15 Решите неравенство

$$\frac{2^{2x+1}-96\cdot 0{,}5^{2x+3}+2}{x+1}\le 0.$$

16 Первая окружность с центром O, вписанная в равнобедренный треугольник KLM, касается боковой стороны KL в точке B, а основания ML — в точке A. Вторая окружность с центром O_1 касается основания ML и продолжений боковых сторон.

а) Докажите, что треугольник OLO_1 прямоугольный.

б) Найдите радиус второй окружности, если известно, что радиус первой равен 6 и $AK=16$.

17 По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 10 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 5 % в первый год и на одинаковое целое число n процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наименьшее значение n, при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(x-3a+1)^2+(y+2a)^2=a-1,\\ 4x+3y=a+1\end{cases}$$

имеет более одного решения.

19 Будем называть четырёхзначное число *интересным*, если среди четырёх цифр в его десятичной записи нет нулей, а одна из этих цифр равна сумме трёх других из них. Например, интересным является число 6321.

а) Приведите пример двух интересных четырёхзначных чисел, разность между которыми равна трём.

б) Найдутся ли два интересных четырёхзначных числа, разность между которыми равна 111?

в) Найдите наименьшее простое число, для которого не существует кратного ему интересного четырёхзначного числа.

Вариант 2

Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

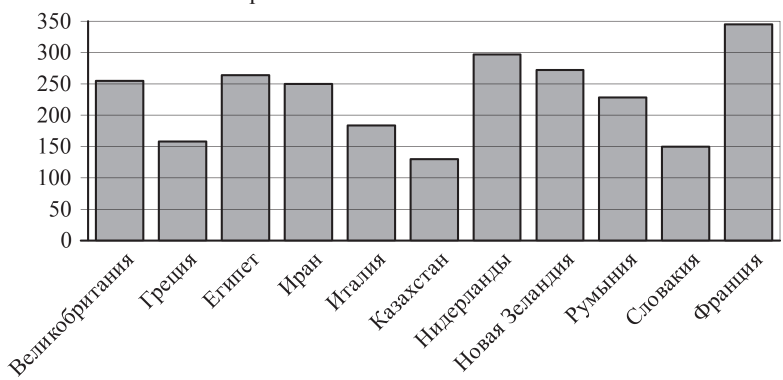
1

Павел Иванович купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 54 мили в час? Считайте, что 1 миля равна 1609 м. Ответ округлите до целого числа.

Ответ: ___________________________.

2

На диаграмме показано распределение выплавки алюминия в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2009 год. Среди представленных стран первое место по выплавке алюминия занимала Франция, одиннадцатое место — Казахстан. Какое место занимал Иран?



Ответ: ___________________________.

3

Найдите длину диагонали прямоугольника, вершины которого имеют координаты $(1;2)$, $(1;10)$, $(7;2)$, $(7;10)$.

Ответ: ___________________________.

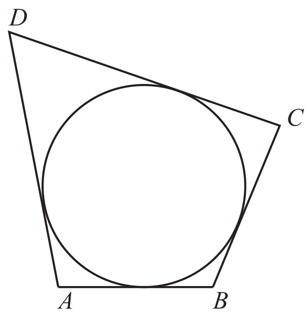
4 Вероятность того, что на тестировании по физике учащийся Т. верно решит больше 8 задач, равна 0,58. Вероятность того, что Т. верно решит больше 7 задач, равна 0,64. Найдите вероятность того, что Т. верно решит ровно 8 задач.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения $(3x-7)^2=(3x+1)^2$.

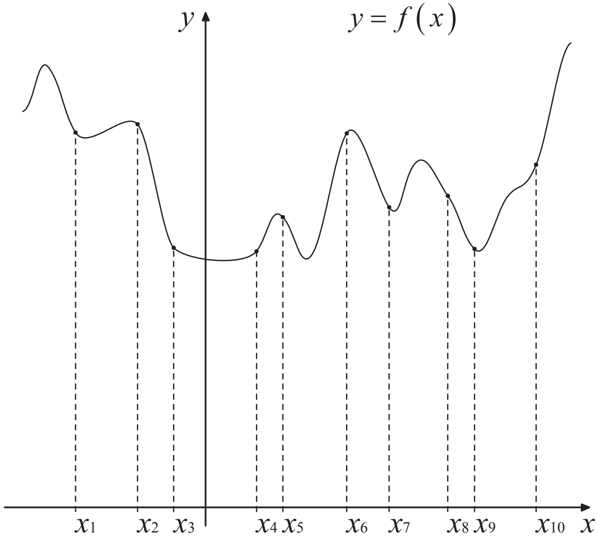
Ответ: ___________________________.

6 В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB=22$, $CD=77$. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$.



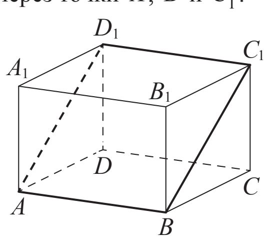
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и десять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



Ответ: ____________________________.

8 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 15$, $AD = 12$, $AA_1 = 16$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, B и C_1.



Ответ: ____________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\left(\log_5 625\right)\cdot\left(\log_4 64\right)$.

Ответ: ____________________________.

10 Для поддержания навеса планируется использовать цилиндрическую колонну. Давление P (в паскалях), оказываемое навесом и колонной на опору, определяется по формуле $P=\dfrac{4mg}{\pi D^2}$, где $m=4050$ кг — общая масса навеса и колонны, D — диаметр колонны (в метрах). Считая, что ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2, а $\pi=3$, определите наименьший возможный диаметр колонны, если давление, оказываемое на опору, не должно быть больше 600 000 Па. Ответ выразите в метрах.

Ответ: ____________________________.

11 Первые 110 км автомобиль ехал со скоростью 50 км/ч, следующие 130 км — со скоростью 100 км/ч, а затем 180 км — со скоростью 120 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ____________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции $y=x+\dfrac{81}{x}+14$ на отрезке $[0,5;17]$.

Ответ: ____________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{3}\,\operatorname{tg} x+1}{2\sin x-1}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{9\pi}{2};\,6\pi\right]$.

14 Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны 12. Основание высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1, M — середина ребра AS, точка L лежит на ребре BC так, что $BL:LC=1:2$.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью S_1LM — равнобокая трапеция.

б) Вычислите длину средней линии этой трапеции.

15 Решите неравенство

$$\frac{4^{x+1}-192\cdot 0{,}25^{x+1}-4}{x+2}\le 0.$$

16 Первая окружность с центром O, вписанная в равнобедренный треугольник KLM, касается боковой стороны KL в точке B, а основания ML — в точке A. Вторая окружность с центром O_1 касается основания ML и продолжений боковых сторон.

а) Докажите, что треугольник OLO_1 прямоугольный.

б) Найдите радиус второй окружности, если известно, что радиус первой равен 15 и $AK=32$.

17 По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 20 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 10 % в первый год и на одинаковое целое число n процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наименьшее значение n, при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(x+2a)^2+(y+3a+1)^2=a+1,\\ 3x-4y=a-1\end{cases}$$

имеет более одного решения.

19 Будем называть четырёхзначное число *интересным*, если среди четырёх цифр в его десятичной записи нет нулей, а одна из этих цифр равна сумме трёх других из них. Например, интересным является число 6321.

а) Приведите пример двух интересных четырёхзначных чисел, разность между которыми равна пяти.

б) Найдутся ли два интересных четырёхзначных числа, разность между которыми равна 91?

в) Найдите наименьшее нечётное число, для которого не существует кратного ему интересного четырёхзначного числа.

Вариант 3

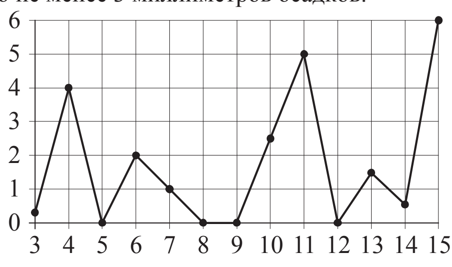
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3500 рублей. До установки счётчиков за воду платили 1700 рублей ежемесячно. После установки счётчиков ежемесячная оплата воды стала составлять 1100 рублей. Через какое наименьшее количество месяцев экономия по оплате воды превысит затраты на установку счётчиков, если тарифы на воду не изменятся?

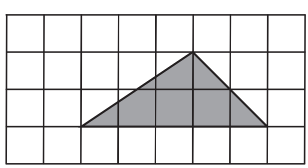
Ответ: ___________________________.

2 На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Казани с 3 по 15 февраля 1909 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода выпадало не менее 3 миллиметров осадков.



Ответ: ___________________________.

3 Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: ___________________________.

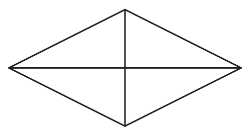
4 На олимпиаде по физике 450 участников разместили в трёх аудиториях. В первых двух удалось разместить по 180 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения $\frac{1}{2x+5}=\frac{1}{3x-5}$.

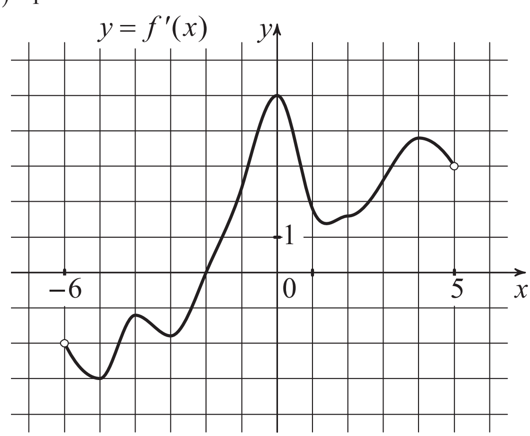
Ответ: ___________________________.

6 Площадь ромба равна 52. Одна из его диагоналей равна 4. Найдите другую диагональ.



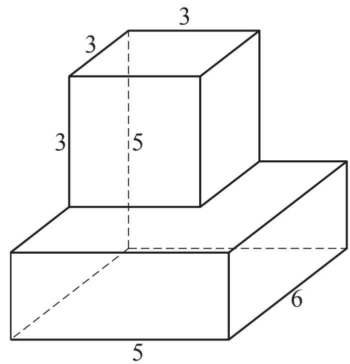
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график фукции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6;5)$. В какой точке отрезка $[-1;3]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Ответ: ___________________________.

8 Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: ___________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{18\left(\sin^2 24° - \cos^2 24°\right)}{\cos 48°}$.

Ответ: ___________________________.

10 К источнику с ЭДС $\varepsilon = 55$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}5$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, задаётся формулой $U = \dfrac{\varepsilon R}{R + r}$. При каком значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет равно 50 В? Ответ выразите в Омах.

Ответ: ___________________________.

11 На изготовление 780 деталей первый рабочий тратит на 4 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 840 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй. Сколько деталей за час делает первый рабочий?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции $y = 15x - 6\sin x + 8$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\frac{5\sin^2 x - 3\sin x}{5\cos x + 4} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

14 Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 4. Через точки A, C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

15 Решите неравенство

$$\log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}} 4 \geq \log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}} \left(5 - 2^x\right).$$

16 Стороны KN и LM трапеции $KLMN$ параллельны, прямые LM и MN — касательные к окружности, описанной около треугольника KLN.

а) Докажите, что треугольники LMN и KLN подобны.

б) Найдите площадь треугольника KLN, если известно, что $KN = 3$, а $\angle LMN = 120°$.

17 По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект 10 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 15 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн рублей в первый и второй годы, а также целое число m млн в третий и четвёртый годы. Найдите наименьшие значения n и m, при которых первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, а за четыре года как минимум утроятся.

18 Найдите все значения параметра b, при каждом из которых уравнение

$$x^3 + 2x^2 - ax + 4 = 0$$

имеет единственное решение на отрезке $[-1; 2]$.

19 Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ состоит из различных натуральных чисел.

а) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел $a_1, a_2, ..., a_7$ ровно три числа делятся на 100?

б) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел $a_1, a_2, ..., a_{49}$ ровно 11 чисел делятся на 100?

в) Для какого наибольшего натурального n могло оказаться так, что среди чисел $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ больше кратных 100, чем среди чисел $a_{2n+1}, a_{2n+2}, ..., a_{5n}$?

