

Математика ЕГЭ 2014 (система задач из открытого банка заданий)

Задания В13

Текстовые задачи

Материалы подготовили:

Корянов А. Г. (г. Брянск); e-mail: akoryanov@mail.ru
Надежкина Н.В. (г. Иркутск); e-mail: nadezhkina@yahoo.com

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	1
I. Задачи на движение	2
1. Движение по прямой дороге	3
2. Движение по замкнутой дороге	8
3. Движение по реке	9
4. Движение протяженных тел	13
5. Средняя скорость	15
II. Задачи на работу	16
1. Явный объем работы	16
2. Неявный объем работы	19
III. Задачи на проценты	21
1. Части и проценты	21
2. Процентное сравнение величин	22
3. Сложные проценты	23
IV. Задачи на концентрацию	25
V. Задачи на арифметическую прогрессию	28
VI. Задачи на геометрическую прогрессию	31
Дополнительные задачи	31
Решения заданий-прототипов	46
Ответы	66
Список и источники литературы	68

Элементы содержания, проверяемые заданиями В13: уравнения.

Проверяемые требования (умения) в заданиях В13: моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

Введение

Данное пособие является тринадцатым в серии пособий для подготовки к части В ЕГЭ по математике и посвящено решению задачи В13 – так называемой «текстовой задачи». Среди задач пособия есть и задачи «на движение», и задачи «на работу», и задачи «на проценты и сплавы», и задачи «на прогрессию».

Задачи эти, можно сказать, весьма стандартные и традиционные – подобные задачи решали в свое время, наверное, не только мамы и папы, но и бабушки и дедушки современных школьников. Задачи, казалось бы, еще и несложные – уровня основной школы. И вроде бы особых вопросов это задание части В вызывать не должно.

В то же время, согласно «краткому анализу выполнения задания в 2012 году» [2], на реальном экзамене для задания В13 «Средний процент правильных ответов - 49,6%... Высокий процент тех, кто даже не приступал к решению». Опытные репетиторы формулируют это так: «Когда 11-классники приходят готовиться к ЕГЭ, большинство не просто *не решает* В13. Они задачу даже *не читают*, сразу говорят – такие задачи решать не умею».

Сложность выполнения данного задания для современных школьников нашла свое отражение и в том, что в новейшей демоверсии варианта ЕГЭ по математике задача В13 имеет новый номер В14 и относится уже ко «второй части» варианта.

А ведь большинство задач В13 решается по вполне четким алгоритмам с использованием ясных и понятных формул

и схем. По опыту авторов, научить решать большинство задач В13, содержащихся в открытом банке, можно практически любого выпускника. Безусловно, при этом определяющими факторами являются желание и стремление ученика, а также математическая и методическая грамотность преподавателя, его умение четко и ясно изложить на первых порах именно алгоритмы решения. Без первых удачных опытов у ученика не пройдет страх перед текстовыми задачами, а для этих опытов, на наш взгляд, нужны именно четкие алгоритмы.

Именно в решении этих вопросов и призвано помочь данное пособие. В качестве практического материала авторами были использованы задачи «от составителей» из «открытого банка заданий» [6], а также некоторые задачи из контрольных измерительных материалов прошлых лет.

Структура пособия такова, что задачи из «открытого банка заданий», наряду с фиксированным номером из открытого банка заданий (он расположен в скобках непосредственно перед текстом задачи), имеют также собственную тройную нумерацию внутри каждого раздела. Все типы задач из «открытого банка заданий» систематизированы по содержанию. Каждый тип задачи представлен тремя задачами (первая из этих трех задач и есть прототип данного типа задач), что позволяет учащемуся при необходимости неоднократно проверить себя, а учителю - использовать дополнительные задания в виде отдельных, уже готовых трех вариантов для домашних или проверочных работ. Таким образом, первое число в тройной нумерации каждой задачи означает номер раздела, второе число – номер типа задачи внутри раздела, третье число - номер задачи внутри типа (или номер варианта).

Для первых задач каждого типа представлены подробные решения, для всех задач есть ответы.

Мы постарались сделать так, чтобы пособие было полезно и для ученика практически любого уровня подготовки, и для учителя, и для репетитора. Ответы

и решения задач-прототипов представлены отдельно для того, чтобы в конкретном экземпляре пособия можно было легко оставить только нужную форму ответов или решений для проверки либо самопроверки. Например, в экземплярах пособий, предлагаемых для уверенных в своих силах учеников, можно вообще убрать и ответы, и решения. Для менее уверенных в своих силах учащихся можно оставить только решения задач-прототипов. Для учителя и репетитора необходимы как раз ответы ко всем задачам для упрощения процесса проверки и оценки домашних и самостоятельных работ.

I. Задачи на движение

- Если нет специальных оговорок, то движение считается равномерным, при этом пройденный путь определяется по формуле:

$$S = v \cdot t,$$

где S – расстояние, пройденное телом; v – скорость движения тела; t – время движения тела.

Отсюда $v = \frac{S}{t}$ и $t = \frac{S}{v}$.

- Все величины (расстояние, скорость, время) считаются положительными:

$$S > 0; v > 0; t > 0.$$

- Указанные величины должны быть в одной системе единиц.

Расстояние	Скорость	Время
км	км/ч	ч
м	м/с	с
м	м/мин	мин

- Скорость с разными единицами измерения

$$1 \text{ км/ч} = \frac{1000 \text{ м}}{3600 \text{ с}} = \frac{5}{18} \text{ м/с};$$

$$90 \text{ км/ч} = 90 \cdot \frac{5}{18} \text{ м/с} = 25 \text{ м/с};$$

$$1 \text{ м/с} = \frac{18}{5} \text{ км/ч};$$

$$10 \text{ м/с} = 10 \cdot \frac{18}{5} \text{ км/ч} = 36 \text{ км/ч}$$

$$1 \text{ км/ч} = \frac{1000 \text{ м}}{60 \text{ мин}} = \frac{50}{3} \text{ м/мин};$$

$$30 \text{ км/ч} = 30 \cdot \frac{50}{3} \text{ м/мин} = 500 \text{ м/мин};$$

$$1 \text{ м/мин} = \frac{3}{50} \text{ км/ч};$$

$$100 \text{ м/мин} = 100 \cdot \frac{3}{50} \text{ км/ч} = 6 \text{ км/ч}.$$

- Повороты движущихся тел, переходы на новый режим движения считаются происходящими мгновенно.

- Время движения и расстояние, пройденное телом (при постоянной скорости) – прямо пропорциональные величины:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{S_1}{S_2}.$$

- Скорость движения и расстояние, пройденное телом (при постоянном времени) – прямо пропорциональные величины:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_1}{S_2}.$$

- Скорость движения и время движения (при постоянном расстоянии) – обратно пропорциональные величины:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_2}{t_1}.$$

1. Движение по прямой дороге

- При решении задач на равномерное движение часто встречаются две ситуации.

Если начальное расстояние между объектами равно S , а скорости объектов v_1 и v_2 , то:

а) при движении объектов навстречу друг другу время, через которое они встретятся, равно $t = \frac{S}{v_1 + v_2}$;

б) при движении объектов в одну сторону ($v_1 > v_2$) время, через которое пер-

вый объект догонит второй, равно $t = \frac{S}{v_1 - v_2}$.

Пример 1. Поезд, пройдя 450 км, был остановлен из-за снежного заноса. Через полчаса путь был расчищен, и машинист, увеличив скорость поезда на 15 км/ч, привел его на станцию без опоздания. Найдите первоначальную скорость поезда, если путь, пройденный им до остановки, составил 75% всего пути.

Решение. Так как $75\% = 0,75$, то весь путь составил $450 : 0,75 = 600$ км. Пусть первоначальная скорость поезда равна x км/ч. После остановки скорость поезда составила $(x + 15)$ км/ч.

$\frac{450}{x}$ ч – время движения поезда до остановки.

$600 - 450 = 150$ (км) – расстояние, пройденное поездом после остановки.

$\frac{150}{x + 15}$ ч – время движения поезда после остановки.

Поезд стоял $\frac{1}{2}$ часа, поэтому

$\left(\frac{450}{x} + \frac{1}{2} + \frac{150}{x + 15} \right)$ ч – фактическое время движения поезда.

$\frac{600}{x}$ ч – время движения поезда по расписанию.

Так как поезд прибыл без опоздания, то составим и решим уравнение

$$\frac{450}{x} + \frac{1}{2} + \frac{150}{x + 15} = \frac{600}{x}.$$

$$\frac{1}{2} + \frac{150}{x + 15} = \frac{150}{x}.$$

Умножим обе части уравнения на $2x(x + 15) > 0$.

$$x(x + 15) + 300x = 300(x + 15).$$

$$x^2 + 15x + 300x = 300x + 4500.$$

$$x^2 + 15x - 4500 = 0.$$

Квадратное уравнение имеет один положительный корень 60. Следовательно, первоначальная скорость поезда равна 60 км/ч.

Для решения подобных задач удобно составить таблицу, используя так называемую «схему $S - v - t$ ». За неизвестное в дальнейшем всегда будем обозначать то, что требуется найти в условии. Рассмотрим движение после остановки по расписанию и фактически.

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
По расписанию	150	x	$\frac{150}{x}$
Фактически	150	$x + 15$	$\frac{150}{x + 15}$

Так как после остановки поезд затратил на $\frac{1}{2}$ часа меньше, чем по расписанию,

то составим уравнение $\frac{150}{x} - \frac{150}{x + 15} = \frac{1}{2}$.

Это уравнение уже решено выше и имеет один положительный корень 60.

Ответ: 60 км/ч.

1.1.1.(прототип 99588) Из двух городов, расстояние между которыми равно 560 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля. Через сколько часов автомобили встретятся, если их скорости равны 65 км/ч и 75 км/ч?

1.1.2.(112399) Из двух городов, расстояние между которыми равно 480 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля. Через сколько часов автомобили встретятся, если их скорости равны 75 км/ч и 85 км/ч?

1.1.3.(112453) Из двух городов, расстояние между которыми равно 260 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля. Через сколько часов автомобили встретятся, если их скорости равны 50 км/ч и 80 км/ч?

1.2.1.(прототип 99589) Из городов А и В, расстояние между которыми равно 330 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля и встретились через 3 часа на расстоянии 180 км от города В. Найдите скорость автомобиля, выехавшего из города А. Ответ дайте в км/ч.

1.2.2.(112459) Из городов А и В, расстояние между которыми равно 440 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля и встретились через 4 часа на расстоянии 240 км от города В. Найдите скорость автомобиля, выехавшего из города А. Ответ дайте в км/ч.

1.2.3.(112511) Из городов А и В, расстояние между которыми равно 450 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля и встретились через 3 часа на расстоянии 240 км от города В. Найдите скорость автомобиля, выехавшего из города А. Ответ дайте в км/ч.

1.3.1.(прототип 99595) Два пешехода отправляются одновременно в одном направлении из одного и того же места на прогулку по аллее парка. Скорость первого на 1,5 км/ч больше скорости второго. Через сколько минут расстояние между пешеходами станет равным 300 метрам?

1.3.2.(113377) Два пешехода отправляются одновременно в одном направлении из одного и того же места на прогулку по аллее парка. Скорость первого на 0,5 км/ч больше скорости второго. Через сколько минут расстояние между пешеходами станет равным 425 метрам?

1.3.3.(113437) Два пешехода отправляются одновременно в одном направлении из одного и того же места на прогулку по аллее парка. Скорость первого на 2 км/ч больше скорости второго. Через сколько минут расстояние между пешеходами станет равным 400 метрам?

1.4.1.(прототип 99590) Расстояние между городами А и В равно 435 км. Из города А в город В со скоростью 60 км/ч выехал первый автомобиль, а через час после этого навстречу ему из города В выехал со скоростью 65 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города А автомобили встретятся? Ответ дайте в километрах.

1.4.2.(112519) Расстояние между городами А и В равно 440 км. Из города А в город В со скоростью 50 км/ч выехал первый автомобиль, а через час после этого навстречу ему из города В выехал со ско-

ростью 80 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города А автомобили встретятся? Ответ дайте в километрах.

1.4.3.(112799) Расстояние между городами А и В равно 550 км. Из города А в город В со скоростью 50 км/ч выехал первый автомобиль, а через час после этого навстречу ему из города В выехал со скоростью 75 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города А автомобили встретятся? Ответ дайте в километрах.

1.5.1.(прототип 99591) Расстояние между городами А и В равно 470 км. Из города А в город В выехал первый автомобиль, а через 3 часа после этого навстречу ему из города В выехал со скоростью 60 км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 350 км от города А. Ответ дайте в км/ч.

1.5.2.(112801) Расстояние между городами А и В равно 330 км. Из города А в город В выехал первый автомобиль, а через час после этого навстречу ему из города В выехал со скоростью 75 км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 180 км от города А. Ответ дайте в км/ч.

1.5.3.(113079) Расстояние между городами А и В равно 450 км. Из города А в город В выехал первый автомобиль, а через час после этого навстречу ему из города В выехал со скоростью 70 км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 240 км от города А. Ответ дайте в км/ч.

1.6.1.(прототип 26580) Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 75 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что за час автомобилист проезжает на 40 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт В на 6 часов позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

1.6.2.(5957) Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 60 км, одновременно выехали автомобилист и вело-

сипедист. Известно, что в час автомобилист проезжает на 110 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт В на 5,5 часов позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

1.6.3.(39175) Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 50 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что в час автомобилист проезжает на 65 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт В на 4 часа 20 минут позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

1.7.1.(прототип 26581) Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 70 км. На следующий день он отправился обратно в А со скоростью на 3 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 3 часа. В результате велосипедист затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из В в А. Ответ дайте в км/ч.

1.7.2.(5639) Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 240 км. На следующий день он отправился обратно в А со скоростью на 1 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 1 час. В результате велосипедист затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из В в А. Ответ дайте в км/ч.

1.7.3.(39213) Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 180 км. На следующий день он отправился обратно в А со скоростью на 8 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 8 часов. В результате велосипедист затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из В в А. Ответ дайте в км/ч.

1.8.1.(прототип 26582) Велосипедист выехал с постоянной скоростью из горо-

да А в город В, расстояние между которыми равно 98 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 7 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 7 часов. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В. Ответ дайте в км/ч.

1.8.2.(5627) Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 80 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 2 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 2 часа. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В. Ответ дайте в км/ч.

1.8.3.(39257) Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 154 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 3 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 3 часа. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В. Ответ дайте в км/ч.

1.9.1.(прототип 26583) Два велосипедиста одновременно отправились в 240-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 1 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 1 час раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

1.9.2.(5675) Два велосипедиста одновременно отправились в 154-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 3 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 3 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

1.9.3.(39301) Два велосипедиста одновременно отправились в 80-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 2 км/ч большей, чем ско-

рость второго, и прибыл к финишу на 2 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

1.10.1.(прототип 26584) Два велосипедиста одновременно отправились в 88-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 3 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 3 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

1.10.2.(5661) Два велосипедиста одновременно отправились в 96-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 4 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 4 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

1.10.3.(39349) Два велосипедиста одновременно отправились в 224-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 2 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 2 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

1.11.1.(прототип 99592) Из городов А и В одновременно навстречу друг другу выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в В на 3 часа раньше, чем велосипедист приехал в А, а встретились они через 48 минут после выезда. Сколько часов затратил на путь из В в А велосипедист?

1.11.2.(113083) Из городов А и В одновременно навстречу друг другу выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в В на 10 часов раньше, чем велосипедист приехал в А, а встретились они через 55 минут после выезда. Сколько часов затратил на путь из В в А велосипедист?

1.11.3.(113101) Из городов А и В одновременно навстречу друг другу выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в В на 4 часа раньше, чем велосипедист приехал в А, а встретились они через 50 минут после выезда. Сколь-

ко часов затратил на путь из В в А велосипедист?

1.12.1.(прототип 99593) Товарный поезд каждую минуту проезжает на 750 метров меньше, чем скорый, и на путь в 180 км тратит времени на 2 часа больше, чем скорый. Найдите скорость товарного поезда. Ответ дайте в км/ч.

1.12.2.(113105) Товарный поезд каждую минуту проезжает на 400 метров меньше, чем скорый, и на путь в 270 км тратит времени на 3 часа больше, чем скорый. Найдите скорость товарного поезда. Ответ дайте в км/ч.

1.12.3.(113153) Товарный поезд каждую минуту проезжает на 300 метров меньше, чем скорый, и на путь в 420 км тратит времени на 3 часа больше, чем скорый. Найдите скорость товарного поезда. Ответ дайте в км/ч.

1.13.1.(прототип 99594) Расстояние между городами А и В равно 150 км. Из города А в город В выехал автомобиль, а через 30 минут следом за ним со скоростью 90 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите расстояние от А до С. Ответ дайте в километрах.

1.13.2.(113155) Расстояние между городами А и В равно 630 км. Из города А в город В выехал автомобиль, а через 2 часа следом за ним со скоростью 60 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите расстояние от А до С. Ответ дайте в километрах.

1.13.3.(113369) Расстояние между городами А и В равно 348 км. Из города А в город В выехал автомобиль, а через 1 час следом за ним со скоростью 85 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите расстояние от А до С. Ответ дайте в километрах.

1.14.1.(прототип 26578) Из А в В одновременно выехали два автомобилиста.

Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 24 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, на 16 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в пункт В одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

1.14.2.(5619) Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 42 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, на 28 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в пункт В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

1.14.3.(39049) Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 55 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, на 6 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в пункт В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

1.15.1.(прототип 26579) Из А в В одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 13 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 78 км/ч, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше 48 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

1.15.2.(5617) Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 16 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 96 км/ч, в результате чего прибыл в пункт В одновременно с первым автомобилем. Найдите

скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 57 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

1.15.3.(39099) Из А в В одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 12 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 90 км/ч, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше 50 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

2. Движение по замкнутой дороге

• Если длина замкнутой дороги равна S , а скорости объектов v_1 и v_2 , то:

а) при движении объектов в разных направлениях время между их встречами вычисляется по формуле $t = \frac{S}{v_1 + v_2}$;

б) при движении объектов в одном направлении время между их встречами вычисляется по формуле $t = \frac{S}{v_1 - v_2}$ ($v_1 > v_2$).

Пример 2. На соревнованиях по кольцевой трассе один лыжник проходит круг на 2 мин быстрее другого и через час обошел его ровно на круг. За какое время каждый лыжник проходит круг?

