МАТЕМАТИКА

2017 ЕГЭ

Под редакцией И. В. Ященко

профильный уровень

задача 19

Г. И. Вольфсон, М. Я. Пратусевич,
С. Е. Рукшин, К. М. Столбов,
И. В. Ященко

АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА

ФГОС

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

Г. И. Вольфсон, М. Я. Пратусевич, С. Е. Рукшин,
К. М. Столбов, И. В. Ященко

ЕГЭ 2017. Математика
Арифметика и алгебра

Задача 19 (профильный уровень)

Под редакцией И. В. Ященко

Издание соответствует новому Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС)

Москва
Издательство МЦНМО
2017

УДК 373:51
ББК 22.1я72
В72

Авторы:
Г. И. Вольфсон, М. Я. Пратусевич, С. Е. Рукшин,
К. М. Столбов, И. В. Ященко

Вольфсон Г. И. и др.
В72 ЕГЭ 2017. Математика. Арифметика и алгебра. Задача 19 (профильный уровень) / Под ред. И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2017. — 112 с.

ISBN 978-5-4439-1089-5

Пособия по математике серии «ЕГЭ 2017. Математика» ориентированы на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче единого государственного экзамена по математике. В данном учебном пособии представлен материал для подготовки к решению задачи 19.

Пособие предназначено для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.1я72

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации Московский центр непрерывного математического образования включен в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, допущенных к использованию в образовательном процессе.

ISBN 978-5-4439-1089-5

Предисловие

Одной из целей математического образования, нашедшей отражение в федеральном компоненте государственного стандарта по математике, является интеллектуальное развитие учащихся. Эта цель выходит на одно из ведущих мест при углублённом изучении математики.

Поскольку одним из основных отличий задачи 19 (в зависимости от состава задач на экзамене по математике в разные годы эта задача имела разные номера) от остальных задач ЕГЭ является её явно выраженный нестандартный характер, а сведения, необходимые для решения этой задачи, могут относится к самым различным разделам школьного курса, построение решения может потребовать нетривиальных идей и методов, постольку смыслом включения задачи 19 в состав контрольно-измерительных материалов ЕГЭ является именно диагностика уровня интеллектуального развития учащихся.

Целью данной книги является не столько подготовить к решению задачи 19, сколько помочь учителю систематически заниматься интеллектуальным развитием учащихся на материале содержания задачи 19.

Авторы сборника старались дать обзор тех тем, которым традиционно в школе уделяется меньше внимания, и показать некоторые специфические методы решения задач. В сборник включены и более трудные задачи, примыкающие к так называемой «олимпиадной тематике». Эти задачи отмечены звёздочкой.

Материалы книги могут служить подспорьем в проведении элективных курсов, кружков и факультативов.

В заключение отметим, что, безусловно, перечень возможных сюжетов и тем задачи 19 не исчерпывается приведёнными в данной книге.

Авторы будут благодарны за конструктивную критику и замечания по содержанию этой книги, которые можно присылать по адресу `c6@mccme.ru`.

Диагностическая работа

1. На какие числа может быть сокращена дробь $\frac{2n+6}{3n+10}$, где n — натуральное число?

2. Дано натуральное число n. Его умножили на число m, полученное из n перестановкой цифр. Могло ли при этом получиться число 27812754?

3. Докажите, что число $21^{2012}+439^{2011}$ делится на 440.

4. Докажите, что если к произвольному трёхзначному числу приписать справа его же, то полученное шестизначное число будет делиться на 13.

5. НОК двух натуральных чисел в 7 раз больше, чем их НОД. Во сколько раз сумма этих чисел больше, чем их НОД?

6. Найдите все 4-значные чётные числа, у которых ровно 22 делителя.

7. Решите уравнение в целых числах: $x^2+10xy-5^y=3$.

8. Даны две группы натуральных чисел. В первой группе 3 числа и их среднее арифметическое равно 8, а во второй — 2 числа и их среднее арифметическое равно 13. Может ли произведение всех пяти данных чисел быть равным 100000?

9. Решите уравнение в целых числах: $5^n+12^n=13^n$.

10. Какое наибольшее количество членов может быть в арифметической прогрессии, все члены которой — натуральные числа, если известно, что каждый следующий член этой прогрессии не менее чем в полтора раза больше предыдущего?

Решения задач диагностической работы

1. Пусть эта дробь сократима на целое число d, большее 1. Тогда $(2n+6) \vdots d$ и $(3n+10) \vdots d$. Поэтому по свойствам делимости $2(3n+10)-3(2n+6) \vdots d$, т. е. $2 \vdots d$. Следовательно, d может быть равно только 2. Осталось подобрать хотя бы одно значение n, при котором дробь сократима на 2. Для этого достаточно выбрать любое чётное значение n.

Ответ. 2 (при чётных n).

2. Заметим, что 27812754 делится на 27, но не делится на 81. Разберём два случая.

1) Число n делится на 9. Значит, сумма цифр числа n делится на 9. Тогда и m делится на 9, так как сумма цифр числа m совпадает с суммой цифр числа n: эти числа отличаются лишь перестановкой цифр, а сами цифры — одни и те же. В этом случае произведение mn должно делиться на 81, а оно на 81 не делится.

2) Число n не делится на 9. Значит, сумма цифр числа n не делится на 9. Тогда и m не делится на 9, так как сумма цифр числа m совпадает с суммой цифр числа n. В этом случае произведение mn делится не более чем на вторую степень тройки, а оно делится на 27.

В каждом из случаев пришли к противоречию, значит, число 27812754 получиться не могло.

Ответ. Нет.

3. Решение 1.

1) Рассмотрим первое слагаемое: $21^{2012} = 441^{1006}$. Так как $441 = 440 + 1$, то $441^{1006} = (440+1)^{1006} = 440 \cdot k + 1$.

2) Рассмотрим второе слагаемое: $439^{2011} = (440-1)^{2011} = 440 \cdot n - 1$.

3) Из п. 1, 2 получаем: $21^{2012} + 439^{2011} = 440 \cdot k + 1 + 440 \cdot n - 1 = 440 \cdot (n-k)$, т. е. это выражение делится на 440, что и требовалось доказать.

Решение 2.

1) Рассмотрим первое слагаемое: $21^{2012} = 441^{1006}$. Так как $441 \equiv 1 \pmod{440}$, то $441^{2012} \equiv 1^{2012} \equiv 1 \pmod{440}$.

2) Рассмотрим второе слагаемое. Так как $439 \equiv -1 \pmod{440}$, то $439^{2011} \equiv (-1)^{2011} \equiv -1 \pmod{440}$.

3) Из п. 1, 2 получаем: $21^{2012} + 439^{2011} \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{440}$, что и требовалось доказать.

4. Пусть данное трёхзначное число имеет вид $\overline{abc}$. Тогда после приписывания получится число $\overline{abcabc}$. Это число можно представить в виде $1000\overline{abc} + \overline{abc} = 1001\overline{abc}$. Значит, это шестизначное число делится на 1001, а так как 1001 делится на 13, то и шестизначное число делится на 13, что и требовалось доказать.

5. Обозначим данные в условии задачи натуральные числа через x, y, а их НОД — через d. Тогда исходные числа можно представить в виде kd и nd, где $\text{НОД}(k, n) = 1$. В этом случае

$$\text{НОК}(x, y) = \frac{xy}{\text{НОД}(x, y)} = \frac{nd \cdot kd}{d} = knd.$$

Из условия следует, что $\text{НОК}(x, y) = 7 \cdot \text{НОД}(x, y)$, из чего с учётом введённых обозначений следует, что $knd = 7d$, $kn = 7$. Произведение двух натуральных чисел может быть равно 7 в том и только в том случае, если это числа 1 и 7, а значит, исходные числа равны d и $7d$. Тогда их сумма равна $8d$, т. е. она в 8 раз больше, чем их НОД.

Ответ. 8.

6. По формуле количества делителей числа (см. с. 34) можно представить 22 в виде произведения скобок вида $(k_i + 1)$, где k_i — натуральный показатель степени простого делителя, входящего в каноническое разложение исходного числа. Таких скобок может быть либо одна (само число 22), либо две (числа в них будут равны 2 и 11), а в виде произведения трёх и более натуральных чисел, больших 1, число 22 представить невозможно. Разберём эти два случая.

1) Пусть есть всего одна скобка. Значит, $k_1 + 1 = 22$, и тогда искомое число имеет вид p^{21}, где p — простое число. Искомое число по условию чётно, следовательно, $p = 2$, но в числе 2^{21} больше 4 цифр. Следовательно, в этом случае решений нет.

2) Пусть произведение состоит из двух скобок, равных 2 и 11. Тогда в разложении искомого числа присутствуют ровно два простых числа, степени которых равны 1 и 10. Известно, что одним из простых сомножителей должно быть число 2, значит, искомое число имеет вид $2 \cdot p^{10}$ или $2^{10} \cdot p$, где p — простое число, не равное 2. Первый случай не подходит, так как даже при наименьшем возможном значении p, равном 3, число $2 \cdot 3^{10}$ не является четырёхзначным. Во втором же случае нужно отобрать все такие простые числа p, не равные 2, что $1024p$ — четырёхзначное число. Последовательно убеждаемся, что числа 3, 5 и 7 подходят, а 11 — уже нет.

Следовательно, искомые числа — $2^{10} \cdot 3$, $2^{10} \cdot 5$ и $2^{10} \cdot 7$, т. е. 3072, 5120 и 7168.

Ответ. 3072, 5120 и 7168.

7. Разберём три случая для переменной y.

1) Если число y отрицательно, то 5^y — нецелое, а все остальные слагаемые в левой части — целые, а значит, сумма целой быть не может. Поэтому в этом случае решений нет.

2) Если $y=0$, то $x^2=4$, $x=\pm 2$.

3) Если число y положительно, то, перенося из левой части второе и третье слагаемые вправо, получаем $x^2=5^y-10xy+3$.

Заметим, что 5^y оканчивается на 5, $10xy$ — на 0, а значит, сумма в правой части равенства оканчивается на 8. Но тогда и x^2 должен оканчиваться на 8, а квадраты натуральных чисел на 8 не оканчиваются. Следовательно, в этом случае решений нет.

Ответ. $(-2; 0)$, $(2; 0)$.

8. Обозначим числа первой группы через a_1, a_2, a_3, а числа второй группы — через a_4, a_5. По условию $\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}=8$, а значит, $a_1+a_2+a_3=24$. Аналогично $\dfrac{a_4+a_5}{2}=13$, $a_4+a_5=26$. По неравенству о средних

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}\geqslant\sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5},$$

т. е.

$$\sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5}\leqslant\frac{50}{5},\qquad a_1a_2a_3a_4a_5\leqslant 100000.$$

Если же $a_1a_2a_3a_4a_5=100000$, то в неравенстве о средних достигается равенство, что возможно только в том случае, когда $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5$. Но тогда средние арифметические первого и второго наборов должны совпадать, что не соответствует условию задачи. Значит, произведение данных чисел не может быть равным 100000.

Ответ. Нет.

9. Заметим, что $n=2$ — решение данного уравнения. При увеличении переменной на 1 правая часть уравнения увеличивается в 13 раз, а левая — менее чем в 12, так как $5^{n+1}+12^{n+1}<12(5^n+12^n)$. Следовательно, при $n>2$ решений нет.

Аналогично, если уменьшить значение переменной на 1, то правая часть уменьшится в 13 раз, а левая — менее чем в 12 раз. Следовательно, и при $n<2$ решений нет.

Ответ. 2.

10. Докажем от противного, что в искомой прогрессии не более 3 членов. Пусть искомая прогрессия состоит хотя бы из четырёх членов и имеет вид $a_1, a_2, \ldots$, а её разность равна d. Тогда $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$, $a_4 = a_1 + 3d$. Из условия следует, что $\frac{a_4}{a_3} \geqslant 1{,}5$, $a_4 \geqslant 1{,}5a_3$, или $a_1 + 3d \geqslant 1{,}5a_1 + 3d$, $0 \geqslant 0{,}5a_1$ — что противоречит тому, что a_1 — натуральное число.

Следовательно, в прогрессии не более трёх членов.

Осталось привести пример прогрессии, состоящей из трёх членов и удовлетворяющей условию задачи. Таким примером может служить прогрессия $\{1; 2; 3\}$.

Ответ. 3.

§1. Делимость и её свойства. Признаки делимости

Диагностическая работа 1

1. Число $\overline{134*}$ кратно 3. Какую цифру можно поставить вместо звёздочки? (Перечислите все возможные варианты.)

2. Делится ли число 314567891 на 11?

3. Какую цифру можно поставить вместо звёздочки, если известно, что число $314159*6$ кратно 8? (Перечислите все возможные варианты.)

4. В буфете купили несколько пирожных по 35 рублей и 14 порций кофе (каждая порция кофе стоит целое число рублей). Мог ли весь купленный товар стоить 501 рубль?

5. Сумма и произведение двух натуральных чисел кратны 136. Докажите, что квадрат каждого из них кратен 136.

Краткая теоретическая справка

В этом параграфе все числа целые, если не оговаривается противное.

Определение. Число a делится на число $b \neq 0$, если существует такое число c, что $a = bc$.

Обозначение: $a \,\vdots\, b$.

Свойства делимости

1. Если a делится на b, то для любого числа k число ka делится на b.
2. Если a делится на c и b делится на c, то сумма, разность и произведение чисел a и b делится на c.
3. Если a делится на b и b делится на c, то a делится на c.
4. Если a делится на c и b делится на d, то ab делится на cd.

Признаки делимости для десятичной записи числа

Число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра чётна.

Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3. Более того, сумма цифр числа даёт такой же остаток от деления на 3, как и само число.

Число делится на 4 тогда и только тогда, когда две его последние цифры составляют число, которое делится на 4.

Число делится на 5 тогда и только тогда, когда оно оканчивается на 0 или 5.

Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9. Более того, сумма цифр числа даёт такой же остаток от деления на 9, как и само число.

Число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность суммы цифр, стоящих на нечётных местах, и суммы цифр, стоящих на чётных местах, делится на 11 (например, число 305792608 делится на 11, так как $(8+6+9+5+3)-(0+2+7+0)=22$ делится на 11).

Простые и взаимно простые числа

Определение. Натуральное число, отличное от 1, называется простым, если у него нет натуральных делителей, отличных от 1 и него самого.

Числа, отличные от 1 и не являющиеся простыми, называются составными.

Важно! Единица не является ни простым, ни составным числом.

Определение. Два числа, наибольший общий делитель которых равен 1, называются взаимно простыми.

Если число a делится на числа b и c, причём числа b и c взаимно просты, то число a делится на их произведение bc. Данное утверждение верно не только для двух чисел, но и для любого количества попарно взаимно простых чисел (а именно: если число a делится на каждое из n чисел, причём любые два числа из данных n чисел взаимно просты, то число a делится на произведение данных n чисел).

1.1. Свойства делимости

Примеры решения задач

1. Найдите все такие $a \in \mathbb{N}$, что $\dfrac{2a+1}{a-2}$ — целое число.

Решение. Если число $\dfrac{2a+1}{a-2}$ целое, то это равносильно тому, что $2a+1 \,\vdots\, a-2$. Тогда и разность этих чисел тоже будет делиться на $a-2$: $(2a+1)-(a-2) \,\vdots\, a-2$, $a+3 \,\vdots\, a-2$. Но и разность этих чисел тоже должна делиться на $a-2$: $(a+3)-(a-2) \,\vdots\, a-2$, $5 \,\vdots\, a-2$. Значит, $a-2$ — делитель числа 5. Но у 5 не так много делителей — это $1, 5, -1, -5$.

Переберём все случаи:

1) $a-2=1$. Тогда $a=3$, а наша дробь $\frac{2a+1}{a-2}=\frac{6+1}{3-2}=7\in\mathbb{Z}$. Значение $a=3$ подходит.

2) $a-2=-1$. Тогда $a=1$, а наша дробь $\frac{2a+1}{a-2}=\frac{2+1}{1-2}=-3\in\mathbb{Z}$. Значение $a=1$ подходит.

3) $a-2=5$. Тогда $a=7$, а наша дробь $\frac{2a+1}{a-2}=\frac{14+1}{7-2}=3\in\mathbb{Z}$. Значение $a=7$ подходит.

4) $a-2=-5$. Тогда $a=-3$ — не натуральное. Этот случай не подходит.

Ответ. $\frac{2a+1}{a-2}\in\mathbb{Z}$ только при $a=1, 3, 7$.

2. Найдите все такие $a\in\mathbb{Z}$, что $\frac{2a+1}{a-2}$ — натуральное число.

Решение. Рассуждаем вначале аналогично задаче 1. Разберём 4 случая.

1) $a-2=1$. При $a=3$ дробь $\frac{2a+1}{a-2}=\frac{6+1}{3-2}=7\in\mathbb{N}$. Значит, $a=3$ подходит.

2) $a-2=-1$. При $a=1$ дробь $\frac{2a+1}{a-2}=\frac{2+1}{1-2}=-3\notin\mathbb{N}$. Значит, $a=1$ не подходит.

3) $a-2=5$. При $a=7$ дробь $\frac{2a+1}{a-2}=\frac{14+1}{7-2}=3\in\mathbb{N}$. Значит, $a=7$ подходит.

4) $a-2=-5$. При $a=-3$ дробь $\frac{2a+1}{a-2}=\frac{-6+1}{-3-2}=1\in\mathbb{N}$. Значит, $a=-3$ подходит.

Ответ. $\frac{2a+1}{a-2}\in\mathbb{N}$ только при $a=-3, 3, 7$.

3. Найдите все такие $a\in\mathbb{Z}$, что $(a^2+a-1)\vdots(a-2)$.

Решение. Заметим, что число $a^2+a-6\vdots a-2$, так как

$$a^2+a-6=(a-2)(a+3).$$

Тогда, если $(a^2+a-1)\vdots(a-2)$ и $(a^2+a-6)\vdots(a-2)$, то и $(a^2+a-1)-(a^2+a-6)\vdots(a-2)$, т. е. $5\vdots(a-2)$.

Как и в прошлых задачах, переберём все возможные значения $a-2$ — делители 5:

1) $a-2=1$. Тогда $a=3$, и $a^2+a-1=9+3-1=11$, а $a-2=1$, и тогда $11\vdots 1$, значит, $a=3$ нам подходит.

2) $a-2=-1$. Тогда $a=1$, и $a^2+a-1=1+1-1=1$, а $a-2=-1$, и тогда $1\vdots -1$, значит, $a=1$ нам подходит.

3) $a-2=5$. Тогда $a=7$, и $a^2+a-1=49+7-1=55$, а $a-2=5$, и тогда $55\vdots 5$, значит, $a=7$ подходит.

4) $a-2=-5$. Тогда $a=-3$, и оно не натуральное, этот случай не подходит.

Ответ. $a=1, 3, 7$.

4. Докажите, что произведение любых трёх последовательных чисел делится на 6.

Решение. Давайте заметим, что из трёх последовательных чисел хотя бы одно с гарантией будет чётным (так как чётные и нечётные числа чередуются и трёх подряд нечётных чисел не бывает). Также давайте заметим, что одно из трёх последовательных чисел делится на 3 (так как числа, делящиеся на 3, идут через два, и они просто не могут «проскочить» наши три подряд идущих числа). Значит, если в произведении есть число, кратное трём, и число, кратное 2, то произведение делится на 6.

5. Натуральные числа m и n таковы, что и m^3+n, и m^3+m делятся на m^2+n^2. Найдите m и n.

Решение. Заметим, что если $m^3+m \vdots m^2+n^2$ и $m^3+n \vdots m^2+n^2$, то $(m^3+n)-(m^3+m) \vdots m^2+n^2$, т. е. $n-m \vdots m^2+n^2$. Будем считать, что $n \geqslant m$ (иначе будем рассматривать дальше $m-n$ вместо $n-m$). Отсюда либо $n-m \geqslant m^2+n^2$, чего, очевидно, не бывает, либо $n-m=0$, значит, $m=n$. Тогда можно считать, что нам дано следующее: $m^3+m \vdots 2m^2$. Заметим, что $m^3 \vdots m^2$, значит, и m должно делиться на m^2, а такое бывает только при $m=1$.

Ответ. $m=n=1$.

Подготовительные задачи

1. Верно ли, что если число делится на 4 и на 6, то оно делится на 24?

2. Число a делится на 3. Может ли число $2a$ не делиться на 3?

3. Число a чётно. Верно ли, что $3a$ делится на 6?

4. Число $15a$ делится на 6. Верно ли, что a делится на 6?

5. Число $n+1$ делится на 3. Докажите, что $4+7n$ также делится на 3.

6. Найдите все такие $a \in \mathbb{N}$, что $(a^2+1) \vdots a$.

7. Найдите все такие $a \in \mathbb{N}$, что $(a+1) \vdots a^2$.

8. Найдите все такие $a \in \mathbb{N}$, что $(a^2+2a-3) \vdots a$.

9. Найдите все такие $a \in \mathbb{N}$, что $(a^2+3) \vdots (a^2-2)$.

10. Докажите, что произведение любых пяти последовательных чисел делится на 30.

11. Придумайте 5 различных натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из них.

Основные задачи

1. Докажите, что дробь $\dfrac{6n+7}{10n+12}$ несократима ни при каких натуральных n.

2. Докажите, что число n^3-n делится на 24 при любом нечётном n.

3. Докажите, что сумма n последовательных натуральных чисел является составным числом (т. е. имеет хотя бы один делитель, отличный от единицы и самого числа) при любом натуральном $n > 2$.

4. Произведение двух чисел, каждое из которых не делится нацело на 10, равно 1000. Найдите сумму этих чисел.

5. Число умножили на сумму его цифр и получили 2008. Найдите исходное число.

1.2. Признаки делимости

Примеры решения задач

1. На доске написано: $72{*}3{*}$. Замените звёздочки цифрами так, чтобы полученное число делилось на 45.

Решение. Пусть на доске написано такое число: $72x3y$, где x и y — некие цифры. Тогда, если это число делится на 45, то оно делится на 5 и на 9.

1) Делимость на 9.

По признаку делимости на 9 сумма цифр числа должна делиться на 9: $7+2+x+3+y \vdots 9$, $12+x+y \vdots 9$.

2) Делимость на 5.

Последняя цифра нашего числа должна быть либо 0, либо 5, т. е. либо $y=5$, либо $y=0$.

Пусть $y=0$. Тогда $12+x+0 \vdots 9$, т. е. $12+x \vdots 9$, значит, $x=6$.

Пусть $y=5$. Тогда $12+x+5 \vdots 9$, т. е. $17+x \vdots 9$, значит, $x=1$.

Ответ. (1; 5), (6; 0).

2. Два восьмизначных числа отличаются перестановкой цифр. Может ли их разность быть равной 20072008?

Решение. У обоих исходных восьмизначных чисел совпадают остатки от деления на 9 (они совпадают с остатками сумм цифр этих чисел, а цифры этих чисел по условию одинаковы). Тогда разность этих чисел должна быть кратна 9, а число 20072008 не делится на 9.

3. Докажите, что для любого натурального n число $10^n - 1$ делится на 9.

Решение. Число $10^n - 1$ записывается как $9\ldots9$ (n девяток). Поэтому оно кратно 9.

4. Докажите, что число $11\ldots1$ (всего $2n$ единиц, $n > 1$) — составное (т. е. имеет хотя бы один делитель, отличный от единицы и самого числа).

Решение. Это число делится на число, составленное из n единиц. Результатом деления является число вида $10\ldots01$ (количество нулей равно $n - 1$).

5. В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между ними знаки «+» и «−» так, чтобы значение полученного выражения было равно нулю?

Решение. Так как среди чисел от 1 до 10 имеется 5 нечётных, то сумма этих чисел, взятых с любыми знаками, окажется нечётной, т. е. не сможет быть равной 0.

Ответ. Нет.

6. Чтобы открыть сейф, нужно ввести код — семизначное число из двоек и троек. Известно, что в кодовом числе двоек больше, чем троек. Кроме того, известно, что кодовое число делится на 3 и на 4. Найдите код сейфа.

Решение. Давайте заметим, что раз число делится на 4, то число из двух последних его цифр тоже делится на 4 (это просто признак делимости на 4). Посмотрим, каким может быть это число:

1) 22 не делится на 4;
2) 23 не делится на 4;
3) 32 делится на 4;
4) 33 не делится на 4.

Значит, наш код заканчивается на 32. Теперь заметим, что вся сумма цифр должна делиться на 3, так как число делится на 3. Переберём все возможные варианты кода:

1) 7 двоек не может быть, так как последние цифры 32.

2) 6 двоек. Сумма цифр $12 + 3 = 15$ делится на 3, значит, код делится на 3. Положение цифры 3 известно, она предпоследняя. Код имеет вид 2222232.