Вариант 4

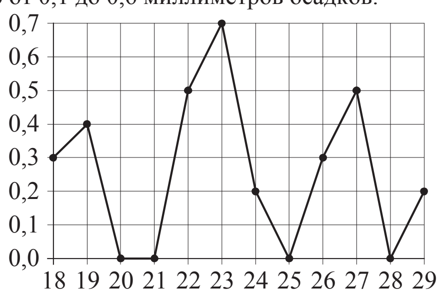
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 2500 рублей. До установки счётчиков за воду платили 800 рублей ежемесячно. После установки счётчиков ежемесячная оплата воды стала составлять 600 рублей. Через какое наименьшее количество месяцев экономия по оплате воды превысит затраты на установку счётчиков, если тарифы на воду не изменятся?

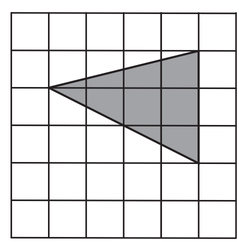
Ответ: ___________________________.

2 На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших Якутске с 18 по 29 октября 1986 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода выпадало от 0,1 до 0,6 миллиметров осадков.



Ответ: ___________________________.

3 Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\,см \times 1\,см$ (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: ___________________________.

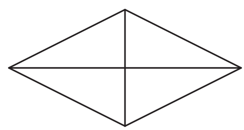
4 На олимпиаде по истории 400 участников разместили в трёх аудиториях. В первых двух удалось разместить по 150 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения $\frac{1}{7x-15}=\frac{1}{4x+3}$.

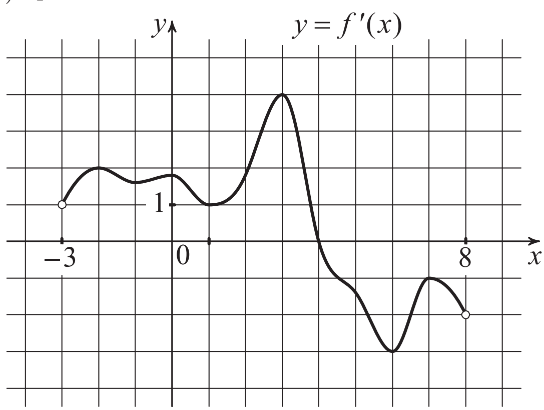
Ответ: ___________________________.

6 Площадь ромба равна 27. Одна из его диагоналей равна 6. Найдите другую диагональ.



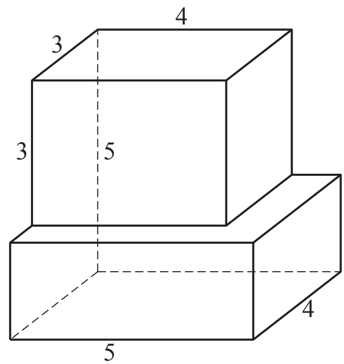
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3;8)$. В какой точке отрезка $[-2;4]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Ответ: ___________________________.

8 Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: ____________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{7\left(\sin^2 11^\circ - \cos^2 11^\circ\right)}{\cos 22^\circ}$.

Ответ: ____________________________.

10 К источнику с ЭДС $\varepsilon = 130$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, задаётся формулой $U = \dfrac{\varepsilon R}{R + r}$. При каком значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет равно 120 В? Ответ выразите в Омах.

Ответ: ____________________________.

11 На изготовление 575 деталей первый рабочий тратит на 2 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 600 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 1 деталь больше, чем второй. Сколько деталей за час делает первый рабочий?

Ответ: ____________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции $y = 16x - 6\sin x + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\dfrac{13\sin^2 x - 5\sin x}{13\cos x + 12} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

14 Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 6. Через точки A, C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

15 Решите неравенство

$$\log_{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{19}}{6}} 5 \geq \log_{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{19}}{6}} \left(7 - 2^x\right).$$

16 Стороны KN и LM трапеции $KLMN$ параллельны, прямые LM и MN — касательные к окружности, описанной около треугольника KLN.

а) Докажите, что треугольники LMN и KLN подобны.

б) Найдите площадь треугольника KLN, если известно, что $KN = 6$, а $\angle LMN = 120°$.

17 По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект 20 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 13 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн рублей в первый и второй годы, а также целое число m млн в третий и четвёртый годы. Найдите наименьшие значения n и m, при которых первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, а за четыре года как минимум утроятся.

18 Найдите все значения параметра b, при каждом из которых уравнение

$$x^3 + 4x^2 - ax + 6 = 0$$

имеет единственное решение на отрезке $\left[-2;\, 2\right]$.

19 Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ состоит из различных натуральных чисел.

а) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел $a_1, a_2, ..., a_7$ ровно три числа делятся на 36?

б) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел $a_1, a_2, ..., a_{30}$ ровно 9 чисел делятся на 36?

в) Для какого наибольшего натурального n могло оказаться так, что среди чисел $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ больше кратных 36, чем среди чисел $a_{2n+1}, a_{2n+2}, ..., a_{5n}$?

Вариант 5

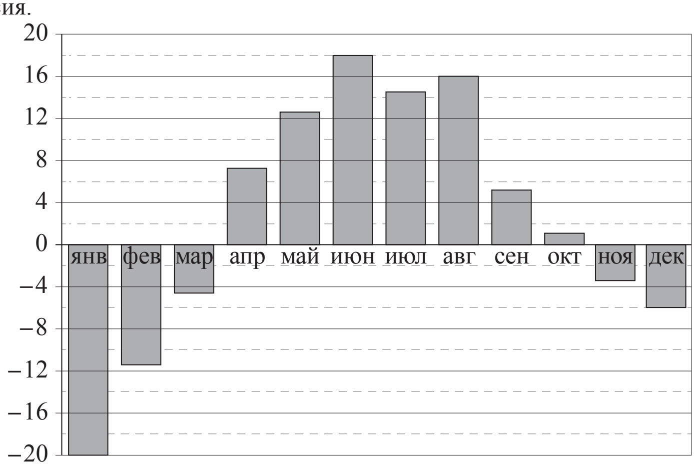
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Летом килограмм клубники стоит 90 рублей. Маша купила 1 кг 400 г клубники. Сколько рублей сдачи она должна была получить с 1000 рублей?

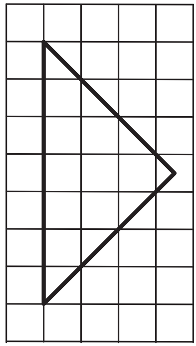
Ответ: ___________________________.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Екатеринбурге (Свердловске) за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в период с мая по декабрь 1973 года включительно. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите длину его медианы, проведённой к гипотенузе.



Ответ: ___________________________.

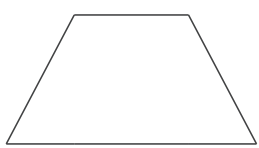
4 Вероятность того, что новый персональный компьютер прослужит больше года, равна 0,98. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,84. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6}=8^{x}$.

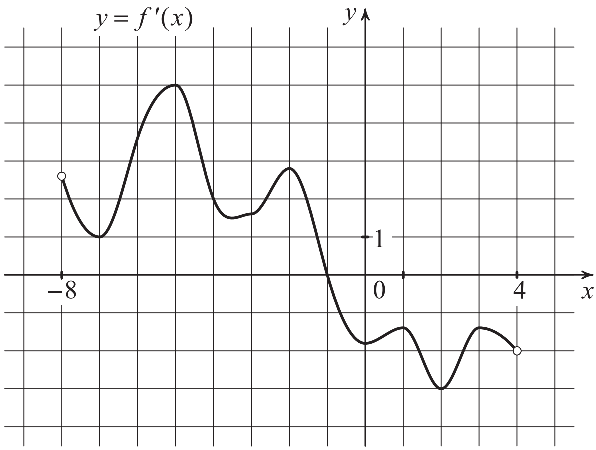
Ответ: ___________________________.

6 Основания равнобедренной трапеции равны 12 и 18, а её периметр равен 40. Найдите площадь трапеции.



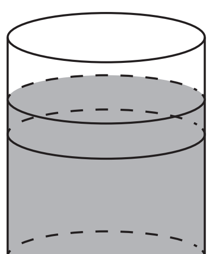
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику фукции $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



Ответ: ___________________________.

8 В цилиндрический сосуд налили 3000 $см^3$ воды. Уровень жидкости оказался равным 20 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 3 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в $см^3$.



Ответ: ___________________________.

Часть 2

9

Найдите значение выражения $\frac{\left(3\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}{16-\sqrt{60}}$.

Ответ: ___________________________.

10

Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}$. При каком значении угла α (в градусах) время полёта составит 2,3 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0=23$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

Ответ: ___________________________.

11

Первый и второй насосы наполняют бассейн за 9 минут, второй и третий — за 12 минут, а первый и третий — за 18 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

Ответ: ___________________________.

12

Найдите наибольшее значение функции $y=\ln\left(x+4\right)^9-9x$ на отрезке $\left[-3{,}5;\ 0\right]$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение $\sqrt{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

14

В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 12 и радиусом основания 6 проведена хорда AB, равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр CD, перпендикулярный AB. Построено сечение $ABNM$, проходящее через прямую AB перпендикулярно прямой CD так, что точка C и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр CD, лежат с одной стороны от сечения.
а) Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.
б) Найдите объём пирамиды $CABNM$.

15

Решите неравенство $2^{\frac{x}{x+1}}-2^{\frac{5x+3}{x+1}}+8\le 2^{\frac{2x}{x+1}}$.

16

Окружность, проходящая через вершины A, C и D прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, пересекает меньшую боковую сторону AB в точке P и касается прямой BC. Известно, что $AD=CD$.
а) Докажите, что CP — биссектриса угла ACB.
б) В каком отношении прямая DP делит площадь трапеции?

17

Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20 % по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика превысит 10 млн.

18 Найдите все неотрицательные значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-a)^2}=\sqrt{4+a^2},\\ 5y=\left|6-a^2\right|\end{cases}$$

имеет единственное решение.

19 Возрастающие арифметические прогрессии $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n,\ ...$ и $b_1,\ b_2,\ ...,\ b_n,\ ...$ состоят из натуральных чисел.

а) Существуют ли такие прогрессии, для которых $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{a_4}{b_4}$ — различные натуральные числа?

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{b_2}{a_2}$ и $\frac{a_4}{b_4}$ — различные натуральные числа?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a_2}{b_2}$, если известно, что $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{a_{10}}{b_{10}}$ — различные натуральные числа?

Вариант 6

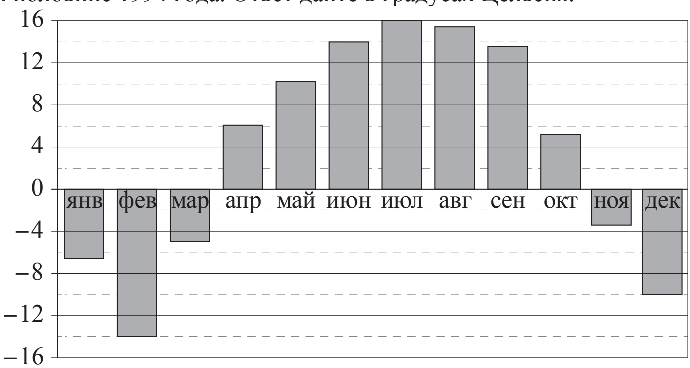
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Летом килограмм клубники стоит 90 рублей. Маша купила 1 кг 200 г клубники. Сколько рублей сдачи она должна была получить с 500 рублей?

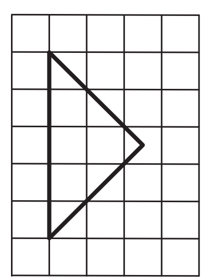
Ответ: ___________________________.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде (Горьком) за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру во второй половине 1994 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите длину его медианы, проведённой к гипотенузе.



Ответ: ___________________________.

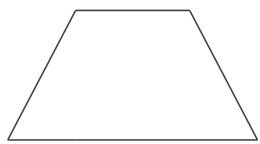
4 Вероятность того, что новый принтер прослужит больше года, равна 0,95. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Ответ: ____________________________.