Решение. Пусть S м — длина кольцевой трассы и x м/мин и y м/мин — скорости первого и второго лыжников соответственно ($x > y$). Тогда $\frac{S}{x}$ мин и $\frac{S}{y}$ мин — время, за которое проходит круг первый и второй лыжники соответственно. Из первого условия получаем уравнение $\frac{S}{y} - \frac{S}{x} = 2$. Так как скорость удаления первого лыжника от второго лыжника равна $(x - y)$ м/мин, то из второго условия имеем уравнение $\frac{S}{x - y} = 60$. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{S}{y} - \frac{S}{x} = 2, \\ \frac{x}{S} - \frac{y}{S} = \frac{1}{60}. \end{cases}$$

Сделаем замену $\frac{S}{x} = a$ и $\frac{S}{y} = b$, тогда

система уравнений примет вид

$$\begin{cases} b - a = 2, \\ \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{60}. \end{cases}$$

Получаем уравнение $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+2} = \frac{1}{60}$.

Умножим обе части уравнения на $60a(a+2) > 0$.

$$60(a+2) - 60a = a(a+2).$$

$$a^2 + 2a - 120 = 0.$$

Квадратное уравнение имеет один положительный корень $a = 10$, тогда $b = 12$. Значит, первый лыжник проходит круг за 10 минут, а второй лыжник — за 12 минут.

Ответ: 10 мин; 12 мин.

2.1.1.(прототип 99596) Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 14 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 21 км/ч больше скорости другого?

2.1.2.(113443) Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 22 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 20 км/ч больше скорости другого?

2.1.3.(113589) Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 5 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 5 км/ч больше скорости другого?

2.2.1.(прототип 99598) Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 14 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 80 км/ч, и через 40 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

2.2.2.(113665) Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 12 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 101 км/ч, и через 20 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

2.2.3.(114153) Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 44 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 112 км/ч, и через 48 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

2.3.1.(прототип 99599) Из пункта А круговой трассы выехал велосипедист, а через 30 минут следом за ним отправился мотоциклист. Через 10 минут после отправления он догнал велосипедиста в первый раз, а еще через 30 минут после этого догнал его во второй раз. Найдите скорость мотоциклиста, если длина трассы равна 30 км. Ответ дайте в км/ч.

2.3.2.(114157) Из пункта А круговой трассы выехал велосипедист, а через 40 минут следом за ним отправился мотоциклист. Через 8 минут после отправления он догнал велосипедиста в первый раз, а еще через 36 минут после этого догнал его во второй раз. Найдите скорость мотоциклиста, если длина трассы равна 30 км. Ответ дайте в км/ч.

2.3.3.(114653) Из пункта А круговой трассы выехал велосипедист, а через 10 минут следом за ним отправился мотоциклист. Через 2 минуты после отправления он догнал велосипедиста в первый раз, а еще через 3 минуты после этого догнал его во второй раз. Найдите скорость

мотоциклиста, если длина трассы равна 5 км. Ответ дайте в км/ч.

2.4.1.(прототип 99600) Часы со стрелками показывают 8 часов 00 минут. Через сколько минут минутная стрелка в четвертый раз поравняется с часовой?

2.4.2.(114665) Часы со стрелками показывают 4 часа 45 минут. Через сколько минут минутная стрелка в седьмой раз поравняется с часовой?

2.4.3.(114781) Часы со стрелками показывают 6 часов 40 минут. Через сколько минут минутная стрелка в пятый раз поравняется с часовой?

3. Движение по реке

- Если объект движется по течению реки, то его скорость равна $v_{\text{по теч.}} = v_{\text{соб.}} + v_{\text{теч.}}$.

- Если объект движется против течения реки, то его скорость равна $v_{\text{против теч.}} = v_{\text{соб.}} - v_{\text{теч.}}$.

- Собственная скорость объекта (скорость в неподвижной воде) равна

$$v_{\text{соб.}} = \frac{v_{\text{по теч.}} + v_{\text{пр. теч.}}}{2}.$$

- Скорость течения реки равна

$$v_{\text{теч.}} = \frac{v_{\text{по теч.}} - v_{\text{пр. теч.}}}{2}.$$

- Скорость движения плота равна скорости течения реки.

Пример 3. Катер спустился вниз по течению реки на 50 км, а затем прошел в обратном направлении 36 км, что заняло у него на 30 минут больше времени, чем по течению. Какова собственная скорость катера, если скорость течения реки 4 км/ч?

Решение. Пусть собственная скорость катера равна x км/ч, тогда его скорость по течению реки равна $(x+4)$ км/ч, а против течения реки $(x-4)$ км/ч. Время движения катера по течению реки равно $\frac{50}{x+4}$

ч, а против течения реки — $\frac{36}{x-4}$ ч.

Так как $30 \text{ минут} = \frac{1}{2} \text{ ч}$, то согласно условию задачи составим уравнение $\frac{36}{x-4} - \frac{50}{x+4} = \frac{1}{2}$. Умножим обе части уравнения на $(x-4)(x+4) > 0$.

$$72(x+4) - 100(x-4) = (x-4)(x+4).$$

$$x^2 + 28x - 704 = 0.$$

$$\frac{D}{4} = 14^2 + 704 = 900 = 30^2.$$

$x_1 = -14 + 30 = 16$; $x_2 = -14 - 30 = -44$ (исключаем, так как $x > 0$).

Итак, собственная скорость катера равна 16 км/ч.

Ответ: 16 км/ч.

Пример 4. Моторная лодка прошла по течению реки 36 км, а против течения 48 км, затратив на весь путь столько времени, сколько надо на прохождение 90 км по озеру. Найдите собственную скорость лодки, если скорость лодки равна 3 км/ч.

Решение. Пусть собственная скорость лодки составляет x км/ч. Составим таблицу.

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
Против течения	48	$x - 3$	$\frac{48}{x-3}$
По течению	36	$x + 3$	$\frac{36}{x+3}$
По озеру	90	x	$\frac{90}{x}$

Согласно условию задачи составим уравнение

$$\frac{36}{x+3} + \frac{48}{x-3} = \frac{90}{x}.$$

$$\frac{6}{x+3} + \frac{8}{x-3} = \frac{15}{x}.$$

Умножим обе части уравнения на $x(x-3)(x+3) > 0$.

$$6x(x-3) + 8x(x+3) = 15(x-3)(x+3).$$

$$x^2 - 6x - 135 = 0.$$

$$\frac{D}{4} = 3^2 + 135 = 144 = 12^2.$$

$x_1 = 3 + 12 = 15$; $x_2 = 3 - 12 = -9$ (не удовлетворяет условию $x > 0$).

Значит, собственная скорость моторной лодки равна 15 км/ч.

Ответ: 15 км/ч.

3.1.1.(прототип 26585) Моторная лодка прошла против течения реки 112 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 11 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

3.1.2.(5703) Моторная лодка прошла против течения реки 195 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 14 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

3.1.3.(39353) Моторная лодка прошла против течения реки 60 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 часа меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 8 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

3.2.1.(прототип 26586) Моторная лодка прошла против течения реки 255 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

3.2.2.(5691) Моторная лодка прошла против течения реки 72 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

3.2.3.(39371) Моторная лодка прошла против течения реки 221 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 часа меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

3.3.1.(прототип 26587) Моторная лодка в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 30 км от А. Пробыв в

пункте В 2 часа 30 минут, лодка отправилась назад и вернулась в пункт А в 18:00. Определите (в км/час) собственную скорость лодки, если известно, что скорость течения реки 1 км/ч.

3.3.2.(5969) Лодка в 9:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 2 часа, лодка отправилась назад и вернулась в пункт А в 19:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость лодки, если известно, что скорость течения реки 1 км/ч.

3.3.3.(5985) Катер в 11:00 вышел из пункта А в пункт В, расположенный в 30 км от А. Пробыв в пункте В 2 часа 40 минут, катер отправился назад и вернулся в пункт А в 19:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость катера, если известно, что скорость течения реки 3 км/ч.

3.4.1.(прототип 26588) Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 200 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 15 км/ч, стоянка длится 10 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 40 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

3.4.2.(5739) Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 399 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 20 км/ч, стоянка длится 2 часа, а в пункт отправления теплоход возвращается через 42 часа после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

3.4.3.(39443) Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 247 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 16 км/ч, стоянка длится 7 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 39 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

3.5.1.(прототип 26589) Теплоход проходит по течению реки до пункта назначе-

ния 255 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч, стоянка длится 2 часа, а в пункт отправления теплоход возвращается через 34 часа после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

3.5.2.(5721) Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 336 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 5 км/ч, стоянка длится 10 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 48 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

3.5.3.(5737) Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 513 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 4 км/ч, стоянка длится 8 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 54 часа после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

3.6.1.(прототип 26590) От пристани А к пристани В, расстояние между которыми равно 420 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 1 час после этого следом за ним, со скоростью на 1 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт В оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

3.6.2.(5759) От пристани А к пристани В, расстояние между которыми равно 168 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 2 часа после этого следом за ним, со скоростью на 2 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт В оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

3.6.3.(39507) От пристани А к пристани В, расстояние между которыми равно 209 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 8 часов после этого следом за ним, со скоростью на 8 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, ес-

ли в пункт В оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

3.7.1.(прототип 26591) От пристани А к пристани В, расстояние между которыми равно 110 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 1 час после этого следом за ним, со скоростью на 1 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость второго теплохода, если в пункт В он прибыл одновременно с первым. Ответ дайте в км/ч.

3.7.2.(5773) От пристани А к пристани В, расстояние между которыми равно 176 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 5 часов после этого следом за ним, со скоростью на 5 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость второго теплохода, если в пункт В он прибыл одновременно с первым. Ответ дайте в км/ч.

3.7.3.(39565) От пристани А к пристани В, расстояние между которыми равно 255 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 2 часа после этого следом за ним, со скоростью на 2 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость второго теплохода, если в пункт В он прибыл одновременно с первым. Ответ дайте в км/ч.

3.8.1.(прототип 99601) Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 25 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в исходный пункт теплоход возвращается через 30 часов после отплытия из него. Сколько километров прошел теплоход за весь рейс?

3.8.2.(114787) Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 20 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 4 км/ч, стоянка длится 6 часов, а в исходный пункт теплоход возвращается через 36 часов после отплытия из него. Сколько километров прошел теплоход за весь рейс?

3.8.3.(114971) Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 15 км/ч,

проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 1 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в исходный пункт теплоход возвращается через 20 часов после отплытия из него. Сколько километров прошел теплоход за весь рейс?

3.9.1.(прототип 99602) Расстояние между пристанями А и В равно 120 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот прошел 24 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

3.9.2.(114977) Расстояние между пристанями А и В равно 140 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через 3 часа вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот прошел 60 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

3.9.3.(115027) Расстояние между пристанями А и В равно 105 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через 1 час вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот прошел 40 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

3.10.1.(прототип 26610) Баржа в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 1 час 20 минут, баржа отправилась назад и вернулась в пункт А в 16:00. Определите (в км/час) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость баржи равна 7 км/ч.

3.10.2.(5989) Байдарка в 9:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 2 часа, байдарка отправилась назад и вернулась в пункт А в 19:00 того же дня. Определит-

те (в км/ч) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость байдарки равна 4 км/ч.

3.10.3.(5997) Баржа в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 30 км от А. Пробыв в пункте В 1 час 40 минут, баржа отправилась назад и вернулась в пункт А в 21:00 того же дня. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость баржи равна 7 км/ч.

3.11.1.(прототип 27482) Пристани А и В расположены на озере, расстояние между ними 390 км. Баржа отправилась с постоянной скоростью из А в В. На следующий день она отправилась обратно со скоростью на 3 км/ч больше прежней, сделав по пути остановку на 9 часов. В результате она затратила на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость баржи на пути из А в В. Ответ дайте в км/ч.

3.11.2.(40055) Пристани А и В расположены на озере, расстояние между ними равно 234 км. Баржа отправилась с постоянной скоростью из А в В. На следующий день после прибытия она отправилась обратно со скоростью на 4 км/ч больше прежней, сделав по пути остановку на 8 часов. В результате она затратила на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость баржи на пути А в В. Ответ дайте в км/ч.

3.11.3.(40123) Пристани А и В расположены на озере, расстояние между ними равно 416 км. Баржа отправилась с постоянной скоростью из А в В. На следующий день после прибытия она отправилась обратно со скоростью на 3 км/ч больше прежней, сделав по пути остановку на 6 часов. В результате она затратила на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость баржи на пути из А в В. Ответ дайте в км/ч.

4. Движение протяженных тел

- При движении двух объектов навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2 , ско-

рость одного объекта относительно другого равна $v_1 + v_2$.

- При движении двух объектов в одну сторону со скоростями v_1 и v_2 , скорость одного объекта относительно другого равна $v_1 - v_2$ ($v_1 > v_2$).

Пример 5. По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых равны соответственно 70 км/ч и 50 км/ч. Длина товарного поезда равна 500 метрам. Найдите длину пассажирского поезда, если время, за которое он прошел мимо товарного поезда, равно 2 минутам 33 секундам. Ответ дайте в метрах.

Решение. Чтобы проехать мимо товарного поезда полностью, пассажирскому поезду необходимо проехать путь, равный сумме длины товарного поезда 500 м и своей длины l м. Скорость, с которой пассажирский поезд обгоняет товарный, равна

$$70 - 50 = 20 \text{ (км/ч)} = \frac{20000 \text{ м}}{60 \text{ мин}} = \frac{1000}{3} \text{ м/мин,}$$

время равно

$$2 \text{ мин } 33 \text{ с} = 2 \frac{33}{60} \text{ мин} = 2 \frac{11}{20} \text{ мин} = \frac{51}{20} \text{ мин.}$$

Используя формулу $S = v \cdot t$, составим и решим уравнение:

$$l + 500 = \frac{1000}{3} \cdot \frac{51}{20};$$

$$l = 350.$$

Итак, длина пассажирского поезда равна 350 метрам.

Ответ: 350.

4.1.1.(прототип 99608) Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 80 км/ч, проезжает мимо придорожного столба за 36 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

4.1.2.(116355) Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 50 км/ч, проезжает мимо придорожного столба за 72 секунды. Найдите длину поезда в метрах.

4.1.3.(116387) Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 60 км/ч, проезжает мимо

придорожного столба за 9 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

4.2.1.(прототип 99609) Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 60 км/ч, проезжает мимо лесополосы, длина которой равна 400 метрам, за 1 минуту. Найдите длину поезда в метрах.

4.2.2.(116389) Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 70 км/ч, проезжает мимо лесополосы, длина которой равна 1000 метров, за 1 минуту 48 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

4.2.3.(116735) Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 80 км/ч, проезжает мимо лесополосы, длина которой равна 800 метров, за 45 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

4.3.1.(прототип 99610) По морю параллельными курсами в одном направлении следуют два сухогруза: первый длиной 120 метров, второй — длиной 80 метров. Сначала второй сухогруз отстает от первого, и в некоторый момент времени расстояние от кормы первого сухогруза до носа второго составляет 400 метров. Через 12 минут после этого уже первый сухогруз отстает от второго так, что расстояние от кормы второго сухогруза до носа первого равно 600 метрам. На сколько километров в час скорость первого сухогруза меньше скорости второго?

4.3.2.(116741) По морю параллельными курсами в одном направлении следуют два сухогруза: первый длиной 130 метров, второй — длиной 120 метров. Сначала второй сухогруз отстает от первого, и в некоторый момент времени расстояние от кормы первого сухогруза до носа второго составляет 600 метров. Через 11 минут после этого уже первый сухогруз отстает от второго так, что расстояние от кормы второго сухогруза до носа первого равно 800 метрам. На сколько километров в час скорость первого сухогруза меньше скорости второго?

4.3.3.(117239) По морю параллельными курсами в одном направлении следуют два сухогруза: первый длиной 110 метров, второй — длиной 90 метров. Сначала второй сухогруз отстает от первого, и

в некоторый момент времени расстояние от кормы первого сухогруза до носа второго составляет 1000 метров. Через 16 минут после этого уже первый сухогруз отстает от второго так, что расстояние от кормы второго сухогруза до носа первого равно 400 метрам. На сколько километров в час скорость первого сухогруза меньше скорости второго?

4.4.1.(прототип 99611) По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых равны соответственно 90 км/ч и 30 км/ч. Длина товарного поезда равна 600 метрам. Найдите длину пассажирского поезда, если время, за которое он прошел мимо товарного поезда, равно 1 минуте. Ответ дайте в метрах.

4.4.2.(117241) По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых равны соответственно 80 км/ч и 50 км/ч. Длина товарного поезда равна 800 метрам. Найдите длину пассажирского поезда, если время, за которое он прошел мимо товарного поезда, равно 2 минутам. Ответ дайте в метрах.

4.4.3.(117737) По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых равны соответственно 70 км/ч и 50 км/ч. Длина товарного поезда равна 900 метрам. Найдите длину пассажирского поезда, если время, за которое он прошел мимо товарного поезда, равно 3 минутам 9 секундам. Ответ дайте в метрах.

4.5.1.(прототип 99612) По двум параллельным железнодорожным путям друг навстречу другу следуют скорый и пассажирский поезда, скорости которых равны соответственно 65 км/ч и 35 км/ч. Длина пассажирского поезда равна 700 метрам. Найдите длину скорого поезда, если время, за которое он прошел мимо пассажирского поезда, равно 36 секундам. Ответ дайте в метрах.

4.5.2.(117741) По двум параллельным железнодорожным путям друг навстречу другу следуют скорый и пассажирский поезда, скорости которых равны соответственно 70 км/ч и 50 км/ч. Длина пассажирского поезда равна 800 метрам. Найдите длину скорого поезда, если время, за которое он прошел мимо пассажирского поезда, равно 33 секундам. Ответ дайте в метрах.

4.5.2.(118231) По двум параллельным железнодорожным путям друг навстречу другу следуют скорый и пассажирский поезда, скорости которых равны соответственно 85 км/ч и 55 км/ч. Длина пассажирского поезда равна 600 метрам. Найдите длину скорого поезда, если время, за которое он прошел мимо пассажирского поезда, равно 36 секундам. Ответ дайте в метрах.

5. Средняя скорость

• Чтобы найти среднюю скорость движения объекта, необходимо все пройденное расстояние разделить на общее время движения.