3) 5 двоек. Сумма цифр $10+6=16$, что не делится на 3, значит, код не делится на 3.

4) 4 двойки. Сумма цифр $8+9=17$, что не делится на 3, значит, код не делится на 3.

5) Меньше 4 двоек быть не может, так как двоек больше, чем троек.

Ответ. 2222232.

7. Докажите, что число, состоящее из 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, не может быть точным квадратом натурального числа.

Решение. Посчитаем сумму цифр этого числа:

$$S = 100\cdot 1 + 100\cdot 0 + 100\cdot 2 = 300.$$

Заметим, что S делится на 3, но не делится на 9. Но, как известно, если $a^2 \vdots p$, где p — простое число, то $a^2 \vdots p^2$. Значит, S не может быть квадратом, так как оно делится на 3 и не делится на 3^2.

Подготовительные задачи

1. Какие из чисел 863, 362, 99832476252, 2012, 79255 делятся: а) на 3; б) на 4; в) на 5; г) на 6; д) на 8; е) на 9; ж) на 11?

2. Докажите, что из трёх целых чисел всегда можно найти два, сумма которых чётна.

3. Докажите, что если сумма двух натуральных чисел нечётна, то их произведение чётно.

4. Разность двух натуральных чисел умножили на их произведение. Могло ли при этом получиться число 14765817541782545?

5. На доске написано: $645{*}7235$. Замените звёздочку цифрой так, чтобы полученное число делилось на 9.

6. К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре, чтобы полученное число делилось на 15.

7. К числу 10 припишите слева и справа по одной цифре, чтобы полученное число делилось на 72.

8. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 составляются всевозможные натуральные числа, в записи которых каждая из этих цифр присутствует ровно 1 раз. Докажите, что сумма всех таких чисел делится на 9.

9. Найдите наибольшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого участвуют все 10 цифр по одному разу.

10. Можно ли из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 составьте шестизначное число, делящееся на 11?

11. В примере на умножение одинаковые цифры заменены одинаковыми буквами, разные — разными. Докажите, что не могла получиться запись $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{eeff}$.

Основные задачи

1. Допишите к числу 523 три цифры справа так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7, 8 и 9.

2. Можно ли числа от 1 до 21 разбить на несколько групп, в каждой из которых наибольшее число равно сумме всех остальных чисел группы?

3. В числах МИХАЙЛО и ЛОМОНОСОВ каждая буква обозначает цифру (разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым — одинаковые). Известно, что произведения цифр у этих чисел равны. Могут ли оба числа быть нечётными?

4. Найдите наибольшее четырёхзначное число, все цифры которого различны и которое делится на 2, 5, 9 и 11.

5. В натуральном числе a переставили цифры и получили новое число b. Известно, что $a - b = 11\ldots1$ (число из n единиц). Найдите наименьшее возможное значение n.

6. Найдутся ли 11 натуральных чисел, делящихся на 11, в записи каждого из которых по 1 разу использованы а) все цифры от 0 до 9; б) все цифры от 0 до 8; в) все цифры от 0 до 5?

7. Использовав все цифры от 1 до 9 по одному разу, составьте наибольшее девятизначное число, делящееся на 11.

8. Произведение натурального числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, равно 2430. Чему может быть равно исходное число?

9. Можно ли выдать 25 рублей ровно десятью монетами достоинством в 1 или 5 рублей?

10. Последняя цифра квадрата натурального числа 6. Докажите, что его предпоследняя цифра нечётна.

11. Числа от 1 до 37 записали в строку так, что сумма любых первых нескольких чисел делится на следующее за ними число. Какое число стоит на третьем месте, если на первом месте стоит число 37, а на втором — 1?

§ 2. Остатки

Диагностическая работа 2

1. Разделите с остатком 2012 на 13.

2. Число a даёт при делении на 8 остаток 5. Число b при делении на 16 даёт остаток 11. Найдите остаток от деления $a+b$ на 8.

3. Найдите последнюю цифру числа 13^{2013}.

4. При делении числа 518 с остатком получилось неполное частное 172. Найдите все возможные значения делителя и остатка.

5. Найдите все натуральные значения n $(20<n<40)$, для каждого из которых n^3-3n^2+7 кратно 5.

Краткая теоретическая справка

Определение. Пусть a и $b\neq 0$ — два целых числа. Разделить число a на число b с остатком — это значит найти такие числа q и r, что выполнены следующие условия:

1) $a=bq+r$; 2) $0\leqslant r<|b|$.

При этом число q называется неполным частным, а число r — остатком от деления a на b. Число a именуется делимым, а число b — делителем.

Равенство 1 при соблюдении неравенства 2 называют записью деления с остатком. При этом говорят, что число a даёт при делении на b остаток r.

От деления на b может быть не более $|b|$ различных остатков, при этом числа $0, 1, \ldots, |b|-1$ как раз и дают ровно $|b|$ различных остатков.

Теорема (о делении с остатком). *Для любых целых чисел a и $b\neq 0$ можно поделить с остатком a на b, т. е. представить a в виде $a=bq+r$, где $q, r\in\mathbb{Z}$ и $0\leqslant r<|b|$, причём такое представление единственно.*

Пример. Запись $2006=-11\cdot(-182)-4$ не является записью деления с остатком 2006 на -11, так как отрицательное число -4 не может служить остатком. Правильная запись выглядит следующим образом: $2006=-11\cdot(-181)+7$.

Теорема. *Сумма (произведение) чисел a и b даёт тот же остаток при делении на число m, что и сумма (произведение) остатков чисел a и b при делении на число m.*

Примеры решения задач

1. Найдите остаток числа 2^{2012} от деления на 3.

Решение. Заметим, что
$$2^{2012} = (2^2)^{1006} = 4^{1006}.$$
Четыре в любой степени даёт остаток 1 при делении на 3. Это верно потому, что 4 даёт остаток 1 при делении на 3, а при перемножении чисел их остатки перемножаются. Тогда 4^k даёт такой же остаток, что и $1^k = 1$. Поэтому 2^{2012} даёт остаток 1 при делении на 3.

2. Докажите, что квадраты натуральных чисел не дают остатка 2 от деления на 3.

Решение. Пусть число a возводится в квадрат.

Разберём три случая:

1) a даёт остаток 1 при делении на 3. Тогда a^2 даёт остаток $1 \cdot 1 = 1$.

2) a даёт остаток 2 при делении на 3. Тогда a^2 даёт остаток $2 \cdot 2 = 4$, что даёт остаток 1.

3) a делится на 3. Тогда и a^2 делится на 3.

Итак, квадраты натуральных чисел дают остатки 0 и 1 при делении на 3.

3. При каких натуральных n выражение $2^n - 1$ делится на 7?

Решение. Составим таблицу остатков при делении числа 2^n на 7:

n	остаток числа 2^n при делении на 7
1	2
2	4
3	1
4	2
5	4
6	1
7	2

Заметим, что далее остатки будут повторяться: $1 \to 2 \to 4 \to 1 \to \ldots$

Видно, что когда n делится на 3, получаем остаток 1, когда n даёт остаток 1 при делении на 3, получаем остаток 2, когда n даёт остаток 2 при делении на 3 — остаток 4. Значит, $2^n - 1$ делится на 7, только когда n делится на 3.

4. Докажите, что число $a^3 + b^3 + 4$ не является точным кубом натурального числа.

Решение. Посмотрим на остатки кубов при делении на 9. Для этого составим таблицу остатков:

остаток x при делении на 9	остаток x^3 при делении на 9
0	0
1	1
2	8
3	0
4	1
5	8
6	0
7	1
8	8

Кубы натуральных чисел дают остатки $0, 1, 8$ при делении на 9. Сумма двух кубов натуральных чисел даёт остатки $0, 1, 2, 7, 8$ при делении на 9. Сумма двух кубов, увеличенная на 4, даёт остатки $4, 5, 6, 2, 3$ при делении на 9. Среди этих остатков нет ни 0, ни 1, ни 8. Значит, данная сумма не может быть точным кубом.

5. Докажите, что $n^5 + 4n$ делится на 5 при любом натуральном n.

Решение. Разложим $n^5 + 4n$ на множители: $n \cdot (n^4 + 4)$. Тогда при n, делящихся на 5, это выражение делится на 5.

Рассмотрим таблицу остатков n^4 от деления на 5 (кроме случая, когда n кратно 5):

остаток n при делении на 5	остаток n^2 при делении на 5	остаток n^4 при делении на 5
1	1	1
2	4	1
3	4	1
4	1	1

Заметим, что $n^4 + 4$ будет во всех случаях давать остаток $1 + 4 = 5$ при делении на 5, т. е. будет делиться на 5. Значит, и все выражение будет делиться на 5 при любом натуральном n.

6. Существует ли такое натуральное n, что n^2+n+1 делится на 2015?

Решение. Построим таблицу остатков числа n^2+n+1 при делении на 5:

Остатки при делении на 5	
n	n^2+n+1
0	1
1	3
2	2
3	3
4	1

Итак, n^2+n+1 не может делиться на 5, а значит, оно не делится и на 2015.

7. Существует ли степень двойки, из которой перестановкой цифр можно получить другую степень двойки?

Ответ. Нет, не существует.

Решение. Два числа, отличающиеся лишь порядком цифр, дают одинаковые остатки при делении на 9. Выясним, какие остатки при делении на 9 могут давать числа вида 2^n $(n=1, 2, 3, \ldots)$:

Степень числа 2	Остаток степени при делении на 9
2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	7
2^5	5
2^6	1
2^7	2
…	…

Докажем, что последовательность остатков при делении на 9 степеней двойки 2, 4, 8, 7, 5, 1, 2, … периодична с периодом 6. Действительно, $2^{n+6}-2^n=2^n\cdot 63$ делится на 9. Предположим, что две степени двойки отличаются только лишь порядком цифр, тогда они дают одинаковый остаток при делении на 9 и отличаются не менее чем в $2^6=64$ раза, т. е. в них разное количество цифр. Противоречие.

Замечание. В этой задаче мы воспользовались фактом, что число даёт такой же остаток при делении на 9, как и его сумма цифр.

8. Докажите, что для любых натуральных a, b, c найдётся такое натуральное n, что n^3+an^2+bn+c не является точным квадратом.

Решение. Обозначим $P(n)=n^3+an^2+bn+c$. Допустим, что значения $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$ все являются полными квадратами. Тогда $P(3)$ и $P(1)$ являются полными квадратами одной чётности, следовательно, оба значения дают одинаковый остаток по модулю 4, значит, $P(3)-P(1)\underset{4}{\equiv}0$, и аналогично $P(4)-P(2)\underset{4}{\equiv}0$. С другой стороны,

$$P(1)\underset{4}{\equiv}1+a+b+c;$$

$$P(2)\underset{4}{\equiv}8+4a+2b+c\underset{4}{\equiv}2b+c;$$

$$P(3)\underset{4}{\equiv}27+9a+3b+c\underset{4}{\equiv}3+9a+3b+c;$$

$$P(4)\underset{4}{\equiv}4^3+a\cdot 4^2+b\cdot 4+c\underset{4}{\equiv}c.$$

Значит,

$$P(3)-P(1)\underset{4}{\equiv}3+9a+3b+c-(1+a+b+c)\underset{4}{\equiv}2+8a+2b\underset{4}{\equiv}2b+2,$$

$$P(4)-P(2)\underset{4}{\equiv}c-(2b+c)\underset{4}{\equiv}-2b\underset{4}{\equiv}2b.$$

Получается, что числа $2b+2$ и $2b$ одновременно делятся на 4, чего не может быть.

Подготовительные задачи

1. Найдите остаток числа 2012 от деления на число а) 3; б) 4; в) 5; г) 7; д) 9.

2. Найдите остаток числа -12 от деления на число а) 3; б) 4; в) 5; г) 7; д) 9.

3. Найдите остаток числа $(2011\cdot 2012+2013^2)$ от деления на 7.

4. Найдите последнюю цифру числа а) 2^{2012}; б) 3^{2010}; в) $5^{239}+9^{57}-7^{366}$.

5. Докажите, что квадраты натуральных чисел не дают остатков 2 и 3 от деления на 4.

6. Докажите, что квадраты натуральных чисел не дают остатков 2 и 3 от деления на 5.

7. Докажите, что n^3+2n делится на 3 при любом натуральном n.

8. Какие остатки могут давать кубы натуральных чисел при делении а) на 7; б) на 9?

9. Докажите, что n^3+2 не делится на 9 ни при каком натуральном n.

10. Докажите, что число 1000…0005000…0001 (в каждой из двух групп — по 2012 нулей) не является кубом натурального числа.

11. Натуральные числа x, y, z таковы, что $x^2+y^2=z^2$. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится а) на 3; б) на 4; в) на 5.

12. Докажите, что $\dfrac{n^5}{5}+\dfrac{n^3}{3}+\dfrac{7n}{15}$ — целое число при любом натуральном n.

Основные задачи

1. Найдите четырёхзначное число, которое при делении на 131 даёт остаток 112, а при делении на 132 даёт остаток 98.

2. Докажите, что $2222^{5555}+5555^{2222}$ делится на 7.

3. Докажите, что число $6n^3+3$ не является точной шестой степенью натурального числа.

4. Найдите наибольшее трёхзначное число, дающее при делении на 3 остаток 2, при делении на 4 — остаток 3, а при делении на 5 — остаток 4.

5. Натуральные числа m и n таковы, что $m>n$ и m не делится на n. Также известно, что остаток от деления m на n совпадает с остатком от деления $m+n$ на $m-n$. Найдите отношение $m:n$.

6. Десятизначное число на 1 больше квадрата натурального числа. Докажите, что в этом числе есть одинаковые цифры.

7. Докажите, что при любом натуральном n сумма цифр числа 1981^n не меньше 19.

8. Найдите последнюю цифру числа $1^2+2^2+\ldots+99^2$.

9. Докажите, что $1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n$ делится на n при любом нечётном n.

10. Натуральные числа x, y, z таковы, что $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что xyz делится на 60.

11. Сумма неполного частного и остатка, полученных при делении некоторого натурального числа на 100, равна сумме неполного частного и остатка, полученных при делении того же числа на 1995. Чему могут быть равны неполные частные?

12. Сколько существует натуральных чисел n, не превосходящих 100000, для которых число $2^n - n^2$ делится на 7?

13. Пусть a и b — натуральные числа. При делении $a^2 + b^2$ на $a + b$ получается неполное частное q и остаток r. Найдите все пары (a, b), для которых $q^2 + r = 2012$.

14. Докажите, что среди чисел вида $2^n - 3$ существует бесконечно много чисел, делящихся на 5, и бесконечно много чисел, делящихся на 13, но не существует ни одного числа, делящегося на 65.

15. Докажите, что $7^{2n} - 5^{2n}$ делится на 24 при любом натуральном n.

16. Докажите, что если $2^n - 2$ делится на n, то $2^{2^n - 1} - 2$ делится на $2^n - 1$.

17. Докажите, что из любых $2n - 1$ целых чисел можно выбрать ровно n чисел так, что их сумма делится на n.

18. Имеются семь карточек с цифрами от 1 до 7. Докажите, что ни одно семизначное число, составленное из этих карточек, не может делиться на другое.

§ 3. Десятичная запись числа

Диагностическая работа 3

1. Для нумерации страниц в учебнике понадобилось 534 цифры. Страницы нумеруются, начиная с 1. Сколько страниц в учебнике?

2. Возраст человека в 1998 году оказался равным сумме цифр года его рождения. Сколько ему лет?

3. Десятичная запись некоторого числа оканчивается на 2. Если же эту цифру переставить на первое место, то число удвоится. Найдите это число.

4. Могут ли две последние цифры десятичной записи квадрата натурального числа быть нечётными?

5. Докажите, что четырёхзначное число не может увеличиться в 7 раз, если его первую цифру переставить в конец.

Краткая теоретическая справка

Определение. Десятичной записью натурального числа называется его представление в виде $a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$, где $a_k \neq 0$ и все числа $a_0, a_1, \ldots, a_k$ — целые, неотрицательные и не превосходящие 9.

Таким образом, числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 играют особую роль. Они служат для десятичной записи других чисел, поэтому называются десятичными цифрами.

Традиционно записывают числа, пропуская степени числа 10. Степень числа 10, на которую умножается данная цифра, равна количеству цифр после неё в десятичной записи.

Например, $2012 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$.

Десятичная запись натурального числа n содержит ровно k цифр, если и только если выполнено неравенство $10^{k-1} \leqslant n < 10^k$.

С помощью десятичной записи можно записать и нецелые числа, используя отрицательные степени числа 10. Полученную запись называют *десятичной дробью*. Слагаемые, содержащие отрицательные степени числа 10, отделяются в записи от остальных слагаемых десятичной запятой (или точкой).

Например, $123{,}405 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$.

Однако не все числа представимы в виде такой записи, включающей конечное число цифр.

Несократимая правильная дробь $\frac{m}{n}$ представляется в виде конечной десятичной дроби в том и только в том случае, когда её знаменатель n не делится на простые числа, отличные от 2 и 5.

Примеры решения задач

1. Докажите признаки делимости на 3 и на 9.

Решение. Пусть $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1}$ — десятичная запись данного числа. Имеем $10 \equiv 1 \pmod 3$, поэтому

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1} \equiv a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10^1 + a_1 \cdot 10^0 \equiv \\ \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 \pmod 3,$$

значит, данное число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.

Аналогично $10 \equiv 1 \pmod 9$ и

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1} \equiv a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10^1 + a_1 \cdot 10^0 \equiv \\ \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 \pmod 9.$$

Значит, данное число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.

2. Докажите признаки делимости на 4 и на 8.

Решение. Пусть $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_3 a_2 a_1}$ — десятичная запись данного числа. Тогда

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_3 a_2 a_1} \equiv \overline{a_n a_{n-1} \dots a_3} \cdot 100 + \overline{a_2 a_1} \equiv \\ \equiv \overline{a_n a_{n-1} \dots a_3} \cdot 25 \cdot 4 + \overline{a_2 a_1} \equiv \overline{a_2 a_1} \pmod 4.$$

Мы получили, что

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_3 a_2 a_1} \equiv \overline{a_2 a_1} \pmod 4.$$

Значит, данное число делится на 4 тогда и только тогда, когда две его последние цифры составляют число, делящееся на 4.

Аналогично

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_3 a_2 a_1} \equiv \overline{a_n a_{n-1} \dots a_4} \cdot 1000 + \overline{a_3 a_2 a_1} \equiv \\ \equiv \overline{a_n a_{n-1} \dots a_4} \cdot 125 \cdot 8 + \overline{a_3 a_2 a_1} \equiv \overline{a_3 a_2 a_1} \pmod 8.$$

Значит, данное число делится на 8 тогда и только тогда, когда три его последние цифры составляют число, делящееся на 8.

3. Цифры двузначного числа поменяли местами, после чего вычли полученное двузначное число из исходного. Докажите, что полученная разность делится на 9.

Решение. Представим числа в десятичной записи. Тогда

$$\overline{ab}-\overline{ba}=10a+b-(10b+a)=9(a-b)\,\vdots\,9.$$

4. Докажите, что десятичная запись числа 3^{20} содержит не более 10 цифр.

Решение. Ясно, что $3^{20}=9^{10}<10^{10}$. Так как 10^{10} — наименьшее натуральное число, имеющее в десятичной записи ровно одиннадцать цифр, число 3^{20} имеет в десятичной записи не более 10 цифр.

5. Пусть a, b, c, d — различные цифры. Докажите, что $\overline{cdcdcdcd}$ не делится на $\overline{aabb}$.

Решение. Число $\overline{aabb}$ делится на 11, а $\overline{cdcdcdcd}$ для различных c и d — нет, поэтому $\overline{cdcdcdcd}$ не может делиться на $\overline{aabb}$.

6. Существует ли натуральное число, которое при зачёркивании первой слева цифры уменьшается ровно в 2011 раз?

Решение. Допустим, что такое число существует, и обозначим через $\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_2 a_1}$ его десятичную запись. Тогда

$$\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_2 a_1}-10^{n-1}a_n=\frac{\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_2 a_1}}{2011}.$$

Домножим обе части равенства на 2011:

$$\begin{aligned}
&2011\cdot\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_2 a_1}-2011\cdot 10^{n-1}a_n=\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_2 a_1},\\
&2010\cdot\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_2 a_1}=2011\cdot 10^{n-1}a_n,\\
&201\cdot\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_2 a_1}=2011\cdot 10^{n-2}a_n,\\
&2011\cdot 10^{n-2}a_n\,\vdots\,201.
\end{aligned}$$

Но $2011\cdot 10^{n-2}$ взаимно просто с 201, следовательно, $a_n\,\vdots\,201$, а это невозможно, так как a_n — цифра от 1 до 9.

Мы пришли к противоречию, значит, такого числа не существует.

7. Найдите все натуральные числа, являющиеся степенью двойки, при зачёркивании первой цифры у которых получается число, также являющееся степенью двойки.

Решение. Пусть мы зачеркнули первую цифру у числа 2^n, состоящего из $k+1$ цифр, и получили число 2^m. Тогда

$$10^k < 2^n < 10^{k+1},$$
$$10^{k-1} < 2^m < 10^k,$$
$$\frac{1}{10^k} < \frac{1}{2^m} < \frac{1}{10^{k-1}},$$
$$1 < 2^{n-m} < 10^2.$$

Из последнего неравенства следует, что $0 < n-m < 8$.

В то же время 2^n и 2^m заканчиваются на одну и ту же цифру, следовательно,

$$2^n - 2^m \vdots 10,$$
$$2^m(2^{n-m}-1) \vdots 10,$$
$$2^{n-m} - 1 \equiv 0 \pmod 5,$$
$$2^{n-m} \equiv 1 \pmod 5.$$

При помощи таблицы остатков степеней двойки по модулю 5 легко понять, что

$$n-m \vdots 4.$$

Сопоставляя с полученным ранее неравенством, получаем, что

$$n-m=4.$$

Обозначим через a первую цифру числа 2^n, которую мы зачеркнули. Тогда

$$2^n - a\cdot 10^k = 2^{n-4},$$
$$2^{n-4}(2^4-1) = a\cdot 10^k,$$
$$2^{n-4}\cdot 3\cdot 5 = a\cdot 2^k 5^k.$$

В левой части равенства всего одна пятёрка, следовательно, $k=1$, значит, 2^n — двузначное число. Перебирая все двузначные степени двойки, находим два подходящих числа: 32 и 64.

Подготовительные задачи

1. Докажите, что остаток числа от деления на 9 совпадает с остатком суммы цифр этого числа от деления на 9.

2. Двузначное число умножили на произведение его цифр, в результате чего получилось трёхзначное число, состоящее из одинаковых цифр, совпадающих с последней цифрой исходного числа. Найдите исходное число.

3. Натуральные числа от 1 до 20 выписали в строчку подряд: 1234…181920. В полученном натуральном числе нужно вычеркнуть 10 цифр так, чтобы натуральное число, образованное оставшимися цифрами, было а) наибольшим; б) наименьшим. Как это сделать?

4. Натуральное число умножили на удвоенное произведение его цифр. Получилось 2016. Найдите исходное число.

5. Найдите наименьшее натуральное число, которое увеличивается ровно в 5 раз от перестановки последней цифры на первое место.

6. Докажите, что степень двойки не может оканчиваться четырьмя одинаковыми цифрами.

7. Между цифрами двузначного числа, делящегося на 3, вставили цифру 0, а к полученному трёхзначному числу прибавили удвоенную цифру его сотен. Получилось число в 9 раз больше первоначального. Найдите исходное число.

Основные задачи

1. В трёхзначном числе $\overline{abc}$ поменяли местами цифры, стоящие в разрядах единиц и сотен, после чего из исходного числа вычли полученное. Докажите, что такая разность $\overline{abc}-\overline{cba}$ делится на 99.

2. Докажите, что квадрат натурального числа, оканчивающегося на 5, оканчивается на 25.

3. Сложили шесть трёхзначных чисел, полученных всевозможными перестановками трёх различных цифр. Докажите, что полученная сумма делится на 37.

4. Найдите все двузначные числа, которые равны сумме цифры десятков и квадрата цифры, стоящей в разряде единиц.

5. При каком наименьшем натуральном n в десятичной записи правильной дроби $\frac{m}{n}$ после запятой могут подряд встретиться цифры 501?

6. Существует ли 100-значное число без нулевых цифр, которое делится на сумму своих цифр?

7. Может ли произведение всех цифр натурального числа быть равно 2010?

8. Число $\overline{abcde}$ делится на 41. Докажите, что число $\overline{eabcd}$ также делится на 41.

9. Найдите все трёхзначные числа, для которых любое число, полученное перестановкой их цифр, делится на 7.

10. Найдите все двузначные числа, квадрат которых оканчивается тем же двумя цифрами, что и исходное число.