5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} = 4^x$.

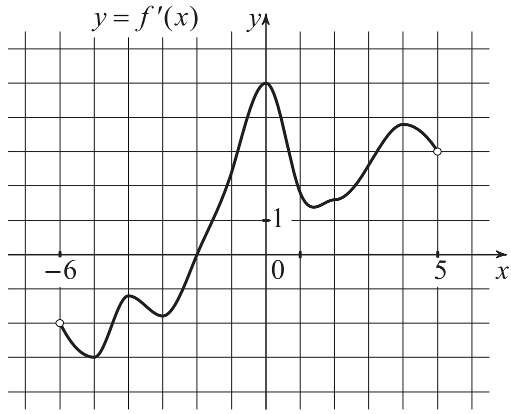
Ответ: ____________________________.

6 Основания равнобедренной трапеции равны 17 и 23, а её периметр равен 50. Найдите площадь трапеции.



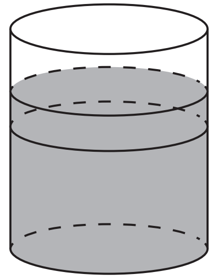
Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



Ответ: ____________________________.

8 В цилиндрический сосуд налили 1700 $см^3$ воды. Уровень жидкости оказался равным 10 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 5 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в $см^3$.



Ответ: ___________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{14}\right)^2}{5+\sqrt{21}}$.

Ответ: ___________________________.

10 Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t=\dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}$. При каком значении угла α (в градусах) время полёта составит 2,6 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0=13$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

Ответ: ___________________________.

11 Первый и второй насосы наполняют бассейн за 20 минут, второй и третий — за 24 минуты, а первый и третий — за 30 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наибольшее значение функции $y=\ln\left(x+3\right)^7-7x$ на отрезке $\left[-2{,}5;\ 0\right]$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\left(\sqrt{2}\sin x+1\right)\sqrt{-5\cos x}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$.

14 Дан прямой круговой конус с вершиной M. Осевое сечение конуса — треугольник с углом $120°$ при вершине M. Образующая конуса равна $2\sqrt{3}$. Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

а) Докажите, что получившийся в сечении треугольник тупоугольный.

б) Найдите площадь сечения.

15 Решите неравенство $\log_{x^2+1}(x-3)^2\cdot\log_{x^2+1}\frac{(x-3)^2}{\left(x^2+1\right)^3}\le -2$.

16 В треугольнике ABC проведены две высоты BM и CN, причём $AM:CM=2:3$ и $\cos\angle BAC=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

а) Докажите, что угол ABC тупой.

б) Найдите отношение площадей треугольников BMN и ABC.

17 Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 10% по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 8 млн.

18 Найдите все значения параметра α из интервала $(0;\ \pi)$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2-4(x+y)\sin\alpha+8\sin^2\alpha=2\sin\alpha-1, \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2\sin\alpha+4\sin^2\alpha \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19 Возрастающие арифметические прогрессии $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n,\ ...$ и $b_1,\ b_2,\ ...,\ b_n,\ ...$ состоят из натуральных чисел.

а) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1+a_3b_3=3a_2b_2$?

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1+2a_4b_4=3a_3b_3$?

в) Какое наибольшее значение может принимать произведение a_3b_3, если $a_1b_1+2a_4b_4\le 300$?

Ответы к заданиям

№ задания	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
1	72	87	6
2	9	6	3
3	5	10	5
4	0,11	0,06	0,2
5	–3	1	10
6	174	198	26
7	8	3	3
8	560	300	87
9	40	12	–18
10	0,5	0,3	5
11	63	84	30
12	29	32	8

№ задания	Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6
1	13	874	392
2	7	–6	–10
3	6	3,5	2,5
4	0,25	0,14	0,08
5	6	1,5	–1
6	9	60	80
7	4	–1	–2
8	76	450	850
9	–7	3	4
10	12	30	90
11	25	8	16
12	6	27	14

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

Вариант 1

13 а) Решите уравнение $\dfrac{2\cos x+1}{\operatorname{tg} x-\sqrt{3}}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

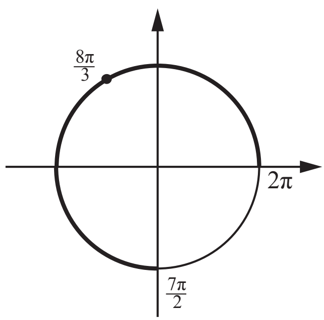
Решение.

а) Имеем

$$\frac{2\cos x+1}{\operatorname{tg} x-\sqrt{3}}=0;\quad \begin{cases}\cos x=-\dfrac{1}{2},\\ \operatorname{tg} x\neq\sqrt{3},\end{cases}$$

откуда $x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$, отберём с помощью единичной окружности.



Получаем $\dfrac{8\pi}{3}$.

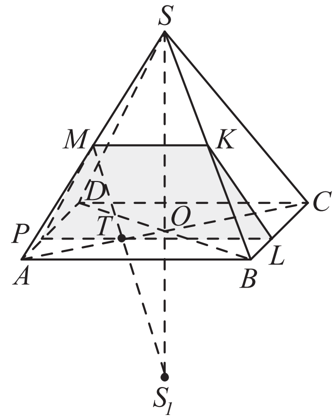
Ответ: а) $\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{8\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны 6. Основание высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1, M — середина ребра AS, точка L лежит на ребре BC так, что $BL:LC=1:2$.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью S_1LM — равнобокая трапеция.

б) Вычислите длину средней линии этой трапеции.



Решение.

а) Прямая S_1M пересекает медиану AO треугольника ABD в точке T так, что $AT:TO=2:1$, поскольку T — точка пересечения медиан треугольника SAS_1, и O — точка пересечения диагоналей основания $ABCD$, так как пирамида $SABCD$ правильная. Следовательно, $AT:TC=1:2$. Точка L делит отрезок BC в отношении $BL:LC=1:2$, следовательно, треугольники ACB и TCL подобны с коэффициентом подобия $k=AC:TC=BC:CL=3:2$, так как они имеют общий угол с вершиной C и стороны AC и BC в треугольнике ABC пропорциональны сторонам TC и LC треугольника TCL, заключающим тот же угол. Значит, сторона сечения, проходящая через точки L и T, параллельна стороне AB основания пирамиды $SABCD$. Пусть эта сторона сечения пересекает сторону AD в точке P.

Сторона сечения, проходящая через точку M в плоскости SAB, параллельна прямой AB, так как плоскость S_1LM пересекает плоскость SAB и проходит через прямую PL, параллельную плоскости SAB. Пусть эта сторона сечения пересекает сторону SB в точке K. Тогда сечение $PMKL$ — равнобокая трапеция, поскольку

$$AP=BL \text{ и } AM=BK.$$

б) Большее основание LP трапеции равно 6, поскольку $ABCD$ — квадрат. Второе основание MK трапеции равно 3, поскольку MK — средняя линия треугольника SAB. Значит, средняя линия трапеции равна $\frac{3+6}{2}=4{,}5$.

Ответ: б) 4,5.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\frac{2^{2x+1}-96\cdot 0{,}5^{2x+3}+2}{x+1}\le 0.$$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{2\cdot 4^{x}-12\cdot 4^{-x}+2}{x+1}\le 0;\quad \frac{16^{x}+4^{x}-6}{x+1}\le 0;\quad \frac{\left(4^{x}-2\right)\left(4^{x}+3\right)}{x+1}\le 0;\quad \frac{4^{x}-2}{x+1}\le 0,$$

откуда $-1<x\le\frac{1}{2}$.

Ответ: $\left(-1;\ 0{,}5\right]$.

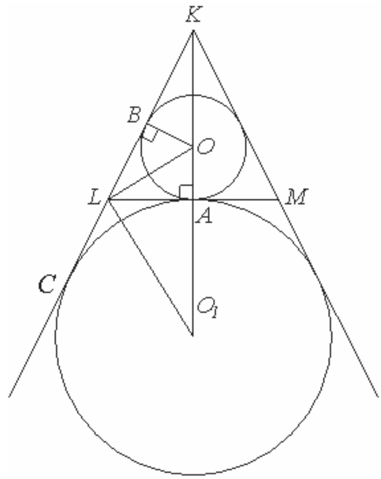
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Первая окружность с центром O, вписанная в равнобедренный треугольник KLM, касается боковой стороны KL в точке B, а основания ML — в точке A. Вторая окружность с центром O_1 касается основания ML и продолжений боковых сторон.

а) Докажите, что треугольник OLO_1 прямоугольный.

б) Найдите радиус второй окружности, если известно, что радиус первой равен 6 и $AK=16$.

Решение.



а) Пусть окружность с центром O_1 касается продолжения боковой стороны KL в точке C. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому LO и LO_1 — биссектрисы смежных углов KLM и CLM. Следовательно, $\angle OLO_1 = 90°$.

б) Прямоугольные треугольники KBO и KAL подобны, поэтому

$$\frac{AL}{OB} = \frac{AK}{KB}.$$

Значит,

$$AL = \frac{AK \cdot OB}{KB} = \frac{AK \cdot OB}{\sqrt{OK^2 - OB^2}} = \frac{16 \cdot 6}{\sqrt{10^2 - 6^2}} = \frac{16 \cdot 6}{8} = 12.$$

Пусть радиус окружности с центром O_1 равен r_1. Треугольник KLM равнобедренный, поэтому окружности с центрами O и O_1 касаются основания ML в одной и той же точке A. Значит, точка A лежит на отрезке OO_1, причём LA — высота прямоугольного треугольника OLO_1, проведённая из вершины прямого угла. Следовательно,

$$r_1 = O_1A = \frac{AL^2}{OA} = \frac{12^2}{6} = 24.$$

Ответ: б) 24.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 10 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 5 % в первый год и на одинаковое целое число n процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наименьшее значение n, при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

Решение.
Пусть на каждый тип вклада была внесена одинаковая сумма S. На вкладе «А» каждый год сумма увеличивается на 10%, т. е. умножается на коэффициент 1,1. Поэтому через три года сумма на вкладе «А» будет равна

$$1{,}1^3 S = 1{,}331S.$$

Аналогично сумма на вкладе «Б» будет равна

$$1{,}05\left(1+\frac{n}{100}\right)^2 S,$$

где n — некоторое натуральное число.
По условию требуется найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$1{,}05\cdot\left(1+\frac{n}{100}\right)^2 S > 1{,}331S, \qquad \left(1+\frac{n}{100}\right)^2 > \frac{1331}{1050} = 1{,}26...$$

При $n = 13$ неравенство

$$1{,}13^2 > 1{,}26...; \quad 1{,}2769 > 1{,}26...$$

верно, а при $n = 12$ неравенство

$$1{,}12^2 > 1{,}26...; \quad 1{,}2544 > 1{,}26...$$

неверно, как и при всех меньших n.
Ответ: 13.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(x-3a+1)^2+(y+2a)^2=a-1,\\ 4x+3y=a+1\end{cases}$$

имеет более одного решения.

Решение.
Если $a<1$, то система не имеет решений.
Пусть $a=1$. Тогда имеем систему

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y+2)^2=0,\\ 4x+3y=2.\end{cases}$$

Первому уравнению удовлетворяет только одна пара $(2,\ -2)$, которая также удовлетворяет второму уравнению системы, поэтому при $a=1$ система имеет единственное решение.
Пусть $a>1$. Решения первого уравнения системы лежат на окружности с центром в точке $(3a-1,\ -2a)$ и радиусом $\sqrt{a-1}$. Решения второго уравнения — точки прямой $4x+3y=a+1$. Следовательно, система имеет более одного решения тогда и только тогда, когда расстояние от центра окружности $(3a-1,\ -2a)$ до прямой $4x+3y=a+1$ меньше радиуса $\sqrt{a-1}$ данной окружности. Получаем систему:

$$\begin{cases}\dfrac{|4(3a-1)+3(-2a)-a-1|}{\sqrt{4^2+3^2}}<\sqrt{a-1},\\ a>1;\end{cases}\quad \begin{cases}|5a-5|<5\sqrt{a-1},\\ a>1;\end{cases}\quad 1<a<2.$$

Следовательно, система имеет более одного решения при $1<a<2$.
Ответ: $(1;2)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения *a*, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получено одно значение *a*	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямой и окружности (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Будем называть четырёхзначное число *интересным*, если среди четырёх цифр в его десятичной записи нет нулей, а одна из этих цифр равна сумме трёх других из них. Например, интересным является число 6321.
а) Приведите пример двух интересных четырёхзначных чисел, разность между которыми равна трём.
б) Найдутся ли два интересных четырёхзначных числа, разность между которыми равна 111?
в) Найдите наименьшее простое число, для которого не существует кратного ему интересного четырёхзначного числа.