Пример 6. Первую треть трассы автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, вторую треть — со скоростью 90 км/ч, а последнюю — со скоростью 45 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Пусть автомобиль проехал S км со скоростью 60 км/ч, S км со скоростью 90 км/ч и S км со скоростью 45 км/ч. Всего автомобиль проехал $3S$ км и затратил на это

$$\frac{S}{60} + \frac{S}{90} + \frac{S}{45} = \frac{9S}{180} = \frac{S}{20} \text{ (часов)}.$$

Средняя скорость автомобиля на протяжении всего пути $v_{cp} = 3S : \frac{S}{20} = 60$ (км/ч).

Ответ: 60.

5.1.1.(прототип 99606) Первые два часа автомобиль ехал со скоростью 50 км/ч, следующий час — со скоростью 100 км/ч,

а затем два часа — со скоростью 75 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

5.1.2.(115355) Первые три часа автомобиль ехал со скоростью 70 км/ч, следующий час — со скоростью 65 км/ч, а затем один час — со скоростью 45 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

5.1.3.(115853) Первые два часа автомобиль ехал со скоростью 90 км/ч, следующий час — со скоростью 80 км/ч, а затем два часа — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

5.2.1.(прототип 99607) Первые 190 км автомобиль ехал со скоростью 50 км/ч, следующие 180 км — со скоростью 90 км/ч, а затем 170 км — со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

5.2.2.(115855) Первые 120 км автомобиль ехал со скоростью 50 км/ч, следующие 160 км — со скоростью 100 км/ч, а затем 120 км — со скоростью 120 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

5.2.3.(116353) Первые 120 км автомобиль ехал со скоростью 90 км/ч, следующие 100 км — со скоростью 100 км/ч, а затем 110 км — со скоростью 110 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

5.3.1.(прототип 99604) Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 20 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолете со скоростью 480 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

5.3.2.(115201) Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 28 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолете со скоростью 532 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

5.3.3.(115257) Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 21 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолете со скоростью 567 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

5.4.1.(прототип 99605) Первую треть трассы автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, вторую треть — со скоростью 120 км/ч, а последнюю — со скоростью 110 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

5.4.2.(115259) Первую треть трассы автомобиль ехал со скоростью 100 км/ч, вторую треть — со скоростью 75 км/ч, а последнюю — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

5.4.3.(115351) Первую треть трассы автомобиль ехал со скоростью 45 км/ч, вторую треть — со скоростью 70 км/ч, а последнюю — со скоростью 90 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

5.5.1.(прототип 99603) Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 74 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 66 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

5.5.2.(115029) Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 66 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 82 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

5.5.3.(115197) Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 67 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 79 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

II. Задачи на работу

Задачи на работу аналогичны задачам на движение. Вся работа играет роль расстояния, а производительности объектов, совершающих работу, аналогичны скоростям движения.

- В задачах на работу обычно используют три величины: время t , в течение которого производится работа; производительность N — работа, произведенная в единицу времени; работа A , произведенная за время t .

- Указанные величины связаны формулой:

$$A = N \cdot t.$$

Отсюда $N = \frac{A}{t}$ и $t = \frac{A}{N}$.

- Все величины (объем работы, производительность, время) считаются положительными:

$$A > 0; N > 0; t > 0.$$

- К задачам на работу относят также задачи на заполнение резервуаров. В качестве произведенной работы рассматривают объем перекаченной жидкости.

- Время и объем работы (при постоянной производительности) — прямо пропорциональные величины:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{A_1}{A_2}.$$

- Производительность и объем работы (при постоянном времени) — прямо пропорциональные величины:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{A_1}{A_2}.$$

- Производительность и время (при постоянном объеме работы) — обратно пропорциональные величины:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{t_2}{t_1}.$$

1. Явный объем работы

Рассмотрим задачи, в которых выполняемый объем работы известен или его нужно определить.

Пример 7. Одна тракторная бригада должна была вспахать 240 га, а другая на

35% больше, чем первая. Вспахивая ежедневно на 3 га меньше второй бригады, первая всё же закончила работу на 2 дня раньше, чем вторая. Сколько гектаров вспахивала каждая бригада ежедневно?

Решение. Так как $35\% = 0,35$, то вторая бригада должна вспахать на $0,35 \cdot 240 = 84$ (га) больше, чем первая, то есть вспахать всего $240 + 84 = 324$ (га).

Пусть первая бригада вспахивает x гектаров ежедневно. Составим таблицу.

	Объем работы (га)	Производительность (га/день)	Время (дни)
Первая бригада	240	x	$\frac{240}{x}$
Вторая бригада	324	$x + 3$	$\frac{324}{x + 3}$

Вторая бригада на выполнение работы тратит на 2 дня больше, чем первая бригада. Составим уравнение.

$$\frac{324}{x + 3} - \frac{240}{x} = 2.$$

$$\frac{162}{x + 3} - \frac{120}{x} = 1.$$

Умножим обе части уравнения на $x(x + 3) > 0$.

$$162x - 120(x + 3) = x(x + 3).$$

$$x^2 - 39x + 360 = 0.$$

Квадратное уравнение имеет два положительных корня $x_1 = 24$ и $x_2 = 15$.

Если первая бригада ежедневно вспахивала 24 га, то вторая бригада $24 + 3 = 27$ (га); если первая бригада ежедневно вспахивала 15 га, то вторая бригада $15 + 3 = 18$ (га).

Ответ: 24 га; 27 га или 15 га; 18 га.

1.1.1.(прототип 99620) В помощь садовому насосу, перекачивающему 5 литров воды за 2 минуты, подключили второй насос, перекачивающий тот же объем воды за 3 минуты. Сколько минут эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 25 литров воды?

1.1.2.(119155) В помощь садовому насосу, перекачивающему 8 литров воды за 2 минуты, подключили второй насос, пере-

качивающий тот же объем воды за 7 минут. Сколько минут эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 36 литров воды?

1.1.3.(119469) В помощь садовому насосу, перекачивающему 9 литров воды за 1 минуту, подключили второй насос, перекачивающий тот же объем воды за 2 минуты. Сколько минут эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 54 литра воды?

1.2.1.(прототип 99621) Петя и Ваня выполняют одинаковый тест. Петя отвечает за час на 8 вопросов текста, а Ваня — на 9. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Петя закончил свой тест позже Вани на 20 минут. Сколько вопросов содержит тест?

1.2.2.(119471) Петя и Митя выполняют одинаковый тест. Петя отвечает за час на 10 вопросов теста, а Митя — на 16. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Петя закончил свой тест позже Мити на 117 минут. Сколько вопросов содержит тест?

1.2.3.(119963) Олег и Алексей выполняют одинаковый тест. Олег отвечает за час на 10 вопросов теста, а Алексей — на 12. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Олег закончил свой тест позже Алексея на 29 минут. Сколько вопросов содержит тест?

1.3.1.(прототип 26592) Заказ на 110 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 1 деталь больше?

1.3.2.(5791) Заказ на 180 деталей первый рабочий выполняет на 3 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 3 детали больше?

1.3.3.(39631) Заказ на 220 деталей первый рабочий выполняет на 9 часов быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 9 деталей больше?

1.4.1.(прототип 26593) Заказ на 156 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий, если известно, что он за час делает на 1 деталь больше?

1.4.2.(5807) Заказ на 130 деталей первый рабочий выполняет на 3 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий, если известно, что он за час делает на 3 детали больше?

1.4.3.(39687) Заказ на 160 деталей первый рабочий выполняет на 6 часов быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий, если известно, что он за час делает на 6 деталей больше?

1.5.1.(прототип 26594) На изготовление 475 деталей первый рабочий затрачивает на 6 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 550 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 3 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

1.5.2.(5865) На изготовление 621 детали первый рабочий затрачивает на 4 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 675 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

1.5.3.(39749) На изготовление 486 деталей первый рабочий затрачивает на 9 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 621 детали. Известно, что первый рабочий за час делает на 4 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

1.6.1.(прототип 26595) На изготовление 99 деталей первый рабочий затрачивает на 2 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 110 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 1 деталь больше, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

1.6.2.(5825) На изготовление 16 деталей первый рабочий тратит на 6 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 40 таких же деталей. Известно, что пер-

вый рабочий за час делает на 3 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

1.6.3.(5857) На изготовление 33 деталей первый рабочий тратит на 8 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 77 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 4 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

1.7.1.(прототип 26597) Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 110 литров она заполняет на 1 минуту дольше, чем вторая труба?

1.7.2.(5883) Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 192 литра она заполняет на 4 минуты дольше, чем вторая труба?

1.7.3.(5887) Первая труба пропускает на 3 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 238 литров она заполняет на 3 минуты дольше, чем вторая труба?

1.8.1.(прототип 26598) Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объемом 110 литров она заполняет на 1 минуту быстрее, чем первая труба?

1.8.2.(5889) Первая труба пропускает на 3 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объемом 928 литров она заполняет на 3 минуты быстрее, чем первая труба?

1.8.3.(5901) Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объемом 480 литров она заполняет на 4 минуты быстрее, чем первая труба?

1.9.1.(прототип 26599) Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 110 литров она заполняет на 2 минуты дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объемом 99 литров?

1.9.2.(5915) Первая труба пропускает на 3 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 460 литров она заполняет на 6 минут дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объемом 391 литр?

1.9.3.(39999) Первая труба пропускает на 8 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 660 литров она заполняет на 11 минут дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объемом 570 литров?

1.10.1.(прототип 26600) Первая труба пропускает на 5 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объемом 375 литров она заполняет на 10 минут быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объемом 500 литров?

1.10.2.(5931) Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объемом 425 литров она заполняет на 8 минут быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объемом 525 литров?

1.10.3.(40053) Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объемом 638 литров она заполняет на 7 минут быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объемом 812 литров?

2. Неявный объем работы

Рассмотрим задачи, в которых объем работы не указывается и не является искомым. Объем всей работы, который

должен быть выполнен, принимается за единицу.

Пример 8. Аквариум наполняется водой через две трубки за 3 часа. За сколько часов может наполниться аквариум через первую трубку, если для этого потребуется на 2,5 ч меньше, чем для наполнения аквариума через вторую трубку?

Решение. Примем объем аквариума за 1. Пусть аквариум наполняется через одну первую трубку за x часов. Составим таблицу и найдем производительности (пропускную способность) трубок.

	Объем аквариума	Производительность (1/час)	Время (час)
Первая трубка	1	$\frac{1}{x}$	x
Вторая трубка	1	$\frac{1}{x+2,5}$	$x+2,5$

Для условия задачи составим другую таблицу

	Объем работы	Производительность (1/час)	Время (час)
Первая трубка	$3 \cdot \frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	3
Вторая трубка	$3 \cdot \frac{1}{x+2,5}$	$\frac{1}{x+2,5}$	3

$$\text{Составим уравнение } \frac{3}{x} + \frac{3}{x+2,5} = 1.$$

Умножим обе части уравнения на $x(x+2,5) > 0$.

$$3(x+2,5) + 3x = x(x+2,5).$$

$$x^2 - 3,5x - 7,5 = 0.$$

$$2x^2 - 7x - 15 = 0.$$

Последнее уравнение имеет один положительный корень $x = 5$.

Значит, аквариум наполняется через одну первую трубку за 5 часов.

Ответ: 5 часов.

Пример 9. Оператор ЭВМ, работая вместе с учеником, обрабатывает задачу за 2 ч. 24 мин. Если оператор проработает

2 ч, а ученик 1 ч, то будет выполнено $\frac{2}{3}$ всей работы. Сколько времени потребуется оператору и ученику в отдельности на обработку задачи?

Решение. Обозначим производительность (часть работы, выполненная за 1 час) оператора и ученика соответственно через x и y . Весь объем работы примем за единицу, тогда оператору и ученику в отдельности на обработку задачи требуется соответственно $\frac{1}{x}$ часов и $\frac{1}{y}$ часов.

Так как $2\text{ ч.}24\text{ мин.} = 2\frac{24}{60}\text{ ч} = \frac{12}{5}\text{ ч}$, то согласно условию задачи составим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{12}{5} \cdot x + \frac{12}{5} \cdot y = 1, \\ 2 \cdot x + 1 \cdot y = \frac{2}{3} \cdot 1. \end{cases} \quad \begin{cases} 12x + 12y = 5, \\ 6x + 3y = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x + 12y = 5, \\ 12x + 6y = 4. \end{cases} \quad \begin{cases} 6y = 1, \\ 12x + 6y = 4. \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{6}, \\ x = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Итак, время выполнения всего задания одним оператором равно $1 : \frac{1}{4} = 4$ (часа), а одним учеником — $1 : \frac{1}{6} = 6$ (часов).

Ответ: 4 ч; 6 ч.

2.1.1.(прототип 99614) Один мастер может выполнить заказ за 12 часов, а другой — за 6 часов. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?

2.1.2.(118273) Один мастер может выполнить заказ за 15 часов, а другой — за 10 часов. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?

2.1.3.(118291) Один мастер может выполнить заказ за 24 часа, а другой — за 8 часов. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?

2.2.1.(прототип 99615) Первый насос наполняет бак за 20 минут, второй — за 30 минут, а третий — за 1 час. За сколько минут наполнят бак три насоса, работая одновременно?

2.2.2.(118297) Первый насос наполняет бак за 12 минут, второй — за 54 минуты, а третий — за 1 час 48 минут. За сколько минут наполнят бак три насоса, работая одновременно?

2.2.3.(118559) Первый насос наполняет бак за 12 минут, второй — за 14 минут, а третий — за 1 час 24 минуты. За сколько минут наполнят бак три насоса, работая одновременно?

2.3.1.(прототип 99618) Две трубы наполняют бассейн за 3 часа 36 минут, а одна первая труба наполняет бассейн за 6 часов. За сколько часов наполняет бассейн одна вторая труба?

2.3.2.(118737) Две трубы наполняют бассейн за 1 час 55 минут, а одна первая труба наполняет бассейн за 46 часов. За сколько часов наполняет бассейн одна вторая труба?

2.3.3.(119073) Две трубы наполняют бассейн за 2 часа 42 минуты, а одна первая труба наполняет бассейн за 27 часов. За сколько часов наполняет бассейн одна вторая труба?

2.4.1.(прототип 99616) Игорь и Паша красят забор за 9 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 12 часов, а Володя и Игорь — за 18 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроем?

2.4.2.(118561) Игорь и Паша красят забор за 24 часа. Паша и Володя красят этот же забор за 30 часов, а Володя и Игорь — за 40 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроем?

2.4.3.(118585) Игорь и Паша красят забор за 16 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 20 часов, а Володя и Игорь — за 48 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроем?

2.5.1.(прототип 99617) Даша и Маша пропалывают грядку за 12 минут, а одна

Маша — за 20 минут. За сколько минут пропалывает грядку одна Даша?

2.5.2.(118591) Юля и Уля пропалывают грядку за 6 минут, а одна Уля — за 42 минуты. За сколько минут пропалывает грядку одна Юля?

2.5.3.(118731) Аня и Таня пропалывают грядку за 5 минут, а одна Таня — за 30 минут. За сколько минут пропалывает грядку одна Аня?

2.6.1.(прототип 99613) Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 15 часов. Через 3 часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

2.6.2.(118241) Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 16 часов. Через 2 часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

2.6.3.(118271) Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 13 часов. Через 1 час после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

2.7.1.(прототип 99619) Первая труба наполняет резервуар на 6 минут дольше, чем вторая. Обе трубы наполняют этот же резервуар за 4 минуты. За сколько минут наполняет этот резервуар одна вторая труба?

2.7.2.(119077) Первая труба наполняет резервуар на 90 минут дольше, чем вторая. Обе трубы наполняют этот же резервуар за 24 минуты. За сколько минут наполняет этот резервуар одна вторая труба?

2.7.3.(119153) Первая труба наполняет резервуар на 27 минут дольше, чем вторая. Обе трубы наполняют этот же резервуар за 18 минут. За сколько минут наполняет этот резервуар одна вторая труба?

2.8.1.(прототип 26596) Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за три дня?

2.8.2.(39753) Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 9 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за 5 дней выполняет такую же часть работы, какую второй — за 3 дня?

2.8.3.(39799) Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 2 дня. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за 1 день выполняет такую же часть работы, какую второй — за 2 дня?

III. Задачи на проценты

1. Части и проценты

• Чтобы найти проценты от данного числа, надо:

а) выразить проценты в виде дроби;

б) умножить данное число на эту дробь.

(*a* составляет *p*% от *b*) $\Rightarrow a = \frac{p}{100} \cdot b$.

Пример 10. Из данных четырех чисел первые три относятся между собой как $\frac{1}{5} : \frac{1}{3} : \frac{1}{20}$, а четвертое составляет 15% второго числа. Найдите эти числа, если известно, что второе число на 8 больше суммы остальных.

Решение. Так как

$$\frac{1}{5} : \frac{1}{3} : \frac{1}{20} = \left(60 \cdot \frac{1}{5}\right) : \left(60 \cdot \frac{1}{3}\right) : \left(60 \cdot \frac{1}{20}\right) = 12 : 20 : 3,$$

то первые три числа соответственно равны $12x$, $20x$ и $3x$, где x - коэффициент

пропорциональности. Четвертое число равно $0,15 \cdot 20x = 3x$. По условию задачи второе число на 8 больше суммы остальных, составим уравнение

$$20x - (12x + 3x + 3x) = 8.$$

Отсюда $x = 4$. Тогда числа равны 48, 80, 12, 12.

Ответ: 48, 80, 12, 12.

1.1.1.(прототип 99570) Митя, Антон, Гоша и Борис учредили компанию с уставным капиталом 200000 рублей. Митя внес 14% уставного капитала, Антон — 42000 рублей, Гоша — 0,12 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внес Борис. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесенному в уставной капитал вкладу. Какая сумма от прибыли 1000000 рублей причитается Борису? Ответ дайте в рублях.

1.1.2.(107995) Дима, Артем, Гриша и Вова учредили компанию с уставным капиталом 150000 рублей. Дима внес 17% уставного капитала, Артем — 50000 рублей, Гриша — 0,24 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внес Вова. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесенному в уставной капитал вкладу. Какая сумма от прибыли 900000 рублей причитается Вове? Ответ дайте в рублях.

1.1.3.(108485) Дима, Антон, Паша и Коля учредили компанию с уставным капиталом 100000 рублей. Дима внес 22% уставного капитала, Антон — 50000 рублей, Паша — 0,26 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внес Коля. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесенному в уставной капитал вкладу. Какая сумма от прибыли 700000 рублей причитается Коле? Ответ дайте в рублях.