11. Найдите все трёхзначные числа, квадрат которых оканчивается тем же тремя цифрами, что и исходное число.

12. Сколько существует двузначных чисел, которые ровно в 9 раз больше суммы своих цифр? А сколько существует таких трёхзначных чисел?

13. В натуральном числе поменяли местами две соседние цифры и из полученного числа вычли исходное. Докажите, что полученная разность всегда делится на 9.

14. В натуральном числе поменяли местами две цифры, стоящие через одну, и из полученного числа вычли исходное. Докажите, что полученная разность всегда делится на 99.

15. На чём основан следующий способ возведения числа, оканчивающегося на 5, в квадрат: отбросьте цифру 5, умножьте полученное число на следующее за ним натуральное число, после чего к результату припишите справа 25 (например, для получения квадрата числа 115 нужно 11 умножить на 12 и к их произведению — числу 132 — приписать справа 25; получится 13225)?

16. Какое наибольшее значение может принимать частное от деления трёхзначного числа на сумму всех его цифр?

17. Найдите все такие четырёхзначные числа $\overline{abcd}$, что $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=2011$.

18. Из трёх различных цифр составили все возможные двузначные числа без повторений цифр в одном числе. Сумма полученных чисел оказалась равной 528. Найдите исходные цифры.

19. Друг за другом подряд выписали десятичную запись чисел 2^{100} и 5^{100}. Сколько всего цифр выписали?

20. При некотором натуральном n десятичная запись чисел 2^n и 5^n начинается с одной и той же цифры. Какая это может быть цифра?

21. Девятизначное число, в записи которого есть все цифры, кроме нуля, после некоторой перестановки цифр уменьшилось ровно в 8 раз. Найдите все такие числа.

22. При каком наименьшем натуральном n в десятичной записи дроби $\frac{1}{n}$ после запятой могут подряд встретиться цифры 142? А в десятичной записи правильной дроби $\frac{m}{n}$?

23. а) Сколько существует таких натуральных чисел n, меньших 100, что каждое из чисел $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n+1}$ выражается конечной десятичной дробью? б) Найдите все такие натуральные n.

24. Докажите, что десятичная периодическая дробь является рациональным числом.

25. Существует ли степень двойки, из которой перестановкой цифр можно получить другую степень двойки?

26. У числа 2^{2012} нашли сумму его цифр, у результата снова нашли сумму цифр и так далее. В конце концов получилось однозначное число. Найдите его.

27. Пусть A — сумма цифр числа 4444^{4444}, B — сумма цифр числа A. Найдите сумму цифр числа B.

28. Вася не заметил знак умножения между двумя трёхзначными числами и записал шестизначное число, оказавшееся в 7 раз больше их произведения. Найдите исходные числа.

29. К натуральному числу справа последовательно приписали два двузначных числа. Полученное число оказалось равным кубу суммы трёх исходных чисел. Найдите эти числа.

30. Найдите все пары таких а) четырёхзначных; б) пятизначных чисел x и y, что число $\overline{xy}$, полученное путём приписывания десятичной записи числа y после числа x, делится на произведение xy.

31. Найдите наибольшее натуральное число, не оканчивающееся нулём, которое при вычёркивании одной (не первой) цифры уменьшается в целое число раз.

32. Найдите четырёхзначное число, которое ровно в 4 раза меньше числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке.

33. Одно из двух двузначных натуральных чисел в два раза больше другого. Найдите все пары таких чисел, если цифры меньшего из чисел соответственно равны сумме и разности цифр большего из чисел.

34. Трёхзначное число $\overline{abc}$ делится на 17, девятизначное число $\overline{a000b000c}$ делится на 37. Найдите a, b и c.

35. Найдите четырёхзначное число, являющееся точным квадратом, если известно, что его первые две цифры одинаковы и последние две цифры также одинаковы.

36. Двузначное число в сумме с числом, записанным теми же цифрами в обратном порядке, даёт точный квадрат. Найдите все такие числа.

37. Пусть $a=\overline{mn}$, $b=\overline{nm}$. Найдите наименьшее значение величины $\left|\frac{a}{b}-2\right|$.

38. Найдите все такие пары натуральных чисел a и b, что если к десятичной записи числа a приписать справа десятичную запись числа b, то получится число, большее произведения чисел ab на 32.

39. Найдите все такие пары натуральных чисел a и b, что если к десятичной записи числа a справа приписать десятичную запись числа b^2, то получится число, большее произведения ab в семь раз.

40. К трёхзначному натуральному числу a дописали его же, а к полученному числу прибавили 1 и получили точный квадрат. Найдите все такие числа.

§ 4. НОД и НОК. Основная теорема арифметики

Диагностическая работа 4

1. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел 462 и 536.

2. На какое натуральное число, большее 1, можно сократить дробь $\frac{3n+7}{7n+2}$ при натуральных значениях n?

3. Сумма двух натуральных чисел равна 240, а их наибольший общий делитель равен 30. Найдите эти числа.

4. Найдите наименьшее общее кратное чисел 2011! и 2009! + 2010!.

5. Произведение двух чисел, каждое из которых не кратно 10, равно 1000. Найдите сумму этих чисел.

Краткая теоретическая справка

Определение. Наибольшим общим делителем нескольких целых чисел (не все из которых равны 0) называется наибольшее натуральное число, на которое делится каждое из этих чисел.

Можно дать равносильное определение.

Определение. Наибольшим общим делителем нескольких целых чисел (не все из которых равны 0) называется натуральный общий делитель этих чисел, кратный любому их общему делителю.

Примером натурального числа, на которое делится каждое из нескольких целых чисел, является число 1, поэтому множество общих делителей нескольких целых чисел непусто.

Обозначение: НОД$(a_1; \ldots; a_n)$ или, если нет риска перепутать, просто $(a_1; \ldots; a_n)$.

Например, НОД$(2; 4; 6; 8) = 2$.

Напомним (см. § 1), что натуральные числа называются взаимно простыми (если их больше двух, то иногда говорят «взаимно простыми в совокупности»), если их наибольший общий делитель равен 1.

Свойства наибольшего общего делителя

(Все фигурирующие в свойствах числа предполагаются целыми.)

1. Наибольший общий делитель нескольких целых чисел равен наибольшему общему делителю их модулей.

2. Если $d = \text{НОД}(a; b)$, то существуют такие целые числа x и y, что выполнено равенство $d = ax + by$.

3. Если числа a, b, c и q связаны равенством $a = bq + c$, то $\text{НОД}(a; b) = \text{НОД}(b; c)$. В частности, $\text{НОД}(a; b) = \text{НОД}(a + b; b)$.

4. Частные от деления нескольких натуральных чисел на наибольший общий делитель этих чисел взаимно просты в совокупности.

Чтобы найти наибольший общий делитель двух натуральных чисел, применяют алгоритм Евклида. А именно: делят с остатком большее из чисел на меньшее, затем делят меньшее число с остатком на полученный остаток, а затем делят полученные остатки с остатком друг на друга до тех пор, пока остатки не поделятся нацело. Последний ненулевой остаток будет равен наибольшему общему делителю двух чисел.

Пример. Найдём $(2576; 154)$:
1) $2576 = 154 \cdot 16 + 112$;
2) $154 = 112 \cdot 1 + 42$;
3) $112 = 42 \cdot 2 + 28$;
4) $42 = 28 \cdot 1 + 14$.
Так как 28 кратно 14, получаем, что $(2576; 154) = 14$.

Определение. Наименьшим общим кратным нескольких ненулевых целых чисел называется наименьшее натуральное число, кратное каждому из этих чисел.

Для данных ненулевых целых чисел существует общее кратное (например, произведение этих чисел), поэтому множество общих кратных нескольких ненулевых целых чисел непусто.

Можно дать равносильное определение.

Определение. Наименьшим общим кратным нескольких натуральных чисел называется общее кратное этих чисел, на которое делятся все общие кратные этих чисел.

Обозначение: $\text{НОК}[a_1, \ldots, a_k]$ или, если нет риска перепутать, просто $[a_1, \ldots, a_k]$.

Теорема. *Справедливо равенство* $(a; b) \cdot [a; b] = ab$.

Основная теорема арифметики и количество делителей. *Каждое натуральное число* $n > 1$ *имеет единственное (с точностью до* *порядка множителей) разложение на простые множители*

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

($p_1, p_2, \ldots, p_n$ — *попарно различные простые числа,* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — *натуральные числа*)*. Данная форма записи называется канонической формой записи числа* n*.*

Количество натуральных делителей числа n, записанного в канонической форме, равно

$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1).$$

Сумма всех натуральных делителей числа n, записанного в канонической форме, равна

$$\frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$

4.1. НОД и НОК

Примеры решения задач

1. Найдите наименьшую дробь, при делении которой на каждую из дробей $\frac{14}{25}$ и $\frac{21}{40}$ получаются натуральные числа.

Решение. Пусть эта дробь $\frac{a}{b}$, причём пусть она несократима. Требуется, чтобы $\frac{25 \cdot a}{14 \cdot b}$ и $\frac{40 \cdot a}{21 \cdot b}$ были натуральными числами. Так как a и b взаимно просты, это значит, что $25 \vdots b$, $a \vdots 14$, $40 \vdots b$, $a \vdots 21$. Тогда минимальное a, удовлетворяющее этим условиям, — это 42, а максимальное b — это 5.

2. Докажите, что дробь $\frac{12n+1}{30n+2}$ несократима ни при каких натуральных n.

Решение. Нам достаточно доказать, что $12n + 1$ взаимно просто с $30n + 2$. Пусть это не так. Тогда пусть $12n + 1 \vdots p$ и $30n + 2 \vdots p$. Заметим, что тогда $30n + 2 - 2(12n + 1) \vdots p$, т. е. $6n \vdots p$. Это значит, что p — это либо делитель числа n, либо делитель числа 6. Заметим, что $12n + 1$ взаимно просто и с 6, и с n, так как $12n \vdots n$ и $12n \vdots 6$, поэтому p не может быть делителем числа n или числа 6.

Значит, такого p не существует, следовательно, данная в условии дробь несократима.

3. Натуральные числа m и n — взаимно просты. Какие значения может принимать НОД чисел $4m + 3n$ и $6m + 5n$?

Решение. Заметим, что

$$(6m+5n)-(4m+3n) \mathrel{\vdots} \text{НОД}(6m+5n, 4m+3n),$$

т. е. $2(m+n) \mathrel{\vdots} \text{НОД}(6m+5n, 4m+3n)$. Теперь заметим, что, так как m и n взаимно просты, $m+n$ взаимно просто и с m, и с n. Далее, $6m+5n=3\cdot 2(m+n)-n$, значит, $6m+5n$ взаимно просто с $m+n$, так как $m+n$ взаимно просто с n. Аналогично $4m+3n$ взаимно просто с $m+n$. Значит, единственный возможный общий делитель чисел $6m+5n$ и $4m+3n$ — это 2. Следовательно, $\text{НОД}(6m+5n, 4m+3n)$ не может быть больше 2. Значение 2, конечно же, достигается, например, если $m=1$, а $n=2$.

4. Найдите все пары натуральных чисел, разность которых равна 66, а их НОК равно 360.

Решение. Имеем $360=2^3\cdot 3^2\cdot 5$. Пусть a и b — искомые числа. Заметим, что у этих чисел нет никаких простых делителей, кроме $2, 3$ и 5, так как иначе их НОК на них бы тоже делилось. Пусть $a=2^x\cdot 3^y\cdot 5^z$, $b=2^m\cdot 3^n\cdot 5^k$. Тогда

$$\text{НОК}(a, b) = 2^{\max(x,m)}\cdot 3^{\max(y,n)}\cdot 5^{\max(z,k)}.$$

Значит, нам необходимо лишь, чтобы выполнялось равенство

$$\max(x, m) = 3, \quad \max(y, n) = 2, \quad \max(z, k) = 1.$$

Так как разность чисел a и b делится на три и хотя бы одно из них делится на три, то они оба делятся на три. Аналогично оба числа делятся на два, но только одно из них делится на пять, иначе 66 делилось бы на пять. Аналогично только одно из них может делиться на четыре, значит, одно из них делится на 8, а другое только на 2. Пусть, например, a делится на 5. Тогда переберём все возможные a и b: a может быть равно 30, 120, 360, 90, а b может быть равно 6, 72, 18, 24. Простым перебором выясняем, что подходит только пара 90 и 24.

Можно было также сразу заметить что a — делитель числа 360, больший 66 (72, 90, 120, 180, 360), что упростит перебор вариантов.

Чтобы обойтись без перебора, можно сначала доказать (как в приведённом решении), что оба числа делятся на 6, других общих делителей нет (если бы существовал ещё один общий делитель, то на него делилась бы разность чисел, т. е. он мог быть равен только 11, но 360 на 11 не делится). Значит, $\text{НОД}(a; b)=6$, а тогда, так как произведение наименьшего общего кратного двух чисел на их наибольший общий делитель равно произведению этих чисел, получаем, что произведение чисел равно 2160, а затем решаем систему уравнений.

5. Найдите НОД$\left(2^{30}-1, 2^{40}-1\right)$.

Решение. Заметим, что разность двух чисел делится на их НОД. Тогда

$$2^{40}-1-\left(2^{30}-1\right) \vdots \text{НОД}\left(2^{40}-1, 2^{30}-1\right),$$
$$2^{30}\left(2^{10}-1\right) \vdots \text{НОД}\left(2^{40}-1, 2^{30}-1\right).$$

Число 2^{30}, очевидно, взаимно просто с нашими числами (оба они нечётные), следовательно, $2^{10}-1 \vdots \text{НОД}\left(2^{40}-1, 2^{30}-1\right)$. Заметим, что НОД этих чисел тоже делится на $2^{10}-1$, так как

$$2^{40}-1=\left(2^{20}-1\right)\left(2^{20}+1\right)=\left(2^{10}-1\right)\left(2^{10}+1\right)\left(2^{20}+1\right) \vdots 2^{10}-1,$$
$$2^{30}-1=\left(2^{10}-1\right)\left(2^{20}+2^{10}+1\right) \vdots 2^{10}-1.$$

Значит, НОД этих чисел и есть в точности $2^{10}-1=1023$.

6. Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида p^2-1, где p — простое число, большее 3, но меньшее 2012.

Решение. Заметим, что p^2-1 делится на 3 при любом p, не делящемся на 3 (квадрат по модулю 3 даёт остаток $1 \cdot 1$ либо остаток $2 \cdot 2$, что по модулю 3 одно и то же). Значит, наши числа все будут делиться на 3. Заметим также, что они все будут делиться на 8, так как p^2 при делении на 8 может давать только остаток 1 (оно сравнимо либо с $1 \cdot 1$, либо с $3 \cdot 3$, либо с $5 \cdot 5$, либо с $7 \cdot 7$, что по модулю 8 одно и то же). Но заметим, что больше ни на что наш общий делитель делиться не может, так как $5^2-1=24=3 \cdot 8$, а общий делитель должен быть меньше либо равен каждому из чисел.

Значит, искомый общий делитель — это 24.

Подготовительные задачи

1. Найдите НОД чисел 72 и 24.

2. Найдите НОД чисел 2 и 1921.

3. Найдите НОД чисел 384 и 288.

4. Найдите НОД чисел 787878 и 787878787878.

5. Найдите НОК чисел 12 и 36.

6. Найдите НОК чисел 4 и 2011.

7. Найдите НОК чисел 120 и 200.

8. Сколько существует пар натуральных чисел, НОК которых равно 2000?

9. Найдите наименьшую дробь, при делении которой на каждую из дробей $\frac{35}{66}$, $\frac{28}{165}$ и $\frac{25}{231}$ получаются натуральные числа.

10. На какое число и при каких натуральных значениях n сократима дробь $\frac{3n+4}{2n+5}$?

11. Натуральные числа m и n взаимно просты. Какие значения может принимать НОД чисел $m+n$ и m^2-mn+n^2?

12. Придумайте два различных натуральных числа, произведение которых делится на их сумму.

Основные задачи

1. Какие значения может принимать НОД$(x, x+2)$, где x — натуральное число?

2. Известно, что $x, y \in \mathbb{N}$, НОД$(x, y)=13$, НОК$(x, y)=52$. Найдите x и y.

3. Найдите все пары натуральных чисел, сумма которых равна 288, а их НОД равен 36.

4. Найдите все пары натуральных чисел, сумма которых равна 667, а частное от деления их НОК на их НОД равно 120.

5. Все обыкновенные правильные и несократимые дроби, числители и знаменатели которых — двузначные числа, упорядочили по возрастанию. Между какими двумя последовательно расположенными дробями находится число $\frac{4}{7}$?

6. Среди обыкновенных дробей с положительными знаменателями, расположенных между числами $\frac{96}{35}$ и $\frac{97}{36}$, найти такую, знаменатель которой минимален.

7. Какие значения может принимать НОД(x, y), если известно, что при увеличении числа x на 6 НОД увеличивается в 4 раза?

8. Найдите НОД всех девятизначных чисел, в записи каждого из которых каждая из цифр 1, 2, …, 9 встречается ровно по одному разу.

9. Найдите НОД чисел 11111111 (8 единиц) и 11…111 (2012 единиц).

10. На какое число и при каких натуральных n сократима дробь $\frac{n^2-1}{n^4+n^3-n^2+n+1}$?

11. Докажите, что дробь $\dfrac{n^5+n^4+4n^3+3n^2+3n+1}{n^4+n^3+3n^2+2n+1}$ несократима ни при каких натуральных n.

12. Чему равен НОД всех чисел $4^{n+2}+5^{2n+1}$ при натуральных значениях n?

13. При каком наименьшем натуральном n каждая из дробей $\dfrac{2}{n+3}$, $\dfrac{3}{n+4}, \ldots, \dfrac{32}{n+33}$ несократима?

14. Натуральные числа a, b и c таковы, что $\text{НОК}(a, b) = 60$, $\text{НОК}(a, c) = 270$. Найдите $\text{НОК}(b, c)$.

15. Найдите все натуральные числа, не представимые в виде суммы двух взаимно простых чисел, отличных от единицы.

16. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник размера $m \times n$, где а) m и n — взаимно простые числа, б) m и n — произвольные числа. Через какое количество узлов сетки проходит эта диагональ? На сколько частей она разбивается линиями сетки?

17. По окружности радиуса R катится колесо радиуса r $(R, r \in \mathbb{N})$. В колесо вбит гвоздь, который, ударяясь об окружность, оставляет на ней отметки. Сколько всего таких отметок оставит гвоздь? Сколько раз колесо прокатится по окружности, прежде чем гвоздь попадёт в уже отмеченную ранее точку?

18. Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_{10}$ — различные натуральные числа, сумма которых равна 2013. Какое наибольшее значение может принимать наибольший общий делитель этих 10 чисел?

4.2. Основная теорема арифметики. Делители

Примеры решения задач

1. Найдите НОД и НОК чисел a и b, где $a = 2^8 \cdot 3^{10} \cdot 5 \cdot 7^2$, а $b = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^3$.

Решение. НОК чисел — это произведение всех простых делителей обоих чисел, взятых в максимальной из степеней, в которых они встречаются в обоих числах. Тогда $\text{НОК}(a; b) = 2^8 \cdot 3^{10} \cdot 5 \cdot 7^3$. НОД чисел — это произведение всех простых делителей обоих чисел, взятых в минимальной из степеней, в которых они встречаются в обоих числах. Тогда $\text{НОД}(a; b) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^2$.

2. Докажите, что составное число n всегда имеет делитель, не больший $\sqrt{n}$.

Решение. От противного: пусть все делители числа n больше $\sqrt{n}$. Возьмём два таких делителя: a и $\frac{n}{a}$. И a, и $\frac{n}{a}$ будут больше $\sqrt{n}$. Тогда $n=\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}<a\cdot\frac{n}{a}=n$. Получается, что $n<n$. Но это противоречие, значит, наше предположение неверно, т. е. найдётся такой делитель n, что он не будет превосходить $\sqrt{n}$.

3. Докажите, что число является квадратом натурального числа тогда и только тогда, когда у него нечётное число делителей.

Решение 1. Все делители натурального числа n разбиваются на пары так, что произведение делителей каждой пары равно n. Таким образом, количество делителей данного натурального числа чётно, за исключением случая, когда в одной паре оба числа совпадают (очевидно, что больше одной такой пары быть не может). В этом случае число n равно произведению двух одинаковых делителей из этой пары, т. е. является точным квадратом.

Решение 2. Пусть число n записано в канонической форме:

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Ясно, что число n является точным квадратом тогда и только тогда, когда все показатели степеней α_i, в которых входят в разложение простые множители, чётны. (Если $n=m^2$ и $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$, то $n=p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{2\alpha_k}$.) С другой стороны, количество делителей числа n равно $N=(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1)$. Из этой формулы следует, что число делителей N нечётно тогда и только тогда, когда все числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ чётны, что и требовалось доказать.

4. Найдите все натуральные числа, последняя цифра которых 0 и которые имеют ровно 15 различных натуральных делителей.

Решение. Воспользуемся формулой о количестве делителей у числа a, если $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}$. Количество делителей равно

$$(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_n+1).$$

Тогда в нашем случае имеется такое равенство:

$$(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_n+1)=15.$$

Заметим, что каждая скобка в произведении не меньше двух, поэтому скобок может быть только две, причём одна из них равна 3, а другая 5. Тогда в разложении нашего числа имеются только два простых множителя, один во 2-й степени и один в 4-й степени. Заметим, что наше число делится на 10 (так как кончается на 0), а значит, делится на 2 и на 5. Это означает, что два простых множителя в нашем числе и есть двойка и пятёрка. Тогда число может быть только двух видов: $2^2\cdot5^4$ или $2^4\cdot5^2$.

Подготовительные задачи

1. Разложите на простые множители числа 111, 1 111, 11 111, 111 111, 1 111 111.

2. Произведение двух натуральных чисел, каждое из которых не делится нацело на 10, равно 1000. Найдите их сумму.

3. Существует ли целое число, произведение цифр которого равно 2000? А 2010? А 2012?

4. Сколько двоек присутствует в разложении на простые множители числа а) 5!; б) 20!; в) n!?

5. Докажите, что число является квадратом натурального числа тогда и только тогда, когда каждый его простой делитель входит в его разложение в чётной степени.

6. Докажите, что произведение первых n простых чисел не является полным квадратом.

7. Найдите количество натуральных делителей у числа а) 10; б) 20; в) 500; г) 2000; д) 56^n.

8. Найдите сумму натуральных делителей у числа а) 10; б) 20; в) 500; г) 2000.

Основные задачи

1. Множество A состоит из натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найдите все числа, из которых состоит множество A.

2. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого 1999! не делится на 34^n.

3. Докажите, что нечётное число, являющееся произведением n различных простых сомножителей, можно представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел ровно 2^{n-1} различными способами.

4. Определите, на какую наибольшую натуральную степень числа 2007 делится 2007!.

5. Найдите наименьшее натуральное число, половина которого — квадрат, треть — куб, а пятая часть — пятая степень.

6. Найдите все натуральные числа, которые делятся на 42 и имеют ровно 42 натуральных делителя.

§ 5. Уравнения в целых числах

Диагностическая работа 5

1. Решите в целых числах уравнение $(x-y)(y+1)=11$.

2. Найдите все пары натуральных чисел, сумма которых равна их удвоенному произведению.

3. Решите в натуральных числах уравнение $x!-2=y^2$.

4. Решите в целых числах уравнение $2^x+7=y^2$.

5. Решите в целых числах уравнение $y^4=x^2+x$.

Краткая теоретическая справка

В этом параграфе все числа целые, если не оговаривается противное.

Уравнение вида $f(x, y, \ldots)=0$, переменные в котором считаются целочисленными, называется **уравнением в целых числах** или **диофантовым уравнением**. Набор целочисленных значений переменных, при подстановке которых в уравнение получается верное равенство, называется **решением** диофантова уравнения.

Пример. Уравнение $x^2+y^2-z^2=0$ — диофантово уравнение (если считать, что переменные могут принимать целочисленные значения). Набор $(3, 4, 5)$ — одно из его решений.

Уравнение вида

$$ax+by=c \tag{1}$$

называется **линейным диофантовым уравнением**. Очевидно, что такое уравнение имеет решения в целых числах только тогда, когда $c \vdots (a, b)$. Однако верно и обратное утверждение: если $c \vdots (a, b)$, то уравнение (1) имеет целочисленные решения. В этом случае можно разделить оба коэффициента и свободный член уравнения на (a, b) и решать полученное более простое уравнение.

Если пара чисел (x_0, y_0) является решением такого уравнения, то все его решения можно получить по формулам

$$\begin{cases} x = x_0 + k\cdot\dfrac{b}{(a, b)}, \\ y = y_0 - k\cdot\dfrac{a}{(a, b)} \end{cases} \qquad (k\in\mathbb{Z}).$$

Обычно указанную пару решений находят подбором, подставляя вместо одной переменной остатки от деления на коэффициент при другой.