Решение.

а) Примером таких чисел являются числа 6222 и 6219.

б) Предположим, что такие числа существуют. Рассмотрим какие-либо два таких интересных числа. Пусть $\overline{abcd}$ — десятичная запись большего из них, а k — та из цифр a, b, c или d, которая равна сумме трёх других. Тогда сумма цифр этого числа равна $2k$, то есть чётна. Аналогично получаем, что сумма цифр меньшего из рассматриваемых интересных чисел также чётна. Так как $d \neq 0$, четвёртая цифра меньшего из рассматриваемых интересных чисел равна $d-1$. Так как $c \neq 0$, третья цифра этого числа равна $c-1$. Аналогично получаем, что вторая цифра этого числа равна $b-1$. Наконец, первая цифра этого числа равна a. Значит, сумма цифр меньшего из рассматриваемых интересных чисел на три меньше суммы чисел большего из них. Пришли к противоречию.

в) Покажем, что искомое число равно 11. Для этого сначала приведём примеры интересных четырёхзначных чисел, кратных 2, 3, 5, и 7: число 2114 кратно 2 и 7, число 9135 кратно 3 и 5.

Пусть $\overline{abcd}$ — десятичная запись какого-либо интересного числа, кратного 11. Тогда $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d = 11(91a + 9b + c) + (b - a + d - c)$.

Получаем, что число $b - a + d - c$ кратно 11. Поскольку a, b, c и d — цифры, отсюда следует, что либо $b + d = a + c$, либо эти две суммы отличаются на 11. Составим две пары чисел: a и c, b и d. Пусть k — та из цифр a, b, c и d, которая равна сумме трёх других, l — та из них, которая в паре с k. Пусть m и n — две оставшиеся из цифр a, b, c и d. Поскольку $k = l + m + n$, имеем $k + l > m + n$. Значит, $k + l = m + n + 11$. Вычитая из этого равенства равенство $k = l + m + n$, получаем $l = 11 - l$. Следовательно, $2l = 11$. Пришли к противоречию. Значит, не существует интересных четырёхзначных чисел, кратных 11.

Ответ: а) Да, например, 6222 и 6219; б) нет; в) 11.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в п. *а*, – обоснованное решение в п. *б*, – искомая оценка в п. *в*, – пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Вариант 2

13

а) Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{3}\operatorname{tg}x+1}{2\sin x-1}=0$.

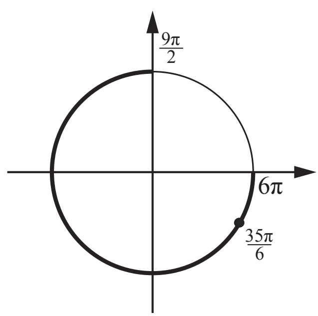
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{9\pi}{2};\,6\pi\right]$.

Решение.
а) Имеем

$$\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}x+1}{2\sin x-1}=0;\qquad \begin{cases}\operatorname{tg}x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\\ \sin x\neq\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

откуда $x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{9\pi}{2};\,6\pi\right]$, отберём с помощью единичной окружности.



Получаем $\dfrac{35\pi}{6}$.

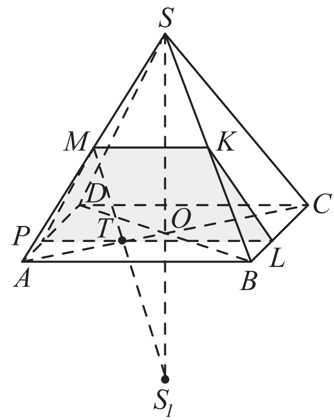
Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{35\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны 12. Основание высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1, M — середина ребра AS, точка L лежит на ребре BC так, что $BL:LC=1:2$.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью S_1LM — равнобокая трапеция.

б) Вычислите длину средней линии этой трапеции.



Решение.

а) Прямая S_1M пересекает медиану AO треугольника ABD в точке T так, что $AT:TO=2:1$, поскольку T — точка пересечения медиан треугольника SAS_1, и O — точка пересечения диагоналей основания $ABCD$, так как пирамида $SABCD$ правильная. Следовательно, $AT:TC=1:2$. Точка L делит отрезок BC в отношении $BL:LC=1:2$, следовательно, треугольники ACB и TCL подобны с коэффициентом подобия $k=AC:TC=BC:CL=3:2$, так как они имеют общий угол с вершиной C и стороны AC и BC в треугольнике ABC пропорциональны сторонам TC и LC треугольника TCL, заключающим тот же угол. Значит, сторона сечения, проходящая через точки L и T, параллельна стороне AB основания пирамиды $SABCD$. Пусть эта сторона сечения пересекает сторону AD в точке P.

Сторона сечения, проходящая через точку M в плоскости SAB, параллельна прямой AB, так как плоскость S_1LM пересекает плоскость SAB и проходит через прямую PL, параллельную плоскости SAB. Пусть эта сторона сечения пересекает сторону SB в точке K. Тогда сечение $PMKL$ — равнобокая трапеция, поскольку $AP=BL$ и $AM=BK$.

б) Большее основание LP трапеции равно 12, поскольку $ABCD$ — квадрат. Второе основание MK трапеции равно 6, поскольку MK — средняя линия треугольника SAB. Значит, средняя линия трапеции равна $\frac{6+12}{2}=9$.

Ответ: б) 9.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\frac{4^{x+1}-192\cdot 0{,}25^{x+1}-4}{x+2}\le 0.$$

Решение.
Преобразуем неравенство:

$$\frac{4\cdot 4^x-48\cdot 4^{-x}-4}{x+2}\le 0;\ \frac{16^x-4^x-12}{x+2}\le 0;\ \frac{\left(4^x-4\right)\left(4^x+3\right)}{x+2}\le 0;\ \frac{4^x-4}{x+2}\le 0,$$

откуда $-2<x\le 1$.
Ответ: $\left(-2;\ 1\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Первая окружность с центром O, вписанная в равнобедренный треугольник KLM, касается боковой стороны KL в точке B, а основания ML — в точке A. Вторая окружность с центром O_1 касается основания ML и продолжений боковых сторон.

а) Докажите, что треугольник OLO_1 прямоугольный.

б) Найдите радиус второй окружности, если известно, что радиус первой равен 15 и $AK=32$.

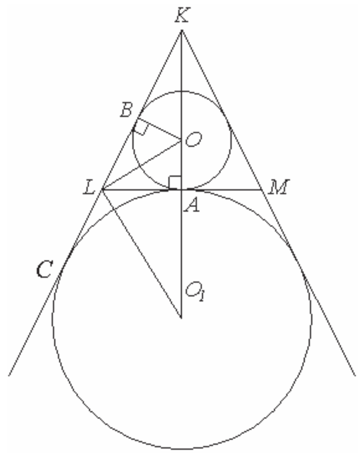
Решение.
а) Пусть окружность с центром O_1 касается продолжения боковой стороны KL в точке C. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому LO и LO_1 — биссектрисы смежных углов KLM и CLM. Следовательно, $\angle OLO_1=90°$.

б) Прямоугольные треугольники KBO и KAL подобны, поэтому $\frac{AL}{OB}=\frac{AK}{KB}$.

Значит,

$$AL=\frac{AK\cdot OB}{KB}=\frac{AK\cdot OB}{\sqrt{OK^2-OB^2}}=$$
$$=\frac{32\cdot 15}{\sqrt{17^2-15^2}}=\frac{32\cdot 15}{8}=60.$$

Пусть радиус окружности с центром O_1 равен r_1. Треугольник KLM равнобедренный, поэтому окружности с центрами O и O_1 касаются основания ML в одной и той же точке A. Значит, точка A лежит на отрезке OO_1, причём LA — высота прямоугольного треугольника OLO_1, проведённая из вершины прямого угла.



Следовательно,

$$r_1 = O_1A = \frac{AL^2}{OA} = \frac{60^2}{15} = 240.$$

Ответ: б) 240.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 20 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 10 % в первый год и на одинаковое целое число n процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наименьшее значение n, при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

Решение.

Пусть на каждый тип вклада была внесена одинаковая сумма S. На вкладе «А» каждый год сумма увеличивается на 20 %, т. е. умножается на коэффициент 1,2. Поэтому через три года сумма на вкладе «А» будет равна

$$1{,}2^3 S = 1{,}728S.$$

Аналогично сумма на вкладе «Б» будет равна

$$1{,}1 \cdot \left(1 + \frac{n}{100}\right)^2 S,$$

где n — некоторое натуральное число.

По условию требуется найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$1{,}1 \cdot \left(1 + \frac{n}{100}\right)^2 S > 1{,}728S, \qquad \left(1 + \frac{n}{100}\right)^2 > \frac{1728}{1100} = 1{,}57...$$

При $n = 26$ неравенство

$$1{,}26^2 > 1{,}57...; \quad 1{,}5876 > 1{,}57...$$

верно, а при $n = 25$ неравенство

$$1{,}25^2 > 1{,}57...; \quad 1{,}5625 > 1{,}57...$$

неверно, как и при всех меньших n.

Ответ: 26.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x + 2a)^2 + (y + 3a + 1)^2 = a + 1, \\ 3x - 4y = a - 1 \end{cases}$$

имеет более одного решения.

Решение.

Если $a<-1$, то система не имеет решений.

Пусть $a=-1$. Тогда имеем систему

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2=0,\\ 3x-4y=-2.\end{cases}$$

Первому уравнению удовлетворяет только одна пара $(2,2)$, которая также удовлетворяет второму уравнению системы, поэтому при $a=-1$ система имеет единственное решение.

Пусть $a>-1$. Решения первого уравнения системы лежат на окружности с центром в точке $(-2a,-3a-1)$ и радиусом $\sqrt{a+1}$. Решения второго уравнения — точки прямой $3x-4y=a-1$. Следовательно, система имеет более одного решения тогда и только тогда, когда расстояние от центра окружности $(-2a,-3a-1)$ до прямой $3x-4y=a-1$ меньше радиуса $\sqrt{a+1}$ данной окружности. Получаем систему:

$$\begin{cases}\dfrac{|3(-2a)-4(-3a-1)-a+1|}{\sqrt{4^2+3^2}}<\sqrt{a+1},\\ a>-1;\end{cases}\quad \begin{cases}|5a+5|<5\sqrt{a+1},\\ a>-1;\end{cases}\quad -1<a<0.$$

Следовательно, система имеет более одного решения при $-1<a<0$.

Ответ: $(-1;0)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения *a*, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получено одно значение *a*	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямой и окружности (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Будем называть четырёхзначное число *интересным*, если среди четырёх цифр в его десятичной записи нет нулей, а одна из этих цифр равна сумме трёх других из них. Например, интересным является число 6321.

а) Приведите пример двух интересных четырёхзначных чисел, разность между которыми равна пяти.

б) Найдутся ли два интересных четырёхзначных числа, разность между которыми равна 91?

в) Найдите наименьшее нечётное число, для которого не существует кратного ему интересного четырёхзначного числа.

Решение.

а) Примером таких чисел являются числа 7124 и 7119.

б) Предположим, что такие числа существуют. Рассмотрим какие-либо два таких интересных числа. Пусть $\overline{abcd}$ — десятичная запись большего из них, а k — та из цифр a, b, c и d, которая равна сумме трёх других. Тогда сумма цифр этого числа равна $2k$, то есть чётна. Аналогично получаем, что сумма цифр меньшего из рассматриваемых интересных чисел также чётна. Так как $d \neq 0$, четвёртая цифра меньшего из рассматриваемых интересных чисел равна $d-1$. Так как $c-9$ либо отрицательно, либо равно 0, третья цифра меньшего из рассматриваемых интересных чисел равна $c+1$. Аналогично получаем, что вторая цифра этого числа равна $b-1$. Наконец, первая цифра этого числа равна a. Значит, сумма цифр меньшего из рассматриваемых интересных чисел на единицу меньше суммы цифр большего из них. Пришли к противоречию.