2. Процентное сравнение величин

- При сравнении двух величин за 100% принимается та, с которой производится сравнение. В задачах на проценты сначала

следует понять, какая величина принимается за 100%.

Пример 11. Букинистический магазин продал книгу со скидкой 10% с назначенной цены и получил при этом 8% прибыли. Сколько процентов прибыли первоначально полагал получить магазин?

Решение. Пусть назначенная цена книги составляет x рублей, тогда книгу продали за $0,9x$ рублей, что составляет 108% от первоначальной цены книги в y рублей (100%). Из пропорции

$$\frac{0,9x}{y} = \frac{108}{100}$$

найдем первоначальную цену книги

$$y = \frac{5x}{6} \text{ рублей.}$$

$$\frac{5x/6}{x} = \frac{100}{z}$$

находим, что назначенная цена x рублей составляет $z = 120\%$. Значит, магазин предполагал получить прибыль $120 - 100 = 20(\%)$.

Ответ: 20%.

2.1.1.(прототип 99567) Четыре рубашки дешевле куртки на 8%. На сколько процентов пять рубашек дороже куртки?

2.1.2.(107401) Семь рубашек дешевле куртки на 2%. На сколько процентов десять рубашек дороже куртки?

2.1.3.(107467) Одиннадцать рубашек дешевле куртки на 1%. На сколько процентов тринадцать рубашек дороже куртки?

2.2.1.(прототип 99568) Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

2.2.2.(107469) Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась втрое, общий доход семьи вырос бы на 112%. Если бы стипендия дочери уменьшилась вдвое, общий доход семьи сократился бы на 3%.

Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

2.2.3.(107941) Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вчетверо, общий доход семьи вырос бы на 192%. Если бы стипендия дочери уменьшилась вчетверо, общий доход семьи сократился бы на 6%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

3. Сложные проценты

При неоднократном процентном изменении величины удобно использовать формулу «сложных» процентов.

• Формула «сложных» процентов для двукратного изменения выглядит так:

$$A_2 = A_0(1 \pm 0,01p_1)(1 \pm 0,01p_2), \text{ где}$$

A_0 - первоначальное значение величины A , A_2 - новое значение величины A после ее двукратного процентного изменения, p_1 и p_2 - проценты изменения величины A .

Формула сложных процентов особенно удобна тем, что допускает простое и логичное обобщение в виде увеличения числа сомножителей аналогичного вида для любого нужного числа изменений.

Пример 12. Число 240 увеличили на 30%, а затем увеличили на 70%. Найти полученное число.

Решение. Так как $30\% = 0,3$ и $70\% = 0,7$, то после первого увеличения имеем $240(1 + 0,3) = 312$. После второго увеличения получаем $312(1 + 0,7) = 530,4$.

Краткая запись:

$$240(1 + 0,3)(1 + 0,7) = 530,4.$$

Ответ: 530,4.

Пример 13. Зарплата служащего составляла 2000 у.е. Затем зарплату повысили на 20%, а вскоре понизили на 20%. Сколько стал получать служащий?

Решение. Так как $20\% = 0,2$, то имеем

$$2000(1 + 0,2)(1 - 0,2) = 1920.$$

Ответ: 1920 у.е.

Пример 14. Зарплата служащего составляла 2000 у.е. Затем зарплату понизили на 20%, а вскоре повысили на 20%. Сколько стал получать служащий?

Решение. Так как $20\% = 0,2$, то имеем

$$2000(1 - 0,2)(1 + 0,2) = 1920.$$

Ответ: 1920 у.е.

Пример 15. (ЕГЭ 2003) За год стипендия студента увеличилась на 32%. В первом полугодии стипендия увеличилась на 10%. Определите, на сколько процентов увеличилась стипендия во втором полугодии?

Решение. Обозначим через a часть, на которую увеличилась стипендия во втором полугодии, через x первоначальную стипендию. Так как $10\% = 0,1$ и $32\% = 0,32$, то получаем уравнение

$$x(1 + 0,1)(1 + a) = x(1 + 0,32)$$

или

$$1,1(1 + a) = 1,32.$$

Далее имеем $1 + a = 1,2$; $a = 0,2$. Значит, во втором полугодии стипендия увеличилась на 20%.

Ответ: 20%.

Пример 16. В течение года завод дважды увеличивал выпуск продукции на одно и то же число процентов. Найдите это число, если известно, что в начале года завод ежемесячно выпускал 600 изделий, а в конце года – 726 изделий.

Решение. Обозначим через a часть, на которую увеличивался выпуск продукции каждый раз. Тогда имеем уравнение

$$600(1 + a)(1 + a) = 726.$$

Далее получаем

$$(1 + a)^2 = \frac{726}{600}; \quad (1 + a)^2 = 1,21;$$

$$1 + a = 1,1 \quad (1 + a > 0); \quad a = 0,1.$$

Значит, завод дважды увеличивал выпуск продукции на 10%.

Ответ: 10%.

Пример 17. (Диагностическая работа, 24.09.2013) Клиент А. сделал вклад в банке в размере 6200 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал клиент Б. Ещё ровно через год клиенты А. и Б. за-

крыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А. получил на 682 рубля больше клиента Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

Решение. Обозначим через x – часть, на которую банк повышает сумму вклада. Тогда через два года на счету клиента А. будет $6200(1+x)(1+x)$ рублей, а у клиента Б. через год – $6200(1+x)$ рублей. Согласно условию задачи составим уравнение $6200(1+x)^2 - 6200(1+x) = 682$ или $100(1+x)^2 - 100(1+x) - 11 = 0$. Сделаем замену $100(1+x) = t$, тогда уравнение примет вид $\frac{t^2}{100} - t - 11 = 0$ или $t^2 - 100t - 1100 = 0$. Находим корни $t_1 = 110$ и $t_2 = -10$ последнего уравнения. Для положительного корня рассмотрим уравнение $100(1+x) = 110$. Отсюда $x = 0,1$. Следовательно, банк начисляет 10% годовых по вкладам.

Ответ: 10%.

Пример 18. (2009, пробный ЕГЭ) Начальный капитал акционерного общества составляет 15 миллионов рублей. Ежегодно капитал увеличивался на 25%. Найдите минимальное количество лет, после которых капитал акционерного общества превысит 45 миллионов рублей.

Решение. Так как $25\% = 0,25$, то имеем неравенство $15(1+0,25)^n > 45$, где через n обозначено искомое количество лет. Решаем неравенство $1,25^n > 3$; $n > \log_{1,25} 3$. Так как $1,25^4 < 3$ и $1,25^5 > 3$, то $n = 5$.

Ответ: 5 лет.

3.1.1.(прототип 99565) В 2008 году в городском квартале проживало 40000 человек. В 2009 году, в результате строительства новых домов, число жителей выросло на 8%, а в 2010 году — на 9% по сравнению с 2009 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2010 году?

3.1.2.(106895) В 2008 году в городском квартале проживало 20000 человек. В 2009 году, в результате строительства новых домов, число жителей выросло на 4%, а в 2010 году — на 2% по сравнению с 2009 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2010 году?

3.1.3.(107389) В 2008 году в городском квартале проживало 20000 человек. В 2009 году, в результате строительства новых домов, число жителей выросло на 5%, а в 2010 году — на 7% по сравнению с 2009 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2010 году?

3.2.1.(прототип 99586) Бизнесмен Бубликов получил в 2000 году прибыль в размере 5000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 300% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Бубликов за 2003 год?

3.2.2.(112207) Бизнесмен Печенов получил в 2000 году прибыль в размере 1000000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 16% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Печенов за 2002 год?

3.2.3.(112275) Бизнесмен Коржов получил в 2000 году прибыль в размере 1400000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 20% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Коржов за 2004 год?

3.3.1.(прототип 99569) Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 20000 рублей, через два года был продан за 15842 рублей.

3.3.2.(107949) Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 20900 рублей, через два года был продан за 16929 рублей.

3.3.3.(107983) Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 19400 рублей, через два года был продан за 15714 рублей.

3.4.1.(прототип 99587) Компания "Альфа" начала инвестировать средства в перспективную отрасль в 2001 году, имея капитал в размере 5000 долларов. Каждый год, начиная с 2002 года, она получала прибыль, которая составляла 200% от капитала предыдущего года. А компания "Бета" начала инвестировать средства в другую отрасль в 2003 году, имея капитал в размере 10000 долларов, и, начиная с 2004 года, ежегодно получала прибыль, составляющую 400% от капитала предыдущего года. На сколько долларов капитал одной из компаний был больше капитала другой к концу 2006 года, если прибыль из оборота не изымалась?

3.4.2.(112277) Компания "Альфа" начала инвестировать средства в перспективную отрасль в 2001 году, имея капитал в размере 4000 долларов. Каждый год, начиная с 2002 года, она получала прибыль, которая составляла 100% от капитала предыдущего года. А компания "Бета" начала инвестировать средства в другую отрасль в 2004 году, имея капитал в размере 4500 долларов, и, начиная с 2005 года, ежегодно получала прибыль, составляющую 200% от капитала предыдущего года. На сколько долларов капитал одной из компаний был больше капитала другой к концу 2007 года, если прибыль из оборота не изымалась?

3.4.3.(112393) Компания "Альфа" начала инвестировать средства в перспективную отрасль в 2001 году, имея капитал в размере 4500 долларов. Каждый год, начиная с 2002 года, она получала прибыль, которая составляла 100% от капитала предыдущего года. А компания "Бета" начала инвестировать средства в другую отрасль в 2005 году, имея капитал в размере 5500 долларов, и, начиная с 2006

года, ежегодно получала прибыль, составляющую 300% от капитала предыдущего года. На сколько долларов капитал одной из компаний был больше капитала другой к концу 2009 года, если прибыль из оборота не изымалась?

3.5.1.(прототип 99566) В понедельник акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а во вторник подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

3.5.2.(107395) В четверг акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в пятницу подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 36% дешевле, чем при открытии торгов в четверг. На сколько процентов подорожали акции компании в четверг?

3.5.3.(107397) В среду акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в четверг подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 64% дешевле, чем при открытии торгов в среду. На сколько процентов подорожали акции компании в среду?

IV. Задачи на концентрацию

- Массовой концентрацией c_A вещества A в смеси называется отношение массы m_A этого вещества к общей массе M :

$$c_A = \frac{m_A}{M}, \quad m_A = c_A \cdot M, \quad M = \frac{m_A}{c_A}.$$

- Массовым процентным содержанием вещества A в данной смеси называется величина

$$p_A = (c_A \cdot 100)\%$$

- Если смесь массы M состоит из веществ A и B (имеющие массы соответственно m_A и m_B), то имеют место следующие равенства:

$$c_A = \frac{m_A}{M} = \frac{m_A}{m_A + m_B}; \quad c_B = \frac{m_B}{M} = \frac{m_B}{m_A + m_B};$$

$$c_A + c_B = 1; \quad p_A + p_B = 100\%$$

- Объемные концентрации веществ в смеси определяются такими же формулами, как и массовые концентрации.

Пример 19. (ЕГЭ 2003) К 120 г раствора, содержащего 80% соли, добавили 480 г раствора, содержащего 20% той же соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

Решение. 1) $120 + 480 = 600$ (г) – масса нового раствора.

2) $0,8 \cdot 120 = 96$ (г) – масса безводной соли в первом растворе.

3) $0,2 \cdot 480 = 96$ (г) – масса безводной соли во втором растворе.

4) $96 + 96 = 192$ (г) – масса безводной соли в новом растворе.

5) $\frac{192}{600} \cdot 100 = 32$ (%) – процентное содержание соли в новом растворе.

При оформлении решения задачи можно использовать таблицу.

	Общая масса (г)	Концентрация соли	Масса соли (г)
Первый раствор	120	0,8	$0,8 \cdot 120 = 96$
Второй раствор	480	0,2	$0,2 \cdot 480 = 96$
Новый раствор	600	?	$96 + 96 = 192$

Ответ: 32%.

Пример 20. Один раствор содержит 20% (по объему) соляной кислоты, а второй – 70% кислоты. Сколько литров первого и второго растворов нужно взять, чтобы получить 100 л 50% раствора кислоты?

Решение. Пусть для получения нового раствора необходимо взять x литров первого раствора, а значит, и $(100 - x)$ литров второго раствора. Так как $20\% = 0,2$ и $70\% = 0,7$, то первый раствор содержит $0,2x$ литров безводной кислоты, а второй раствор – $0,7(100 - x)$

литров безводной кислоты. Новый раствор содержит $0,5 \cdot 100 = 50$ литров безводной кислоты. Используя объем безводной кислоты, составим уравнение

$$0,2x + 0,7(100 - x) = 50.$$

$$2x + 7(100 - x) = 500.$$

$$2x + 700 - 7x = 500.$$

$$-5x = -200.$$

$$x = 40.$$

Итак, необходимо взять 40 литров первого раствора и $100 - 40 = 60$ (литров) второго раствора.

При оформлении решения задачи можно использовать таблицу.

	Общий объем (л)	Концентрация кислоты	Объем чистой кислоты (л)
Первый раствор	x	0,2	$0,2x$
Второй раствор	$100 - x$	0,7	$0,7(100 - x)$
Новый раствор	100	0,5	$0,5 \cdot 100 = 50$

Ответ: 40 л; 60 л.

1.1.1.(прототип 99571) В сосуд, содержащий 5 литров 12-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 7 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

1.1.2.(108487) В сосуд, содержащий 7 литров 14-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 7 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

1.1.3.(108655) В сосуд, содержащий 8 литров 24-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 4 литра воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

1.2.1.(прототип 99572) Смешали некоторое количество 15-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 19-процентного раствора этого ве-

щества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

1.2.2.(108657) Смешали некоторое количество 13-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 17-процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

1.2.3.(108695) Смешали некоторое количество 16-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 18-процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

1.3.1.(прототип 99573) Смешали 4 литра 15-процентного водного раствора некоторого вещества с 6 литрами 25-процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

1.3.2.(108699) Смешали 3 литра 35-процентного водного раствора некоторого вещества с 12 литрами 15-процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

1.3.3.(109057) Смешали 9 литров 40-процентного водного раствора некоторого вещества с 11 литрами 20-процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

1.4.1.(прототип 99574) Виноград содержит 90% влаги, а изюм — 5%. Сколько килограммов винограда требуется для получения 20 килограммов изюма?

1.4.2.(109091) Виноград содержит 90% влаги, а изюм — 5%. Сколько килограммов винограда требуется для получения 22 килограммов изюма?

1.4.3.(109109) Виноград содержит 90% влаги, а изюм — 5%. Сколько килограммов винограда требуется для получения 36 килограммов изюма?

1.5.1.(прототип 99575) Имеется два сплава. Первый сплав содержит 10% никеля, второй — 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25% никеля. На

сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

1.5.2.(109117) Имеется два сплава. Первый содержит 5% никеля, второй — 35% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 225 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

1.5.3.(109151) Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй — 35% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 125 кг, содержащий 30% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

1.6.1.(прототип 99576) Первый сплав содержит 10% меди, второй — 40% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 3 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 30% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

1.6.2.(109159) Первый сплав содержит 5% меди, второй — 14% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 9 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 11% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

1.6.3.(109209) Первый сплав содержит 5% меди, второй — 13% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 9 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

1.7.1.(прототип 99577) Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

1.7.2.(109211) Смешав 6-процентный и 74-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 19-

процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 24-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 6-процентного раствора использовали для получения смеси?

1.7.3.(109709) Смешав 55-процентный и 97-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 65-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 75-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 55-процентного раствора использовали для получения смеси?

1.8.1.(прототип 99578) Имеются два сосуда. Первый содержит 30 кг, а второй — 20 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 68% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 70% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

1.8.2.(109711) Имеется два сосуда. Первый содержит 100 кг, а второй — 60 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 41% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 50% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

1.8.3.(110209) Имеется два сосуда. Первый содержит 100 кг, а второй — 20 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 67% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 77% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

V. Задачи на арифметическую прогрессию

- Арифметическая прогрессия (а. п.) — числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d (разность а. п.):

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Например, последовательность $-3; -1; 1; 3; 5; \dots$ является а. п. с первым членом $a_1 = -3$ и разностью $d = 2$.

- А. п. называют возрастающей, если $d > 0$.

- Формула разности: $d = a_{n+1} - a_n$.

- Формула n -го (общего) члена а. п.:

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

- Формулы суммы n первых членов а. п.:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad \text{и} \quad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

- Характеристическое свойство а. п. (свойство среднего члена а. п.):

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$$

- Свойство равноотстоящих членов:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots$$

Пример 21. Грузовик перевозит партию щебня массой 240 тонн, ежедневно увеличивая норму перевозки на одно и то же число тонн. Известно, что за первый день было перевезено 2 тонны щебня. Определите, сколько тонн щебня было перевезено за двенадцатый день, если вся работа была выполнена за 15 дней.

Решение. Так как норма перевозки увеличивается ежедневно на одно и то же число тонн, то величины, выражающие количество тонн щебня, перевезенных грузовиком за последовательные дни, составляют арифметическую прогрессию. Пусть количество дней (15) — количество членов прогрессии. При этом вес всей партии щебня (240 т) будет суммой первых 15 членов этой прогрессии, а количество тонн (2 т), перевезенных грузовиком за первый день, первым членом прогрессии. Пусть d — разность этой прогрессии.

Используя формулу суммы 15 первых членов прогрессии

$$S_{15} = \frac{2a_1 + 14d}{2} \cdot 15,$$

получим

$$240 = \frac{2 \cdot 2 + 14d}{2} \cdot 15$$

или $d = 2$. Используем формулу для двенадцатого члена арифметической прогрессии $a_{12} = a_1 + 11d = 2 + 11 \cdot 2 = 24$.

Итак, за двенадцатый день грузовик перевез 24 тонны щебня.

Ответ: 24.

1.1.1(прототип 99579) Бригада маляров красит забор длиной 240 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 60 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.

1.1.2.(110211) Бригада маляров красит забор длиной 810 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 180 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.

1.1.3.(110309) Бригада маляров красит забор длиной 150 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 75 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.

1.2.1.(прототип 99584) Улитка ползет от одного дерева до другого. Каждый день она проползает на одно и то же расстояние больше, чем в предыдущий день. Известно, что за первый и последний дни улитка проползла в общей сложности 10 метров. Определите, сколько дней улитка потратила на весь путь, если расстояние между деревьями равно 150 метрам.