В решении уравнений в целых числах помогает разложение на множители одной из частей, особенно если в другой части оказывается целое число.

Зачастую для решения диофантовых уравнений требуются более тонкие рассуждения, связанные с делимостью, перебором остатков, оценками частей уравнения, тождественными преобразованиями и т. п.

Примеры решения задач

1. Решите в целых числах уравнение $xy+2x+3y=7$.

Решение. Представим левую часть уравнения в виде $xy+2x+3y=$ $=(x+3)(y+2)-6$, после чего уравнение приобретает вид

$$(x+3)(y+2)=13.$$

Если x и y — целые числа, то множители $x+3$ и $y+2$ также должны быть целыми.

Число 13 раскладывается в произведение целых чисел четырьмя различными способами: $13=1\cdot 13=13\cdot 1=(-1)\cdot(-13)=(-13)\cdot(-1)$. Поэтому все решения данного уравнения в целых числах получаются из систем

$$\begin{cases} x+3=1, \\ y+2=13, \end{cases} \quad \begin{cases} x+3=13, \\ y+2=1, \end{cases} \quad \begin{cases} x+3=-1, \\ y+2=-13, \end{cases} \quad \begin{cases} x+3=-13, \\ y+2=-1, \end{cases}$$

решая которые, получаем ответ: $(-2, 11)$, $(10, -1)$, $(-4, -15)$, $(-16, -3)$.

2. Решите в целых числах уравнение $3x+2y=7$.

Решение. Подставим вместо x остатки от деления на коэффициент при y, т. е. на 2. Если подставить $x=0$, значение y получается нецелым, а если подставить $x=1$, то $y=2$. Таким образом, найдено одно решение этого уравнения — пара $(1, 2)$, а значит, общие формулы для решений этого уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} x=1+2k, \\ y=2-3k, \end{cases} \qquad (k\in\mathbb{Z}).$$

Геометрически решения уравнения (1) суть координаты целочисленных точек, через которые проходит прямая, задаваемая этим уравнением.

3. Решите в натуральных числах уравнение $x^2+x+1=y^2$.

Решение. Рассмотрим уравнение $x^2+x+1-y^2=0$ как квадратное относительно x. Тогда $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{4y^2-3}}{2}$. Для того чтобы x было целым числом, необходимо, чтобы $4y^2-3$ было точным квадратом, а это верно только при $y=\pm1$ $(4y^2-3=z^2 \Leftrightarrow (2y-z)(2y+z)=3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y=1,\ z=\pm1$ или $y=-1,\ z=\pm1)$.

Ответ. $(-1, 1)$ и $(0, 1)$.

4. Решите в целых числах уравнение $4^x+3^y=5^z$.

Решение. Рассмотрим остатки, получающиеся при делении обеих частей уравнения на 4. Правая часть при натуральных значениях z даёт остаток 1, а левая часть может давать остатки 1 при чётных значениях y и 3 при нечётных значениях y. Таким образом, только чётные значения y могут входить в решения данного уравнения. Пусть $y=2k$, где k — натуральное число.

Рассмотрим остатки от деления обеих частей уравнения на 3. Выражение 4^y даёт при делении на 3 остаток 1, а 5^z при чётных значениях z даёт остаток 1, а при нечётных значениях z — остаток 2. Поэтому только чётные значения z могут входить в решения. Пусть $z=2l$, где l — натуральное число.

Из исходного уравнения, перенося в правую часть 3^y и раскладывая по формуле разности квадратов, получаем $4^x=(5^l-3^k)(5^l+3^k)$.

Каждый из полученных множителей должен являться неотрицательной степенью числа 2, поскольку в разложении их произведения на простые множители присутствуют только двойки. Имеем

$$\begin{cases} 5^l+3^k=2^s, \\ 5^l-3^k=2^t, \end{cases} \quad \text{причём} \quad s>t.$$

Сложив эти уравнения, получаем $2\cdot5^l=2^t\cdot(2^{s-t}+1)$. Поскольку в разложение левой части на простые множители 2 входит в степени 1, а в разложение правой части — в степени t (ибо $2^{s-t}+1$ — нечётное число, а значит, в его разложении на простые множители нет двоек), получаем $t=1$ и

$$5^l=2^{s-t}+1. \qquad (*)$$

Имеем уравнение $5^l-3^k=2$ (это второе уравнение системы), из которого, перебрав остатки от деления обеих частей уравнения на 3, получаем, что l — нечётное число.

Перепишем уравнение $(*)$ в виде $2^{s-t}=5^l-1$, откуда при $l>1$ получаем $2^{s-t}=(5-1)(5^{l-1}+5^{l-2}+\ldots+1)$. Вторая скобка является суммой l нечётных слагаемых, т. е. нечётным числом, большим 1, которое не может входить множителем в произведение, равное точной степени двойки. Значит, $l=1$, а тогда и $k=1$. Окончательным ответом является единственная тройка чисел (2, 2, 2).

5. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ при $x\leqslant y\leqslant z$.

Решение. Наибольшая из дробей, т. е. $\frac{1}{x}$, не меньше $\frac{1}{3}$. Тогда $x=2$ или $x=3$. Подставляя в исходное уравнение, получаем два случая, разбираемых аналогично.

Ответ. (3; 3; 3), (2; 3; 6), (2; 4; 4).

Подготовительные задачи

1. Найдите все пары натуральных чисел, разность квадратов которых равна 5.

2. Найдите три подряд идущих целых числа, сумма кубов которых равна кубу следующего за ними числа.

3. Докажите, что прямая $4x+6y-7=0$ не проходит через точки, обе координаты которых — целые числа.

4. Решите в целых числах уравнение $x+y=xy$.

5. Решите в целых числах уравнение $(x+y)(x-2y)=7$.

6. Решите в натуральных числах уравнение $x^2y^2+x^2+y^2=1969$.

7. Решите в натуральных числах уравнение $x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}=\frac{7}{3}$.

8. Решите в натуральных числах уравнение $xy(x+y)=120$.

9. Решите в целых числах уравнение $x^2+4xy+13y^2=59$.

Основные задачи

1. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{239}$.

2. Решите в натуральных числах уравнение $x+y=x^2-xy+y^2$.

3. Решите в целых числах уравнение $x(x+1)=4y(y+1)$.

4. Решите в натуральных числах уравнение $x^2+3x+5=y^2$.

5. Решите в целых числах уравнение $3x^2+1=5y$.

6. Решите в целых числах уравнение $3^x = 1 + y^2$.

7. Решите в натуральных числах уравнение $3^x + 55 = y^2$.

8. Решите в натуральных числах уравнение

$$3x^2 + 12xy + 10y^2 = 2012.$$

9. Решите в натуральных числах уравнение

$$4x^2 + 12xy + 7y^2 = 2009.$$

10. Решите в натуральных числах уравнение $x^2 + 9y^2 = 2011$.

11. Решите в натуральных числах уравнение

$$x^2 + 10xy - 5y^2 = 2012.$$

12. Решите в натуральных числах уравнение $2^x + 3^x + 4^x = y^2$.

13. Решите в натуральных числах уравнение $x^3 + 7y = y^3 + 7x$.

14. Решите в целых числах уравнение $2^x - 2^y = 2016$.

15. Решите в целых числах уравнение $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$.

16. Решите в натуральных числах уравнение $x! - 1 = y^2$.

17. Решите в натуральных числах уравнение $x! + 12 = y^2$.

18. Решите в целых числах уравнение $3^x + 7 = 2^y$.

19. Решите в натуральных числах уравнение $x^y = y^x$.

§ 6. Неравенства и оценки в задачах теории чисел

Диагностическая работа 6

1. Перед каждым из чисел 22, 23, …, 26 и 50, 51, …, 60 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 55 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю сумму можно получить в итоге?

2. Докажите, что произведение всех цифр натурального числа не превосходит самого этого числа.

3. Произведение цифр некоторого натурального числа x равно $85x-169186$ и является нечётным числом. Найдите x.

4. Квадрат некоторого положительного числа имеет вид 0,9…9…, где количество девяток после запятой равно 2012. Докажите, что само число имеет вид 0,9…9…, где количество девяток после запятой не меньше 2012.

5. Какое наименьшее значение принимает выражение $x+\dfrac{81}{x}$ при положительных x?

Краткая теоретическая справка

При решении задач бывают полезными понятие среднего арифметического и неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

Определение. Средним арифметическим нескольких чисел называется сумма этих чисел, делённая на их количество.

Средним геометрическим положительных чисел $a_1, \ldots, a_k$ называется число $\sqrt[k]{a_1\cdot\ldots\cdot a_k}$.

Неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом. *Среднее арифметическое нескольких положительных чисел не меньше их среднего геометрического, т. е.* $\dfrac{a_1+\ldots+a_k}{k}\geqslant\sqrt[k]{a_1\cdot\ldots\cdot a_k}$. *Равенство достигается в том и только в том случае, когда все числа равны.*

Достаточно часто встречаются задачи, где требуется найти наибольшее (или наименьшее) значение какой-либо величины. **В этом случае решение с необходимостью содержит две части.**

1. Доказательство того, что величина достигает приведённого в ответе значения (обычно это просто пример).

2. Доказательство того, что значение величины не может быть больше (соответственно меньше) указанного в ответе.

6.1. Среднее арифметическое. Неравенство о средних

Примеры решения задач

1. Докажите, что среднее арифметическое двух неравных чисел больше меньшего числа и меньше большего числа.

Решение. Пусть $a<b$. Тогда $\dfrac{a+b}{2}<\dfrac{b+b}{2}=b$ и $\dfrac{a+b}{2}>\dfrac{a+a}{2}=a$, что и требовалось доказать.

2. Какое наибольшее значение может принимать произведение двух положительных чисел, если их сумма равна 10?

Ответ. 25.

Решение. Обозначим данные числа a и b. По условию $a+b=10$. Тогда по неравенству о средних $\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}=5$, откуда $ab\leqslant 25$. При $a=b=5$ равенство достигается.

3. Произведение положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равно 1. Докажите, что $(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_n+1)\geqslant 2^n$.

Решение. Применим неравенство о средних к каждой скобке: $\dfrac{1+a_i}{2}\geqslant\sqrt{1\cdot a_i}\Leftrightarrow 1+a_i\geqslant 2\sqrt{a_i}$. Получим $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\geqslant$ $\geqslant 2\sqrt{a_1}\cdot 2\sqrt{a_2}\cdot\ldots\cdot 2\sqrt{a_n}=2^n\sqrt{a_1a_2\ldots a_n}=2^n$, что и требовалось доказать.

4. Две команды КВН участвуют в игре из четырёх конкурсов. За каждый конкурс каждый из шести судей выставляет оценку — целое число от 1 до 5; компьютер находит среднее арифметическое оценок за конкурс и округляет его с точностью до десятых. Победитель определяется по сумме четырёх полученных компьютером значений. Может ли оказаться, что сумма всех оценок, выставленных судьями, у проигравшей команды больше, чем у выигравшей?

Решение. Пусть оценки судей для первой команды за каждый из первых трёх конкурсов — 3; 3; 3; 3; 3; 4, за четвёртый — 3; 3; 4; 4; 4; 4, а для второй команды за все конкурсы — 3; 3; 3; 3; 4; 4. Значения, полученные компьютером для первой команды, — 3,2; 3,2; 3,2; 3,7. Значения, полученные для второй, — 3,3; 3,3; 3,3; 3,3. Первая команда победила со счётом 13,3 : 13,2. При этом сумма оценок, выставленных судьями первой команде, — 79, второй команде — 80.

Ответ. такое может случиться.

5. В вершинах 100-угольника расставлены числа так, что каждое равно среднему арифметическому своих соседей. Докажите, что все они равны.

Решение. Рассмотрим наименьшее из всех чисел. Оно равно среднему арифметическому своих соседей, каждое из которых не меньше него, но такое может быть только в том случае, если соседние числа равны данному. Таким образом, соседние числа — также наименьшие из всех чисел, а значит, и их соседи им равны. Продолжая это рассуждение, мы докажем, что все числа в вершинах 100-угольника равны.

Подготовительные задачи

1. Докажите, что для любых чисел x, y выполняется неравенство $\frac{x^2+y^2}{2} \geqslant xy$.

2. Докажите, что для любого положительного числа a выполняется неравенство $a+\frac{1}{a} \geqslant 2$.

3. Докажите, что для любых неотрицательных чисел x, y, z, t выполняется неравенство $\frac{x+y+z+t}{4} \geqslant \sqrt[4]{xyzt}$.

4. Докажите, что для любых положительных чисел x, y выполняется неравенство $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geqslant \frac{4}{x+y}$.

5. Докажите, что для любых неотрицательных чисел x, y, z выполняется неравенство $(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8xyz$.

6. Докажите, что для любых неотрицательных чисел x, y, z выполняется неравенство $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{z}{x} \geqslant 3$.

7. Известно, что произведение двух положительных чисел равно 16. Какое наименьшее значение может принимать их сумма?

8. Может ли среднее арифметическое 10 целых чисел равняться 566,23?

9. Средний рост шести друзей — 1,2 м. Рост самого низкого из них — 1,1 м. Каков средний рост остальных пяти?

10. Средний возраст одиннадцати игроков футбольной команды — 22 года. Во время матча один из игроков получил травму и ушёл с поля. Средний возраст оставшихся на поле игроков стал равен 21 году. Сколько лет футболисту, получившему травму?

11. В соревновании участвовали 50 стрелков. Первый выбил 60 очков; второй — 80; третий — среднее арифметическое очков первых двух; четвёртый — среднее арифметическое очков первых трёх. Каждый следующий выбил среднее арифметическое очков всех предыдущих. Сколько очков выбил 42-й стрелок?

12. Произведение положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равно 1. Докажите, что их сумма больше или равна n.

Основные задачи

1. Докажите, что для любых чисел x, y, z выполняется неравенство $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$.

2. Докажите, что для любых чисел x, y, z выполняется неравенство $x^4+y^4+z^4 \geqslant xyz(x+y+z)$.

3. Докажите, что для любого неотрицательного числа x выполняется неравенство $3x^3+4 \geqslant 6x^2$.

4. Среднее арифметическое десяти различных положительных целых чисел равняется 10. Чему может равняться наибольшее среди этих чисел?

5. На шахматной доске расставлены числа, причём число в каждой клетке равно среднему арифметическому чисел в соседних клетках (клетки называются соседними, если у них есть общая сторона, так, например, у угловой клетки есть две соседних клетки). Докажите, что все числа равны. Решите задачу, если известно, что числа а) натуральные; б) целые.

6. Докажите, что если сумма двух положительных чисел фиксирована, то произведение тем больше, чем ближе друг к другу они расположены на координатной оси.

7. Средний рост пяти баскетболистов равен 195 см. Какое наибольшее количество из этих игроков может иметь рост ниже 191 см?

8. Найдите наибольшее натуральное число, каждая некрайняя цифра которого меньше среднего арифметического соседних с ней цифр.

9. На доске написано более 40, но не более 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3. Среднее арифметическое всех положительных из них чисел равно 4, А среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

6.2. Неравенства и оценки

Примеры решения задач

1. Что больше: 5^{44} или 4^{53}?

Решение. Имеем $5^{44} < \left(5^3\right)^{15} < \left(2^7\right)^{15} < 2^{106} = 4^{53}$.

2. Докажите, что число 2^{30} состоит а) менее чем из 11 цифр; б) более чем из 9 цифр.

Решение. Это следует из неравенств $10^{10} > 8^{10} = 2^{30} = (1024)^3 > \left(10^3\right)^3 = 10^9$.

Подготовительные задачи

1. Найдите все пары натуральных чисел, удовлетворяющих неравенству $x + y < 3$.

2. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющих неравенству $x^2 + y^2 < 2y + 3$.

3. Что больше: 2^{300} или 3^{200}?

4. Что больше: 2^{40} или 3^{28}?

5. Что больше: $2^{100} + 3^{100}$ или 4^{200}?

6. Что больше: $1234567 \cdot 1234569$ или 1234568^2?

7. Что больше: $101!$ или 51^{101}?

8. Докажите, что при любом натуральном $n > 2$ выполняется неравенство $n^2 > n + 1$.

9. Решите в целых числах неравенство $\sqrt{x^3 - 5x - 3} \leqslant 6 - x$.

10. Найдите наибольшее целое x, удовлетворяющее неравенству $3\cdot 2^{x+1}+2^x<1$.

Основные задачи

1. Докажите, что число 26^{15} состоит менее чем из 24 цифр.

2. Сколько цифр в числе 2^{100}?

3. Что больше: 31^{11} или 17^{14}?

4. Найдите наибольшее из чисел: 5^{100}, 6^{91}, 7^{90}, 8^{85}.

5. Докажите, что $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{98}-\frac{1}{99}+\frac{1}{100}>\frac{1}{5}$.

6. Найдите все такие вещественные значения x, что наибольшее целое число, не превосходящее $\frac{2x+17}{10}$, равно $\frac{3x+41}{3}$.

7. Решите уравнение $2^{[n]}=2n+1$.

8. Найдите все натуральные числа n, удовлетворяющие неравенству

$$2008\left[n\sqrt{1004^2+1}\right] \geqslant n\left[2008\sqrt{1004^2+1}\right].$$

9. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2+24x-28y+167<0, \\ x+2y<\dfrac{15}{2}. \end{cases}$$

10. Мастер делает за 1 час целое число деталей, большее 5, а его ученик — на 2 детали меньше. Один мастер выполняет заказ за целое число часов, а два его ученика (работающих с одинаковой скоростью) — на час быстрее. Сколько деталей входит в заказ?

§ 7. Последовательности и прогрессии

Диагностическая работа 7

1. Чему равна сумма первых 20 членов арифметической прогрессии, если сумма членов этой прогрессии с номерами с девятого по двенадцатый равна 10?

2. Сумма четырёх первых членов арифметической прогрессии равна 56, а сумма четырёх последних — 112. Найдите количество её членов, если первый член равен 11.

3. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, которые при делении на 9 дают в остатке 4.

4. Чему может равняться знаменатель непостоянной геометрической прогрессии, если первые её три члена являются первым, седьмым и пятнадцатым членами арифметической прогрессии?

5. Найдите трёхзначное число, если его цифры образуют геометрическую прогрессию, а цифры числа, которое меньше данного на 400, — арифметическую.

Краткая теоретическая справка

Арифметическая прогрессия

Определение. Арифметическая прогрессия — последовательность, заданная следующим образом: $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$, где $n \in \mathbb{N}$. Число $d \in \mathbb{R}$ называется разностью арифметической прогрессии. (Говорят также, что несколько чисел образуют арифметическую прогрессию, если они являются последовательными членами некоторой последовательности — арифметической прогрессии.)

Формула n-го члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Геометрическая прогрессия

Определение. Геометрическая прогрессия — последовательность, заданная рекуррентно следующим образом: $b_1 = b$, $b_{n+1} = b_n q$, где $n \in \mathbb{N}$. Число $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$, называется знаменателем геометрической прогрессии.

Формула n-го члена геометрической прогрессии: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии (при $q \neq 1$): $S_n = b_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Характеристические свойства арифметической и геометрической прогрессий

Последовательность является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый её член начиная со второго равен среднему арифметическому соседних, т. е. для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ выполняется равенство $a_n = \dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$.

В частности, три числа a, b и c образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда $b = \dfrac{a+c}{2}$.

Три ненулевых числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию (именно в таком порядке) тогда и только тогда, когда $b^2 = ac$.

Примеры решения задач

1. Найдите сумму первых 20 членов арифметической прогрессии, если $a_{10} + a_{11} = 4$.

Решение. Заметим, что $a_{10} + a_{11} = a_9 + a_{12} = a_8 + a_{13} = \ldots = a_1 + a_{20}$, таким образом, $S_{20} = (a_{10} + a_{11}) \cdot 10 = 40$.

Можно было решить эту задачу и другим стандартным способом: выразив a_{10} и a_{11} через первый член прогрессии a_1 и разность d, получим, что $a_{10} + a_{11} = 2a_1 + 19d = 4$. В то же время по формуле суммы арифметической прогрессии $S_{20} = \dfrac{2a_1 + 19d}{2} \cdot 20 = 40$.

2. В арифметической прогрессии четвёртый член равен 1. При каком значении разности произведение второго и седьмого членов будет наибольшим?

Решение. Обозначим разность прогрессии через d. Тогда

$$a_2 \cdot a_7 = (a_4 - 2d)(a_4 + 3d) = (1-2d)(1+3d) = -6d^2 + d + 1.$$

Квадратичная функция $f(d) = -6d^2 + d + 1$ достигает наибольшего значения при $d = \dfrac{1}{12}$.

Ответ. $\dfrac{1}{12}$.

3. Том Сойер красил забор длиной 105 метров, причём день за днём длина выкрашенной за один день части забора уменьшалась на одну и ту же величину. За сколько дней был покрашен забор, если за первые три дня Том выкрасил 36 метров забора, а за последние три — только 27 метров?

Решение. Пусть Тому понадобилось на покраску n дней и в день с номером k он покрасил a_k метров забора. По условию числа a_k образуют (убывающую) арифметическую прогрессию.

Заметим, что $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}$, а по условию

$$a_1+a_2+a_3+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=36+27=63.$$

Отсюда следует, что $a_1+a_n=21$. По формуле суммы членов арифметической прогрессии $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=105$, откуда $n=10$.

Ответ. 10.

4. Могут ли числа 2, 3 и 17 быть членами (не обязательно последовательными) одной геометрической прогрессии?

Решение. Если бы такая прогрессия существовала, то имели бы место равенства $3=2\cdot q^n$ и $17=3\cdot q^k$ при некоторых $k,n\in\mathbb{N}$, а значит, $\left(\frac{3}{2}\right)^k=\left(\frac{17}{3}\right)^n \Leftrightarrow 3^{k+n}=2^k\cdot 17^n$, что невозможно (хотя бы потому, что левая часть нечётное число, а правая — чётное).

5. Дана арифметическая прогрессия с первым членом 1 и разностью 2. Докажите, что число

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{40}}+\sqrt{a_{41}}}$$

является целым.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{40}}+\sqrt{a_{41}}}&=\\ =\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{a_2-a_1}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{a_3-a_2}+\ldots+\frac{\sqrt{a_{41}}-\sqrt{a_{40}}}{a_{41}-a_{40}}&=\\ =\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{d}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{d}+\ldots+\frac{\sqrt{a_{41}}-\sqrt{a_{40}}}{d}&=\\ =\frac{\sqrt{a_{41}}-\sqrt{a_1}}{d}=\frac{\sqrt{81}-\sqrt{1}}{2}&=4.\end{aligned}$$

6. Найдите наибольшую разность арифметической прогрессии, среди членов которой есть числа $\frac{1}{17}$, $\frac{1}{15}$ и $\frac{1}{13}$.

Решение. Обозначим разность арифметической прогрессии через d. По условию для некоторых чисел $n,k\in\mathbb{N}$ имеют место равенства

$$\frac{1}{15}-\frac{1}{17}=\frac{2}{17\cdot 15}=dn \quad \text{и} \quad \frac{1}{13}-\frac{1}{15}=\frac{2}{13\cdot 15}=dk,$$

следовательно,
$$\frac{n}{k}=\frac{13}{17} \quad \text{и} \quad d=\frac{2}{15\cdot 17\cdot n}.$$
Из последнего равенства следует, что значение d будет наибольшим при наименьшем значении n, а из первого равенства следует, что наименьшим значением n является 13 (ибо n делится на 13). Следовательно, наибольшее значение $d=\dfrac{2}{13\cdot 15\cdot 17}$. Нетрудно заметить, что при этом данные числа действительно будут являться членами арифметической прогрессии с этой разностью и $a_1=\dfrac{1}{17}$.

7. Два положительных неравных числа являются первым и третьим членами некоторой арифметической прогрессии, и они же являются первым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии. У какой из этих прогрессий сумма первых трёх членов больше?

Ответ. у арифметической.

Решение. Обозначим данные числа a и b. По характеристическим свойствам прогрессий второй член арифметической прогрессии равен $\dfrac{a+b}{2}$, а второй член геометрической прогрессии равен $\sqrt{ab}$. По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим (см. теоретическую справку) $\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$, если $a\neq b$. Отсюда следует (ведь первый и третий члены прогрессий совпадают), что сумма членов арифметической прогрессии больше.

8. Различные числа a, b и c (в указанном порядке) образуют геометрическую прогрессию, а числа $\dfrac{1}{a+1}$, $\dfrac{1}{b+1}$, $\dfrac{1}{c+1}$ (в том же порядке) — арифметическую. Найдите сумму членов арифметической прогрессии.