в) Покажем, что искомое число равно 11. Для этого сначала приведём пример интересного четырёхзначного числа, кратного 3, 5, 7 и 9, — это число 9135.

Пусть $\overline{abcd}$ — десятичная запись какого-либо интересного числа, кратного 11. Тогда $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d = 11(91a + 9b + c) + (b - a + d - c)$.

Получаем, что число $b-a+d-c$ кратно 11. Поскольку a, b, c и d — цифры, отсюда следует, что либо $b+d=a+c$, либо эти две суммы отличаются на 11. Составим две пары чисел: a и c, b и d. Пусть k — та из цифр a, b, c и d, которая равна сумме трёх других, l — та из них, которая в паре с k. Пусть также m и n — две оставшиеся из цифр a, b, c и d. Поскольку $k=l+m+n$, имеем $k+l>m+n$. Значит, $k+l=m+n+11$. Вычитая из этого равенства равенство $k=l+m+n$, получаем $l=11-l$, и, следовательно, $2l=11$. Пришли к противоречию. Значит, не существует интересных четырёхзначных чисел, кратных 11.

Ответ: а) Да, например, 7124 и 7119; б) нет; в) 11.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в п. *а*, – обоснованное решение в п. *б*, – искомая оценка в п. *в*, – пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Вариант 3

13

а) Решите уравнение $\dfrac{5\sin^2 x-3\sin x}{5\cos x+4}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

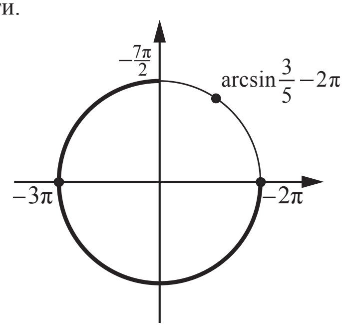
Решение.

а) Имеем

$$\frac{5\sin^2 x-3\sin x}{5\cos x+4}=0;\quad \frac{\sin x\left(\sin x-\dfrac{3}{5}\right)}{\cos x+\dfrac{4}{5}}=0;\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{3}{5},\\ \sin x=0,\end{array}\right.\\ \cos x\neq-\dfrac{4}{5},\end{cases}$$

откуда $x=\arcsin\dfrac{3}{5}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, или $x=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2};-2\pi\right]$, отберём с помощью единичной окружности.



Получаем -3π; -2π.

Ответ: а) $\arcsin\dfrac{3}{5}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; πn, $n\in\mathbb{Z}$; б) -3π; -2π.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 4. Через точки A, C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

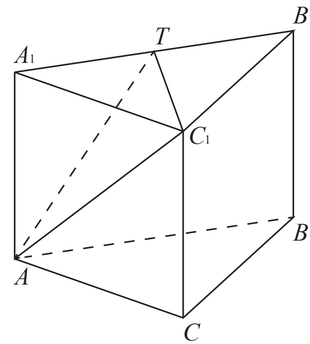
Решение.

а) Найдём стороны треугольника ATC_1:

$$AT=\sqrt{16+4}=\sqrt{20},$$

$$TC_1=\sqrt{16-4}=\sqrt{12},$$

$$AC_1=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}.$$



Заметим, что

$$AC_1^{\,2}=32=12+20=AT^2+TC_1^{\,2}.$$

Следовательно, по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник ATC_1 является прямоугольным.

б) Так как прямая C_1T перпендикулярна прямым A_1T и AT, угол A_1TA — искомый. Тангенс угла A_1TA равен

$$\operatorname{tg} A_1TA=\frac{AA_1}{A_1T}=\frac{4}{2}=2.$$

Ответ: б) arctg2.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}} 4 \ge \log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}}\left(5-2^x\right).$$

Решение.

Заметим, что $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}>1,$ поскольку

$$5-\sqrt{2}<\sqrt{13};\quad 27-10\sqrt{2}<13;\quad 14<10\sqrt{2};\quad 49<50.$$

С учётом этого имеем

$$\log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}} 4 \ge \log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}}\left(5-2^x\right);$$

$$4\ge 5-2^x>0;\quad \begin{cases}2^x\ge 1,\\ 2^x<5;\end{cases}\quad \begin{cases}x\ge 0,\\ x<\log_2 5.\end{cases}$$

Ответ: $\left[0;\log_2 5\right)$.

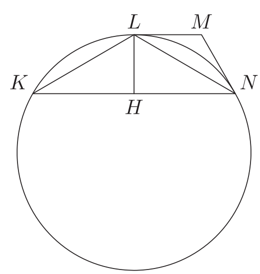
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Стороны KN и LM трапеции $KLMN$ параллельны, прямые LM и MN — касательные к окружности, описанной около треугольника KLN.

а) Докажите, что треугольники LMN и KLN подобны.

б) Найдите площадь треугольника KLN, если известно, что $KN=3$, а $\angle LMN=120°$.

Решение.



а) Касательная LM параллельна хорде KN, значит, $\angle KNL=\angle MLN$, а так как $\angle MLN=\angle LKN$ как угол между касательной и хордой, то треугольник KLN равнобедренный с основанием KN.

Поскольку $ML=MN$ как отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, треугольник LMN также равнобедренный с основанием LN. Углы при основаниях равнобедренных треугольников LMN и LKN равны, следовательно, эти треугольники подобны.

б) Угол при вершине равнобедренного треугольника KLN равен $120°$, значит, его высота LH вдвое меньше боковой стороны $LN = \frac{KN}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, то есть $LH = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно,

$$S_{KLN} = \frac{1}{2} KN \cdot LH = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: б) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект 10 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 15 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн рублей в первый и второй годы, а также целое число m млн в третий и четвёртый годы. Найдите наименьшие значения n и m, при которых первоначальные вложения за два года, как минимум, удвоятся, а за четыре года, как минимум, утроятся.

Решение.
К началу 2-го года получится $1{,}15 \cdot 10 + n = 11{,}5 + n$ млн вложений, а к началу 3-го года —

$$1{,}15(11{,}5 + n) + n = 13{,}225 + 2{,}15n.$$

По условию $13{,}225 + 2{,}15n \geq 20$. Наименьшее целое решение $n = 4$. Тогда к началу 3-го года получится

$$13{,}225 + 8{,}6 = 21{,}825 \text{ млн.}$$

К началу 4-го года имеем $1{,}15 \cdot 21{,}825 + m$ млн, а в конце проекта

$$1{,}15(1{,}15 \cdot 21{,}825 + m) + m = 1{,}3225 \cdot 21{,}825 + 2{,}15m.$$

Из неравенства $1{,}3225 \cdot 21{,}825 + 2{,}15m \geq 30$ получаем: $m \geq \dfrac{30 - 1{,}3225 \cdot 21{,}825}{2{,}15}$.

Правая часть меньше единицы. Поэтому наименьшее целое m равно 1.
Ответ: 4 и 1 млн руб.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения параметра b, при каждом из которых уравнение

$$x^3 + 2x^2 - ax + 4 = 0$$

имеет единственное решение на отрезке $[-1;\, 2]$.

Решение. Число $x = 0$ не является корнем уравнения ни при каком значении a. Поэтому уравнение равносильно уравнению

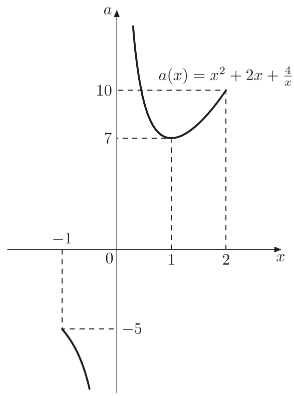
$$a = x^2 + 2x + \frac{4}{x}.$$

Построим схематически график функции

$$a(x) = x^2 + 2x + \frac{4}{x},$$

в системе координат xOa. Нужно найти значения a, которым на отрезке $-1 \leq x \leq 2$ соответствует единственный x.

Вариант 3



Найдём производную:

$$f'(x) = 2x + 2 - \frac{4}{x^2} = \frac{2(x-1)(x^2+2x+2)}{x^2}.$$

Точка $x = 1$ — единственная точка минимума, $a(1) = 7$, $a(-1) = -5$, $a(2) = 10$. Построив эскиз графика находим, что единственное значение x на отрезке $-1 \le x \le 2$ получается при $a \le -5$, $a = 7$ или $a > 10$.

Ответ: $a \le -5$, $a = 7$ или $a > 10$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения b, но некоторые граничные точки включены/исключены неверно	3
С помощью верного рассуждения получены не все значения b	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения графика функции и прямой (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ состоит из различных натуральных чисел.

а) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_7$ ровно три числа делятся на 100?

б) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{49}$ ровно 11 чисел делятся на 100?

в) Для какого наибольшего натурального n могло оказаться так, что среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ больше кратных 100, чем среди чисел $a_{2n+1}, a_{2n+2}, \ldots, a_{5n}$?

Решение.

а) Подходящим примером является прогрессия с первым членом 50 и разностью 50. Среди первых семи её членов (50, 100, 150, 200, 250, 300, 350) ровно три делятся на 100.

б) Обозначим через d разность арифметической прогрессии $a_1, a_2, ..., a_n, ...$. Из условия следует, что d — натуральное число. Пусть m и n — натуральные числа, $m > n$, $\text{НОД}(d, 100)$ обозначает наибольший общий делитель чисел d и 100. Имеем

$$a_m - a_n = (a_1 + (m-1)d) - (a_1 + (n-1)d) = (m-n)d.$$

Следовательно, разность $a_m - a_n$ делится на 100 тогда и только тогда, когда разность $m-n$ делится на $k = \frac{100}{\text{НОД}(d, 100)}$. Значит, если среди членов арифметической прогрессии $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ есть кратные 100, то это члены с номерами вида $kp + q$, где q — номер первого члена кратного 100 ($q \le k$), а p пробегает все неотрицательные целые числа. Поэтому среди любых k последовательных членов прогрессии $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ ровно один будет делиться на 100.

Если $k \le 4$, то $12 < \frac{49}{k}$ и среди чисел $a_1, a_2, ..., a_{49}$ будет по крайней мере 12 чисел, кратных 100. Если же $k \ge 5$, то $10 > \frac{49}{k}$ и среди чисел $a_1, a_2, ..., a_{49}$ будет не более 10 чисел, кратных 100. Значит, не существует такой прогрессии, в которой среди чисел $a_1, a_2, ..., a_{49}$ ровно 11 чисел делятся на 100.

в) Обозначим через $[x]$ целую часть числа x — наименьшее целое число, не превосходящее x. По доказанному в пункте б) среди любых k последовательных членов прогрессии $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ ровно один будет делиться на 100, где $k = \frac{100}{НОД(d, 100)}$, d — разность арифметической прогрессии.

Значит, среди чисел $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ кратными 100 будут не более $\left[\frac{2n}{k}\right] + 1$ чисел. Аналогично среди чисел $a_{2n+1}, a_{2n+2}, ..., a_{5n}$ кратными 100 будут не менее $\left[\frac{3n}{k}\right]$ чисел. Неравенство $\left[\frac{2n}{k}\right] + 1 > \left[\frac{3n}{k}\right]$ выполнено тогда и только тогда, когда $\left[\frac{2n}{k}\right] = \left[\frac{3n}{k}\right]$. Пусть это равенство выполнено. Тогда разность между числами $\frac{3n}{k}$ и $\frac{2n}{k}$ меньше 1. Получаем, что $\frac{n}{k} < 1$ и $\frac{2n}{k} < 2$. Значит,

$\left[\frac{3n}{k}\right]=\left[\frac{2n}{k}\right]<2$, $\frac{3n}{k}<2$ и $n<\frac{2k}{3}$. Поскольку число k не превосходит 100, отсюда следует, что $n \le 66$.