1.2.2.(111869) Улитка ползет от одного дерева до другого. Каждый день она про-

ползает на одно и то же расстояние больше, чем в предыдущий день. Известно, что за первый и последний дни улитка проползла в общей сложности 11 метров. Определите, сколько дней улитка потратила на весь путь, если расстояние между деревьями равно 33 метрам.

1.2.3.(111911) Улитка ползет от одного дерева до другого. Каждый день она проползает на одно и то же расстояние больше, чем в предыдущий день. Известно, что за первый и последний дни улитка проползла в общей сложности 9 метров. Определите, сколько дней улитка потратила на весь путь, если расстояние между деревьями равно 18 метрам.

1.3.1.(прототип 99580) Рабочие прокладывают тоннель длиной 500 метров, ежедневно увеличивая норму прокладки на одно и то же число метров. Известно, что за первый день рабочие проложили 3 метра туннеля. Определите, сколько метров туннеля проложили рабочие в последний день, если вся работа была выполнена за 10 дней.

1.3.2.(110311) Рабочие прокладывают тоннель длиной 99 метров, ежедневно увеличивая норму прокладки на одно и то же число метров. Известно, что за первый день рабочие проложили 7 метров туннеля. Определите, сколько метров туннеля проложили рабочие в последний день, если вся работа была выполнена за 9 дней.

1.3.3.(110549) Рабочие прокладывают тоннель длиной 87 метров, ежедневно увеличивая норму прокладки на одно и то же число метров. Известно, что за первый день рабочие проложили 7 метров туннеля. Определите, сколько метров туннеля проложили рабочие в последний день, если вся работа была выполнена за 6 дней.

1.4.1.(прототип 99581) Васе надо решить 490 задач. Ежедневно он решает на одно и то же количество задач больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Вася решил 5 за-

дач. Определите, сколько задач решил Вася в последний день, если со всеми задачами он справился за 14 дней.

1.4.2.(110551) Пете надо решить 333 задачи. Ежедневно он решает на одно и то же количество задач больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Петя решил 5 задач. Определите, сколько задач решил Петя в последний день, если со всеми задачами он справился за 9 дней.

1.4.3.(110997) Феде надо решить 140 задач. Ежедневно он решает на одно и то же количество задач больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Федя решил 8 задач. Определите, сколько задач решил Федя в последний день, если со всеми задачами он справился за 7 дней.

1.5.1.(прототип 99582) Турист идет из одного города в другой, каждый день проходя больше, чем в предыдущий день, на одно и то же расстояние. Известно, что за первый день турист прошел 10 километров. Определите, сколько километров прошел турист за третий день, если весь путь он прошел за 6 дней, а расстояние между городами составляет 120 километров.

1.5.2.(110999) Турист идет из одного города в другой, каждый день проходя больше, чем в предыдущий день, на одно и то же расстояние. Известно, что за первый день турист прошел 8 километров. Определите, сколько километров прошел турист за четвертый день, если весь путь он прошел за 10 дней, а расстояние между городами составляет 215 километров.

1.5.3.(111357) Турист идет из одного города в другой, каждый день проходя больше, чем в предыдущий день, на одно и то же расстояние. Известно, что за первый день турист прошел 11 километров. Определите, сколько километров прошел турист за третий день, если весь путь он прошел за 6 дней, а расстояние между городами составляет 81 километр.

1.6.1.(прототип 99583) Грузовик перевозит партию щебня массой 210 тонн, ежедневно увеличивая норму перевозки на

одно и то же число тонн. Известно, что за первый день было перевезено 2 тонны щебня. Определите, сколько тонн щебня было перевезено на девятый день, если вся работа была выполнена за 14 дней.

1.6.2.(111359) Грузовик перевозит партию щебня массой 360 тонн, ежедневно увеличивая норму перевозки на одно и то же число тонн. Известно, что за первый день было перевезено 3 тонны щебня. Определите, сколько тонн щебня было перевезено на девятый день, если вся работа была выполнена за 18 дней.

1.6.3.(111867) Грузовик перевозит партию щебня массой 60 тонн, ежедневно увеличивая норму перевозки на одно и то же число тонн. Известно, что за первый день было перевезено 4 тонны щебня. Определите, сколько тонн щебня было перевезено на пятый день, если вся работа была выполнена за 8 дней.

1.7.1.(прототип 99585) Вере надо подписать 640 открыток. Ежедневно она подписывает на одно и то же количество открыток больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Вера подписала 10 открыток. Определите, сколько открыток было подписано за четвертый день, если вся работа была выполнена за 16 дней.

1.7.2.(111913) Лене надо подписать 972 открытки. Ежедневно она подписывает на одно и то же количество открыток больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Лена подписала 20 открыток. Определите, сколько открыток было подписано за седьмой день, если вся работа была выполнена за 18 дней.

1.7.3.(112205) Ире надо подписать 880 открыток. Ежедневно она подписывает на одно и то же количество открыток больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Ира подписала 10 открыток. Определите, сколько открыток было подписано за восьмой день, если вся работа была выполнена за 16 дней.

VI. Задачи на геометрическую прогрессию

• Геометрическая прогрессия (г. п.) – числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q (знаменатель г. п.), не равное нулю:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \quad q \neq 0, b_1 \neq 0, n \in \mathbb{N}.$$

Например, последовательность $2; -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots$ является г. п. с первым членом $b_1 = 2$ и знаменателем $q = -\frac{1}{2}$.

• Формула знаменателя: $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$.

• Формула n -го (общего) члена г. п.:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

• Формулы суммы n первых членов г. п.:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1} \quad \text{и} \quad S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

• Характеристическое свойство г. п. (свойство среднего члена г. п.):

$$b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}.$$

• Свойство равноотстоящих членов:

$$b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = \dots$$

• Сумма бесконечной г. п. ($|q| < 1$):

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Пример 22. Между числами 2 и $-18\sqrt{3}$ вставьте четыре числа так, чтобы получилась геометрическая прогрессия.

Решение. Из условия задачи имеем шесть членов геометрической прогрессии, для которой $b_1 = 2$ и $b_6 = -18\sqrt{3}$. Используя формулу $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, получаем $-18\sqrt{3} = 2 \cdot q^5$. Отсюда $q^5 = -9\sqrt{3}$, $q^5 = (-\sqrt{3})^5$, $q = -\sqrt{3}$. Итак, $b_2 = -2\sqrt{3}$, $b_3 = -2\sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3}) = 6$, $b_4 = -6\sqrt{3}$, $b_5 = 18$.

Ответ: 2; $-2\sqrt{3}$; 6; $-6\sqrt{3}$; 18; $-18\sqrt{3}$.

1. Найдите четыре числа, составляющие геометрическую прогрессию, в которой сумма крайних членов равна 27, произведение средних равно 72.

2. Найдите сумму первых восьми членов геометрической прогрессии, второй член которой равен 6, а четвертый равен 24.

3. Произведение второго и четвертого членов геометрической прогрессии равно 81, а сумма трех ее первых членов равна 13. С какого номера все члены этой прогрессии будут больше 729?

Дополнительные задачи

1. Найдите двузначное число, если количество единиц в нем на 4 больше количества десятков, а произведение искомого числа на сумму его цифр равно 90.

2. Если от двузначного числа отнять произведение его цифр, то получится 25. Найдите это двузначное число, если известно, что оно в 5 раз больше суммы своих цифр.

3. Двузначное число в три раза больше произведения своих цифр. Если к этому двузначному числу прибавить 18, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.

4. Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 13. Если цифры поменять местами, то получится число, которое меньше данного на 9. Найдите это число.

5. Сумма цифр трехзначного числа равна 11, а сумма квадратов цифр этого числа равна 45. Если от искомого числа отнять 198, то получится число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Найдите число.

6. Среднее пропорциональное двух чисел на 12 больше меньшего из этих чисел, а среднее арифметическое тех же чисел на 24 меньше большего из них. Найдите эти числа.

7. При делении некоторого двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 3, а в остатке 4. Если же это число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 2, а в остатке 5. Найдите это число.

8. При перемножении двух положительных чисел, из которых одно на 10 больше другого, ученик допустил ошибку, уменьшив цифру десятков в произведении на 4. Для проверки ответа при делении полученного произведения на меньшее число он получил в частном 39, а в остатке 22. Найдите искомые множители.

9. Велосипедист доехал от озера до деревни и вернулся обратно, затратив на весь путь 1 ч. От озера до деревни он ехал со скоростью 15 км/ч, а обратно со скоростью 10 км/ч. Чему равно расстояние от озера до деревни?

10. Турист, находящийся в спортивном лагере, должен успеть к поезду на железнодорожную станцию. Если он поедет на велосипеде со скоростью 15 км/ч, то он опоздает на 30 мин. Если же он поедет на автобусе, скорость которого 40 км/ч, то приедет за 2 ч до отхода поезда. Чему равно расстояние от лагеря до станции?

11. От города до поселка автомобиль доехал за 3 ч. Если бы он увеличил скорость на 25 км/ч, то проехал бы это расстояние за 2 ч. С какой скоростью ехал автомобиль и чему равно расстояние от поселка до города?

12. Два велосипедиста отправились одновременно навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми 60 км, и встретились через 2 ч. Определите скорость каждого велосипедиста, если у одного она на 2 км/ч больше, чем у другого.

13. Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 18 км, одновременно выезжают два велосипедиста. Скорость одного из них на 5 км/ч меньше скорости другого. Велосипедист, который первым прибыл в B , сразу же повернул обратно и встретил другого велосипедиста через 1ч 20 мин после выезда из A . На каком расстоянии от пункта B произошла встреча?

14. Два пешехода выходят навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми 30 км. Если первый выйдет на 2 ч раньше второго, то он встретит второго пешехода через 4,5 ч после своего выхода. Если второй выйдет

на 2 ч раньше первого, то он встретит первого пешехода через 5 ч после своего выхода. С какой скоростью идет каждый пешеход?

15. Расстояние от A до B по железной дороге равно 88 км, а по реке оно составляет 108 км. Поезд из A выходит на 1 ч позже теплохода и прибывает в B на 15 мин. раньше. Найти скорость поезда, если известно, что она на 40 км/ч больше скорости теплохода.

16. Расстояние между двумя пунктами автомобиль должен был проехать за 6 ч. Первые 4 ч он ехал с намеченной скоростью, а затем увеличил ее на 10 км/ч, поэтому в конечный пункт приехал на 20 мин. раньше, чем предполагал. Найти первоначальную скорость автомобиля.

17. (ЕГЭ 2006) За 200 км до станции назначения поезд был задержан у семафора на час. Затем машинист увеличил на 10 км/ч скорость, с которой поезд ехал до остановки, и поэтому поезд прибыл в пункт назначения по расписанию. С какой скоростью ехал поезд после остановки?

18. (ЕГЭ 2003) Экскурсионный автобус выехал из города A в город B , расстояние между которыми равно 250 км. Автобус ехал 2 часа с постоянной скоростью, потом сделал остановку на полчаса. После остановки он ехал со скоростью на 10 км/ч больше первоначальной и приехал в город B в назначенное время. Найдите первоначальную скорость автобуса.

19. На 60 км пути велосипедист тратит на 4 ч больше, чем мотоциклист. Если же он увеличит скорость на 3 км/ч, то на тот же путь потратит в 4 раза больше времени, чем мотоциклист. Найдите скорость велосипедиста.

20. Лодка может проплыть расстояние между двумя селениями, стоящими на берегу, за 4 ч по течению реки и за 8 ч против течения. Скорость течения реки 2 км/ч. Найдите собственную скорость лодки и расстояние между селениями.

21. (ЕГЭ 2007) Катер прошел 3 км против течения реки, а затем 28 км по течению, затратив на весь путь 1 ч. Найдите

те собственную скорость катера, если скорость течения реки 4 км/ч.

22. (ЕГЭ 2007) Расстояние между пристанями A и B равно 24 км (по реке). От пристани A в сторону пристани B отправился плот. Спустя 9 ч от пристани B навстречу плоту вышла моторная лодка, собственная скорость которой 10 км/ч. Найдите скорость плота, если к пристаням A и B плот и лодка прибыли одновременно.

23. (ЕГЭ 2001) Теплоход прошел расстояние от A до B по течению реки за 7 ч, а от B до A – за 14 ч. За какое время проплывет от A до B плот?

24. (ЕГЭ 2003) Катер прошел 45 км по течению реки и 35 км против течения реки за то же время, что он проходит 80 км в стоячей воде. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

25. За 3 часа теплоход прошел 48 км по течению реки и 16 км против течения. В другой раз тот же теплоход за 5 часов прошел 72 км по течению реки и 32 км против течения. Определите скорость течения реки и скорость теплохода в стоячей воде.

26. Велосипедист каждую минуту проезжает на 800 м меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь в 30 км он затратил времени на 2 ч больше, чем мотоциклист. Сколько километров в час проезжал мотоциклист?

27. Два туриста вышли одновременно навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми равно 14 км. После встречи один из них прошел остальную часть пути за 2 ч 40 мин, другой за 1 ч 30 мин. С какой скоростью шел каждый турист?

28. Велосипедист, выезжающий из пункта A , должен приехать в пункт B через 3 часа. Одновременно с ним из пункта C выезжает другой велосипедист и, чтобы успеть приехать в пункт B вместе с первым, он должен проезжать каждый километр на одну минуту скорее, чем первый, так как расстояние от C до B на 6 км больше расстояния от A до B . Определите скорость каждого велосипедиста.

29. Два велосипедиста одновременно выезжают из пунктов A и B навстречу друг другу и встречаются через 2 ч 40 мин. Если бы они выехали из A в B , причем второй на 3 ч позже первого, то второй велосипедист догнал бы первого пройдя $\frac{3}{4}$ пути от A до B . Сколько времени требуется первому на весь путь из A в B ?

30. Чтобы выполнить задание в срок, токарь должен был изготавливать по 24 детали в день. Однако он ежедневно перевыполнял норму на 15 деталей и уже за 6 дней до срока изготовил 21 деталь сверх плана. Сколько деталей изготовил токарь?

31. (2004, пробный ЕГЭ) Два маляра, работая вместе, могут за 1 ч. покрасить стену площадью 40 м². Первый маляр, работая отдельно, может покрасить 50 м² стены, на 4 часа быстрее, чем второй покрасит 90 м² такой же стены. За сколько часов первый маляр сможет покрасить 100 м² стены?

32. (ЕГЭ 2008) Два мебельных мастера, работая вместе, могут за 1 неделю собрать 50 столов. Работая отдельно, первый мастер собирает 60 столов на одну неделю дольше, чем такое же число столов собирает второй мастер. За сколько недель первый мастер соберет 40 столов?

33. (ЕГЭ 2008) Двое рабочих, работая вместе, могут сделать за 1 ч 12 деталей. Первый рабочий, работая отдельно, делает 28 деталей на 1 ч быстрее, чем второй делает 25 таких деталей. За сколько часов второй рабочий может сделать 50 деталей?

34. Две установки по обогащению руды должны были обработать 54 т руды. Первая обработала часть руды за 2 часа, затем ее сменила вторая, которая за 3 часа обработала всю оставшуюся часть. Сколько тонн руды обрабатывает за час первая установка, если 36 тонн обрабатываются ею на 1 час медленнее, чем второй установкой?

35. Один рабочий может изготовить за 3 часа столько деталей, сколько другой рабочий изготовит за 4 часа. За 5 часов совместной работы рабочие могут изгото-

товить 105 деталей. Сколько деталей за 1 час может изготовить каждый рабочий?

36. Бригада рабочих должна была за несколько дней изготовить 216 деталей. Первые три дня бригада выполняла установленную ежедневную норму, а потом стала изготавливать на 8 деталей в день больше. Поэтому уже за 1 день до срока было изготовлено 232 детали. Сколько деталей в день стала изготавливать бригада?

37. С первого поля собрали 1080 ц пшеницы, со второго 750 ц. Площадь первого поля на 10 га больше второго. Если бы урожайность (с 1 га) первого поля была такой же, как урожайность на втором поле, а урожайность на втором поле такой же, как на первом, то с обоих полей собрали бы одинаковое количество зерна. Сколько центнеров с гектара (какова урожайность) собрали с каждого поля?

38. Бригаде грузчиков поручили перевести 120 контейнеров. После перевозки 36 контейнеров автомобиль заменили более мощным, грузоподъемность которого на 10 контейнеров больше. В результате общее число рейсов по сравнению с первоначально планируемым сократилось вдвое. Сколько контейнеров перевозила за один рейс первая машина?

39. Две фабрики мороженого выпустили вместе 172 тонны мороженого. Вторая фабрика работала на 4 дня больше, но в день мороженого выпускала на 2 тонны меньше. Всего первая фабрика выпустила на 28 тонн меньше, чем вторая. Сколько тонн в день выпускала каждая фабрика?

40. Четыре одинаковых насоса, работая вместе, наполнили нефтью первый танкер и треть второго танкера (другого объема) за 11 часов. Если бы три насоса наполнили первый танкер, а затем один из них наполнил бы четверть второго танкера, то работа заняла бы 18 часов. За сколько часов три насоса могут наполнить второй танкер?

41. (ЕГЭ 2005) Двум сотрудникам издательства поручили отредактировать рукопись объемом 560 страниц. Один сотрудник, отдав второму 480 страниц рукописи, взял остальные страницы себе и

выполнил свою часть работ за время, в 8 раз меньше, чем второй – свою. На сколько страниц меньше первый сотрудник должен был отдать второму (добавив их себе), чтобы они, работая с прежней производительностью, выполнили свою работу за одинаковое время?

42. За 3,5 ч работы первый штамповочный пресс может изготовить 42% всего заказа. Второй пресс за 9 ч работы может изготовить 60% заказа, а скорости выполнения работы на третьем и втором прессах относятся как 6:5. За какое время будет выполнен весь заказ, если одновременно будут работать все три прессы?

43. Две бригады, работая вместе, могут закончить уборку урожая за 8 дней. Если первая бригада будет работать 3 дня, а вторая 12 дней, то они выполнят 75% всей работы. За сколько дней может закончить уборку урожая каждая бригада, работая отдельно?

44. При одновременной работе двое рабочих могут выполнить некоторое задание за 6 часов. Если половину задания выполнит первый рабочий, а затем оставшуюся часть – второй, то на это потребуется 12 часов 30 минут. Какую часть задания выполняет за 6 часов рабочий с меньшей производительностью?