Решение. По характеристическому свойству арифметической прогрессии верно равенство
$$\frac{1}{b+1}-\frac{1}{a+1}=\frac{1}{c+1}-\frac{1}{b+1} \iff \frac{a-b}{a+1}=\frac{b-c}{c+1}.$$
Обозначим знаменатель данной в условии геометрической прогрессии через q и подставим в это равенство числа $a=\dfrac{b}{q}$ и $c=bq$. Получим
$$\frac{b-\frac{b}{q}}{\frac{b}{q}+1}=\frac{qb-b}{qb+1} \iff b\left(1-\frac{1}{q}\right)(qb+1)=b(q-1)\left(\frac{b}{q}+1\right) \iff$$
$$\iff \frac{b(q-1)(qb+1)}{q}=\frac{b(q-1)\left(b+q\right)}{q},$$

откуда с учётом неравенств $q \neq 1$ и $b \neq 0$ следует, что $qb + 1 = b + q \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (q-1)\cdot(b-1) = 0$, а значит, $b = 1$ и искомая сумма арифметической прогрессии равна $S = \frac{3}{b+1} = \frac{3}{2}$.

9. Шесть простых чисел являются последовательными членами возрастающей арифметической прогрессии. Докажите, что разность этой прогрессии не менее 30.

Решение. Предположим, что разность прогрессии нечётна. Тогда в этой прогрессии будет как минимум три чётных числа, что невозможно. Аналогично если разность прогрессии не кратна 3, то в эту прогрессию входят как минимум два числа, кратные трём. Значит, разность прогрессии кратна 2 и 3, т. е. кратна 6.

Если разность прогрессии не кратна 5, то в ней есть член, кратный 5. Тогда это просто число 5. Если 5 — первый член прогрессии, то среди оставшихся 5 членов есть ещё один член, кратный 5, что невозможно. Если же 5 не является первым членом, то первый член будет отрицательным, ибо ранее доказано, что разность прогрессии не меньше 6.

Итак, разность прогрессии кратна 5 и 6, т. е. кратна 30, а значит, не менее 30.

Интересно, что прогрессия 7, 37, 67, 97, 127, 157 состоит из простых чисел.

Подготовительные задачи

1. Дана арифметическая прогрессия с первым членом 2 и разностью −3. Найдите десятый член этой прогрессии и сумму первых десяти её членов.

2. Второй член арифметической прогрессии равен 5. Найдите сумму первых трёх членов прогрессии.

3. В арифметической прогрессии $a_{20} = 30$ и $a_{30} = 20$. Найдите a_{50}.

4. Сумма первых десяти членов геометрической прогрессии равна 1023, а первый член равен 1. Найдите знаменатель прогрессии.

5. Третий член геометрической прогрессии равен 4. Найдите произведение первых пяти членов прогрессии.

6. Найдите шестой и десятый члены возрастающей геометрической прогрессии, если их сумма равна 16, а произведение четырнадцатого и второго членов этой прогрессии равно 60.

7. Сумма пятого и девятого членов геометрической прогрессии равна 7. Найдите сумму их квадратов, если произведение шестого и восьмого членов этой прогрессии равно 12.

8. Найдите наибольшую из сумм первых n членов прогрессии, если $a_1 = 78$, $a_2 = 70$.

9. Сумма трёх чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 12. Найдите наибольшее значение произведения этих чисел.

10. Могут ли цифры простого трёхзначного числа образовывать арифметическую прогрессию?

Основные задачи

1. Каждое из чисел 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 умножают на каждое из чисел 3, 4, 5, 6, 7, 8 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

2. Могут ли числа 1, $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ быть членами (не обязательно последовательными) одной арифметической прогрессии?

3. В арифметической прогрессии $a_1 = -85$, a_{19} — её первый положительный член. Какие значения может принимать разность прогрессии?

4. В арифметической прогрессии пятый член равен 2. При каком значении разности прогрессии сумма всевозможных попарных произведений четвёртого, седьмого и восьмого членов прогрессии будет наименьшей?

5. Найдите всевозможные значения a, при которых числа $2\sqrt{2a}$, -8, $3\sqrt{8a}$ являются, в некотором порядке, последовательными членами арифметической прогрессии.

6. Отношение суммы первых трёх членов возрастающей арифметической прогрессии к сумме её последующих семи членов равно 7 : 3. Найдите разность прогрессии, если известно, что у неё имеются два соседних члена, произведение которых равно $-\dfrac{7}{4}$.

7. Сумма модулей членов конечной арифметической прогрессии равна 100. Если все её члены увеличить на 1, то сумма модулей членов полученной прогрессии будет также равна 100. Какие значения при этих условиях может принимать величина n^2d, где d — разность прогрессии, а n — число её членов?

8. Обозначим через S_n сумму первых n членов непостоянной арифметической прогрессии. Найдите все прогрессии, для которых при всех $n, k \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $S_n \cdot S_k = S_{nk}$.

9. Докажите, что существуют арифметические прогрессии произвольной длины, состоящие из попарно взаимно простых чисел.

10. Три числа, сумма которых равна 12, образуют арифметическую прогрессию. Если второе число оставить без изменения, а первое и третье увеличить на 1, то получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа.

11. Геометрическая прогрессия с отрицательной суммой состоит из четырёх членов. Выбросив из неё второй член, мы получим возрастающую арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель исходной геометрической прогрессии.

12. Три положительных числа образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Если среднее из них уменьшить на 40%, то получится геометрическая прогрессия, сумма которой равна 39. Найдите эти числа.

13. Найдите все состоящие не менее чем из трёх простых чисел арифметические прогрессии с разностью 10.

14. Найдите все возрастающие конечные арифметические прогрессии, которые состоят из простых чисел и у которых количество членов больше, чем разность прогрессии.

15. Докажите, что последовательность, сумма n первых членов которой задаётся формулой $S_n = 3^n - 1$, является геометрической прогрессией.

16. Известно, что первый, десятый и сотый члены геометрической прогрессии являются натуральными числами. Верно ли, что 99-й член этой прогрессии также является натуральным числом?

17. Садовник, привив черенок редкого растения, оставляет его расти два года, а затем ежегодно берет от него 6 черенков. Сколько растений и сколько черенков у него будет через 12 лет?

18. Сумма шестнадцати чисел равна 0,5. Известно, что сумма любых 15 из них положительна. Какое наименьшее целое значение может принимать наименьшее из этих чисел?

19. Все члены последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности начиная со второго либо в 11 раз больше, либо в 11 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 2231.

а) Может ли последовательность состоять из 2 членов?

б) Может ли последовательность состоять из 3 членов?

в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

20. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1008 и

а) пять; б) четыре; в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

§ 8. Как решать задачу 19: задачи ЕГЭ прошлых лет

Сразу спешим огорчить: после прочтения этого параграфа задачи 19 не начнут решаться как по мановению волшебной палочки. Однако здесь мы изложим некоторые базовые принципы, которые пригодятся практически в любой задаче 19, а также разберём действие этих принципов на примерах реальных задач единого государственного экзамена прошлых лет.

Во-первых, нужно научиться внимательно читать условие! Этот принцип, разумеется, полезен не только в задачах 19. Невнимательное прочтение условие влечёт за собой решение совсем другой задачи, возможно, с точки зрения математика, не менее интересной, а порой даже гораздо более сложной, чем та, что предложена на экзамене. Проблема в том, что решить всё-таки надо именно приведённую в тексте экзамена задачу, так что все попытки решить что-то другое выльются исключительно в ноль баллов за эту задачу. А целью всё-таки является получение натурального числа в графе «баллы за 19». Так что читайте условие внимательно, и лучше — не один раз.

Также очень полезно проиллюстрировать условие каким-нибудь примером. Просто для лучшего понимания условия задачи. Вы должны чётко понимать, о чём именно идёт речь в задаче, осознать ту конструкцию, которая в ней описана, после чего решать задачу станет намного легче. Порой даже случается, что, придумывая пример, облегчающий понимание условия, вы, сами того не подозревая, уже решили один из трёх пунктов. Впрочем, что же это мы — говорим о примерах, а сами их не приводим? Вперёд! Отметим лишь, что большинству примеров будет предшествовать некоторое «обсуждение», то есть попытки прийти к решению, а лишь затем — уже собственно решение.

Пример 8.1. Существуют ли два натуральных числа, у которых разность между кубом их суммы и суммой их квадратов чётна?

Обсуждение. Сначала постараемся понять, чего же от нас хотят? Вопрос задачи — «существуют ли»: какие вообще варианты ответа есть на этот вопрос? Очевидно, или «Да, существуют», или «Нет, не существуют». Что мы должны сделать, если правильный ответ «Да, существуют»? А просто привести конкретный пример, мол, вот вам два числа, для них условие выполняется, значит, такие числа существуют. Ведь если вам, скажем, задали такой вопрос: «Существуют ли страны, название которых состоит из двух слов?» — достаточно было бы ответить — да, например, «Российская Федерация». Или «Новая Зеландия», к примеру, — любой подходящий пример будет ответом на данный вопрос.

А если правильный ответ «Нет, не существуют», что нужно тогда? А в этом случае одного примера будет мало. Действительно, если мы приведём пару чисел и скажем, что для них условие не выполнено, разве из этого следует, что ни для какой пары условие не будет выполнено? Продолжая аналогию со странами, разве правильно было бы на вопрос «Существуют ли страны, название которых состоит из двух слов?» отвечать «Нет, например, у Франции одно слово в названии»? Конечно, это неверный ответ на поставленный вопрос. Так и нам при доказательстве ответа «Нет» в этой задаче мало просто привести пример, для которого условие не выполняется.

Теперь, когда мы более-менее разобрались, какого типа ответы бывают на поставленный вопрос, давайте попробуем проиллюстрировать задачу каким-нибудь примером. Возьмём любые два натуральных числа — скажем, 1 и 2. Кстати, а можно было бы взять 1 и 1? Да, ведь в условии не сказано, что числа различные, а что не запрещено, то разрешено!

Итак, подставляем 1 и 2. Внимательно, читаем условие. «Разность между кубом их суммы...» Стоп, давайте считать. Берём их сумму (3), и возводим её в куб (27). Читаем дальше: «... и суммой их квадратов». Сумма их квадратов: $1+4=5$. Итак, «Разность между кубом их суммы и суммой их квадратов» — это $27-5$, т. е. 22. И она должна быть... чётной! У нас и получилось чётное число, значит, мы решили задачу. Как мы помним, если мы приведём пример, для которого всё выполняется, — этого будет достаточно! Теперь мы готовы написать решение.

Решение. Да, существуют. Пример: 2 и 1;

$$(2+1)^3-(2^2+1^2)=27-5=22$$

— чётное число.

И всё! Конечно, первый пример был выбран чуть проще, чем обычные задачи 19, но если усвоить методы, изложенные в этом «обсуждении», то реальные задачи тоже станут намного проще.

Пример 8.2. Рассматриваются конечные непостоянные арифметические прогрессии, состоящие из натуральных чисел, которые не имеют простых делителей, отличных от 2 и 3.

а) Может ли в этой прогрессии быть три числа?

б) Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?

Обсуждение. Давайте пока закроем глаза на вопросы этой задачи и попробуем осмыслить условие, записанное в первой фразе, подкрепив осмысление примерами. Итак, рассматриваются арифметические прогрессии. Это понятно. Конечные — тоже ясно, значит, в них конечное число членов. Из натуральных чисел — запомнили, ничего дробного, отрицательного и нулевого там не бывает. «Не имеют простых делителей, отличных от 2 и 3». А вот с этим уже потруднее. Что же это значит? Попробуем для улучшения понимания привести похожую конструкцию, но далёкую от математики: «Сергей Евгеньевич не имеет машин, отличных от Феррари и Ламборгини». Но ведь это означает всего лишь то, что у Сергея Евгеньевича МОГУТ БЫТЬ только машины Феррари и Ламборгини! Кстати, их может и не быть: действительно, из того, что нет никаких других, не следует, что есть эти. Или может быть только Феррари. Или две Феррари. Важно другое: ничего, кроме них, нет!

Теперь вернёмся к задаче. Если у числа нет никаких простых делителей, кроме 2 и 3, это значит, что у него МОГУТ БЫТЬ простые делители 2 и 3 — и больше никаких, то есть искомые числа не делятся ни на 5, ни на 7, ни на 11, ни на другие простые числа, отличные от 2 и 3. Из этого опять же не следует, что искомое число имеет среди делителей 2 и 3: оно может иметь лишь один из этих делителей, а может и не иметь вовсе. Главное, чтобы не было никаких других, кроме 2 и 3.

Теперь давайте посмотрим на натуральные числа и выясним, какие из них обладают указанным свойством. Число 1 подходит? Да, у него вообще нет простых делителей (напомним, 1 — не простое и не составное число), а значит, нет и отличных от 2 и 3. Итак, 1 подходит. Число 2? Да, подходит, у этого числа есть лишь один простой делитель — 2. А значит простых делителей, отличных от 2 и 3, нет. Аналогично подходит и 3. Число 4? Казалось бы, нет, ведь у этого числа есть делитель 4, отличный от 2 и 3. Но ведь 4 — не простое число, а нам противопоказаны только ПРОСТЫЕ делители, отличные от 2 и 3. А из простых делителей у четвёрки есть только двойка, она нас устраивает.

Число 5? А вот 5 не подходит, так как у этого числа есть простой делитель, отличный от 2 и 3, — это собственно 5. Как насчёт 6? Подходит, есть только 2 и 3. Число 7? Нет, есть простой делитель 7. Число 8? Подходит, среди простых делителей — только двойки. Число 9 — тоже, только тройки. Число 10 — нет, есть пятёрка. Итак, давайте выпишем те числа, которые подходят под условие и могут являться членами искомой прогрессии:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 12,\ 16,\ 18,\ 24,\ \ldots$$

Ну вот, мы молодцы, теперь можно и вопрос задачи прочитать.

а) Может ли в этой прогрессии быть три числа?

И мы не верим своему счастью: пункт а) мы уже решили, сами того не заметив. Действительно, как и в прошлой задаче, мы можем ответить «Да, может» и привести пример такой прогрессии. В данном случае, выбрать три числа из списка, приведённого выше, чтобы они образовывали арифметическую прогрессию, нетрудно! Например, 1, 2 и 3. Или 8, 12, 16. И так далее. Словом, с первым пунктом разобрались.

б) Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?

Со вторым всё посложнее. Но гипотезу мы можем высказать уже сейчас: четыре. Действительно, мы легко можем привести несколько прогрессий из четырёх членов (1, 2, 3, 4 или 4, 8, 12, 16), а для пяти — не можем. Это, конечно, ещё и близко не доказательство того, что прогрессий из пяти членов не бывает — мало ли, чего мы не можем. Скажем, авторы этой книги даже все вместе вряд ли смогут поднять штангу весом 300 кг, но из этого не следует, что такую штангу никто не сможет поднять!

Однако отметим вот что. Как вообще отвечать на данный вопрос? Ответ строится по такой схеме: «Наибольшее количество — ______, вот пример, когда это количество достигается, а больше не может быть по тому-то». Итак, на самом деле нам нужно сделать две вещи: привести пример, который иллюстрирует нашу оценку, и доказать, что оценка верна. Но даже если мы сделаем что-то одно, например, только докажем верную оценку (в данной задаче — докажем, что больше четырёх членов в прогрессии быть не может) либо только приведём пример с четырьмя членами достигается — это уже существенное продвижение, которое может быть оценено. Правда, приводя пример без оценки мы не можем быть уверены, что этот пример иллюстрирует верную оценку! Но мы в любом случае, мы ничего не теряем. Так что пример для четырёх членов прогрессии в данной задаче также очень полезен.

Теперь приведём полное решение пункта б).

Решение. а) Да, может. Пример: 1, 2, 3.

б) В такой прогрессии может быть четыре члена: например, 1, 2, 3, 4.

Предположим, что существует такая арифметическая прогрессия, состоящая не менее чем из пяти членов. Рассмотрим любые пять последовательных её членов. Разделим каждый член на наибольший общий делитель всех пяти членов. Поскольку разности соседних членов уменьшатся в одинаковое количество раз, полученные числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 также образуют арифметическую прогрессию, удовлетворяющую условию задачи. Заметим, что числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 не могут все быть чётными или все делиться на 3.

Если разность этой прогрессии делится на 3, то в ней не может быть члена, делящегося на 3 (иначе все члены прогрессии делятся на 3), поэтому все члены прогрессии являются степенями двойки. Поскольку все члены не могут быть чётными, получаем, что среди них присутствует 1. Но в этом случае разность прогрессии нечётна, поэтому чётные и нечётные члены прогрессии чередуются, а нечётных степеней двойки, отличных от 1, не существует.

Пусть теперь разность прогрессии d не делится на 3. Тогда если a_1 делится на 3, то члены $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$ и $a_5 = a_1 + 4d$ не делятся на 3, а $a_4 = a_1 + 3d$ делится на 3. Аналогично если a_2 делится на 3, то из чисел a_1, a_3, a_4, a_5 на 3 будет делиться только a_5. Наконец, если a_3 делится на 3, то ни одно из чисел a_1, a_2, a_4, a_5 не делится на 3. Значит, найдутся два последовательных члена прогрессии, являющиеся степенями двойки.

Если оба эти члена чётны, то и все члены прогрессии чётны, чего не может быть. Поэтому одно из этих чисел — единица. Единица может стоять в прогрессии только на первом или пятом месте, в этом случае на 3 делится только a_3, поскольку единица — один из двух последовательных членов прогрессии, являющихся степенью двойки. Тогда a_1, a_2, a_4, a_5 являются степенями двойки. Разность прогрессии $d = a_2 - a_1 = a_5 - a_4$, значит, она чётна, и все члены прогрессии чётны, чего не может быть.

Ответ. а) да; б) 4.

Содержание критерия	Баллы
Верно выполнены оба пункта	4
Верно выполнен п. *а* и доказана оценка в п. *б*	3
Приведён пример или доказана оценка в п. б	2
Приведён пример в п. *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Пример 8.3. Натуральные числа от 1 до 12 разбивают на четыре группы, в каждой из которых есть по крайней мере два числа. Для

каждой группы находят сумму чисел этой группы. Для каждой пары групп находят модуль разности найденных сумм и полученные 6 чисел складывают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее возможное значение полученного результата?

Обсуждение. Опять же давайте пока не будем читать пункты а), б) и в), а попробуем просто разобраться, чего же от нас хотят, проиллюстрировав условие примером. Есть числа 1, 2, …, 12. Их разбивают на четыре группы, в каждой из которых по крайней мере два числа. Так и сделаем: например, {1; 2; 3; 4}, {5; 6; 7; 8}, {9; 10}, {11; 12}. Проверяем: четыре группы, в каждой не менее двух чисел. Далее, для каждой группы находят сумму чисел в этой группе. Найдём их для нашего примера: $S_1 = 10$, $S_2 = 26$, $S_3 = 19$, $S_1 = 23$, Для каждой пары групп находят модуль разности этих сумм. Найдём модули разностей:

$$|S_1 - S_2| = 16, \quad |S_2 - S_3| = 7, \quad |S_1 - S_3| = 9,$$
$$|S_2 - S_4| = 3, \quad |S_1 - S_4| = 13, \quad |S_3 - S_4| = 16.$$

Полученные шесть чисел сложили (убедимся, что мы ничего не забыли и чисел у нас получилось именно шесть):

$$A = 16 + 9 + 13 + 7 + 3 + 4 = 52.$$

Чем был полезен этот пример? Тем, что теперь мы твёрдо уверены, что понимаем условие задачи! Разбиваем на группы, считаем суммы по группам, далее — модули разностей сумм, и потом все складываем.

Теперь продолжаем читать условие.

а) Может ли в результате получиться 0?

Как мы помним, на этот вопрос можно ответить либо «Да» (и тогда нужно просто привести пример), либо «Нет» (и тогда нужно доказать, что сумма ни при каком разбиении не может быть равна нулю).

Сразу ноль у нас не получился — получилось 52. А как сделать это число поменьше? Ясно, что для того, чтобы сумма стала меньше, должны уменьшиться слагаемые. А что у нас за слагаемые? Это модули разностей некоторых чисел. Итак, складывая эти модули мы должны получить ноль. Но ведь модули неотрицательны! Значит, ноль может получиться, только если мы складываем нули! Итак, для того чтобы получить в результате ноль, на предыдущем шаге мы должны получить шесть нулей.

А что мы делали на предыдущем шаге? Мы считали разности между суммами. И если они равны нулю, значит, все суммы должны быть равны между собой! Итак, для построения искомого примера нужно разбить числа 1, 2, …, 12 на группы так, чтобы суммы чисел в группах были одинаковыми!

Дело за малым — сделать это. Давайте для начала посчитаем, какой тогда должна быть сумма чисел в каждой группе. Исходно сумма чисел была $1+2+\ldots+12=78$. Если мы разбиваем их на 4 группы, то в каждой группе сумма будет $78:4=19{,}5$… Как же так? Сумма же не может быть нецелой. Что это значит? А это значит, что такого разбиения не существует, и мы это только что доказали!

Теперь пункт б). Может ли число A быть равным 1? Опять же нам нужно либо привести пример того, когда это бывает, либо доказать, что это невозможно.

Так как A есть сумма шести неотрицательных целых чисел, это возможно только в том случае, когда одна из разностей по модулю равна единице, а все остальные модули разностей (а значит, и сами разности) — нули. Как это возможно? Давайте, не теряя общности, считать, что $S_1-S_2\neq 0$, а остальные разности равны нулю, то есть $S_1-S_3=S_1-S_4=S_2-S_3=S_2-S_4=S_3-S_4=0$.

Однако из последнего равенства следует, что все суммы равны между собой! А ведь это противоречит тому, что $S_1-S_2\neq 0$! Итак, искомая сумма не может быть также равна и 1.

Остался пункт в). Здесь нам нужно сделать три вещи: придумать правильный ответ, доказать, что он действительно наименьший, и представить пример, когда такое значение достигается (то есть привести такое разбиение на четыре группы, при котором искомая сумма модулей разностей равна указанному нами числу).

Прежде всего давайте попробуем дойти до правильного ответа. Нам нужно, чтобы сумма модулей разностей была наименьшей, значит, в идеале мы должны сделать модули разностей как можно меньше. А когда они будут маленькими? Конечно, когда числа, которые мы вычитаем стоят как можно ближе друг к другу (опять же, в идеале — чтобы они все были равными). Значит, нам нужно составить группы так, чтобы суммы чисел в них были равны между собой или максимально близки друг к другу.

Как мы знаем из первого пункта, равны между собой они быть не могут, так как 78 не делится на 4 нацело. Однако из того же первого пункта мы видим, что, если разделить 78 на 4, будет 19,5. Значит было бы логично составить такие группы, чтобы сумма в них была близка к 19,5, то есть была равна 19 или 20. Попробуем сделать две группы по 19 и две по 20. В этом случае общая сумма будет как раз 78, а если посчитать попарные разности, то среди них будет 4 единицы и два нуля, то есть искомое число A будет равно 4. Неплохо, хотя мы пока не доказали, что это минимально возможный вариант. Тем не менее, очень похоже на то, что мы не ошиблись.

Однако это ещё не пример: мы пока лишь привели суммы чисел в группах, но не разбиение по группам. Впрочем, это не так сложно. Выпишем все числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Теперь в первую группу возьмём числа с суммой чисел 20: например, {12; 8}. Во вторую — также с суммой 20 — к примеру, {11; 9}. Теперь в третью нужны числа с суммой 19. Берём {10; 7; 2}. Ну а сумма оставшихся, разумеется, тоже равна 19 (так как общая сумма — 78). Итак, разбиение, дающее ответ 4, например, таково (есть и другие примеры; см. ниже): {12; 8}, {11; 9}, {10; 7; 2} и {6; 5; 4; 3; 1}.

Теперь нужно доказать, что число 4 — наименьшее. Но об этом — уже в решении.

Решение. Обозначим суммы чисел в группах S_1, S_2, S_3, S_4, а указанную в условии сумму модулей их попарных разностей через A. Можно считать, что $S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_3 \leqslant S_4$.

а) Чтобы число A равнялось 0, необходимо, чтобы каждая из разностей $S_i - S_j$ равнялась 0, то есть $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$. Сумма всех двенадцати чисел равна

$$1 + 2 + \ldots + 11 + 12 = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78.$$

С другой стороны, она равна

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 4S_1,$$

но 78 не делится на 4. Значит, $A \neq 0$.

б) Чтобы число A равнялось 1, необходимо, чтобы все, кроме одной, разности $S_i = S_j$ равнялись 0. Значит, $S_1 < S_4$, но в этом случае каждая из сумм S_2, S_3 не равна хотя бы одной из сумм S_1, S_4, поэтому хотя бы три разности $S_i - S_j$ не равны 0 и число A не меньше 3. Значит, $A \neq 1$.