Рассмотрим прогрессию с первым членом 69 и разностью 1. Тогда среди чисел $a_1, a_2, ..., a_{132}$ ровно два делятся на 100 ($a_{32}=100$ и $a_{132}=200$). Среди чисел $a_{133}, a_{134}, ..., a_{330}$ ровно одно делится на 100 ($a_{232}=300$). Этот пример показывает, что n может равняться 66.

Ответ: а) Да, например, прогрессия 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350,...; б) нет; в) 66.

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в п. *а*, – обоснованное решение в п. *б*, – искомая оценка в п. *в*, – пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Вариант 4

15 а) Решите уравнение $\dfrac{13\sin^2 x-5\sin x}{13\cos x+12}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

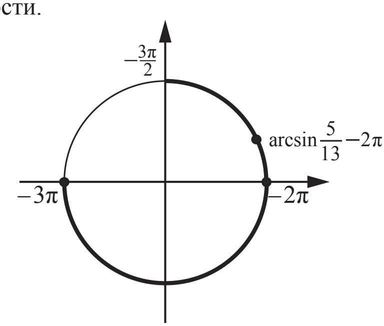
Решение.

а) Имеем

$$\frac{13\sin^2 x-5\sin x}{13\cos x+12}=0;\quad \frac{\sin x\left(\sin x-\frac{5}{13}\right)}{\cos x+\frac{12}{13}}=0;\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{5}{13},\\ \sin x=0,\end{array}\right.\\ \cos x\neq-\frac{12}{13},\end{cases}$$

откуда $x=\arcsin\dfrac{5}{13}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, или $x=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\dfrac{3\pi}{2}\right]$, отберём с помощью единичной окружности.



Получаем -3π; -2π; $\arcsin\dfrac{5}{13}-2\pi$.

Ответ: а) $\arcsin\dfrac{5}{13}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; πn, $n\in\mathbb{Z}$; б) -3π; -2π; $\arcsin\dfrac{5}{13}-2\pi$.

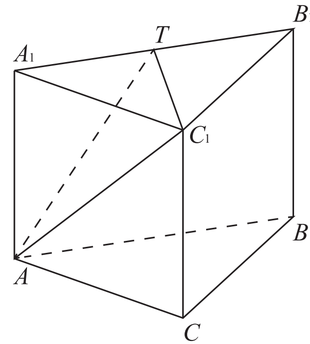
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 6. Через точки A, C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

Решение.



а) Найдём стороны треугольника ATC_1:

$$AT = \sqrt{36+9} = \sqrt{45},$$

$$TC_1 = \sqrt{36-9} = \sqrt{27},$$

$$AC_1 = \sqrt{36+36} = \sqrt{72}.$$

Заметим, что

$$AC_1^{\ 2} = 72 = 45 + 27 = AT^2 + TC_1^{\ 2}.$$

Следовательно, по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник ATC_1 является прямоугольным.

б) Так как прямая C_1T перпендикулярна прямым A_1T и AT, угол A_1TA — искомый. Тангенс угла A_1TA равен

$$\operatorname{tg} A_1TA = \frac{AA_1}{A_1T} = \frac{6}{3} = 2.$$

Ответ: б) arctg2.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\log_{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{19}}{6}} 5 \ge \log_{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{19}}{6}} \left(7 - 2^x\right).$$

Решение.

Заметим, что $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{19}}{6} > 1$, поскольку

$$6-\sqrt{3} < \sqrt{19}; \quad 39-12\sqrt{3} < 19; \quad 20 < 12\sqrt{3}; \quad 5 < 3\sqrt{3}; \quad 25 < 27.$$

С учётом этого имеем

$$\log_{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{19}}{6}} 5 \ge \log_{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{19}}{6}} \left(7-2^x\right);$$

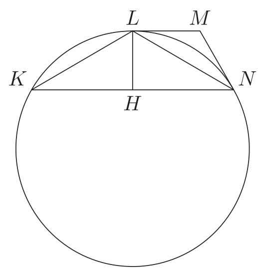
$$5 \ge 7-2^x > 0; \quad \begin{cases} 2^x \ge 2, \\ 2^x < 7; \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge 1, \\ x < \log_2 7. \end{cases}$$

Ответ: $\left[1; \log_2 7\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Стороны KN и LM трапеции $KLMN$ параллельны, прямые LM и MN — касательные к окружности, описанной около треугольника KLN.
а) Докажите, что треугольники LMN и KLN подобны.
б) Найдите площадь треугольника KLN, если известно, что $KN = 6$, а $\angle LMN = 120°$.

Решение.



а) Касательная LM параллельна хорде KN, значит, $\angle KNL = \angle MLN$, а так как $\angle MLN = \angle LKN$ как угол между касательной и хордой, то треугольник KLN равнобедренный с основанием KN.
Поскольку $ML = MN$ как отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, треугольник LMN также равнобедренный с основанием LN.
Углы при основаниях равнобедренных треугольников LMN и LKN равны, следовательно, эти треугольники подобны.
б) Угол при вершине равнобедренного треугольника KLN равен $120°$, значит, его высота LH вдвое меньше боковой стороны $LN = \frac{KN}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$, то есть $LH = \sqrt{3}$. Следовательно,

$$S_{KLN} = \frac{1}{2} KN \cdot LH = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $3\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект 20 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 13 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн рублей в первый и второй годы, а также целое число m млн в третий и четвёртый годы. Найдите наименьшие значения n и m, при которых первоначальные вложения за два года, как минимум, удвоятся, а за четыре года, как минимум, утроятся.

Решение.
К началу 2-го года получится $1{,}13\cdot 20+n=22{,}6+n$ млн вложений, а к началу 3-го года —

$$1{,}13(22{,}6+n)+n=25{,}538+2{,}13n.$$

По условию $25{,}538+2{,}13n\ge 40$. Наименьшее целое решение $n=7$, так как при $n=6$ неравенство уже не выполняется.
К началу 4-го года имеем $1{,}13\cdot 40{,}448+m$ млн, а в конце проекта

$$1{,}13(1{,}13\cdot 40{,}448+m)+m=1{,}2769\cdot 40{,}448+2{,}13m.$$

Из неравенства $1{,}2769\cdot 40{,}448+2{,}13m\ge 60$ получаем:

$$m\ge\frac{60-1{,}2769\cdot 40{,}448}{2{,}13}.$$

Очевидно, $3<\dfrac{60-1{,}2769\cdot 40{,}448}{2{,}13}<4$. Наименьшее целое решение $m=4$.

Ответ: 7 и 4 млн руб.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

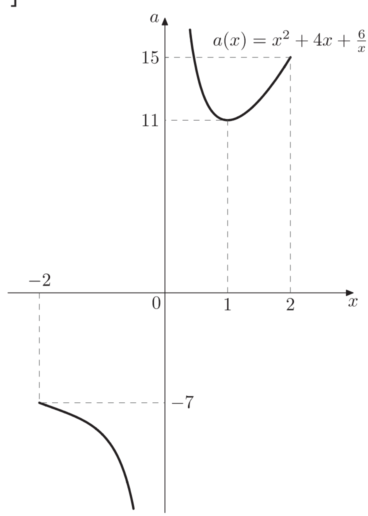
18 Найдите все значения параметра b, при каждом из которых уравнение

$$x^3+4x^2-ax+6=0$$

имеет единственное решение на отрезке $\left[-2;\,2\right]$.

Решение.

Число $x=0$ не является корнем уравнения ни при каком значении параметра a. Поэтому уравнение равносильно уравнению $a=x^2+4x+\dfrac{6}{x}$. Построим схематически график функции $a\left(x\right)=x^2+4x+\dfrac{6}{x}$



В системе координат xOa. Нужно найти все значения a, которым соответствует единственный x из отрезка $-2\le x\le 2$.

Найдём производную:

$$f'\left(x\right)=2x+4-\frac{6}{x^2}=\frac{2\left(x-1\right)\left(x^2+3x+3\right)}{x^2}.$$

Точка $x=1$ — единственная точка минимума, $a\left(1\right)=11$, $a\left(-2\right)=-7$, $a\left(2\right)=15$.

По эскизу графика находим, что единственное значение x на отрезке $\left[-2;\,2\right]$ получается при $a\le -7$, $a=11$ или $a>15$.

Ответ: $a\le -7$; $a=11$ или $a>15$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения параметра, но некоторые граничные точки включены/исключены неверно	3
С помощью верного рассуждения получены не все значения a	2
Задача верно сведена к исследованию графика функции или двух графиков	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ состоит из различных натуральных чисел.

а) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел $a_1, a_2, ..., a_7$ ровно три числа делятся на 36?

б) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел $a_1, a_2, ..., a_{30}$ ровно 9 чисел делятся на 36?

в) Для какого наибольшего натурального n могло оказаться так, что среди чисел $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ больше кратных 36, чем среди чисел $a_{2n+1}, a_{2n+2}, ..., a_{5n}$?

Решение.

а) Подходящим примером является прогрессия с первым членом 18 и разностью 18. Среди первых семи её членов (18, 36, 54, 72, 90, 108, 126) ровно три делятся на 36.

б) Обозначим через d разность арифметической прогрессии $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ Из условия следует, что d — натуральное число. Пусть m и n — натуральные числа, $m > n$, $\text{НОД}(d, 36)$ обозначает наибольший общий делитель чисел d и 36. Имеем $a_m - a_n = (a_1 + (m-1)d) - (a_1 + (n-1)d) = (m-n)d$.

Следовательно, разность $a_m - a_n$ делится на 36 тогда и только тогда, когда разность $m - n$ делится на $k = \dfrac{36}{\text{НОД}(d, 36)}$. Значит, если среди членов арифметической прогрессии $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ есть кратные 36, то это члены с номерами вида $kp + q$, где q — номер первого члена, кратного 36 ($q \le k$), а p пробегает все неотрицательные целые числа. Поэтому среди любых k последовательных членов прогрессии $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ ровно один будет делиться на 36.

Если $k \le 3$, то $10 \le \dfrac{30}{k}$ и среди чисел $a_1, a_2, ..., a_{30}$ будет по крайней мере 10 чисел, кратных 36. Если же $k \ge 4$, то $8 > \dfrac{30}{k}$ и среди чисел $a_1, a_2, ..., a_{30}$ будет не более 8 чисел, кратных 36. Значит, не существует такой прогрессии, в которой среди чисел $a_1, a_2, ..., a_{30}$ ровно 9 чисел делятся на 36.

в) Обозначим через $[x]$ целую часть числа x — наименьшее целое число, не превосходящее x. По доказанному в пункте б) среди любых k последовательных членов прогрессии $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ ровно один будет делиться на 36, где $k = \frac{36}{НОД(d,36)}$, d — разность арифметической прогрессии.

Значит, среди чисел $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ кратными 36 будут не более $\left[\frac{2n}{k}\right]+1$ чисел. Аналогично среди чисел $a_{2n+1}, a_{2n+2}, ..., a_{5n}$ кратными 36 будут не менее $\left[\frac{3n}{k}\right]$ чисел. Неравенство $\left[\frac{2n}{k}\right]+1 > \left[\frac{3n}{k}\right]$ выполнено тогда и только тогда, когда $\left[\frac{2n}{k}\right] = \left[\frac{3n}{k}\right]$. Пусть это равенство выполнено. Тогда разность между числами $\frac{3n}{k}$ и $\frac{2n}{k}$ меньше 1. Получаем, что $\frac{n}{k} < 1$ и $\frac{2n}{k} < 2$. Значит, $\left[\frac{3n}{k}\right] = \left[\frac{2n}{k}\right] < 2$, $\frac{3n}{k} < 2$ и $n < \frac{2k}{3}$. Поскольку число k не превосходит 36, отсюда следует, что $n \le 23$.

Рассмотрим прогрессию с первым членом 27 и разностью 1. Тогда среди чисел $a_1, a_2, ..., a_{46}$ ровно два делятся на 36 ($a_{10} = 36$ и $a_{46} = 72$). Среди чисел $a_{47}, a_{48}, ..., a_{115}$ ровно одно делится на 36 ($a_{82} = 108$). Этот пример показывает, что n может равняться 23.