45. (ЕГЭ 2006) Две трубы вместе наполняют бассейн за 3 ч. Одна первая труба может наполнить бассейн на 2,5 ч быстрее, чем одна вторая труба. За сколько часов может наполнить бассейн одна первая труба?

46. (ЕГЭ 2006) Токарь и его ученик, работая одновременно, обычно выполняют задание за 5 часов. При этом производительность труда токаря в 3 раза выше производительности ученика. Получив такое же задание и работая по очереди, они справились с заданием за 8 часов работы. Какую часть задания выполнил ученик токаря?

47. (ЕГЭ 2006) Два фермера, работая вместе, могут вспахать поле за 25 ч. Производительности труда первого и второго фермеров относятся как 2:5. Фермеры планируют работать поочередно. Сколько времени должен проработать второй

фермер, чтобы это поле было вспахано за 45,5 ч.?

48. (ЕГЭ 2006) Отец с сыном должны вскопать огород. Производительность труда у отца в два раза больше, чем у сына. Работая вместе, они могут вскопать весь огород за 4 часа. Однако вместе они проработали только один час, потом некоторое время работал один сын, а заканчивал работу уже один отец. Сколько часов в общей сложности проработал на огороде отец, если вся работа на огороде была выполнена за 7 часов?

49. В арифметической прогрессии первый член равен $2\frac{1}{3}$, а разность равна $-\frac{2}{9}$. Является ли число -1 членом этой прогрессии?

50. Между числами 6 и $-3,6$ вставьте семь чисел так, чтобы получилась арифметическая прогрессия.

51. Сколько нужно сложить последовательных четных натуральных чисел, начиная с 20, чтобы сумма равнялась 120?

52. Найдите сумму всех двузначных чисел.

53. Найдите сумму всех четных трехзначных чисел, делящихся на 3.

54. Найдите сумму всех двузначных чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 3.

55. Найдите сумму всех трехзначных натуральных чисел, которые при делении на 11 дают в остатке 5.

56. Найдите сумму членов арифметической прогрессии с тридцатого по сороковой включительно, если $a_n = 3n + 5$.

57. Известно, что при любом n сумма членов некоторой арифметической прогрессии выражается формулой $S_n = 4n^2 - 3n$. Найдите общий член прогрессии.

58. (ЕГЭ 2003) Третий член арифметической прогрессии равен 4, а десятый равен 25. Найдите сумму первых десяти членов данной прогрессии.

59. (ЕГЭ 2003) В арифметической прогрессии сумма первых семи членов равна 21, разность пятого и третьего членов

равна -6 . На каком месте в этой прогрессии стоит число -21 ?

60. Третий член арифметической прогрессии равен -6 , а сумма второго и пятого членов равна -9 . Известно, что один из членов прогрессии равен 15. Найдите его номер.

61. Сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна $\frac{5}{3}$, а произведение третьего и четвертого ее членов равно $\frac{65}{72}$. Найдите сумму семнадцати первых членов этой прогрессии.

62. В арифметической прогрессии сумма третьего и пятого членов равна -14 , а сумма первых девяти членов равна -45 . Сколько отрицательных членов имеет эта прогрессия?

63. В арифметической прогрессии разность тридцать первого и десятого членов составляет 42, а сумма первых пятнадцати членов равна -150 . С какого номера начинаются положительные члены этой прогрессии?

64. (ЕГЭ 2003) Десятый член арифметической прогрессии равен 19, а сумма первых пятидесяти членов равна 2500. Найдите сумму третьего, двенадцатого и двадцатого членов этой прогрессии.

65. Планируя выпуск нового электронного прибора, экономисты предприятия определили, что в первый месяц может быть изготовлено 200 приборов. Далее предполагалось ежемесячно увеличивать выпуск на 20 изделий. За сколько месяцев предприятие сможет выполнить по этому плану поступивший заказ на 11000 приборов?

66. Найдите первый член и разность возрастающей арифметической прогрессии, у которой сумма первых трех членов равна 27, а сумма их квадратов равна 275.

67. Найдите сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, если сумма третьего и восемнадцатого членов равна 8.

68. Сумма первых четырех членов арифметической прогрессии равна 56, а сумма последних четырех ее членов рав-

на 112. Найдите число членов этой прогрессии, если первый ее член равен 11.

69. При делении девятого члена арифметической прогрессии на ее второй член в частном получается 5, а при делении тринадцатого члена этой прогрессии на ее шестой член в частном получается 2 и в остатке 5. Найдите первый член и разность прогрессии.

70. Сумма шести первых членов арифметической прогрессии меньше суммы ее последующих шести членов на 144. На сколько двадцать пятый член прогрессии больше пятнадцатого члена?

71. Турист, поднимаясь в гору, в первый час достиг высоты 800 м, а каждый следующий час поднимался на высоту, на 25 м меньшую, чем в предыдущий. За сколько часов он достигнет высоты в 5700 м?

72. За установку самого нижнего железобетонного кольца колодца заплатили 260 рублей, а за каждое следующее кольцо платили на 20 рублей меньше, чем за предыдущее. Кроме того, по окончании работы было уплачено еще 400 рублей. Средняя стоимость установки одного кольца оказалась равной $\frac{2020}{9}$ рублей.

Сколько колец было установлено?

73. Из пунктов A и B навстречу друг другу выехали одновременно мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист проехал в первую минуту 450 м, а в каждую последующую на 30 м меньше, чем в предыдущую. Велосипедист же проехал в первую минуту 60 м, а в каждую следующую на 10 м больше, чем в предыдущую. Какое расстояние проехал велосипедист до встречи с мотоциклистом, если расстояние между A и B 4200 м?

74. (ЕГЭ 2004) В течение календарного года зарплата каждый месяц повышалась на одно и то же число рублей. За июнь, июль и август зарплата в сумме составила 9900 р., а за сентябрь, октябрь и ноябрь – 10350 р. Найдите сумму зарплат за весь год.

75. (ЕГЭ 2004) При подготовке к экзамену ученик каждый день с 1 по 8 июня включительно увеличивал количество решенных задач на одно и то же число. С

1 июня по 4 июня включительно он решил 24 задачи, а со 2 по 6 июня – 45 задач. Сколько задач ученик решил 8 июня?

76. (ЕГЭ 2004) За 10 дней Карл украл у Клары 165 кораллов и из них 147 в первые 7 дней. Каждый день он крал на одно и то же число кораллов меньше, чем в предыдущий день. Сколько кораллов Карл украл в десятый день?

77. Сумма первого и четвертого членов возрастающей геометрической прогрессии относится к сумме второго и третьего членов этой прогрессии как 13:4. Найдите первый член прогрессии, если третий ее член равен 32.

78. Число 180 представить в виде суммы четырех слагаемых так, чтобы они составляли геометрическую прогрессию, у которой третий член больше первого на 36.

79. Найдите три числа, образующих геометрическую прогрессию, зная, что сумма их равна 62, а сумма их квадратов равна 2604.

80. Геометрическая прогрессия состоит из 6 членов. Найдите ее знаменатель, зная, что сумма трех первых членов в 8 раз меньше суммы трех последних членов.

81. Определите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если известно, что сумма ее первого и четвертого членов равна 54, а сумма второго и третьего 36.

82. Найдите первый член и знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой второй член равен 6, сумма членов равна $\frac{1}{8}$ суммы квадратов ее членов.

83. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 9, а сумма квадратов членов той же прогрессии 40,5. Найдите прогрессию.

84. Сумма трех первых членов геометрической прогрессии равна 42; те же числа составляют первый, второй и шестой члены возрастающей арифметической прогрессии. Найдите эти числа.

85. (2004, пробный ЕГЭ) Если к трем числам a , b , c , составляющим геометри-

ческую прогрессию со знаменателем 4, прибавить соответственно 49, 45 и 14, то получатся три числа, составляющие арифметическую прогрессию. Найдите сумму чисел a , b , c .

86. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 2, то прогрессия станет арифметической, а если после этого увеличить последнее число на 9, то прогрессия снова станет геометрической. Найдите эти числа.

87. (2004, пробный ЕГЭ) Если к четырем числам a , b , c , d , составляющим арифметическую прогрессию, прибавить соответственно 2, 4, 11 и 28, то получатся четыре числа, составляющие геометрическую прогрессию. Найдите сумму чисел a , b , c , d .

88. (2009, пробный ЕГЭ) Задана арифметическая прогрессия с первым членом 3 и разностью 4, а также геометрическая прогрессия с первым членом 1 и знаменателем 3. Найдите сумму первых трех совпадающих членов этих прогрессий.

89. На счет в банк вносится сумма 1 млн. р., но не сразу, а в течение 20 месяцев равными долями в начале каждого месяца. Какой будет сумма на счете в конце 10-го месяца, если банк ежемесячно (в последний рабочий день месяца) начисляет на остаток по счету 4%?

90. Рабочий по норме должен изготовить 500 деталей в месяц. Сдельная расценка за деталь – 20 р. Перевыполнение нормы оплачивается по сдельно-прогрессивной системе: каждые 10 деталей – по удвоенным против предыдущих расценкам (например, 501-я, 502-я, ..., 510-я детали о 40 р.; 511-я, 512-я, ..., 520-я – по 80 р. и т.д.). Какое наименьшее число деталей должен изготовить рабочий, чтобы заработать за месяц 30000 р.?

91. (ЕГЭ 2007) Три насоса, работая вместе, заполняют цистерну нефтью за 5 часов. Производительности насосов относятся как 4:3:1. Сколько процентов объема цистерны будет заполнено за 8 часов совместной работы второго и третьего насосов?

92. (ЕГЭ 2007) Три насоса, работая вместе, заполняют бак керосином за 1 час

40 минут. Производительности насосов относятся как 10:8:7. Сколько процентов объема бака будет заполнено за 2 часа совместной работы второго и третьего насосов?

93. Число a составляет от числа b 40%. Найдите, сколько процентов составляет число b от числа a .

94. Число a составляет 40% от числа b , число b составляет 50% от числа c . Сколько процентов составляет число a от числа c ?

95. В магазин для продажи поступили учебники по физике и математике. Когда продали 50% учебников по математике и 20% учебников по физике, что составило в общей сложности 390 книг, то учебников по математике осталось в 3 раза больше, чем по физике. Сколько учебников по математике и сколько по физике поступило в продажу?

96. Партия изделий содержит 2% брака. Среди не бракованных изделий 30% - первого сорта. Остальные 343 изделия второго сорта. Сколько всего изделий в партии?

97. Вклад размером 1500 денежных единиц разделен на две части. От первой части, помещенной в банк А, получено за год процентных денег прибыли 90 д.е., а от второй части вклада, помещенной в банк Б – 48 д.е. Какой процент годовых выплачивает каждый банк, если известно, что для банка А этот процент на 2 выше, чем для банка Б?

98. Средняя заработная плата преподавателей вузов города за месяц равнялась 765 д.е., а остальных преподавателей – 690 д.е. Средняя заработная плата всех преподавателей города составляла 714 д.е. Какой процент от числа преподавателей города составляют преподаватели вузов?

99. Поле состоит из двух участков. На первом участке 65% его площади засеяно пшеницей, на втором – 45%. Известно, что на всем поле под пшеницей занято 53% площади поля. Какую часть поля составляет первый участок?

100. В течение года рабочему была начислена премия в размере 75% годового заработка. С 60% общей заработной суммы было удержано 12% налога, с

остальной суммы взят 20%-ный налог. Общая сумма налога составила 66,5 минимальных зарплат. Определить общий годовой заработок (в количестве минимальных зарплат) до удержания налога.

101. Для изготовления пшеничного хлеба взято столько килограммов муки, сколько процентов составляет припек на эту муку. Для изготовления ржаного хлеба взято на 10 кг муки больше, т.е. столько килограммов, сколько процентов составляет припек на ржаную муку. Сколько килограммов взято той и другой муки, если всего выпечено 112,5 кг хлеба?

102. Фермер купил лошадь и спустя некоторое время продал ее за 24 д.е. При этой продаже он теряет столько процентов, сколько стоила ему лошадь. За какую сумму он ее купил?

103. Продают три куска ткани. Из первого продали половину, из второго две трети, а третий кусок, в котором одна треть всей материи, продали весь. Сколько процентов ткани продано, если всего ее осталось вдвое меньше, чем было во втором куске?

104. Периметр прямоугольника равен 18 см. Если его длину уменьшить на 20%, а ширину увеличить на 25%, то периметр не изменится. Найдите площадь прямоугольника.

105. За 2 кг огурцов и 3 кг помидоров заплатили 210 д.е. Если огурцы подорожают на 30%, а помидоры подешевеют на 10%, то за такое же количество продуктов будет уплачено 213 д.е. Сколько стоит один килограмм каждого продукта?

106. Одна пара ботинок и куртка общей стоимостью 1200 д.е. были проданы с прибылью 11,5%. Определите первоначальную стоимость ботинок и куртки, если от ботинок было получено 25% прибыли, а от куртки 10%.

107. (ЕГЭ 2005) При покупке ребенку новых лыж с ботинками родителям пришлось заплатить на 35% больше, чем два года назад, причем лыжи подорожали с тех пор на 20%, а ботинки – на 70%. Сколько процентов от стоимости лыж с ботинками составляла два года назад стоимость лыж?

108. (ЕГЭ 2005) Ежемесячный доход семьи складывается из зарплаты отца и зарплаты матери. Зарплату отца увеличили на 5%, а зарплату матери – на 75%, в результате чего семейный доход увеличился на 15%. Во сколько раз зарплата матери до повышения была меньше зарплаты отца?

109. (ЕГЭ 2005) Зимой огурцы становятся дороже, чем летом, на 45%, а помидоры – на 65%. Поэтому овощи для салата «Овощной» из огурцов и помидоров зимой обходятся на 60% дороже, чем летом. Сколько процентов от стоимости овощей для такого салата составляет летом стоимость огурцов?

110. (ЕГЭ 2005) В разгар летнего сезона ягоды дешевеют на 15% по сравнению с началом сезона, а сахар дорожает на 10%, в результате чего приготовление варенья из ягод по определенному рецепту обходится на 10% дешевле. Сколько процентов от стоимости варенья (приготавливаемого по тому же рецепту) составляет стоимость ягод в начале сезона?

111. (ЕГЭ 2005) На рынке костюм, состоящий из пиджака и брюк, стоит на 15% дешевле, чем такой же костюм в магазине, причем брюки стоят на 30%, а пиджак – на 5% дешевле, чем в магазине. Во сколько раз в магазине пиджак от этого костюма дороже брюк?

112. (ЕГЭ 2005) Агрофирма предполагает продать пшеницы на 4% меньше, чем в прошлом году. На сколько процентов ей надо повысить цену на свою пшеницу, чтобы получить за нее на 0,8% больше денег, чем в прошлом году?

113. (ЕГЭ 2005) Свиноферма предполагает продать свинины на 10% меньше, чем в прошлом году. На сколько процентов ей надо повысить цену на свою свинину, чтобы получить за нее на 8% больше денег, чем в прошлом году?

114. (ЕГЭ 2007) Объемы ежегодной добычи угля первой, второй и третьей шахтами относятся как 8:9:10. Первая шахта планирует уменьшить годовую добычу угля на 4%, а вторая – на 2%. На сколько процентов должна увеличить годовую добычу угля третья шахта, чтобы

суммарный объем добываемого за год угля не изменился?

115. (ЕГЭ 2007) Объемы ежегодной добычи нефти первой, второй и третьей скважинами относятся как 4:5:7. Планируется уменьшить годовую добычу нефти из первой скважины на 7% и из второй – тоже на 7%. На сколько процентов нужно увеличить годовую добычу нефти из третьей скважины, чтобы суммарный объем добываемой за год нефти не изменился?

116. (ЕГЭ 2007) Магазин выставил на продажу товар с наценкой 50% от закупочной цены. После продажи 0,75 всего товара магазин снизил назначенную цену на 40% и распродал оставшийся товар. Сколько процентов от закупочной цены товара составила прибыль магазина?

117. (ЕГЭ 2007) Магазин выставил на продажу товар с наценкой 50% от закупочной цены. После продажи 0,9 всего товара магазин снизил назначенную цену на 40% и распродал оставшийся товар. Сколько процентов от закупочной цены товара составила прибыль магазина?

118. (ЕГЭ 2008) Подарочный набор состоит из трех сортов конфет. Массы конфет первого, второго и третьего сортов в этом наборе относятся как 3:9:20. Массу конфет первого сорта увеличили на 8%, а второго – на 4%. На сколько процентов надо уменьшить массу конфет третьего сорта, чтобы масса всего набора не изменилась?

119. За год фруктовый набор, состоящий из яблок, груш и апельсинов, подорожал на 29% из-за того, что цена яблок выросла на 20%, цена груш – на 30%, а апельсины подорожали в полтора раза. Сколько процентов исходной стоимости набора составляла стоимость яблок, если стоимость апельсинов в наборе составляла 20%?

120. Музыкальный театр объявил конкурс для поступления в оркестр. Первоначально предполагалось, что число мест для скрипачей, виолончелистов и трубачей распределится в отношении 1,6:1:0,4. Однако затем было решено увеличить прием, и в результате скрипачей было принято на 25% больше, а виолончелистов на 20% меньше, чем ранее

намечалось. Сколько музыкантов каждого жанра было принято в оркестр, если всего приняли 32 человека?

121. В первой цистерне на 25% нефти меньше, чем во второй и третьей вместе, а во второй на 10 тонн меньше, чем в третьей, и на 50% меньше, чем в первой. Сколько тонн нефти в каждой цистерне?

122. (ЕГЭ 2005) Двум операторам поручили набрать на компьютере текст книги объемом 315 страниц. Один оператор, отдав второму 144 страницы книги, взял остальные страницы себе. Первый выполнил свою работу за 19 дней, а второй свою – за 12 дней. На сколько процентов нужно было увеличить часть работы второго оператора (уменьшив часть работы первого), чтобы они, работая с прежней производительностью, выполнили свою работу за одинаковое число дней?

123. При продаже товара по цене 220 рублей за 1 кг магазин получает 10% прибыли. Если продать этот товар по цене 180 рублей за 1 кг, то магазин понесет убыток в сумме 4300 рублей. Сколько килограммов этого товара имеется в магазине?

124. Однозначное число увеличили на 10 единиц. Если полученное число увеличит на столько же процентов, как в первый раз, то получится 72. Найдите первоначальное число.