в) Выразим число A явно через S_1, S_2, S_3, S_4:

$$A = (S_2 - S_1) + (S_3 - S_1) + (S_4 - S_1) + (S_3 - S_2) + (S_4 - S_2) + (S_4 - S_2) = \\ = 3(S_4 - S_3) + 4(S_3 - S_2) + 3(S_2 - S_1).$$

В предыдущих пунктах было показано, что $A \geqslant 3$. Если $A = 3$, то

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 - 1 \quad \text{или} \quad S_2 = S_3 = S_4 = S_1 + 1.$$

В этом случае сумма всех двенадцати чисел равна $4S_1 + 1$ или $4S_4 - 1$, то есть нечётна, что неверно.

Для следующего разбиения чисел на группы: $\{12; 7\}$; $\{11; 6; 2\}$; $\{10; 5; 4; 1\}$; $\{9; 8; 3\}$ — число A равно 4.

Ответ. а) нет; б) нет; в) 4.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

В завершение этого параграфа мы предлагаем несколько задач из вариантов ЕГЭ без подробного обсуждения, однако очень рекомендуем читателю попробовать применить только что прочитанные идеи в этих задачах. Внимательно читайте условие, иллюстрируйте его примерами, и всё получится!

Пример 8.4. В ряд выписаны числа $1^2, 2^2, \ldots, (N-1)^2, N^2$. Между ними произвольным образом расставляют знаки «+» и «−» и находят получившуюся сумму. Может ли такая сумма равняться:

а) 4, если $N=12$? б) 0, если $N=69$?

в) 0, если $N=64$? г) 5, если $N=90$?

Решение. а) При следующей расстановке знаков получается требуемая сумма:

$$1^2-2^2-3^2+4^2+5^2-6^2-7^2+8^2-9^2+10^2+11^2-12^2=4.$$

б) Среди выписанных 69 чисел — 34 чётных и 35 нечётных. Поэтому любая сумма, которую можно получить, будет нечётной и не может равняться 0.

в) Заметим, что $(a+3)^2-(a+2)^2-(a+1)^2+a^2=4$. Значит, между 8 квадратами последовательных натуральных чисел можно расставить знаки так, что полученная сумма будет равняться 0:

$$(a+7)^2-(a+6)^2-(a+5)^2+(a+4)^2-(a+3)^2+(a+2)^2+(a+1)^2-a^2=0.$$

При $N=64$ можно разбить все данные числа на группы по 8 чисел в каждой так, что сумма чисел в каждой группе равна 0, а значит, и сумма всех чисел равна 0.

г) Как и в предыдущем пункте, расставим знаки между 88 числами $3^2, 4^2, \ldots, 89^2, 90^2$ таким образом, чтобы их сумма равнялась 0. Перед

2^2 поставим знак «+». При такой расстановке знаков сумма равна

$$1^2+2^2+0=5.$$

Ответ. а) да; б) нет; в) да; г) да.

Содержание критерия	Баллы
Верно выполнены все пункты	4
Верно выполнены три пункта из четырёх	3
Верно выполнены два пункта из четырёх	2
Верно выполнен один пункт из четырёх	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Пример 8.5. Число S таково, что для любого представления S в виде суммы положительных слагаемых, каждое из которых не превосходит 1, эти слагаемые можно разделить на две группы так, что каждое слагаемое попадает только в одну группу и сумма слагаемых в каждой группе не превосходит 19.

а) Может ли число S быть равным 38?

б) Может ли число S быть больше 37,05?

в) Найдите максимальное возможное значение S.

Решение. а) Рассмотрим разбиение числа 38 на 39 слагаемых, равных $\frac{38}{39}$. При разделении этих слагаемых на две группы в одной из них окажется не менее 20 чисел, сумма которых равна

$$20\cdot\frac{38}{39}=\frac{760}{39}=19\frac{19}{39}>19.$$

Значит, S не может быть равным 38.

б) Поскольку S является суммой двух чисел, не больших 19, получаем $S \leqslant 38$.

Пусть $37{,}05 < S \leqslant 38$. Рассмотрим разбиение числа S на 39 слагаемых, равных $\frac{S}{39} \leqslant \frac{38}{39} < 1$. При разделении этих слагаемых на две группы в одной из них окажется не менее 20 чисел, сумма которых равна $20\cdot\frac{S}{39} > 20\cdot\frac{37{,}05}{39} = 19$. Значит, S не может быть больше 37,05.

в) Докажем, что число $S = 37{,}05$ удовлетворяет условию задачи.

Рассмотрим произвольное представление числа $S = 37{,}05$ в виде суммы положительных слагаемых, не превосходящих 1:

$$S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Можно считать, что слагаемые упорядочены по убыванию:

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{n-1} \geqslant x_n.$$

Первую группу составим из k наибольших слагаемых так, что

$$S_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leqslant 19 < x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1}.$$

Вторую группу составим из оставшихся слагаемых.

Пусть $S_1 < 18{,}05 = 37{,}05 - 19$. В этом случае

$$0{,}95 < 19 - S_1 < x_{k+1} \leqslant x_k \leqslant \ldots x_1 \quad \text{и} \quad 0{,}95k < x_1 + \ldots + x_k = S_1 < 18{,}05.$$

Поэтому $k < 19$, $k \leqslant 18$ и $S_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leqslant 18$. Тогда

$$1 \leqslant 19 - S_1 < x_{k+1} \leqslant 1.$$

Полученное противоречие доказывает, что $S_1 \geqslant 18{,}05$. Поэтому сумма слагаемых во второй группе

$$S_2 = x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_n = 37{,}05 - S_1 \leqslant 19.$$

Таким образом, число $S = 37{,}05$ удовлетворяет условию задачи. В предыдущем пункте было показано, что ни одно из чисел $S > 37{,}05$ не удовлетворяет условию задачи, значит, максимальное возможное значение S — это 37,05.

Ответ. а) нет; б) нет, в) 37,05.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — указание верного способа разделения слагаемых на две группы для искомого значения S в п. *в*; — обоснование верного способа разделения слагаемых на две группы для искомого значения S в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Пример 8.6. Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{2}{11}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 9 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а) и б).

Решение. а) Если группа состоит из 2 мальчиков, посетивших только театр, 7 мальчиков, посетивших только кино, и 11 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 20 учащихся могло быть 9 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 10 или больше. Тогда девочек было 10 или меньше. Театр посетило не более 2 мальчиков, поскольку если бы их было 3 или больше, то доля мальчиков в театре была бы не меньше $\frac{3}{3+10}=\frac{3}{13}$, что больше $\frac{2}{11}$. Аналогично кино посетило не более 7 мальчиков, поскольку $\frac{8}{8+10}=\frac{8}{18}>\frac{2}{5}$, но тогда хотя бы один мальчик не посетил ни театра, ни кино, что противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в группе из 20 учащихся могло быть 9 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе — 9.

в) Предположим, что некоторый мальчик сходил и в театр, и в кино. Если бы вместо него в группе присутствовало два мальчика, один из которых посетил только театр, а другой — только кино, то доля мальчиков и в театре, и в кино осталась бы прежней, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек в группе можно считать, что каждый мальчик сходил или только в театр, или только в кино.

Пусть в группе m_1 мальчиков, посетивших театр, m_2 мальчиков, посетивших кино, и d девочек. Оценим долю девочек в этой группе. Будем считать, что все девочки ходили и в театр, и в кино, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля в театре и в кино не уменьшится.

По условию $\frac{m_1}{m_1+d}\leqslant\frac{2}{11}$, $\frac{m_2}{m_2+d}\leqslant\frac{2}{5}$, значит, $\frac{m_1}{d}\leqslant\frac{2}{9}$, $\frac{m_2}{d}\leqslant\frac{2}{3}$. Тогда $\frac{m_1+m_2}{d}\leqslant\frac{8}{9}$, поэтому доля девочек в группе:

$$\frac{d}{m_1+m_2+d}=\frac{1}{\frac{m_1+m_2}{d}+1}\geqslant\frac{1}{\frac{8}{9}+1}=\frac{9}{17}.$$

Если группа состоит из 2 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 9 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено, а доля девочек в группе равна $\frac{9}{17}$.

Ответ. а) да; б) 9; в) $\frac{9}{17}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Пример 8.7. Каждое из чисел 2, 3, …, 7 умножают на каждое из чисел 13, 14, …, 21 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение. 1. Если все произведения взяты со знаком плюс, то их сумма максимальна и равна

$$(2+\ldots+7)(13+\ldots+21)=\left(\frac{2+7}{2}\cdot 6\right)\cdot\left(\frac{13+21}{2}\cdot 9\right)=27\cdot 153=4131.$$

2. Так как предыдущая сумма оказалась нечётной, число нечётных слагаемых в ней нечётно, причём это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого её слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечётной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при такой расстановке знаков у произведений, которая получится при раскрытии следующих скобок:

$$(-2+3-4+5+6-7)(-13-14-15-16+17-18+19+20+21)=1\cdot 1=1.$$

Ответ. 1 и 4131.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, не доказано, либо что сумма отлична от 0, либо что она может быть равна 1)	3
Верно найдено наибольшее значение суммы и доказано, что сумма всегда отлична от 0	2
Верно найдено только наибольшее значение суммы или только доказано, что сумма всегда отлична от 0	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Пример 8.8. Перед каждым из чисел 22, 23, …, 26 и 50, 51, …, 60 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 55 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение. 1. Если все числа взяты со знаком плюс, то их сумма максимальна и равна

$$11(22+\ldots+26)+5(50+\ldots+60)=$$
$$=11\left(\frac{22+26}{2}\cdot 5\right)+5\left(\frac{50+60}{2}\cdot 11\right)=55\cdot(24+55)=4345.$$

2. Так как предыдущая сумма оказалась нечётной, число нечётных слагаемых в ней — нечётно, причём это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого её слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечётной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при следующей расстановке знаков у чисел:

$$11(-22+23-24+25-26)+$$
$$+5(50+51-52-53+54-55+56-57+58-59+60)=$$
$$=-11\cdot 24+5\cdot 53=-264+265=1.$$

Ответ. 1 и 4345.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, не доказано, либо что сумма отлична от 0, либо что она может быть равна 1)	3
Верно найдено наибольшее значение суммы и доказано, что она всегда отлична от 0	2
Верно найдено только наибольшее значение суммы или только доказано, что она всегда отлична от 0	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Пример 8.9. Найдите все тройки натуральных чисел k, m и n, удовлетворяющие уравнению $2\cdot k!=m!-2\cdot n!$ ($1!=1$; $2!=1\cdot 2=2$; $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$).

Решение. 1. Так как $m!=2\cdot k!+2\cdot n!$, имеем $n<m$ и $k<m$.

2. Пусть $k\leqslant n$, тогда $4\cdot n!\geqslant 2\cdot k!+2\cdot n!=m!\geqslant(n+1)\cdot n!$, откуда $4\geqslant n+1$ и $k\leqslant n\leqslant 3$.

3. Пусть $k > n$, тогда $4 \cdot k! \geqslant 2 \cdot k! + 2 \cdot n! = m! \geqslant (k+1) \cdot k!$, откуда $4 \geqslant k+1$ и $n < k \leqslant 3$.

4. Далее конечным перебором значений $1 \leqslant n \leqslant 3$, $1 \leqslant k \leqslant 3$ находим все решения.

Ответ. $k=1$, $n=2$, $m=3$; $k=n=3$, $m=4$; $k=2$, $n=1$, $m=3$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Ответ правилен и конечность перебора обоснована. Однако при переборе допущены арифметические ошибки или пробелы	3
Ответ правилен и получен конечным перебором. Однако конечность перебора не обоснована	2
Приведён хотя бы один из правильных наборов и проверено, что при подстановке в уравнение получается верное числовое равенство	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Пример 8.10. Найдите все пары натуральных чисел a и b, удовлетворяющие равенству $\overline{ab} = a^b + 23$ (в левой части равенства стоит число, получаемое приписыванием десятичной записи числа a перед десятичной записью числа b).

Решение. В случаях $a=1$ или $b=1$ имеем $24 = 1^b + 23 = \overline{1b}$ или $a^1 + 23 = \overline{a1} = 10a + 1$, что невозможно. Далее считаем, что $a > 1$ и $b > 1$.

Пусть $a \leqslant 9$. Тогда для выполнения равенства необходимо условие $b \leqslant 9$, так как иначе, если число b — k-значное ($k \geqslant 2$), имеем

$$a^b \geqslant 2^{10^{k-1}} \geqslant 2^{10(k-1)} > 10^{3(k-1)} = 10^{k+(2k-3)} \geqslant 10^{k+1} > \overline{ab}.$$

Пусть $a \geqslant 10$. Тогда для выполнения равенства необходимы условия $b=2$ и $a \leqslant 31$, так как иначе, если k-значное число b, а a — $(m+1)$-значно ($m \geqslant 1$), имеем

если $k > 1$, то

$$a^b \geqslant (10^m)^{10^{k-1}} \geqslant 10^{m\cdot(k+2)} = 10^{(m+m)+m\cdot k} \geqslant 10^{(m+1)+k} > \overline{ab};$$

если $k=1$, $b \geqslant 3$, то

$$a^b \geqslant (10^m)^3 = 10^{(m+m)+m} \geqslant 10^{(m+1)+k} > \overline{ab};$$

если $k=1$, $b=2$, $m \geqslant 2$, то

$$a^b \geqslant (10^m)^2 = 10^{\left(m+\frac{m}{2}\right)+\frac{m}{2}} \geqslant 10^{(m+1)+k} > \overline{ab};$$

если $k=1$, $b=2$, $m=1$, $a\geqslant 32$, то

$$a^b \geqslant (32)^2 \geqslant 10^3 = 10^{(m+1)+k} > \overline{ab}.$$

Конечным перебором всех пар a и b, для которых

либо $1 < a \leqslant 9$ и $1 < b \leqslant 9$, либо $10 \leqslant a \leqslant 31$ и $b = 2$,

получаем, что уравнению удовлетворяют две пары: $a=3$, $b=2$; $a=7$, $b=2$.

Ответ. $a=3$, $b=2$; $a=7$, $b=2$.

Замечание. Перебор значений a и b может быть произведён с помощью дополнительных соображений (свойств делимости, оценок величин и т. п.), например, следующим образом.

Остаётся две возможности: либо $1<a\leqslant 9$ и $1<b\leqslant 9$, либо $10\leqslant a\leqslant 31$ и $b=2$.

В первом случае, если $a=2$, имеем $20+b=2^b+23$, но $23>20$, а $2^b>b$.

Если $a=3$, имеем $30+b=3^b+23$.

При $b>3$ в правой части стоит число, состоящее более чем из двух цифр. Несложно проверить, что случай $b=2$ подходит, а $b=3$ нет.

Если $a=4$, имеем $40+b=4^b+23$.

При $b>3$ в правой части стоит число, состоящее более чем из двух цифр. Несложно проверить, что случаи $b=2$ и $b=3$ не подходят.

При $a\geqslant 5$, если $b>2$, в правой части стоит число, состоящее более чем из двух цифр.

Значит, имеем уравнение $10a+2=a^2+23$; $a^2-10a+21=0$, откуда получаем $a=3$ и $a=7$.

Во втором случае имеем уравнение $10a+2=a^2+23$, решения которого меньше 10.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован: правильно произведён перебор не более чем двузначных оснований степени и не более чем однозначных её показателей, но не объяснено, почему ограничен только перечисленными случаями	3
Ответ содержит правильную и, возможно, одну неправильную пару. Произведён перебор не более чем однозначных её показателей, но с арифметическими ошибками или пробелами	2
Приведена правильная пара и проверено, что она обращает уравнение в верное числовое равенство	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Пример 8.11. На доске написали несколько (не обязательно различных) двузначных натуральных чисел, не имеющих нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 363. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел получиться ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Решение. а) Пусть на доске 15 раз было записано число 19 и один раз число 78. Тогда сумма чисел равна 363. После перестановки цифр оказалось 15 раз записано число 91 и один раз 87. Сумма этих чисел равна $1452 = 4 \cdot 363$.

Замечание. Этот ответ берётся не «с потолка». Прочитайте решение пункта б) и заметьте, что аналогично можно ввести обозначения и в пункте а), после чего решить систему, найдя A и B. Дальше — нехитрый подбор.

б) Пусть на доске написаны двузначные числа $\overline{a_1 b_1}, \ldots, \overline{a_n b_n}$. Обозначим

$$A = a_1 + \ldots + a_n, \quad B = b_1 + \ldots + b_n.$$

По условию $10A + B = 363$ и $10B + A = 2 \cdot 363$. Тогда разность этих чисел равна $9(B - A) = 363$. Но левая часть последнего равенства делится на 9, а правая не делится. Значит, такая ситуация невозможна.

в) Пусть на доске были написаны двузначные числа $\overline{a_1 b_1}, \ldots, \overline{a_n b_n}$. По-прежнему

$$A = a_1 + \ldots + a_n, \quad B = b_1 + \ldots + b_n.$$

По условию $10A + B = 363$, и нужно найти наибольшее значение числа $S = 10B + A$. Тогда

$$S = 10B + A = 10(363 - 10A) + A = 3630 - 99A.$$

Таким образом, необходимо найти наименьшее возможное значение числа A. Поскольку

$$b_1 \leqslant 9a_1, \ \ldots, \ b_n \leqslant 9a_n, \tag{$*$}$$

получаем $B \leqslant 9A$. Поэтому

$$363 = 10A + B \leqslant 10A + 9A = 19A,$$

откуда $A \geqslant \frac{363}{19} > 19$, т. е. $A \geqslant 20$. Значит,

$$S = 3630 - 99A \leqslant 3630 - 99 \cdot 20 = 1650.$$

Теперь приведём пример, показывающий, что число S может быть равным 1650. Пусть первоначально на доске 18 раз было записано число 19 и один раз число 21. Тогда сумма этих чисел равна 363. После перестановки цифр на доске 18 раз оказалось записано число 91 и один раз число 12. Сумма этих чисел равна 1650.

Ясно, что этот пример получается, если почти все цифры десятков исходных чисел равны 1, а цифры единиц равны 9, чтобы почти все неравенства $(*)$ обратились в равенства.

Ответ. а) например, 15 раз число 19 и число 78; б) нет; в) 1650.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — пример в п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Пример 8.12. На доске было написано 30 натуральных чисел (не обязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое всех написанных чисел было равно 7. Вместо каждого из чисел на доске написали число, вдвое меньшее первоначального. Числа, оказавшиеся после этого меньше 1, с доски стёрли.

а) Могло ли среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, стать больше 14?

б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел стать больше 12, но меньше 13?

в) Найдите максимальное возможное значение среднего арифметического оставшихся на доске чисел.

Решение. а) Пусть на доске было 24 числа, равных 1, и 6 чисел, равных 31. Их среднее арифметическое равно 7. Среднее арифметическое получившихся чисел равно $\frac{6 \cdot 15{,}5}{6} = 15{,}5 > 14$.

б) Пусть с доски было стёрто k чисел, сумма оставшихся была равна S, а значит, стала равна $\frac{S}{2}$. По условию оказались стёрты только числа, получившиеся из 1, поэтому $\frac{S+k}{30}=7$, т. е. $S=210-k$. Среднее арифметическое оставшихся чисел равно $\frac{S}{2(30-k)}$, откуда получаем

$$12 < \frac{210-k}{2(30-k)} < 13; \quad 720-24k < 210-k < 780-26k;$$

$$22 < \frac{510}{23} < k < \frac{114}{5} < 23.$$

Но таких целых чисел k нет.

в) В обозначениях решения предыдущего пункта необходимо найти наибольшее возможное значение числа $A=\frac{S}{2(30-k)}$. Имеем

$$A = \frac{S}{2(30-k)} = \frac{210-k}{2(30-k)} = \frac{1}{2} + \frac{90}{30-k}.$$

Число A будет наибольшим, если число k будет принимать наибольшее возможное значение. Оценим значение k.

Каждое из первоначально написанных на доске чисел было не более 40 и на доске осталось $30-k$ чисел, поэтому для суммы S выполняется неравенство

$$210-k = S \leqslant 40(30-k),$$

откуда

$$210-k \leqslant 40(30-k); \quad 39k \leqslant 990; \quad k \leqslant \frac{330}{13} < 26; \quad k \leqslant 25.$$

Значит,

$$A \leqslant \frac{1}{2} + \frac{90}{30-25} = 18{,}5.$$

Приведём пример, показывающий, что среднее арифметическое оставшихся на доске чисел действительно может стать равным 18,5. Пусть первоначально на доске было написано 25 единиц и 5 чисел, равных 37. Тогда их среднее арифметическое было равно $\frac{25+185}{30}=7$. Все единицы стёрли с доски, а остальные числа уменьшились в 2 раза. Тогда среднее арифметическое оставшихся чисел равно $\frac{5\cdot 37}{2\cdot 5}=18{,}5$.

Ясно, что пример получается при найденном наибольшем значении k, т. е. необходимо удалить 25 единиц.

Ответ. а) да; б) нет; в) 18,5.

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Пример 8.13. На доске было написано 20 натуральных чисел (не обязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо нескольких (возможно, одного) из чисел на доске написали числа, меньшие первоначальных на 1. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стёрли.

а) Могло ли среднее арифметическое чисел на доске увеличиться после произведённой операции?

б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел было равно 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел получиться равным 34?

в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел было равно 27. Найдите максимальное возможное значение среднего арифметического оставшихся на доске чисел.

Решение. а) Пусть первоначально на доске было 19 чисел, равных 10, и одно число, равное 1. Их среднее арифметическое равно $\frac{19\cdot 10+1}{20}=9{,}55$. Уменьшим число, равное 1, после чего оно исчезнет с доски, а остальные числа менять не будем. Среднее арифметическое оставшихся чисел равно $\frac{19\cdot 10}{19}=10$.

б) Пусть с доски было стёрто k чисел, сумма остальных чисел до уменьшения была равна S, а после уменьшения стала равна $S-n$ т. е. было изменено n чисел, больших 1. По условию $\frac{S+k}{20}=27$, т. е. $S=540-k$. Среднее арифметическое оставшихся чисел равно

$$\frac{S-n}{20-k}=34,$$

откуда получаем

$$\frac{540-k-n}{20-k}=34.$$

Из этого равенства находим $33k = 140 + n$. Число n лежит в пределах от 0 до 20, поэтому $140 + n$ лежит в пределах от 140 до 160. В этом промежутке нет целых чисел, делящихся на 33.

в) В обозначениях предыдущего пункта по-прежнему $\frac{S+k}{20} = 27$, т. е. $S = 540 - k$. Необходимо найти максимальное возможное значение числа $A = \frac{S-n}{20-k}$. Имеем

$$A = \frac{S-n}{20-k} = \frac{540-k-n}{20-k} \leqslant \frac{540-k}{20-k} = 1 + \frac{520}{20-k}.$$

Число A будет наибольшим, если $n = 0$ и число k будет принимать наибольшее возможное значение. Оценим это значение. Так как каждое из первоначально написанных на доске чисел было не более 40 и на доске осталось $20 - k$ чисел, для суммы S выполняется неравенство

$$540 - k = S \leqslant 40(20-k),$$

откуда

$$540 - k \leqslant 40(20-k); \quad 39k \leqslant 260; \quad k \leqslant \frac{20}{3} < 7; \quad k \leqslant 6.$$

Значит,

$$A \leqslant 1 + \frac{520}{20-k} \leqslant 1 + \frac{520}{14} = 38\frac{1}{7}.$$

Приведём пример, показывающий, что среднее арифметическое оставшихся на доске чисел действительно могло стать равным $38\frac{1}{7}$. Пусть первоначально на доске было написано 6 единиц, 13 чисел, равных 40, и одно число, равное 14. Тогда их среднее арифметическое было равно

$$\frac{6 + 13 \cdot 40 + 14}{20} = 27.$$

Пусть 6 чисел, равных единице, уменьшились на 1 (после чего были стёрты с доски), а остальные числа не изменились. Тогда среднее арифметическое оставшихся чисел равно

$$\frac{13 \cdot 40 + 14}{14} = 38\frac{1}{7}.$$

Ясно, что пример легко получается при найденном наибольшем возможном k, т. е. среди написанных чисел должно быть 6 единиц.

Ответ. а) да; б) нет; в) $38\frac{1}{7}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Пример 8.14. Ученики писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее 83 баллов. Из-за того, что задания оказались трудными, всем участникам теста добавили по 5 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

а) Мог ли средний балл участников, не сдавших тест, понизиться?

б) Мог ли средний балл участников, сдавших тест, понизиться и средний балл участников, не сдавших тест, тоже понизиться?

в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 90, средний балл участников, сдавших тест, составил 100, а средний балл участников, не сдавших тест, составил 75. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 103, а не сдавших тест — 79. При каком минимальном числе участников теста возможна такая ситуация?