Ответ: а) Да, например, прогрессия 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126,...; б) нет; в) 23.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в п. *а*, – обоснованное решение в п. *б*, – искомая оценка в п. *в*, – пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Вариант 5

13 а) Решите уравнение $\sqrt{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};\,-\pi\right]$.

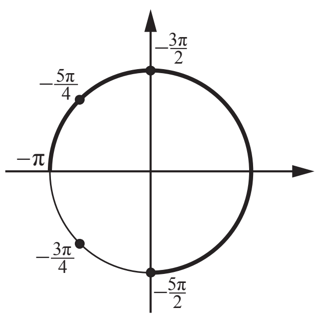
Решение.

а) Имеем

$$\sqrt{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cos x;\quad \sqrt{2}\cos^2 x=-\cos x,\quad \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2},\end{array}\right.$$

откуда $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ или $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};\,-\pi\right]$, отберём с помощью единичной окружности.



Получаем $-\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$ и $-\frac{5\pi}{4}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$ и $-\frac{5\pi}{4}$.

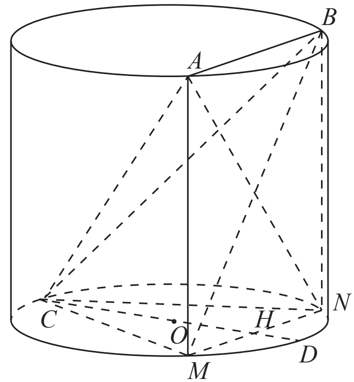
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 12 и радиусом основания 6 проведена хорда AB, равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр CD, перпендикулярный AB. Построено сечение $ABNM$, проходящее через прямую AB перпендикулярно прямой CD так, что точка C и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр CD, лежат с одной стороны от сечения.

а) Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.

б) Найдите объём пирамиды $CABNM$.

Решение.



а) Для построения сечения опустим перпендикуляры AM и BN на второе основание цилиндра. Отрезки AM и BN параллельны и равны, значит, $ABNM$ — параллелограмм. Так как прямые AM и BN перпендикулярны основаниям цилиндра и, в частности, прямой AB, параллелограмм $ABNM$ является прямоугольником. Диагонали прямоугольника равны, что и требовалось доказать.

б) Площадь прямоугольника $ABNM$ равна $12 \cdot 6 = 72$. Отрезок OH равен $\sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$. Высота CH пирамиды $CABNM$ равна $6 + 3\sqrt{3}$. Следовательно, объём пирамиды $CABNM$ равен

$$\frac{1}{3} \cdot 72 \cdot \left(6 + 3\sqrt{3}\right) = 144 + 72\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $144 + 72\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $2^{\frac{x}{x+1}}-2^{\frac{5x+3}{x+1}}+8\le 2^{\frac{2x}{x+1}}$.

Решение.
Преобразуем неравенство:

$$2^{\frac{x}{x+1}}-2^{\frac{5x+3}{x+1}}+8\le 2^{\frac{2x}{x+1}},\quad 2^{\frac{x}{x+1}}-2^{2\cdot\frac{x}{x+1}+3}+8\le 2^{2\cdot\frac{x}{x+1}}.$$

Сделаем замену $y=2^{\frac{x}{x+1}}$. Тогда данное неравенство принимает вид

$$y-8y^2+8\le y^2,\quad 9y^2-y-8\ge 0,\quad (y-1)(9y+8)\ge 0;\quad y\le -\frac{9}{8} \text{ или } y\ge 1.$$

Сделаем обратную замену:

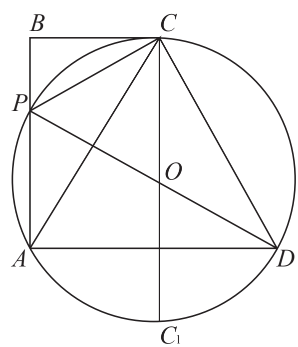
$$2^{\frac{x}{x+1}}\ge 1,\quad \frac{x}{x+1}\ge 0,\ \left[\begin{array}{l} x\ge 0, \\ x<-1. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;-1)\cup[0;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Окружность, проходящая через вершины A, C и D прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, пересекает меньшую боковую сторону AB в точке P и касается прямой BC. Известно, что $AD=CD$.
а) Докажите, что CP — биссектриса угла ACB.
б) В каком отношении прямая DP делит площадь трапеции?

Решение.



а) Пусть O — центр окружности. Прямая OC перпендикулярна касательной BC, а так как хорда AD параллельна BC, прямая OC перпендикулярна прямой AD. Диаметр CC_1 перпендикулярен хорде AD, а значит, делит её пополам. Высота треугольника ACD является его медианой, значит, треугольник равнобедренный, $AC=CD$, а так как $AD=CD$, треугольник равносторонний. Тогда $\angle ACB=\angle CAD=60°$,

$$\angle BAC=90°-\angle CAD=30°.$$

Из теоремы об угле между касательной и хордой следует, что

$$\angle BCP = \angle PAC = \angle BAC = 30^\circ = \frac{1}{2}\angle ACB.$$

Следовательно, CP — биссектриса угла ACB.

б) Пусть $AC = AD = a$. Тогда

$$AB = AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ BC = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2},\ \text{значит,}$$

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB = \frac{a + \frac{a}{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}.$$

По свойству биссектрисы треугольника $\frac{BP}{AP} = \frac{BC}{AC} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, значит,

$AP = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Поэтому $S_{APD} = \frac{1}{2}AD \cdot AP = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$,

$S_{BCDP} = S_{ABCD} - S_{APD} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8} - \frac{a^2\sqrt{3}}{6} = \frac{5a^2\sqrt{3}}{24}$.

Следовательно, $\frac{S_{APD}}{S_{BCDP}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{6}}{\frac{5a^2\sqrt{3}}{24}} = \frac{4}{5}$.

Ответ: 4:5.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20 % по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика превысит 10 млн.

Решение.
Обозначим через S размер кредита. В конце 1-го, 2-го и 3-годов заёмщик выплачивает по $0,2S$ млн. Всего $0,6S$ за три года.

Рассмотрим погашение кредита за следующие два года. В середине 4-го года долг возрастёт до $1,2S$ млн. Обозначим через x размер выплачиваемой суммы в конце 4-го и 5-го годов. После выплаты в конце 4-го года долг равен $1,2S-x$, а в середине 5-го года он равен $1,2(1,2S-x)$. В конце 5-го года весь долг должен быть погашен, т. е. последняя выплата равна $1,2(1,2S-x)$ и по условию равна x. Значит,

$$1,2(1,2S-x)=x, \quad 2,2x=1,44S, \quad x=\frac{144}{220}S=\frac{36}{55}S,$$

и общий размер выплат равен $0,6S+\frac{72}{55}S=\frac{105}{55}S=\frac{21}{11}S$. По условию

$$\frac{21}{11}S>10, \quad 21S>110.$$

При $S=6$ это неравенство верно, а при $S=5$ оно неверно, как и при меньших S.

Ответ: 6 млн рублей.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

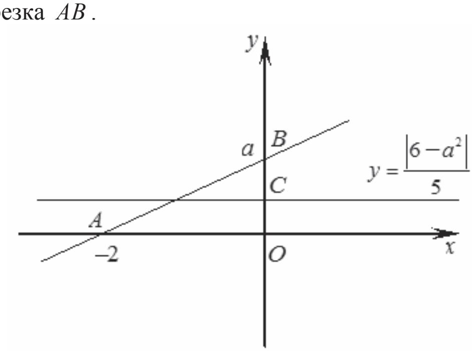
18 Найдите все неотрицательные значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-a)^2}=\sqrt{4+a^2},\\ 5y=\left|6-a^2\right|\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Первому уравнению системы удовлетворяют те и только те точки $(x;\,y)$, которые лежат на отрезке AB прямой, соединяющей точки $A\ (-2;\,0)$ и $B\ (0;\,a)$, где $a\ge 0$, поскольку уравнение задаёт множество точек $(x;\,y)$, сумма расстояний от каждой из которых до точек A и B равна $\sqrt{4+a^2}$, что равно длине отрезка AB.



Второму уравнению системы удовлетворяют те и только те точки $(x;\,y)$, которые лежат на прямой $y=\dfrac{\left|6-a^2\right|}{5}$, параллельной оси абсцисс и проходящей через точку $C\left(0;\,\dfrac{\left|6-a^2\right|}{5}\right)$.

Отсюда следует, что условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда точка C лежит между точками $O(0;0)$ и B, причём если точка C совпадает с точкой A или с точкой B, то условие задачи выполнено.

Решим неравенство $0\le\dfrac{\left|6-a^2\right|}{5}\le a$. Имеем

$$0\le\frac{\left|6-a^2\right|}{5}\le a;\quad \left|6-a^2\right|\le 5a;\quad \begin{cases}6-a^2\le 5a,\\ 6-a^2\ge -5a;\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a-1)(a+6)\ge 0,\\(a+1)(a-6)\le 0;\end{cases}\quad \begin{cases}a\ge 1,\\a\le 6;\end{cases}\quad 1\le a\le 6.$$

Ответ: $1\le a\le 6$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но некоторые граничные точки включены/исключены неверно	3
С помощью верного рассуждения получены не все значения a	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямой и отрезка (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ и $b_1, b_2, ..., b_n, ...$ состоят из натуральных чисел.

а) Существуют ли такие прогрессии, для которых $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{a_4}{b_4}$ — различные натуральные числа?

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{b_2}{a_2}$ и $\frac{a_4}{b_4}$ — различные натуральные числа?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a_2}{b_2}$, если известно, что $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{a_{10}}{b_{10}}$ — различные натуральные числа?

Решение.

а) Подходящим примером являются прогрессии $1, 6, 11, 16,...$ и $1, 2, 3, 4, ...$ соответственно. Для этих прогрессий имеем $\frac{a_1}{b_1}=1$, $\frac{a_2}{b_2}=3$ и $\frac{a_4}{b_4}=4$.

б) Предположим, что такие прогрессии существуют. Тогда одно из чисел $\frac{a_1}{b_1}$ или $\frac{b_2}{a_2}$ не меньше 1, а второе больше 1. Значит, либо $a_1\ge b_1$ и $a_2<b_2$, либо $a_1>b_1$ и $a_2\le b_2$, и, следовательно, $a_2-a_1<b_2-b_1$. Отсюда, используя свойства арифметической прогрессии, получаем

$$a_4=a_2+2(a_2-a_1)<b_2+2(b_2-b_1)=b_4 \text{ и } \frac{a_4}{b_4}<1.$$

Пришли к противоречию.

в) Обозначим через c и d разности арифметических прогрессий $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ и $b_1, b_2, ..., b_n, ...$ соответственно. Из условия следует, что числа c и d натуральные, а $\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_{10}}{b_{10}}-\frac{a_2}{b_2}$ целые и не равные нулю. Имеем

$$\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_1+c}{b_1+d}-\frac{a_1}{b_1}=\frac{cb_1-da_1}{b_1\left(b_1+d\right)} \text{ и}$$

$$\frac{a_{10}}{b_{10}}-\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_1+9c}{b_1+9d}-\frac{a_1+c}{b_1+d}=\frac{8\left(cb_1-da_1\right)}{\left(b_1+d\right)\left(b_1+9d\right)}.$$

Знаменатели дробей $\frac{cb_1-da_1}{b_1\left(b_1+d\right)}$ и $\frac{8\left(cb_1-da_1\right)}{\left(b_1+d\right)\left(b_1+9d\right)}$ положительны, а числители этих дробей имеют одинаковый знак. Значит, числа $\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_{10}}{b_{10}}-\frac{a_2}{b_2}$ имеют одинаковый знак, то есть либо $1\le\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_2}{b_2}<\frac{a_{10}}{b_{10}}$, либо $1\le\frac{a_{10}}{b_{10}}<\frac{a_2}{b_2}<\frac{a_1}{b_1}$. В обоих случаях получаем, что $\frac{a_2}{b_2}\ge 2$. Если прогрессии $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ и $b_1, b_2, ..., b_n, ...$ являются прогрессиями $9, 32, ..., 216,...$ и $9, 16, ..., 72,...$ соответственно, то $\frac{a_1}{b_1}=1$, $\frac{a_2}{b_2}=2$ и $\frac{a_{10}}{b_{10}}=3$. Этот пример показывает, что наименьшее возможное значение дроби $\frac{a_2}{b_2}$ равно 2.