125. Букинистический магазин продал книгу со скидкой в 10% от первоначальной стоимости и получил при этом 8% прибыли. Какую прибыль в процентах предполагал получить магазин до скидки?

126. Две противоположные стороны прямоугольника удлин timer на 10%, а другие две укоротили на 10%. На сколько процентов изменится площадь прямоугольника?

127. На сколько процентов увеличится объем прямоугольного параллелепипеда, если длину и ширину его увеличить на 10%, а высоту уменьшить на 10%?

128. За первый квартал автозавод выполнил 25% годового плана выпуска автомашин. Число машин, выпущенных за второй, третий и четвертый кварталы,

оказалось пропорционально числам 11,25; 12 и 13,5. Определите перевыполнение годового плана в процентах, если во втором квартале автозавод дал продукции в 1,08 раза больше, чем в первом.

129. За некоторый период времени количество акций у господина Иванова увеличилось на 15%. На сколько процентов увеличилась общая стоимость акций господина Иванова, если цена каждой акции увеличилась на 20%?

130. Цена товара была снижена на 10%, но за счет повышения спроса за день было продано больше товара, в результате чего дневная выручка от продажи увеличилась на 17%. На сколько процентов увеличилось количество проданного за день товара?

131. В январе завод выполнил 105% плана, а в феврале дал продукции на 4% больше, чем в январе. На сколько процентов завод перевыполнил двухмесячный план?

132. Цветной телевизор два месяца назад стоил на 20% дешевле, чем месяц назад, когда он стоил на 10% дешевле, чем сейчас. На сколько процентов дешевле стоил телевизор два месяца назад, чем сейчас?

133. Скорость автомобиля на шоссе на 12,5% больше скорости по грунтовой дороге, а время, за которое он проехал расстояние по грунтовой дороге, на 10% меньше, чем на шоссе. На сколько процентов расстояние по шоссе больше расстояния по грунтовой дороге?

134. Объем строительных работ увеличился на 80%. На сколько процентов нужно увеличить число рабочих, если производительность труда повысится на 20%?

135. Радиус окружности увеличен на 25%. На сколько процентов увеличится площадь круга?

136. На сколько процентов уменьшится радиус круга, если его площадь уменьшится на 36%?

137. Скорость поезда увеличилась с 70 км/ч до 80 км/ч. На сколько процентов уменьшилось время, затрачиваемое поездом на один и тот же путь?

138. В связи с финансовыми проблемами дирекция предприятия уменьшила продолжительность рабочего дня с 8 до 7 часов. На сколько процентов предстоит рабочим повысить производительность труда, чтобы при тех же расценках сдельной оплаты труда их заработная плата выросла на 5%?

139. В январе численность сотрудников НИИ ОХ составляла 25% от численности сотрудников НИИ АХ. К декабрю того же года число сотрудников НИИ АХ уменьшилось на 16%, а суммарное число сотрудников двух институтов уменьшилось на 18%. На сколько процентов уменьшилось за год число сотрудников НИИ ОХ?

140. Осенью виноград стоил в 10 раз дороже картофеля, зимой овощи и фрукты подорожали. На сколько процентов подорожал картофель, если известно, что виноград, подорожавший на 100%, стал стоить в 16 раз дороже картофеля?

141. Товарооборот магазина А в 2007 году составлял 60% от товарооборота магазина В. В 2008 году товарооборот магазина А вырос на 16%, а суммарный товарооборот двух магазинов уменьшился на 9%. На сколько процентов уменьшился товарооборот магазина В в 2008 году по отношению к 2007 году?

142. Производительность цеха после реконструкции увеличилась на 40%. Заказ до реконструкции был на 5% больше, чем после нее. На сколько процентов время, затрачиваемое на старый заказ до реконструкции больше времени, затрачиваемого на новый заказ после реконструкции?

143. После реконструкции поточной линии ее производительность за смену возросла на 20%, расход электроэнергии за смену сократился на 10%, а цена одного киловаттчаса электроэнергии за время реконструкции выросла на 40%. На сколько процентов увеличились затраты на электроэнергию в расчете на единицу продукции?

144. В последнюю декаду месяца по сравнению с предыдущей число рабочих в бригаде уменьшилось на 15%, но за счет повышения производительности

труда оставшихся рабочих выпуск продукции в последней декаде оказался на 10,5% больше, чем в предыдущей. На сколько процентов увеличилась производительность труда?

145. На заводе 20% всех станков были переведены на повышенную скорость, благодаря чему производительность станка повысилась на 80%. На сколько процентов повысился выпуск продукции?

146. Цех в целом увеличил за год выпуск продукции на 34%, причем 20% рабочих цеха увеличили выпуск продукции на 50%. На сколько процентов увеличили выпуск продукции остальные рабочие цеха?

147. Банк запланировал провести торги в августе и сентябре. Если объем торгов в августе увеличить в 5 раз, а сентябре оставить на запланированном уровне, то суммарный объем торгов возрастет на 300%. Во сколько раз нужно увеличить план торгов на сентябрь, оставив неизменным план на август, чтобы суммарный объем торгов за два месяца вырос на 400%?

148. По пенсионному вкладу банк выплачивает 12% годовых. По истечении каждого года эти проценты капитализируются, т.е. начисленная сумма присоединяется к вкладу. На данный вид вклада был открыт счет в 80000 рублей, который не пополнялся и с которого не снимали деньги в течение 2 лет. Какой доход был получен по истечению этого срока?

149. Магазин выставил на продажу шубу, назначив цену на 150% выше оптовой. В конце сезона эта цена была снижена на 20%, а на распродаже весной новая цена была снижена еще на 40% и шуба была продана за 36000 рублей. Какую прибыль получил магазин?

150. Цена товара сначала увеличилась на 10%, а затем уменьшилась на 25% по сравнению с увеличенной ценой. В результате товар подешевел на 7 рублей по сравнению с его первоначальной ценой. Сколько стоил товар первоначально?

151. Торговая база закупила у изготовителя партию альбомов и поставила ее магазину по оптовой цене, которая на 30% больше цены изготовителя. Магазин

установил розничную цену на альбом на 20% выше оптовой. При распродаже в конце сезона магазин снизил розничную цену на альбом на 10%. На сколько рублей больше заплатил покупатель по сравнению с ценой изготовителя, если на распродаже он приобрел альбом за 70,2 руб.?

152. На один продукт два раза была снижена цена, каждый раз на 15%. На другой продукт, имевший первоначально ту же цену, что и первый, снизили цену один раз на $x\%$. Каким должно быть число x , чтобы после всех указанных снижений оба продукта снова имели одну и ту же цену?

153. Для определения оптимального режима повышения цен социологи предложили фирме с 1 января повышать цену на один и тот же товар в двух магазинах двумя способами. В одном магазине – в начале каждого месяца (начиная с февраля) на 2 %, в другом – через каждые два месяца, в начале третьего (начиная с марта) на одно и то же число процентов, причем такое, чтобы через полгода (1 июля) цены снова стали одинаковыми. На сколько процентов надо повышать цену товара через каждые два месяца во втором магазине?

154. (ЕГЭ 2003) Предприятие уменьшило выпуск продукции на 20%. На сколько процентов необходимо теперь увеличить выпуск продукции, чтобы достигнуть его первоначального уровня?

155. Владелец кинотеатра имел стабильный доход. В целях увеличения прибыли он повысил цену билетов на 80%. Количество посетителей резко уменьшилось. Тогда он снизил новую цену билетов, приведя ее к 90 процентам от первоначальной. На сколько процентов владелец кинотеатра снизил новую цену билетов?

156. За первый год предприятие увеличило выпуск продукции на 8%. В следующем году выпуск увеличился на 25%. На сколько процентов вырос выпуск продукции по сравнению с первоначальным?

157. Цену товара сначала повысили на 20%, затем новую цену товара повысили на 15%, и наконец, еще повысили на 10%.

На сколько процентов всего повысили первоначальную цену товара?

158. В первый день производительность труда в цехе выросла на 80%, во второй выросла на 60%, в третий день упала 40%. Как изменялась в среднем за эти три дня производительность труда?

159. Количество студентов в институте, увеличиваясь на одно и то же число процентов ежегодно, возросло за три года с 5000 до 6655 человек. На сколько процентов увеличивалось число студентов ежегодно?

160. Себестоимость единицы продукции, которая сначала равнялась 2500 руб., после двух последовательных снижений на одно и то же число процентов снизилась до 2025 рублей. На сколько процентов снижалась себестоимость каждый раз?

161. Первоначальная себестоимость единицы продукции была равна 500 руб. В течение первого года производства она повысилась на некоторое число процентов, а в течение второго года снизилась на такое же число процентов, в результате чего она стала равной 480 рублей. Определите проценты повышения и снижения себестоимости единицы продукции.

162. Кооператив на изготавливаемые им изделия первоначально назначил цену выше государственной на определенное число процентов. Через некоторое время кооператив уценил изделия на то же число процентов, в результате цена изделий стала на 1% меньше государственной. На какое число процентов кооперативная цена первоначально превышала государственную?

163. Зарплату повысили на $p\%$. Затем новую зарплату повысили на $2p\%$. В результате двух повышений зарплата увеличилась в 1,32 раза. На сколько процентов зарплата была повышена во второй раз?

164. После двух повышений зарплата увеличилась в 1,43 раза. При этом число процентов, на которое повысилась зарплата во второй раз, было в 3 раза больше, чем в первый раз. На сколько про-

центов повысилась зарплата во второй раз?

165. В начале года на сберкнижку было положено 1640 тыс. руб., а в конце года после начисления процентов, взято обратно 882 тыс. руб. Еще через год на сберкнижке снова оказалось 882 тыс. руб. Сколько процентов начисляет сбербанк в год?

166. На оленеводческой ферме стадо увеличивается в результате естественного прироста и приобретения новых оленей. В начале первого года стадо составляло 3000 голов, в конце года ферма купила 700 голов. В конце второго года стадо составляло 4400 голов. Определите процент естественного прироста.

167. Цена некоторого товара была сначала повышена на 20%, затем снижена на 400 рублей, и, наконец, снова повышена еще на 30% по отношению к предыдущему значению. Какова была первоначальная цена товара, если в результате повышение составило 4%?

168. Некоторая сумма, большая 1000 рублей, была помещена в банк, и после первого периода хранения проценты, начисленные на вклад, составили 400 рублей. Владелец вклада добавил на счет еще 600 рублей. После второго периода хранения и начисления процентов сумма на счету стала равной 5500 рублям. Сколько процентов начислялась по вкладу, если процентная ставка банка для первого и второго периодов хранения одинакова?

169. В начале года в сбербанк на книжку было внесено 10000 рублей, по окончании года было взято обратно 1000 рублей. Сколько процентов должен начислять сбербанк в год, чтобы по окончании следующего года на книжке оказалось 24000 рублей?

170. (2009, пробный ЕГЭ) Начальный капитал акционерного общества составляет 15 миллионов рублей. Ежегодно капитал увеличивался на 25%. Найдите минимальное количество лет, после которых капитал акционерного общества превысит 45 миллионов рублей.

171. Смешали 2 литра 15% раствора кислоты, 4 литра 10% раствора и 5 лит-

ров 12% раствора кислоты. Найти концентрацию (в процентах) полученного раствора.

172. (ЕГЭ 2005) В бидон налили 7 литров молока однопроцентной жирности и 3 литра молока шестипроцентной жирности. Какова жирность полученного молока (в процентах)?

173. (ЕГЭ 2005) В бидон налили 1 литр молока однопроцентной жирности и 9 литров молока шестипроцентной жирности. Какова жирность полученного молока (в процентах)?

174. (ЕГЭ 2005) В трех литрах воды размешали 5 чайных ложек минерального удобрения, а в десяти литрах – две. Оба раствора слили в один бак и получили раствор удобрения нужной концентрации. Сколько чайных ложек удобрения нужно размешать в 65 литрах воды для получения раствора удобрения такой же концентрации?

175. Слиток сплава серебра с цинком весом в 3,5 кг содержал 76% серебра. Его сплавляли с другим слитком и получили слиток весом в 10,5 кг, содержание серебра в котором было 84%. Сколько процентов серебра содержалось во втором слитке?

176. (ЕГЭ 2004) Сплав алюминия и магния отличается большой прочностью и пластичностью. Первый такой сплав содержит 5% магния, второй сплав – 3% магния. Масса второго сплава в 4 раза больше, чем масса первого сплава. Эти сплавы сплавляли и получили 3 кг нового сплава. Определите, сколько граммов магния содержится в новом сплаве.

177. (2004, пробный ЕГЭ) К какому количеству (в граммах) раствора соли четырехпроцентной концентрации надо добавить 25 граммов раствора соли девятипроцентной концентрации, чтобы получить пятипроцентный раствор соли?

178. Масса первого сплава на 3 кг больше массы второго сплава. Первый сплав содержит 10% цинка, второй – 40% цинка. Новый сплав, полученный из двух первоначальных, содержит 20% цинка. Определите массу нового сплава.

179. Сосуд содержит 20% раствор кислоты. Из него отлили 5 л, а затем добави-

ли 5 л 10% раствора той же кислоты. В результате получили 16% раствор. Сколько кислоты было в сосуде в начале?

180. Имеется сталь двух сортов, один из которых содержит 5%, а другой – 10% никеля. Сколько тонн каждого из этих сортов нужно взять, чтобы получить сплав, содержащий 8% никеля, если во втором куске никеля на 4 т больше, чем в первом?

181. Два раствора, из которых первый содержал 800 г безводной серной кислоты, а второй – 600 г соединили вместе и получили 10 кг нового раствора серной кислоты. Определите вес первого и второго растворов, вошедших в смесь, если известно, что процент содержания безводной серной кислоты в первом растворе на 10 больше, чем процент содержания безводной серной кислоты во втором.

182. В 500 кг руды содержится некоторое количество железа. После удаления из руды 200 кг примесей, содержащих в среднем 12,5% железа, в оставшейся руде содержание железа повысилось на 20%. Какое количество железа осталось еще в руде?

183. Имеется два раствора поваренной соли разной концентрации. Если слить вместе 100 г первого раствора и 200 г второго, то получится 50%-ный раствор. Если же слить 300 г первого раствора и 200 г второго, то получится 42%-ный раствор. Определите процент содержания поваренной соли в каждом растворе.

184. Имеется два сплава золота и серебра. В одном сплаве количества этих металлов находятся в отношении 1:2, в другом – 2:3. Сколько граммов нужно взять от каждого сплава, чтобы получить 19 г сплава, в котором золото и серебро находятся в отношении 7:12?

185. Один сплав состоит из двух металлов, входящих в него в отношении 1:2, а другой сплав содержит те же металлы в отношении 2:3. В каком отношении необходимо взять эти сплавы, чтобы получить новый сплав, содержащий те же металлы в отношении 17:27?

186. Имеются два сплава меди и цинка. В первом сплаве меди в 2 раза больше, чем цинка, а во втором меди в 5 раз

меньше, чем цинка. Во сколько раз больше надо взять второго сплава, чем первого, чтобы получить новый сплав, в котором цинка было бы в 2 раза больше, чем меди?

187. В каких пропорциях нужно сплавить золото 375-й пробы с золотом 750-й пробы, чтобы получить золото 500-й пробы?

188. (ЕГЭ 2004) Первый сплав серебра и меди содержит 430 г серебра и 70 г меди, а второй сплав – 210 г серебра и какое-то количество меди. Сплавляли кусок первого сплава с куском массой 75 г второго сплава и получили 300 г сплава, который содержит 82% серебра. Определите массу (в граммах) второго сплава.

189. (ЕГЭ 2004) Имеются два слитка сплава серебра и олова. Первый слиток содержит 360 г серебра и 40 г олова, а второй слиток – 450 г серебра и 150 г олова. От каждого слитка взяли по куску, сплавляли их и получили 200 г сплава, в котором оказался 81% серебра. Определите массу (в граммах) куска, взятого от второго слитка.

190. Смешали 20 л 70%-ного спирта, 30 л 50%-ного спирта и 22,5 л воды. Каково процентное содержание спирта в получившейся смеси?

191. Смешали 5 л сливок 35%-ной жирности с 4 л сливок 20%-ной жирности и к смеси добавили 1 л чистой воды. Какова жирность полученной смеси?

192. Кусок сплава меди с оловом массой 15 кг содержит 20% меди. Сколько чистой меди необходимо добавить к этому сплаву, чтобы новый сплав содержал 40% олова?

193. (ЕГЭ 2003) Влажность сухой цементной смеси на складе составляет 18%. Во время перевозки из-за дождей влажность смеси повысилась на 2%. Найдите массу привезенной смеси, если со склада было отправлено 400 кг.

194. Свежие грибы содержат по массе 90% воды, а сухие 12%. Сколько получится сухих грибов из 22 кг свежих?

195. Из 40 т руды выплавляется 20 т стали, содержащего 6% примесей. Каков процент примесей в руде?

196. (ЕГЭ 2004) В колбе было 800 г 80%-го спирта. Провизор отлил из колбы 200 г этого спирта и добавил в нее 200 г воды. Определите концентрацию (в процентах) полученного спирта.

197. (ЕГЭ 2004) В колбе было 200 г 80%-го спирта. Провизор отлил из колбы некоторое количество этого спирта и затем добавил в нее столько же воды, чтобы получить 60%-ый спирт. Сколько граммов воды добавил провизор?

198. (ЕГЭ 2004) Латунь – сплав меди и цинка. Кусок латуни содержит меди на 11 кг больше, чем цинка. Этот кусок латуни сплавляли с 12 кг меди и получили латунь, в которой 75% меди. Сколько килограммов меди было в куске латуни первоначально?

199. (ЕГЭ 2004) Латунь – сплав меди и цинка. Кусок латуни содержит меди на 60 кг больше, чем цинка. Этот кусок латуни сплавляли со 100 кг меди и получили латунь, в которой 7% меди. Определите процент содержания меди в первоначальном куске латуни.

200. Вычислите массу и пробу сплава серебра с медью, зная, что сплавив его с 3 кг чистого серебра, получим сплав 900-й пробы (т.е. в сплаве 90% серебра), а сплавив с 2 кг сплава 900-й пробы, получили сплав 840-й пробы.

201. В двух сплавах медь и цинк относятся как 4:1 и 1:3. После совместной переплавки 10 кг первого сплава, 16 кг второго сплава и нескольких килограммов чистой меди получили сплав, в котором медь и цинк относятся как 3:2. Определите вес нового сплава.