Решение. а) Пусть были 3 участника, которые набрали 100, 82 и 2 балла. Средний балл участников, не сдавших тест, составлял $\frac{82+2}{2}=42$ балла. После добавления баллов у участников оказалось 105, 87 и 7 баллов. Теперь средний балл участников, не сдавших тест, составляет 7 баллов.

б) В примере из предыдущего пункта средний балл участников теста, сдавших тест, первоначально составлял 100 баллов, а после добавления баллов составил $\frac{105+87}{2}=96$ баллов.

в) Пусть всего было N участников теста, сдали тест a участников, после добавления баллов сдали тест b участников. Очевидно, что средний балл всех участников после добавления составил 95. Имеем два уравнения:

$$90N = 75(N-a) + 100a \quad \text{и} \quad 95N = 79(N-b) + 103b,$$

откуда $15N = 25a$, т. е. $3N = 5a$, и $16N = 24b$, т. е. $2N = 3b$. Поэтому целое число N кратно 5 и кратно 3, т. е. кратно 15. Таким образом, $N \geqslant 15$.

Теперь покажем, что N могло равняться 15. Пусть изначально 5 участников набрали по 74 балла, 1 участник — 80 баллов и 9 участников по 100 баллов. Тогда средний балл был равен 90, средний балл участников, сдавших тест, был равен 100, а средний балл участников, не сдавших тест, был равен 75. После добавления средний балл участников, сдавших тест, стал равен 103, средний балл участников, не сдавших тест, стал равен 79. Таким образом, все условия выполнены.

Ответ. а) да; б) да; в) 15.

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Пример 8.15. а) Приведите пример четырёхзначного числа, произведение цифр десятичной записи которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа.

б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр десятичной записи которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа?

в) Найдите все такие четырёхзначные числа, произведение цифр десятичной записи которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

Решение. а) Произведение цифр числа 2529 равно 180, а сумма цифр равна 18, т. е. в 10 раз меньше.

б) Предположим, что такое число $n = \overline{abcd}$ существует. Очевидно, что среди этих цифр не может быть нулей.

Имеем $abcd = 175(a+b+c+d)$. Правая часть этого равенства делится на 25, поэтому среди цифр найдутся две цифры 5. Так как при перестановке местами цифр числа n равенство $abcd = 175(a+b+c+d)$

остаётся верным, без ограничения общности можно считать, что в числе n цифры c и d равны 5.

Тогда $ab = 7(a+b+10) \geqslant 7 \cdot 12 > 9 \cdot 9 \geqslant ab$. Получаем противоречие.

в) Предположим, что такое число $n = \overline{abcd}$ существует. Как и ранее, заметим, что среди этих цифр не может быть нулей. Имеем $abcd = 50(a+b+c+d)$. Правая часть этого равенства делится на 25, поэтому среди цифр найдутся две цифры 5. Без ограничения общности будем считать, что $c = d = 5$.

Тогда $ab = 2(a+b+10)$. Так как правая часть последнего равенства чётна, a или b чётны. Будем считать, без ограничения общности, что b чётно.

Если $b = 2$, то $a = a + 12$, что невозможно.

Если $b = 4$, то $2a = a + 14$; $a = 14$, что невозможно.

Если $b = 6$, то $3a = a + 16$; $2a = 16$; $a = 8$. Число $n = 8655$ и все числа, получаемые из него перестановкой цифр, удовлетворяют условию задачи.

Если $b = 8$, то $4a = a + 18$; $3a = 18$; $a = 6$. Этот вариант также получается из предыдущего перестановкой цифр.

Ответ. а) например, 2529; б) нет; в) число 8655 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр (всего 12 чисел).

Содержание критерия	**Баллы**
Верно построен пример в п. *а*, и обоснованно получены верные ответы в п. *б* и п. *в*	4
Обоснованно получены ответ в п. *в* и один из следующих результатов: — пример в п. *а*; — обоснованное решение п. *б*	3
Верно построен пример в п. *а* и обоснованно получен ответ в п. *б*. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в п. *в*	2
Верно построен пример в п. *а*. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в п. *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Пример 8.16. Три вещественных числа назовём *замечательной* тройкой, если они могут быть длинами сторон треугольника.

Три вещественных числа назовём *прекрасной* тройкой, если они могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника.

а) Даны 5 различных натуральных чисел. Может ли оказаться, что среди них не найдётся ни одной замечательной тройки?

б) Даны 4 различных натуральных числа. Может ли оказаться, что среди них можно найти три прекрасные тройки?

в) Даны 10 различных чисел (необязательно натуральных). Какое максимальное количество прекрасных троек может оказаться среди них?

Решение. а) Если числа равны $1, 2, 4, 8$ и 16, то никакие три из них не образуют замечательную тройку.

б) Если одно из чисел является длиной гипотенузы для двух треугольников, то какое-то из оставшихся трёх чисел является длиной катета для этих двух треугольников, а тогда треугольники окажутся равными по гипотенузе и катету. Значит, каждое число может быть длиной гипотенузы не более чем одного треугольника. При этом два самых маленьких числа не могут являться длиной гипотенузы треугольника. Значит, среди четырёх чисел можно найти не более двух прекрасных троек.

в) Упорядочим числа по возрастанию. Самое большое из них может быть длиной гипотенузы не более чем в четырёх треугольниках (в противном случае одно из оставшихся 9 чисел будет длиной катета в двух треугольниках с данной гипотенузой, а тогда эти треугольники будут равны по гипотенузе и катету). Аналогично второе по величине число может быть длиной гипотенузы не более чем в четырёх треугольниках, третье и четвёртое — в трёх, пятое и шестое — в двух, седьмое и восьмое — в одном. Итого, прекрасных троек может получиться не более 20.

Двадцать прекрасных троек найдётся, например, для следующего набора чисел: $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{10}$.

Ответ. а) да; б) нет; в) 20.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Пример 8.17. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16 произвольно делят на три непустые группы. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу).

а) Могут ли получиться одинаковыми два из этих трёх значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?

б) Могут ли быть получиться одинаковыми все три значения средних арифметических?

в) Найдите минимальное возможное значение максимального из получаемых средних арифметических.

Решение. а) Например, для групп $\{1, 4, 7\}$ и $\{2, 6\}$ средние значения совпадают и равны 4.

б) Предположим, что это возможно. Пусть все 3 средних значения равны c. В каждой группе от 1 до 8 натуральных чисел, поэтому соответствующее среднее представимо в виде $c=\frac{a}{b}$, где a — натуральное число и $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. С другой стороны, пусть группы состоят из n, m и k чисел. Тогда суммы чисел в группах равны nc, mc и kc соответственно, а общая сумма всех 10 чисел равна 61 и равна $(n+m+k)c=10c$. Поэтому $10c=61$; $c=\frac{61}{10}$. Это противоречит тому, что знаменатель числа c не превосходит 8.

в) Пусть группы состоят из n, m и k чисел, а соответствующие средние значения равны c_1, c_2 и c_3. Если $c_1<6{,}1$, $c_2<6{,}1$, $c_3<6{,}1$, то

$$nc_1+mc_2+kc_3 < (n+m+k)\cdot 6{,}1 = 61,$$

что противоречит условию. Значит, хотя бы одно из чисел c_1, c_2, c_3 не меньше 6,1. Поэтому максимальное из этих чисел не меньше 6,1. При этом каждое из этих чисел имеет вид $c=\frac{a}{b}$, где a — натуральное число и $b\in\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, поэтому максимальное из этих чисел не меньше $6\frac{1}{8}$.

Покажем, что максимальное из этих чисел не может равняться $6\frac{1}{8}$. Пусть $c_1=6\frac{1}{8}$. Тогда первая группа состоит из 8 чисел, сумма которых равна $6\frac{1}{8}\cdot 8=49=61-12$. Значит, каждая из других двух групп состоит из одного числа, причём сумма этих двух чисел равна 12. Но тогда одно из этих чисел больше 6, т. е. как минимум 7, поэтому максимальное среднее больше $6\frac{1}{8}$.

Таким образом, получаем, что максимальное из чисел c_1, c_2, c_3 не меньше $6\frac{1}{7}$.

Покажем, что максимальное из чисел c_1, c_2, c_3 может равняться $6\frac{1}{7}$. В самом деле, например, для разбиения на группы $\{6\}$, $\{4, 8\}$, $\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 16\}$ получаем $c_1 = c_2 = 6$, $c_3 = 6\frac{1}{7}$.

Ответ. а) да; б) нет; в) $6\frac{1}{7}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Пример 8.18. Бухгалтеру требуется выдать премии сотрудникам на общую сумму 600 000 рублей (размер премии каждого сотрудника — натуральное число, кратное 1000). Бухгалтеру дают распределение премий, и он должен их выдать без сдачи и размена, имея 100 купюр по 1000 рублей и 100 купюр по 5000 рублей.

а) Удастся ли выполнить задание, если в отделе 40 сотрудников и все должны получить поровну?

б) Удастся ли выполнить задание, если ведущему специалисту надо выдать 40 000 рублей, а остальное поделить поровну на 70 сотрудников?

в) При каком наибольшем количестве сотрудников задание удастся выполнить при любом распределении размеров премий (не исключено, что кому-то премии вообще не выписали)?

Решение. а) Каждый сотрудник должен получить $600\,000 : 40 = 15\,000$ рублей. Выдадим 33 сотрудникам по 3 пятитысячных купюры, одному — пятитысячную и 10 тысячных, шестерым — по 15 тысячных.

б) Каждый сотрудник, кроме ведущего специалиста, должен получить 8000 рублей, поэтому нужно будет выдать каждому не менее трёх тысячных купюр, значит, всего тысячных купюр нужно не менее 210 штук. Следовательно, без сдачи и размена выдать премии не удастся.

в) Если сотрудников 27 или больше, то распределим премии так: 26 человек должны получить по 4 тысячи, один — всё остальное, остальные — ничего. Тогда выдать премии будет нельзя по тем же причинам, что и в пункте б).

Если же их не больше 26, то всем, кроме одного, будем выдавать их премии, используя не более 4 тысячных купюр (очевидно, это возможно: достаточно поделить размер премии на 5000 с остатком), пока не кончатся пятитысячные купюры.

Если пятитысячные купюры закончились, то оставшиеся премии выдать точно удастся. Если же нет, то все премии, кроме одной, будут выданы (поскольку их получат не более 25 человек, значит, израсходуется не более 100 купюр по 1000 рублей), а последний просто заберёт все оставшиеся деньги.

Ответ. а) да; б) нет; в) 26.

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Ответы, указания, решения

§ 1. Делимость и её свойства. Признаки делимости

Диагностическая работа 1

1. Ответ. 1; 4 или 7.
2. Ответ. Да.
3. Ответ. 3.
4. Ответ. Нет.

1.1. Свойства делимости

Подготовительные задачи

1. Ответ. Нет (например, 12).
2. Ответ. Да.
3. Ответ. Да.
4. Ответ. Нет (например, $a = 2$).
5. Указание. Выделите из искомого выражения слагаемые, которые заведомо делятся на 3.
6. Ответ. 1.
7. Ответ. 1.
8. Ответ. 1; 3.
9. Ответ. 1.
10. Указание. Рассмотрите по отдельности делимость на 2, на 3 и на 5.
11. Ответ. Например, 1; 2; 3; 6; 12. **Указание.** Попробуйте придумать два таких числа, затем к ним подберите третье и т. д.

Основные задачи

1. Указание. Умножьте числитель дроби на 5, знаменатель — на 3 и вычтите одно из другого.
2. Указание. Разложите выражение на множители и рассмотрите по отдельности делимость на 3 и на 8.
3. Указание. Рассмотрите два случая чётности n, в случае нечётного рассмотрите делимость на среднее число данной последовательности, а в случае чётного — делимость на сумму двух чисел, стоящих в середине последовательности.
4. Ответ. 133.
5. Ответ. 251.

1.2. Признаки делимости

Подготовительные задачи

1. Ответ. а) 99832476252; б) 99832476252; 2012; в) 79255, г) 99832476252, д) нет таких чисел, е) 99832476252; ж) 79255.

2. Указание. Рассмотрите варианты чётности данных чисел.

3. Указание. Рассмотрите варианты чётности данных чисел.

4. Решение. Так как итоговое произведение нечётно, все сомножители тоже нечётны. Значит, и сумма, и произведение исходных чисел нечётны, чего быть не может.

5. Ответ. 4. **Указание.** Вычислите сумму цифр в этом числе.

6. Ответ. 1155; 4155; 7155; 3150; 6150; 9150. **Указание.** Рассмотрите сначала делимость на 5, а затем — на 3.

7. Ответ. 4104. **Указание.** Рассмотрите сначала делимость на 8, а затем — на 9.

8. Указание. Посчитайте сумму всех сумм цифр данных чисел, для этого посчитайте количество всех составленных чисел.

9. Ответ. 9876543120. **Указание.** Делимость на 9 следует из делимости суммы цифр на 9, а чтобы была делимость на 4, число из двух наименьших цифр, удовлетворяющее этому условию, ставится в конец искомого числа.

10. Ответ. Нет. **Указание.** Сумма цифр на чётных местах не может быть равна сумме цифр на нечётных местах (так как сумма всех цифр нечётна). Но отличаться на 11 и больше они тоже не могут (рассмотрите наименьшую и наибольшую возможные суммы).

11. Указание. Левая часть не делится на 11, а правая — делится.

Основные задачи

1. Ответ. 523152; 523656. **Указание.** Искомое число должно делиться на 504.

2. Ответ. Нет. **Указание.** Рассмотрите чётность суммы чисел в каждой группе и чётность суммы всех чисел от 1 до 21.

3. Ответ. Нет. **Указание.** Использовано 10 букв, значит, одна из них обозначает цифру 0. Раз произведения равны, то эта буква повторяется в обоих словах. Значит, это Л или О. Л быть не может, так как с неё начинается число «ЛОМОНОСОВ». Значит, О равно нулю, а тогда число «МИХАЙЛО» чётно.

4. Ответ. 8910. **Указание.** Это число должно делиться на 990, а такие числа можно перебрать.

5. Ответ. 9. **Указание.** По признаку равноостаточности разность этих чисел делится на 9, значит, меньше 9 единиц быть не может. Пример для 9 единиц, например, такой: $9087654321 - 8976543210 = 111111111$.

6. Ответ. а) да; б) да; в) нет. **Указание.** В первых двух пунктах нетрудно найти сумму цифр на чётных и на нечётных местах так, чтобы они отличались на 11 в п. а) и на 22 в п. б). Останется подобрать числа, например, так: а) 9783625401 и б) 305162847 (всевозможные перестановки цифр, стоящих на местах одной чётности, дадут гораздо больше, чем 11 вариантов). В п. в) сумма всех цифр нечётна, значит, разность между суммами цифр на чётных и на нечётных местах должна быть равна 11, что невозможно.

7. Ответ. 987652413. **Указание.** Найдите, чему могут быть равны суммы цифр на чётных и нечётных местах, после чего включите в сумму на нечётных местах самые большие нечётные цифры: 9; 7; 5, а в сумму на чётных — самые больше чётные: 8; 6.

8. Ответ. 45; 54. **Указание.** 2430 делится на 5 и на 81. Значит, исходное число делится на 9 и имеет в своей записи цифру 5.

9. Ответ. Нет. **Указание.** Если сложить десять нечётных чисел, то сумма будет чётной.

10. Указание. Исходное число чётное, значит, его квадрат должен делиться на 4.

11. Ответ. 2. **Указание.** Сумма всех чисел равна $37 \cdot 19$, а она должна делиться на последнее число, значит, последнее число равно 19, а тогда третье может быть равно только 2.

§ 2. Остатки

Диагностическая работа 2

1. Ответ. $2012 = 154 \cdot 13 + 10$.
2. Ответ. 0.
3. Ответ. 3.
4. Ответ. Делитель равен 3, остаток 2.
5. Ответ. 21; 26; 31; 36.

Подготовительные задачи

1. Ответ. а) 2; б) 0; в) 2; г) 3; д) 5.
2. Ответ. а) 0; б) 0; в) 3; г) 2; д) 6.
3. Ответ. 1.
4. Ответ. а) 6; б) 9; в) 5.

5. Указание. Рассмотрите все варианты остатков исходного числа от деления на 4.

6. Указание. Рассмотрите все варианты остатков исходного числа от деления на 5.

7. Указание. Разложите исходное число на множители и рассмотрите остатки от деления на 3.

8. Ответ. а) 0; 1; 6; б) 0; 1; 8.

9. Указание. Воспользуйтесь результатом предыдущего примера.

10. Указание. Рассмотрите остаток данного числа от деления на 9.

11. Указание. В п. а) рассмотрите остатки, которые квадраты могут давать при делении на 3, в п. б) рассмотрите остатки, которые квадраты могут давать при делении на 4, в) рассмотрите остатки, которые квадраты могут давать при делении на 5.

12. Указание. Приведите выражение к общему знаменателю и докажите, что числитель делится на 3 и на 5 (рассмотрев остатки).

Основные задачи

1. Ответ. 1946. **Указание.** Докажите, что неполные частные в обоих случаях будут одинаковыми.

2. Указание. Замените 2222 и 5555 на их остатки от деления на 7.

3. Указание. Рассмотрите остаток данного выражения от деления на 7, и используйте то, что шестая степень при делении на 7 даёт только остатки 0 и 1.

4. Ответ. 959. **Указание.** Если к искомому числу прибавить 1, то оно будет делиться на 3, на 4 и на 5.

5. Ответ. 2,5.

6. Решение. Если в десятизначном числе все цифры различны, то сумма всех цифр равна 45, а тогда оно делится на 3. Значит, искомый квадрат даёт остаток 2 от деления на 3, чего быть не может.

7. Указание. Исходное число даёт остаток 1 от деления на 9 и на 11. Сумма цифр не может быть равна 1, значит, надо доказать, что она не равна 10. Рассмотрите разность между суммой цифр на чётных и на нечётных местах и оцените её.

8. Ответ. 0. **Указание.** В каждом десятке сумма чисел будет оканчиваться на одну и ту же цифру.

9. Указание. Замените числа вида $n-k$ на сравнимые с ними числа $-k$.

10. Указание. Докажите, что это произведение делится на 3, на 4 и на 5.

11. Ответ. Решений нет. **Указание.** Рассмотрите формулы деления с остатком на 100 и на 1995, после чего приравняйте их правые части и используйте равенство из условия.

12. Ответ. 28570. **Указание.** Рассмотрите периодичность остатков чисел вида 2^n и n^2 от деления на 7.

13. Ответ. (52; 34) и (34; 52). **Указание.** Оцените число 1, после чего преобразуйте запись деления a^2+b^2 на $a+b$ с остатком, выделите полные квадраты и рассмотрите, какие последние цифры могут быть у этих квадратов.

14. Указание. Рассмотрите остатки чисел вида 2^n от деления на 5 и на 13.

15. Указание. Рассмотрите остатки от деления на 3 и на 8.

16. Указание. Обозначьте $2^n-2=nm$, после чего воспользуйтесь формулой «разность одинаковых степеней».

17. Указание. Сначала докажите утверждение для простых n, после чего докажите, что если оно верно для $n=a$ и для $n=b$, то оно верно и для $n=ab$.

18. Указание. Разность между любыми двумя составленными числами делится на 9, а значит, если одно из них делится на второе, то их разность также делится на второе, причём частное должно делиться на 9 (так как оба исходных числа на 9 не делятся), а оно не превышает 7 — противоречие.

§ 3. Десятичная запись числа

Диагностическая работа 3

1. Ответ. 214 страниц.

2. Ответ. 18 лет.

3. Ответ. 1052636842.

4. Ответ. Нет.

Подготовительные задачи

1. Указание. Используйте разложение числа по степеням числа 10 и заметьте, что любая степень числа 10 даёт остаток 1 от деления на 9.

2. Ответ. 37. **Решение.** Сократив обе части равенства $\overline{ab}\cdot a\cdot b=$ $=\overline{bbb}$ на b, получим равенство $\overline{ab}\cdot a=111$. Из разложения числа 111 на простые множители имеем $\overline{ab}=37$.

3. Ответ. а) 91112131415161718192О;
б) 101111314151617181920.

Указание. При равном количестве цифр больше то число, у которого больше цифра в старшем разряде.

4. Ответ. 72. **Указание.** Разложите 1008 (половина от 2016) на множители.

5. Ответ. 142857. **Указание.** Преобразуйте равенство к виду

$$a_n \cdot \overline{99\ldots95} = 49\overline{a_1\ldots a_n}$$

и заметьте, что тогда $\overline{99\ldots95}$ делится на 7, что возможно, если девяток не менее 4 ($n=6$).

6. Указание. Используйте признак делимости на 16.

7. Ответ. 69.

Основные задачи

1. Указание. Представьте оба числа в десятичной форме и упростите разность.

2. Указание. Представьте число в десятичной форме и воспользуйтесь формулой «квадрат суммы».

3. Указание. Полученная сумма будет делиться на 111, а $111 = 37 \cdot 3$.

4. Ответ. 89. **Решение.** $\overline{ab} = a + b^2$, $9a = b(b-1)$. Следовательно, $b=9$, а тогда $a=8$.

5. Ответ. 251. **Указание.** Оцените разность между данной дробью и $\frac{1}{2}$ сверху и снизу.

6. Ответ. Да. Например, 111…1599125. **Указание.** Подберите число, оканчивающееся на 125, чтобы сумма его цифр была равна 125.

7. Ответ. Нет. **Решение.** Имеем $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, а простое число 67 нельзя представить в виде произведения цифр.

8. Указание. Представьте число в десятичной форме.

9. Ответ. 700; 707; 770; 777. **Указание.** Докажите, что все цифры этого числа дают одинаковый остаток от деления на 7.

10. Ответ. 25; 76. **Указание.** Представьте число в десятичной форме или воспользуйтесь умножением в столбик.

11. Ответ. 376; 625. **Указание.** Представьте число в десятичной форме или воспользуйтесь умножением в столбик.

12. Ответ. Такое двузначное число единственно, это 81. Трёхзначных чисел с таким свойством не существует. **Указание.** Воспользуйтесь десятичной записью числа, чтобы составьте уравнение.

13. Указание. Воспользуйтесь десятичной записью числа и поменяйте местами цифры a_k и a_{k+1}.

14. Указание. Воспользуйтесь десятичной записью числа и поменяйте местами цифры a_{k-1} и a_{k+1}

15. Указание. Представьте число в десятичной форме и воспользуйтесь формулой «квадрат суммы».

16. Ответ. 100. **Решение.** Заметим, что для трёхзначного числа $\overline{abc}$ выполняется неравенство $\overline{abc} \leqslant 100(a+b+c)$, причём равенство достигается при $b=c=0$.

17. Ответ. 1811. **Указание.** Воспользуйтесь десятичной записью числа и сформулируйте ограничения на все цифры начиная с первой.

18. Ответ. 7; 8; 9. **Указание.** Воспользуйтесь десятичной записью числа.

19. Ответ. 101 цифра. **Указание.** Оцените отдельно степень двойки и степень пятёрки искомыми степенями числа 10, после чего перемножьте полученные двойные неравенства и решите систему.

20. Ответ. 3. **Указание.** Оцените отдельно степень двойки и степень пятёрки искомыми степенями числа 10, после чего перемножьте полученные двойные неравенства.

21. Ответ. 987654312.

22. Ответ. 7. **Решение.** Заметим, что $\frac{1}{7} = 0{,}142\ldots$, а у дробей с меньшим знаменателем такое сочетание не встречается.

23. Ответ. а) 2 числа; б) 1 и 4. **Указание.** Воспользуйтесь тем, что несократимая правильная дробь представляется в виде конечной десятичной дроби в том и только в том случае, когда её знаменатель не делится на простые числа, отличные от 2 и 5.

24. Указание. Обозначьте дробь через x и домножьте её на 10 в степени, равной количеству цифр в периоде.

25. Ответ. Нет. **Указание.** Числа, отличающиеся перестановкой цифр, дают одинаковые остатки от деления на 9.

26. Ответ. 7. **Указание.** Рассмотрите остаток числа от деления на 9 и оцените количество цифр в числе.

27. Ответ. 7. **Указание.** Рассмотрите остаток числа от деления на 9 и оцените количество цифр в числе.

28. Ответ. 143; 143. **Указание.** Если обозначить искомые трёхзначные числа через x и y, то шестизначное число будет равно $1000x+y$.

29. Ответ. 9; 11; 25. **Указание.** Оцените сумму трёх чисел, после чего сделайте перебор вариантов.

30. Ответ. а) 1667; 3334; б) 16667; 33334. **Указание.** Если x и y — искомые трёхзначные числа, то полученное число будет равно $10000x+y$ в п. а) и $100000x+y$ в п. б).