Ответ: а) Да, например, $1, 6, 11, 16,...$ и $1, 2, 3, 4, ...$ соответственно; б) нет; в) 2.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в п. *а*, – обоснованное решение в п. *б*, – искомая оценка в п. *в*, – пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Варинат 6

13 а) Решите уравнение $\left(\sqrt{2}\sin x+1\right)\sqrt{-5\cos x}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi;\,-\dfrac{7\pi}{2}\right]$.

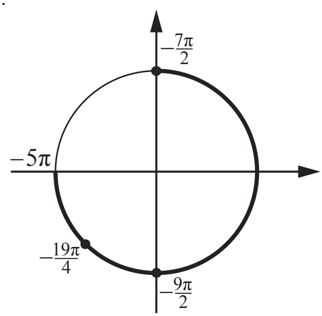
Решение.

а) Имеем

$$\left(\sqrt{2}\sin x+1\right)\sqrt{-5\cos x}=0;\quad \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \begin{cases}\sqrt{2}\sin x+1=0,\\ \cos x\le 0;\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \begin{cases}\sin x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \cos x\le 0;\end{cases}\end{array}\right.$$

откуда $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$ или $x=-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi;\,-\dfrac{7\pi}{2}\right]$, отберём с помощью единичной окружности.



Получаем $-\dfrac{19\pi}{4}$, $-\dfrac{9\pi}{2}$ и $-\dfrac{7\pi}{2}$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{19\pi}{4}$, $-\dfrac{9\pi}{2}$ и $-\dfrac{7\pi}{2}$.

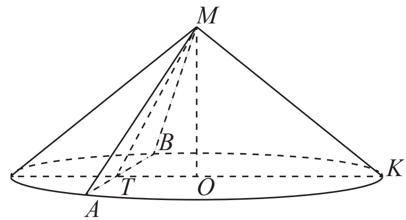
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Дан прямой круговой конус с вершиной M. Осевое сечение конуса — треугольник с углом $120°$ при вершине M. Образующая конуса равна $2\sqrt{3}$. Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

а) Докажите, что получившийся в сечении треугольник тупоугольный.

б) Найдите площадь сечения.

Решение.



а) Пусть треугольник MAB — искомое сечение, перпендикулярное образующей MK, и пусть T — точка его пересечения с диаметром, проходящим через точку K. В треугольнике MTK угол K равен $30°$. Следовательно, $MT = 2$, $TK = 4$.

В треугольнике MTB образующая конуса $MB = 2\sqrt{3}$, $TB = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 - 2^2} = 2\sqrt{2}$.

Получаем, что угол TMB больше угла MBT, то есть больше $45°$. Следовательно, $\angle AMB = 2\angle TMB$ больше $90°$.

б) Площадь треугольника MBA равна

$$S_{MBA} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MT = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2 = 4\sqrt{2}.$$

Ответ: б) $4\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\log_{x^2+1}(x-3)^2 \cdot \log_{x^2+1} \dfrac{(x-3)^2}{\left(x^2+1\right)^3} \le -2$.

Решение.

Сделаем замену $y = \log_{x^2+1}(x-3)^2$. Тогда данное неравенство принимает вид

$$y(y-3) \le -2; \quad (y-1)(y-2) \le 0; \quad 1 \le y \le 2.$$

Сделаем обратную замену: $1 \le \log_{x^2+1}(x-3)^2 \le 2$. Поскольку при всех $x \ne 0$ справедливо неравенство $x^2+1 > 1$, получаем систему

$$x^2+1 \le (x-3)^2 \le \left(x^2+1\right)^2,$$

равносильную данному неравенству, поскольку число 0 не является её решением.

Решим полученную систему:

$$\begin{cases} x^2+1 \le (x-3)^2, \\ (x-3)^2 \le (x^2+1)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+1-x^2+6x-9 \le 0, \\ (x-3+x^2+1)(x-3-x^2-1) \le 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x-8 \le 0, \\ (x^2+x-2)(-x^2+x-4) \le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \le \dfrac{4}{3}, \\ (x^2+x-2)(x^2-x+4) \ge 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le \dfrac{4}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 1, \\ x \le -2; \end{array} \right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} 1 \le x \le \dfrac{4}{3}, \\ x \le -2. \end{array} \right.$$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup \left[1; \dfrac{4}{3}\right]$.

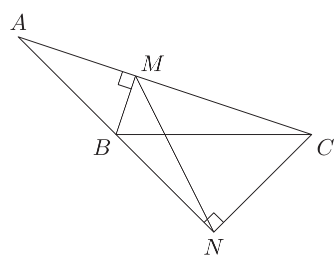
Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В треугольнике ABC проведены две высоты BM и CN, причём $AM : CM = 2 : 3$ и $\cos\angle BAC = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

а) Докажите, что угол ABC тупой.

б) Найдите отношение площадей треугольников BMN и ABC.

Решение.



а) Поскольку $\cos\angle BAC > 0$, точки C и M лежат по одну сторону от точки A, а так как $AM < CM$, точка M лежит на отрезке AC. Положим $AM = 2x$, $CM = 3x$. Из прямоугольного треугольника ABM находим, что

$$AB = \frac{AM}{\cos\angle BAC} = \frac{2x}{\dfrac{2}{\sqrt{5}}} = x\sqrt{5}.$$

По теореме Пифагора

$$BM^2 = AB^2 - AM^2 = 5x^2 - 4x^2 = x^2,$$

$$BC=\sqrt{CM^2+BM^2}=\sqrt{9x^2+x^2}=x\sqrt{10}.$$

По теореме косинусов

$$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{5x^2+10x^2-25x^2}{2AB\cdot BC}=-\frac{10x^2}{2AB\cdot BC}<0.$$

Следовательно, $\angle ABC>90°$.

б) Из прямоугольных треугольников ANC и BNC находим, что

$$CN=AC\cdot\sin\angle BAC=5x\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=x\sqrt{5},$$

$$BN=\sqrt{BC^2-NC^2}=\sqrt{10x^2-5x^2}=x\sqrt{5},$$

значит, B — середина AN.

Обозначим $S_{ANC}=S$. Тогда

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}S,\quad S_{AMN}=\frac{AM}{AC}\cdot S_{ANC}=\frac{2}{5}S,\quad S_{BMN}=\frac{1}{2}S_{AMN}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}S=\frac{1}{5}S.$$

Следовательно,

$$\frac{S_{BMN}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{1}{5}S}{\frac{1}{2}S}=\frac{2}{5}.$$

Ответ: $\frac{2}{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 10% по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 8 млн.

Решение.
Обозначим через S размер кредита. В конце 1-го, 2-го и 3-годов заёмщик выплачивает по $0{,}1S$ млн. Всего $0{,}3S$ за три года.

Рассмотрим погашение кредита за следующие два года. В середине 4-го года долг возрастёт до $1{,}1S$ млн. Обозначим через x размер выплачиваемой суммы в конце 4-го и 5-го годов. После выплаты в конце 4-го года долг равен $1{,}1S - x$, а в середине 5-го года он равен $1{,}1(1{,}1S - x)$. В конце 5-го года весь долг должен быть погашен, т. е. последняя выплата равна $1{,}1(1{,}1S - x)$ и по условию равна x. Значит,

$$1{,}1(1{,}1S - x) = x, \quad 2{,}1x = 1{,}21S, \quad x = \frac{121}{210}S,$$

и общий размер выплат равен $0{,}3S + \frac{242}{210}S = \frac{305}{210}S = \frac{61}{42}S$. По условию

$$\frac{61}{42}S < 8, \quad 61S < 336.$$

При $S = 5$ это неравенство верно, а при $S = 6$ оно неверно, как и при бóльших S.

Ответ: 5 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения параметра α из интервала $(0;\ \pi)$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2-4(x+y)\sin\alpha+8\sin^2\alpha=2\sin\alpha-1, \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2\sin\alpha+4\sin^2\alpha \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Обозначим $a=\sin\alpha$. Получим систему $\begin{cases} x^2+y^2-4a(x+y)+8a^2=2a-1, \\ \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=2a+4a^2. \end{cases}$

Если пара $(x;\ y)$ — решение системы, то пара $(y;\ x)$ тоже решение. Следовательно, единственное решение может иметь вид $(x;\ x)$, где $x\neq 0$.

Пусть $(x;\ x)$, где $x\neq 0$, — решение системы. Тогда

$$\begin{cases} x^2+x^2-4a(x+x)+8a^2=2a-1, \\ \dfrac{x}{x}+\dfrac{x}{x}=2a+4a^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2(x-2a)^2=2a-1, \\ (2a-1)(a+1)=0. \end{cases}$$

Отсюда видим, что если $a=-1$, то система решений не имеет, а при $a=\dfrac{1}{2}$ система имеет единственное решение.

Решим уравнение $\dfrac{1}{2}=\sin\alpha,\quad 0<\alpha<\pi$. Получим $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ и $\alpha=\dfrac{5\pi}{6}$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{6}$ и $\dfrac{5\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	3
С помощью верного рассуждения получены не все значения α	2
Задача верно сведена к решению системы двух уравнений с одной неизвестной	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Возрастающие арифметические прогрессии $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n,\ ...$ и $b_1,\ b_2,\ ...,\ b_n,\ ...$ состоят из натуральных чисел.

а) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1+a_3b_3=3a_2b_2$?

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1+2a_4b_4=3a_3b_3$?

в) Какое наибольшее значение может принимать произведение a_3b_3, если $a_1b_1+2a_4b_4\leq 300$?

Решение.

а) Подходящим примером являются прогрессии 1, 3, 5, ... и 1, 4, 7, ... Для этих прогрессий имеем $a_1b_1+a_3b_3=1\cdot 1+5\cdot 7=36=3\cdot 3\cdot 4=3a_2b_2$.

б) Обозначим через c и d разности арифметических прогрессий $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n,\ ...$ и $b_1,\ b_2,\ ...,\ b_n,\ ...$ соответственно. Тогда

$$a_1b_1+2a_4b_4=a_1b_1+2\left(a_1+3c\right)\left(b_1+3d\right)=3a_1b_1+6a_1d+6b_1c+18cd,$$

$$3a_3b_3=3\left(a_1+2c\right)\left(b_1+2d\right)=3a_1b_1+6a_1d+6b_1c+12cd$$

и $a_1b_1+2a_4b_4-3a_3b_3=6cd$.

Если $a_1b_1+2a_4b_4=3a_3b_3$, то $cd=0$. Пришли к противоречию, ведь по условию $c>0$ и $d>0$.

в) Как и ранее, обозначим через c и d разности арифметических прогрессий $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n,\ ...$ и $b_1,\ b_2,\ ...,\ b_n,\ ...$ соответственно. Тогда по условию $c\ge 1$ и $d\ge 1$. По доказанному в пункте *б* имеем $a_1b_1+2a_4b_4-3a_3b_3=6cd$. Значит,

$$a_3b_3=\frac{a_1b_1+2a_4b_4-6cd}{3}\le\frac{300-6}{3}=98.$$

Если прогрессии $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n,\ ...$ и $b_1,\ b_2,\ ...,\ b_n,\ ...$ являются прогрессиями 5, 6, 7, 8, ... и 12, 13, 14, 15,... соответственно, то

$$a_1b_1+2a_4b_4=5\cdot 12+2\cdot 8\cdot 15=300 \text{ и } a_3b_3=7\cdot 14=98.$$

Этот пример показывает, что наименьшее возможное значение произведения a_3b_3 равно 98.

Ответ: а) Да, например, 1, 3, 5, ... и 1, 4, 7, ...; б) нет; в) 98.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в п. *а*, – обоснованное решение в п. *б*, – искомая оценка в п. *в*, – пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Оглавление

Предисловие....3
Инструкция по выполнению работы....4
Вариант 1....5
Вариант 2....10
Вариант 3....15
Вариант 4....20
Вариант 5....25
Вариант 6....31
Ответы к заданиям....35
Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом....36
Вариант 1....36
Вариант 2....43
Вариант 3....50
Вариант 4....58
Вариант 5....65
Варинат 6....73