31. Ответ. 180625. **Указание.** Воспользуйтесь десятичной записью числа.

32. Ответ. 2178. **Указание.** Воспользуйтесь десятичной записью числа.

33. Ответ. 17; 34. **Указание.** Воспользуйтесь десятичной записью числа.

34. Ответ. 6; 2; 9. **Указание.** Рассмотрите разность данных чисел и докажите, что она будет делиться на 37, а следовательно, исходное трёхзначное число также должно делиться на 37.

35. Ответ. 7744. **Указание.** Искомое число делится на 11, значит, будучи точным квадратом, оно делится на 121.

36. Ответ. 29; 38; 47; 56; 65; 74; 83; 92. **Указание.** Докажите, что сумма цифр числа должна делиться на 11.

37. Ответ. $\frac{1}{37}$. **Указание.** Это значение достигается при $a = 73$, $b = 37$. Докажите, что меньше модуль разности быть не может.

38. Ответ. (12; 8) или (23; 9). **Указание.** Обозначьте через k количество цифр в числе b и запишите уравнение, заданное условием.

39. Ответ. (1; 2). **Указание.** Оцените число b степенями числа 10, а затем оцените b^2 и $\overline{ab^2}$.

40. Ответ. 183; 328; 528; 715; 999.

§ 4. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Основная теорема арифметики и её следствия

Диагностическая работа 4

1. Ответ. НОД равен 2, НОК равно $2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 67$.

2. Ответ. 43.

3. Решение. Разделив каждое из чисел на их наибольший общий делитель, получим два натуральных взаимно простых числа, сумма которых равна $240 : 30 = 8$. Число 8 можно разбить в сумму двух взаимно простых натуральных слагаемых двумя способами: $8 = 1 + 7$ или $8 = 3 + 5$. Таким образом, исходные числа могут быть равны 30 и 210 или 90 и 150.

4. Решение. Имеем $2009! + 2010! = 2009! \cdot (1 + 2010) = 2009! \cdot 2011$. Так как $2011! : (2009! \cdot 2011) = 2010$, наименьшим числом, кратным обоим этим числам, будет число 2011!.

5. Решение. Простыми множителями числа 1000 являются лишь 2 и 5. Значит, данные в условии задачи два числа могут содержать в своём разложении на простые сомножители только 2 и 5. При этом если в каком-то из этих чисел среди простых сомножителей окажутся и 2, и 5, то такое число будет кратно 10 вопреки условию. Значит, одно из данных чисел имеет своими простыми сомножителями только 2, а другое — только 5. Тогда одно из чисел равно 8, а другое — 125.

Ответ. Сумма чисел равна 133.

4.1. НОД и НОК

Подготовительные задачи

1. Ответ. 24.

2. Ответ. 1.

3. Ответ. 96.

4. Ответ. 787878.

5. Ответ. 36.

6. Ответ. 8044.

7. Ответ. 600.

8. Ответ. 32. **Указание.** Рассмотрите 2 случая: когда одно из чисел равно 2000, и когда они оба отличны от 2000.

9. Ответ. $\frac{700}{33}$. Числитель дроби должен быть равен НОК(35,28,25), а знаменатель — НОД(66, 165, 231).

10. Ответ. На 7 при $n=7k+1$, $k\in\mathbb{Z}$. **Указание.** Используйте алгоритм Евклида для нахождения НОД.

11. Ответ. 1, 3.

12. Ответ. Например, 10 и 15. **Указание.** Придумайте такие два числа, сумма которых равна квадрату их НОД.

Основные задачи

1. Ответ. 1; 2.

2. Ответ. 13 и 52. **Указание.** Используйте то, что оба этих числа делятся на 13 и являются делителями 52.

3. Ответ. (252; 36) или (180; 108). **Указание.** Если НОД$(n, k)=36$, то $k=36x$, $n=36y$.

4. Ответ. (115; 552) или (232; 435).

5. Ответ. $\frac{53}{93}$; $\frac{56}{96}$.

6. Ответ. $\frac{19}{7}$.

7. Ответ. 2; 6. **Указание.** Обозначьте НОД$(x, y)=a$ и докажите, что 6 делится на a, с помощью свойств делимости.

8. Ответ. 9. **Указание.** На 9 они все делятся, а разность между 123456789 и 123456798 равна 9, так что больше 9 НОД быть не может.

9. Ответ. 1111. **Указание.** Разделите большее число на меньшее с остатком.

10. Ответ. На 3 при $n=2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$. **Указание.** Используйте алгоритм Евклида для нахождения НОД.

11. Указание. Используйте алгоритм Евклида для нахождения НОД.

12. Ответ. 21. **Указание.** Пусть $f(n)=4^{n+2}+5^{2n+1}$. Рассмотрите разность $f(n+1)-4f(n)$. Она также должна делиться на искомый НОД.

13. Ответ. 36. **Указание.** Это возможно тогда и только тогда, когда $n+1$ взаимно просто с каждым из чисел 2, 3, …, 31.

14. Ответ. 108 или 504. **Указание.** Рассмотрите степени двойки, тройки и пятёрки, входящие в искомый НОД.

15. Ответ. 1, 2, 3, 4, 6. **Указание.** Сначала покажите, что любое число, большее 6, представимо в таком виде. Рассмотрите случаи различной чётности числа.

16. Ответ. а) $\text{НОД}(m,n)+1$; б) $m+n-\text{НОД}(m,n)$. **Указание.** Решите задачу для взаимно простых измерений, после чего сведите к ней исходную.

17. Ответ. $\dfrac{R}{\text{НОД}(R,r)}$ отметок, $\dfrac{r}{\text{НОД}(R,r)}$ оборотов. **Указание.** Вычислите путь, который проедет колесо до момента, когда гвоздь вновь попадёт в отмеченную точку.

18. Ответ. 183 (достигается, когда девять чисел равны 183, а одно — 366). **Указание.** Рассмотрите делители числа 2013.

4.2. Основная теорема арифметики. Делители

Подготовительные задачи

1. Ответ. $3\cdot 37$; $11\cdot 101$; $41\cdot 271$; $3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37$; $239\cdot 4649$.

2. Ответ. 133. **Указание.** Одно из них — степень пятёрки, а другое — степень двойки.

3. Ответ. Да, нет, нет. **Указание.** Разложите эти числа на простые множители и проверьте, будут ли все сомножители меньше 10.

4. Ответ. а) 3; б) 18; в) $\left[\dfrac{n}{2}\right]+\left[\dfrac{n}{4}\right]+\left[\dfrac{n}{8}\right]+\ldots+\left[\dfrac{n}{2^k}\right]$. **Указание.** Найдите количество чисел, делящихся на 2, количество чисел делящихся на 4, и т. д.

5. Указание. Воспользуйтесь каноническим разложением числа.

6. Указание. Число 2 входит в него в нечётной степени (1).

7. Ответ. а) 4; б) 6; в) 12; г) 20; д) $(n+1)(3n+1)$. **Указание.** Воспользуйтесь формулой для количества делителей.

8. Ответ. а) 18; б) 36; в) 1092; г) 4836. **Указание.** Воспользуйтесь формулой для суммы делителей.

Основные задачи

1. Ответ. 6; 10; 14; 30; 42; 70; 105; 210. **Указание.** $1920 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5$. Выпишите все делители числа 210 (их всего 16), из них 8 делятся на 2, а нужно выбрать как минимум 7. Рассмотрите случаи, когда выбрано число 2 (в этом случае все остальные числа должны быть чётными), и когда число 2 не выбрано.

2. Ответ. 123. **Указание.** Вычислите степень вхождения чисел 2 и 17 в разложение числа 1999!.

3. Указание. 2^{n-1} — это число способов разбить множество из n простых сомножителей на 2 подмножества.

4. Ответ. На девятую. **Решение.** Разложим число 2007 на простые множители: $2007 = 3^2 \cdot 223$. В разложении на простые множители числа 2007! показатель степени у числа 3 будет достаточно большим, так как множитель 3 входит в разложение каждого третьего числа. Множитель 223 входит только в разложение чисел вида $223p$, где p — натуральное число, не превосходящее 9. Таким образом, в разложение числа 2007! на простые множители число 223 войдёт с показателем 9. Следовательно, число 2007! будет делиться на 2007^9, но не будет делиться на 1007^{10}.

5. Ответ. $2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^6$. **Указание.** Половина искомого числа имеет все чётные степени в каноническом разложении, треть — делящиеся на 3, а пятая часть — делящиеся на 5. А в разложение этого числа входят как минимум степени чисел 2, 3 и 5.

6. Ответ. $2 \cdot 3^2 \cdot 7^6$, $2 \cdot 3^6 \cdot 7^2$, $2^2 \cdot 3 \cdot 7^6$, $2^2 \cdot 3^6 \cdot 7$, $2^6 \cdot 3^2 \cdot 7$, $2^6 \cdot 3 \cdot 7^2$. **Указание.** В разложении этого числа есть делители 2, 3 и 7, а других простых делителей искомое число не имеет, так как 42 нельзя разложить в произведение более чем трёх натуральных сомножителей, больших 1.

§ 5. Уравнения в целых числах

Диагностическая работа 5

1. Ответ. (11, 0), (−13, −2).

2. Ответ. (1, 1).

3. Ответ. $(3, 2)$.

4. Ответ. $(1, 2)$, $(1, \pm 3)$.

5. Ответ. $(-1, 0)$, $(0, 0)$.

Подготовительные задачи

1. Ответ. $(3; 2)$. **Указание.** Используйте формулу разности квадратов.

2. Ответ. 3; 4; 5.

3. Указание. 7 — нечётное число.

4. Ответ. $(2; 2)$, $(0; 0)$. **Указание.** Перенесите все слагаемые в одну часть, после чего добавьте в каждую часть по 1 и разложите получившееся выражение на множители.

5. Ответ. $(-5; -2)$, $(-3; 2)$, $(3; -2)$, $(5; 2)$. **Указание.** Число 7 можно представить в виде произведения целых чисел лишь двумя способами (без учёта перестановки чисел).

6. Ответ. $(-14; -3)$, $(-14; 3)$, $(-3; -14)$, $(-3; 14)$, $(3; -14)$, $(3; 14)$, $(14; -3)$, $(14; 3)$. **Указание.** Прибавьте к каждой части по 1 и разложите левую часть на множители.

7. Ответ. $(2, 2, 1)$. **Указание.** Дробь в левой части строго меньше 1, следовательно, $x = 2$.

8. Ответ. $(3; 5)$, $(5; 3)$. **Указание.** Добавьте в каждую часть по 1 и разложите левую часть на множители.

9. Ответ. Решений нет. **Указание.** Выделите в левой части полный квадрат и рассмотрите остатки от деления на 3.

Основные задачи

1. Ответ. $(239; 239 \cdot 240)$, $(478; 478)$, $(239 \cdot 240; 239)$. **Указание.** Домножьте уравнение на знаменатели.

2. Ответ. $(0; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 0)$, $(1; 2)$, $(2; 1)$, $(2; 2)$. **Указание.** Заметим, что $x^2 - xy + y^2 = (x+y)^2 - 3xy$. Так как $xy \leqslant \frac{(x+y)^2}{4}$, получаем $(x+y)^2 - 3xy \geqslant (x+y)^2 - 3 \cdot \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{(x+y)^2}{4}$. Таким образом, $x + y \geqslant \frac{(x+y)^2}{4}$, откуда $0 \leqslant x + y \leqslant 4$. Подставляя в исходное уравнение возможные значения $x + y$, получаем значения xy, а затем находим значения переменных.

3. Ответ. $(-1; -1)$, $(0; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 0)$. **Указание.** Добавьте в каждую часть по 1 и выделите полный квадрат в правой части.

4. Ответ. $(-4; -3)$, $(-4; 3)$, $(1; -3)$, $(1; 3)$. **Указание.** Возможны два пути решения: либо показать, что при достаточно больших по модулю x выражение $x^2 + 3x + 5$ находится между двумя последовательными квадратами, либо домножить обе части на 4 и, выделив полный квадрат, разложить на множители.

5. Ответ. Нет решений. **Указание.** Рассмотрите остатки от деления на 5.

6. Ответ. (0; 0). **Указание.** Рассмотрите остатки от деления на 3.

7. Ответ. (2; 8), (6; 28).

8. Ответ. Нет решений. **Указание.** Рассмотрите остатки от деления на 3.

9. Ответ. Нет решений. **Указание.** Рассмотрите остатки от деления на 4.

10. Ответ. Нет решений. **Указание.** Рассмотрите остатки от деления на 4.

11. Ответ. Нет решений. **Указание.** Рассмотрите остатки от деления на 5.

12. Ответ. (1; 3). **Указание.** Рассмотрите остатки от деления на 3 и на 4.

13. Ответ. (1; 2), (2; 1), $(k; k)$, где $k \in \mathbb{Z}$. **Указание.** Используйте разложение на множители.

14. Ответ. (11; 5). **Указание.** Так как $2^y < 2^x$, наибольшая степень двойки, на которую делится левая часть, равна y. А $2016 = 32 \cdot 63$. Следовательно, $y = 5$.

15. Ответ. (0; 0), (1; 2). **Указание.** Разложите на множители левую часть и рассмотрите остатки от деления на 4.

16. Ответ. (2; 1). **Указание.** Рассмотрите остатки от деления на 3 или на 4.

17. Ответ. (4; 6). **Указание.** Рассмотрите остатки от деления на 5.

18. Ответ. (0; 3), (2; 4). **Указание.** Из уравнения следует, что $2^y > 7$, т. е. $y \geqslant 3$. Значит, $x \geqslant 0$. Если $x = 0$, то $y = 3$. При $x \geqslant 1$ рассмотрите остатки от деления на 3 и на 4 и докажите, что обе переменные чётные. Дальше задача решается разложением на множители.

19. Ответ. (2; 4), (4; 2). **Указание.** Одно из возможных решений этой задачи — прологарифмировать уравнение по основанию e и исследовать функцию $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ на монотонность.

§ 6. Неравенства и оценки в задачах теории чисел

Диагностическая работа 6

1. Ответ. 1.

3. Ответ. 1999.

5. Ответ. 18.

6.1. Среднее арифметическое. Неравенство о средних

Подготовительные задачи

1. Указание. Сведите неравенство к формуле квадрата разности.

2. Указание. Домножьте неравенство на знаменатель и перенесите все в одну часть.

3. Указание. Примените два раза неравенство о средних для двух чисел.

4. Указание. Домножьте исходное неравенство на все знаменатели и упростите получившееся неравенство.

5. Указание. Примените неравенство о средних для каждой из скобок.

6. Указание. Примените неравенство о средних для трёх чисел.

7. Ответ. 8.

8. Ответ. Нет. Воспользуйтесь определением среднего арифметического и докажите, что в этом случае сумма десяти чисел будет нецелой.

9. Ответ. 1,22 м.

10. Ответ. 32.

11. Ответ. 70.

12. Указание. Примените неравенство о средних для n чисел.

Основные задачи

1. Указание. Домножьте обе части на 2. Разбейте левую часть в сумму 6 слагаемых и трижды воспользуйтесь неравенством о средних для двух чисел.

2. Указание. Домножьте обе части на 2. Разбейте левую часть в сумму 6 слагаемых и трижды воспользуйтесь неравенством о средних для двух чисел.

3. Указание. Разбейте $3x^3 = 2x^3 + x^3$ и примените неравенство о средних для трёх чисел.

4. Ответ. От 15 до 55 включительно.

5. Указание. Рассмотрите максимальное из всех чисел. Докажите, что все соседние с ним числа равны ему. Их соседи — тоже и т. д.

6. Указание. Обозначьте среднее арифметическое данных чисел через новую переменную, а в качестве второй переменной введите разность между бóльшим числом и средним арифметическим, после чего докажите, что произведение чисел будет максимальным, когда введённая разность равна нулю.

7. Ответ. 4.

8. Ответ. 96433469. **Указание.** В искомом числе разница между цифрой и следующей за ней убывает. Отсюда и из того, что все цифры не больше 9, следует, что цифр в искомом числе не более 8. Следовательно, осталось подобрать восьмизначное число, причём набор разностей должен быть таким: 3, 2, 1, 0, −1, −2, −3.

9. Ответ. а) 44; б) отрицательных; в) 17. **Указание.** Обозначьте через три переменные количество положительных чисел, количество отрицательных и количество нулей в нашем наборе, после чего воспользуйтесь определением среднего арифметического.

6.2. Неравенства и оценки

Подготовительные задачи

1. Ответ. (1; 2), (2; 1).

2. Ответ. (0; 0), (1; 0), (−1; 0), (−1; 1), (0; 1), (1; 1), (−1; 2), (0; 2), (1; 2). **Указание.** Ограничьте множество возможных значений y.

3. Ответ. 3^{200}. **Указание.** Представьте оба выражения как сотые степени.

4. Ответ. 3^{28}. Представьте оба выражения как четвёртые степени.

5. Ответ. 4^{200}. **Указание.** Воспользуемся неравенством $2^{100}+2^{100}<<4^{100}$.

6. Ответ. 1234568^2. **Указание.** Воспользуйтесь формулой разности квадратов.

7. Ответ. 51^{101}. **Указание.** Воспользуйтесь формулой разности квадратов 50 раз.

8. Указание. Если $n>2$, то $n^2=n\cdot n>2n$.

9. Ответ. −1; 3. **Указание.** Оцените x сверху из области определения корня и снизу из условия, что правая часть должна быть неотрицательной.

10. Ответ. −2.

Основные задачи

1. Указание. Докажите, что $26^{15}<10^{23}$. Для этого, например, воспользуйтесь оценкой $26^2<10^3$.

2. Ответ. 31. **Указание.** Докажите, что $2^{100}>10^{30}$, а затем — что $2^{100}<10^{31}$. Для доказательства второго неравенства можно воспользоваться оценкой $5^7>2^{16}$.

3. Ответ. 17^{14}. **Указание.** Докажите, что $32^{11}<16^{14}$.

4. Ответ. 8^{85}. **Указание.** Представьте 8^{85} как степень двойки, после чего каждое из трёх неравенств докажется с помощью сокращения показателей и базовых оценок: $2^5>5^2$, $2^5>3^3$, $2^{17}>7^6$.

5. Указание. Первые четыре слагаемых данной алгебраической суммы уже больше $\frac{1}{5}$.

6. Ответ. $-\frac{47}{3}$. **Указание.** Воспользуйтесь тем, что $\frac{3x+41}{3}$ — целое число, обозначьте это целое число через новую переменную, выразите через неё x и подставьте результат в выражение $\frac{2x+17}{10}$.

7. Ответ. $-\frac{1}{4}$; 0; $\frac{7}{2}$. **Указание.** Если $[n]<0$, то $2^{[n]}\in(0;1)$, а значит, и $2n+1\in(0;1)$, из чего следует, что $n\in\left(-\frac{1}{2};0\right)$. Тогда $[n]=-1$, откуда легко найти n. Если же $[n]\geqslant 4$, то решений нет, так как левая часть больше правой. Остальные случаи нетрудно перебрать.

8. Ответ. 1, 2, …, 2008. **Указание.** Докажите, что

$$2008\cdot 1004<2008\sqrt{1004^2+1}<2008\cdot 1004+1,$$

откуда будет следовать, что $\left[2008\sqrt{1004^2+1}\right]=2008\cdot 1004$.

9. Ответ. $(-7;7)$, $(-6;6)$. **Указание.** Поделите первое неравенство на 2 и выделите в нём полные квадраты.

10. Ответ. 24. **Указание.** Обозначьте через переменные производительность и время работы мастера, после чего составьте уравнение и выразите в нём производительность через время.

§ 7. Последовательности и прогрессии

Диагностическая работа 7

1. Ответ. 50.

2. Ответ. 11.

3. Ответ. 54850.

4. Ответ. $\frac{4}{3}$.

5. Ответ. 931.

Подготовительные задачи

1. Ответ. -25; -115.

2. Ответ. 15. **Указание.** Воспользуйтесь характеристическим свойством арифметической прогрессии.

3. Ответ. 0.

4. Ответ. 2.

5. Ответ. 1024. **Указание.** Воспользуйтесь характеристическим свойством геометрической прогрессии.

6. Ответ. 6; 10. **Указание.** Произведение четырнадцатого и второго членов геометрической прогрессии равно произведению её шестого и десятого членов.

7. Ответ. 25. **Указание.** Произведение шестого и восьмого членов геометрической прогрессии равно произведению её пятого и девятого членов.

8. Ответ. 420. **Указание.** Найдите первый отрицательный член данной прогрессии.

9. Ответ. 64. **Указание.** Воспользуйтесь неравенством о средних для трёх чисел.

10. Ответ. Нет. **Указание.** Если цифры образуют арифметическую прогрессию, то их сумма делится на 3.

Основные задачи

1. Ответ. 1; 3267. **Указание.** Докажите, что эта сумма всегда нечётна.

2. Ответ. Нет. **Указание.** Отношение между разностью двух членов арифметической прогрессии и разностью других двух её членов должно быть рациональным.

3. Ответ. $\left(\frac{85}{18}; 5\right]$.

4. Ответ. -8. **Указание.** Выразите все указанные члены прогрессии как функцию от разности.

5. Ответ. 8.

6. Ответ. 4.

7. Ответ. ± 400.

8. Ответ. 1, 3, 5, 7, … **Указание.** S_n является квадратичной функцией от n, а для функции $f(n) = an^2 + bn + c$ свойство $f(n) \cdot f(m) = f(mn)$ выполняется только при $a = 1$, $b = c = 0$.

9. Указание. Как может измениться $|x|$, если x увеличился на 1?

10. Ответ. 1; 4; 7 или 7; 4; 1.

11. Ответ. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

12. Ответ. 3; 15; 27.

13. Ответ. 3; 13; 23. **Указание.** Как минимум одно из этих чисел должно делиться на 3.

14. Ответ. (2; 3), (3; 5; 7). **Указание.** Если чисел не менее трёх, то как минимум одно из них делится на 3.

15. Ответ. Да, $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.

16. Ответ. Неверно. (Пример: $a_n = 2^{\frac{n-1}{9}}$.)

17. Ответ. $a_n = (5-n) \cdot 5^{n-1}$.

18. Ответ. -6. **Указание.** Докажите, что каждое число не превосходит 0,5.

19. Ответ. а) нет; б) может, например, $\{11 \cdot 97; 97; 11 \cdot 97\}$; в) 371. **Указание.** а) Рассмотрите чётность суммы этих двух членов. в) Минимально возможный вариант — когда чередуются числа 1 и 11.

20. Ответ. а) нет; б) нет; в) да (например, $1, 2$ и 4). **Указание.** а) Если 5 чисел образуют геометрическую прогрессию, то их произведение равно пятой степени среднего члена прогрессии. б) В этом случае если первый член искомой прогрессии равен b_1 а знаменатель — q, то произведение четырёх членов прогрессии равно $b_1^4 q^6$. Дальнейший краткий перебор результатов не даст.

Содержание

Учебно-методическое пособие

Георгий Игоревич Вольфсон
Максим Яковлевич Пратусевич
Сергей Евгеньевич Рукшин
Константин Михайлович Столбов
Иван Валериевич Ященко

ЕГЭ 2017. Математика. Арифметика и алгебра.
Задача 19 (профильный уровень)

Под редакцией И. В. Ященко

Подписано в печать 01.08.2016 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 7. Тираж 3000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–08–04.

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель Пресс“».
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89.
E-mail: mittelpress@mail.ru

**ОПТОВЫЕ И РОЗНИЧНЫЕ ЗАКАЗЫ
В МОСКВЕ И РЕГИОНАХ –
В МАГАЗИНЕ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КНИГА»**

в здании Московского центра непрерывного математического образования (МЦНМО)

119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.
(м. «Смоленская», «Кропоткинская»)
Ежедневно, 10.00–20.00, кроме воскресенья

biblio.mccme.ru • e-mail: biblio@mccme.ru

ИНТЕРНЕТ-МАГАЗИН biblio.mccme.ru
8 (499) 241-72-85 • 8 (495) 745-80-31

**ОПТОВЫЕ И РОЗНИЧНЫЕ ЗАКАЗЫ В РЕГИОНАХ –
КНИГОТОРГОВАЯ КОМПАНИЯ «АБРИС»**

абрис
Книготорговая компания

абрис.рф • www.textbook.ru
МОСКВА: 8 (495) 229-67-59
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ: 8 (812) 327-04-50
e-mail: info@prosv-spb.ru
СИМФЕРОПОЛЬ: 8 (0652) 788-365
8-978-091-05-91
znanie@textbook.ru
Оптовые заказы: abrisd@textbook.ru
Розничные заказы:
ИНТЕРНЕТ-МАГАЗИН UMLIT.RU
www.umlit.ru
e-mail: zakaz@umlit.ru
8 (495) 981-10-39

ISBN 978-5-4439-1089-5
9 785443 910895 >

12+