202. К раствору, содержащему 39 г соли, добавили 1000 г воды, после чего концентрация соли уменьшилась на 10%. Найдите первоначальную процентную концентрацию соли в растворе.

203. Емкость сосуда 8 л. Он наполнен воздухом, содержащим 16% кислорода. Из этого сосуда выпускают некоторое количество воздуха и впускают такое же количество азота. После чего опять выпускают такое же, как и первый раз количество смеси, и опять дополняют таким же количеством азота. В новой смеси оказалось 9% кислорода. Определите, по

сколько литров смеси выпускали из сосуда каждый раз.

204. Из бутылки, наполненной 12%-ным раствором соли, отлили 1 л раствора и налили 1 л воды, затем отлили еще 1 л смеси и опять долили водой. В бутылке оказался 3%-ный раствор соли. Какова вместимость бутылки?

205. Из сосуда, емкостью 54 л, наполненного чистой кислотой, вылили несколько литров и долили сосуд водой. Затем вылили столько же литров смеси, как в первый раз. Тогда в оставшейся в сосуде смеси оказалось 24 л кислоты. Сколько литров кислоты вылили в первый раз из сосуда?

206. Два человека отправляются из одного и того же места на прогулку до опушки леса, находящейся в 4,3 км от места отправления. Один идет со скоростью 4 км/ч, а другой – со скоростью 4,6 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от точки отправления произойдет их встреча? Ответ дайте в километрах.

207. Численность волков в двух заповедниках в 2009 году составляла 220 особей. Через год обнаружили, что в первом заповеднике численность волков возросла на 10%, а во втором – на 20%. В результате общая численность волков в двух заповедниках составила 250 особей. Сколько волков было в первом заповеднике в 2009 году?

208. Брюки дороже рубашки на 30%, и дешевле пиджака на 22%. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

209. Из пункта А круговой трассы, длина которой равна 30 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобилиста. Скорость первого равна 92 км/ч, скорость второго – 77 км/ч. Через сколько минут первый автомобилист будет опережать второго ровно на 1 круг?

210. Три килограмма черешни стоят столько же, сколько пять килограммов вишни, а три килограмма вишни – столько же, сколько два килограмма клубники. На сколько процентов килограмм клубники дешевле килограмма черешни.

211. Первая труба наполняет бак объемом 600 литров, а вторая труба – бак объемом 900 литров. Известно, что одна из труб пропускает в минуту на 3 л воды больше, чем другая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если баки были наполнены за одно и то же время?

Решение заданий-прототипов

I. Задачи на движение

1. Движение по прямой дороге

1.1.1. Решение. Автомобили сближаются со скоростью $65 + 75 = 140$ (км/ч). Они встретятся через $\frac{560}{140} = 4$ (часа).

Ответ: 4.

1.2.1. Решение. Автомобиль, выехавший из A в B , проехал $330 - 180 = 150$ (км) за 3 часа. Поэтому его скорость равна $\frac{150}{3} = 50$ (км/ч).

Ответ: 50.

1.3.1. Решение. Первый пешеход отдалается от второго со скоростью 1,5 км/ч. Расстояние между пешеходами станет равным 300 м = 0,3 км через $\frac{0,3}{1,5} = \frac{1}{5}$ (часа) или $\left(\frac{1}{5} \cdot 60\right)$ ч = 12 минут.

Ответ: 12.

1.4.1. Решение. Рассмотрим ситуацию через час после выезда первого автомобиля. Так как первый автомобиль уже проехал 60 км за этот час, то расстояние между автомобилями стало равным $435 - 60 = 375$ (км). Скорость сближения автомобилей равна $65 + 60 = 125$ (км/ч) и до момента их встречи пройдет $\frac{375}{125} = 3$ (часа). Так как от момента выезда первого автомобиля из A до встречи автомобилей прошло $3 + 1 = 4$ часа, то первый автомобиль до встречи проехал $60 \cdot 4 = 240$ (км).

Ответ: 240.

1.5.1. Решение. Так как автомобили встретились на расстоянии $470 - 350 = 120$ (км) от города B , то второй автомобиль от момента своего выезда до момента встречи был в пути $\frac{120}{60} = 2$ (часа). Первый автомобиль был в пути $3 + 2 = 5$ (часов) и проехал за это

время 350 км, значит его скорость $\frac{350}{5} = 70$ (км/ч).

Ответ: 70.

1.6.1. Решение. Пусть x км/ч - скорость велосипедиста. Составим таблицу:

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
Автомобилист	75	$x + 40$	$\frac{75}{x + 40}$
Велосипедист	75	x	$\frac{75}{x}$

Велосипедист был в пути на 6 часов дольше, чем автомобилист. Составим уравнение.

$$\frac{75}{x} - \frac{75}{x + 40} = 6.$$

Решим это уравнение.

$$\frac{75(x + 40) - 75x}{x(x + 40)} = 6;$$

$$\frac{75 \cdot 40}{x(x + 40)} = 6;$$

$$\frac{500}{x(x + 40)} = 1;$$

$$x^2 + 40x = 500, x \neq 0, x \neq -40;$$

$$x^2 + 40x - 500 = 0;$$

$$\begin{cases} x = -50, \\ x = 10. \end{cases}$$

Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи. Итак, велосипедист ехал со скоростью 10 км/ч.

Ответ: 10.

1.7.1. Решение. Пусть x км/ч - скорость велосипедиста на пути из B в A . Составим таблицу:

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
$A \rightarrow B$	70	$x - 3$	$\frac{70}{x - 3}$
$B \rightarrow A$	70	x	$\frac{70}{x}$

С учетом остановки, в движении велосипедист на пути из A в B находился на 3 часа дольше, чем на пути из B в A . Составим уравнение.

$$\frac{70}{x-3} - \frac{70}{x} = 3.$$

Решим это уравнение.

$$\begin{aligned} \frac{70x - 70(x-3)}{x(x-3)} &= 3; \\ \frac{70 \cdot 3}{x(x-3)} &= 3; \\ \frac{70}{x(x-3)} &= 1; \\ x^2 - 3x &= 70, x \neq 0, x \neq 3; \\ x^2 - 3x - 70 &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 10, \\ x = -7. \end{cases}$$

Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи. Итак, велосипедист ехал из B в A со скоростью 10 км/ч.

Ответ: 10.

1.8.1. Решение. Пусть x км/ч - скорость велосипедиста на пути из A в B . Составим таблицу:

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
$A \rightarrow B$	98	x	$\frac{98}{x}$
$B \rightarrow A$	98	$x+7$	$\frac{98}{x+7}$

С учетом остановки, в движении велосипедист на пути из A в B находился на 7 часов дольше, чем на пути из B в A . Составим уравнение.

$$\frac{98}{x} - \frac{98}{x+7} = 7$$

Решим это уравнение.

$$\begin{aligned} \frac{98(x+7) - 98x}{x(x+7)} &= 7; \\ \frac{98 \cdot 7}{x(x+7)} &= 7; \\ \frac{98}{x(x+7)} &= 1; \\ x^2 + 7x &= 98, x \neq 0, x \neq -7; \\ x^2 + 7x - 98 &= 0; \\ \begin{cases} x = -14, \\ x = 7. \end{cases} \end{aligned}$$

Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи. Итак, велосипедист ехал из A в B со скоростью 7 км/ч.

Ответ: 7.

1.9.1. Решение. Пусть x км/ч - скорость первого велосипедиста (у него по условию задачи скорость больше, он и придет к финишу первым). Составим таблицу:

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
Первый велосипедист	240	x	$\frac{240}{x}$
Второй велосипедист	240	$x-1$	$\frac{240}{x-1}$

Второй велосипедист был в пути на 1 час дольше, чем первый. Составим уравнение.

$$\frac{240}{x-1} - \frac{240}{x} = 1.$$

Решим это уравнение.

$$\begin{aligned} \frac{240x - 240(x-1)}{x(x-1)} &= 1; \\ \frac{240}{x(x-1)} &= 1; \\ x^2 - x &= 240, x \neq 0, x \neq 1; \\ x^2 - x - 240 &= 0; \\ \begin{cases} x = 16, \\ x = -15. \end{cases} \end{aligned}$$

Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи. Итак, первый велосипедист ехал со скоростью 16 км/ч.

Ответ: 16.

1.10.1. Решение. Пусть x км/ч - скорость второго велосипедиста (у него по условию задачи скорость меньше, он и придет к финишу первым). Составим таблицу:

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
Первый велосипедист	88	$x+3$	$\frac{88}{x+3}$
Второй велосипедист	88	x	$\frac{88}{x}$

Второй велосипедист был в пути на 3 часа дольше, чем первый. Составим уравнение.

$$\frac{88}{x} - \frac{88}{x+3} = 3.$$

Решим это уравнение.

$$\frac{88(x+3) - 88x}{x(x+3)} = 3;$$

$$\frac{88 \cdot 3}{x(x+3)} = 3;$$

$$\frac{88}{x(x+3)} = 1;$$

$$x^2 + 3x = 88, x \neq 0, x \neq -3;$$

$$x^2 + 3x - 88 = 0;$$

$$\begin{cases} x = -11, \\ x = 8. \end{cases}$$

Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи. Итак, второй велосипедист ехал со скоростью 8 км/ч.

Ответ: 8.

1.11.1. Решение. 1-й способ.

48 мин = $\frac{48}{60}$ ч = $\frac{4}{5}$ ч. Пусть x км/ч - скорость мотоциклиста, y км/ч - скорость велосипедиста. До встречи мотоциклист проехал $\frac{4x}{5}$ км, велосипедист $\frac{4y}{5}$ км.

Составим таблицу для ситуации с момента встречи:

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
Мотоциклист	$\frac{4y}{5}$	x	$\frac{4y}{5x}$
Велосипедист	$\frac{4x}{5}$	y	$\frac{4x}{5y}$

Велосипедист после встречи был в пути на 3 часа дольше, чем мотоциклист. Составим уравнение.

$$\frac{4x}{5y} - \frac{4y}{5x} = 3.$$

Решим это уравнение. С учетом естественных ограничений $x > 0, y > 0$, сделаем замену $t = \frac{x}{y}, t > 0$:

$$\frac{4t}{5} - \frac{4}{5t} = 3;$$

$$4t^2 - 15t - 4 = 0;$$

$$\begin{cases} t = 4, \\ t = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Условию $t > 0$ удовлетворяет только $t = 4$. Следовательно, $\frac{x}{y} = 4$.

Велосипедист затратил на путь из B в A $\frac{4}{5}$ часа до встречи с мотоциклистом и

$\frac{4x}{5y} = \frac{4}{5} \cdot 4 = \frac{16}{5}$ часа после встречи, всего

$$\frac{16}{5} + \frac{4}{5} = \frac{20}{5} = 4 \text{ часа.}$$

Решение. 2-й способ. Пусть x км/ч - скорость мотоциклиста, y км/ч - скорость велосипедиста и встреча произошла в пункте C . Если мотоциклист после встречи затратил t часов, то велосипедист после встречи затратил $t + 3$ часа. На участке пути AC отношение скоростей равно $\frac{x}{y} = \frac{4/5}{t+5}$, а на участке пути BC от-

ношение скоростей равно $\frac{x}{y} = \frac{t}{4/5}$. Получаем уравнение $\frac{4/5}{t+5} = \frac{t}{4/5}$ или

$$t^2 + 3t - \frac{16}{25} = 0. \text{ Положительный корень}$$

последнего уравнения равен $\frac{1}{5}$. Велосипедист затратил на путь из B в A $\frac{1}{5} + 3 + \frac{4}{5} = 4$ часа.

Ответ: 4.

1.12.1. Решение. Пусть x км/ч - скорость товарного поезда. Каждый час скорый поезд проезжает на $0,75 \cdot 60 = 45$ (км) больше, чем товарный. Составим таблицу:

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
Товарный поезд	180	x	$\frac{180}{x}$
Скорый поезд	180	$x + 45$	$\frac{180}{x + 45}$

Товарный поезд находится в пути на 2 часа дольше, чем скорый. Составим уравнение.

$$\frac{180}{x} - \frac{180}{x+45} = 2.$$

Решим это уравнение.

$$\frac{180(x+45) - 180x}{x(x+45)} = 2;$$

$$\frac{180 \cdot 45}{x(x+45)} = 2;$$

$$\frac{4050}{x(x+45)} = 1;$$

$$x^2 + 45x = 4050, x \neq 0, x \neq -45;$$

$$x^2 + 45x - 4050 = 0;$$

$$\begin{cases} x = -90, \\ x = 45. \end{cases}$$

Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи. Итак, скорость товарного поезда 45 км/ч.

Ответ: 45.

1.13.1. Решение. 1-й способ. Пусть x км/ч - скорость автомобилиста, S км - неизвестное расстояние от A до C . Составим таблицу для случая, когда мотоциклист догнал автомобилиста в пункте C :

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
Автомобилист	S	x	$\frac{S}{x}$
Мотоциклист	S	90	$\frac{S}{90}$

Автомобилист был в пути на 0,5 часа дольше. Составим первое уравнение:

$$\frac{S}{x} - \frac{S}{90} = 0,5.$$

Выразим x из первого уравнения:

$$x = \frac{90S}{S+45}.$$

Составим таблицу для случая, когда после встречи автомобилист приехал в пункт B , а мотоциклист вернулся в пункт A :

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
Автомобилист	$150 - S$	x	$\frac{150 - S}{x}$
Мотоциклист	S	90	$\frac{S}{90}$

Составим второе уравнение:

$$\frac{150 - S}{x} = \frac{S}{90}.$$

Выразим x из второго уравнения:

$$x = \frac{90(150 - S)}{S}$$

Приравниваем правые части выражений для x из первого и второго уравнений,

$$\frac{90S}{S+45} = \frac{90(150 - S)}{S};$$

$$\frac{S}{S+45} = \frac{150 - S}{S};$$

$$S^2 = (S+45)(150 - S), S \neq 0, S \neq -45;$$

$$2S^2 - 105S - 6750 = 0;$$

$$\begin{cases} S = 90, \\ S = -37,5. \end{cases}$$

Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи. Итак, расстояние от A до C равно 90 км.

Решение. 2-й способ. Пусть x км/ч - скорость автомобилиста, тогда $90 - x$ км/ч - скорость сближения. Мотоциклист догонит автомобилиста через $\frac{0,5x}{90 - x}$ часов. Время движения мотоциклиста от A до C и обратно равно $\frac{x}{90 - x}$ часов, а время движения автомобилиста от A до B равно $\frac{150}{x}$ часов. Автомобилист был в пути на 0,5 часа дольше. Составим уравнение:

$$\frac{150}{x} - \frac{x}{90 - x} = \frac{1}{2}.$$

Получаем квадратное уравнение $x^2 + 390x - 27000 = 0$, имеющее единственный положительный корень $x = 60$. Расстояние от A до C равно $\frac{0,5 \cdot 60}{90 - 60} \cdot 90 = 90$ км.

Ответ: 90.

1.14.1. Решение. Пусть x км/ч - скорость первого автомобилиста, $2S$ км -

неизвестное расстояние от A до B . Составим таблицу:

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
Первый автомобилист	$2S$	x	$\frac{2S}{x}$
Второй автомобилист	S	24	$\frac{S}{24}$
	S	$x+16$	$\frac{S}{x+16}$

Автомобили прибыли в B одновременно. Составим уравнение:

$$\frac{2S}{x} = \frac{S}{24} + \frac{S}{x+16}.$$

Решим уравнение. Разделим обе части уравнения на $S > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x} - \frac{1}{x+16} &= \frac{1}{24}; \\ \frac{2(x+16) - x}{x(x+16)} &= \frac{1}{24}; \\ \frac{x+32}{x(x+16)} &= \frac{1}{24}; \end{aligned}$$

$$x^2 + 16x = 24(x+32), x \neq 0, x \neq -16;$$

$$x^2 - 8x - 768 = 0;$$

$$\begin{cases} x = -24, \\ x = 32. \end{cases}$$

Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи. Итак, первый автомобилист ехал со скоростью 32 км/ч.

Ответ: 32.

1.15.1. Решение. Пусть x км/ч - скорость первого автомобилиста, $2S$ км - неизвестное расстояние от A до B . Составим таблицу:

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
Первый автомобилист	$2S$	x	$\frac{2S}{x}$
Второй автомобилист	S	$x-13$	$\frac{S}{x-13}$
	S	78	$\frac{S}{78}$

Автомобили прибыли в B одновременно. Составим уравнение.

$$\frac{2S}{x} = \frac{S}{x-13} + \frac{S}{78}$$

Решим это уравнение. Разделим обе части уравнения на $S > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x} - \frac{1}{x-13} &= \frac{1}{78}; \\ \frac{2(x-13) - x}{x(x-13)} &= \frac{1}{78}; \\ \frac{x-26}{x(x-13)} &= \frac{1}{78}; \end{aligned}$$

$$x^2 - 13x = 78(x-26), x \neq 0, x \neq 13;$$

$$x^2 - 91x + 2028 = 0;$$

$$\begin{cases} x = 52, \\ x = 39. \end{cases}$$

С учетом того, что по условию задачи скорость первого автомобилиста больше 48 км/ч, первый автомобилист ехал со скоростью 52 км/ч.

Ответ: 52.

2. Движение по замкнутой дороге

2.1.1. Решение. Скорость сближения одного мотоциклиста с другим равна разности скоростей мотоциклистов и равна 21 км/ч. В начальный момент времени мотоциклисты находятся на расстоянии 7 км друг от друга. Мотоциклисты поравняются в первый раз через $\frac{7}{21} = \frac{1}{3}$ часа или через 20 минут.

Ответ: 20.

2.2.1. Решение. 1-й способ. Пусть x км/ч - скорость второго автомобиля, тогда скорость удаления первого автомобиля от второго автомобиля равна $(80-x)$ км/ч. С учетом того, что $40 \text{ мин} = \frac{40}{60} \text{ ч} = \frac{2}{3} \text{ ч}$, составим и решим уравнение вида $S = v \cdot t$:

$$\begin{aligned} 14 &= (80-x) \cdot \frac{2}{3} \\ 80-x &= 21 \\ x &= 59 \end{aligned}$$

Скорость второго автомобиля 59 км/ч.

Решение. 2-й способ. Скорость удаления первого автомобиля от второго автомобиля равна $14 : \frac{2}{3} = 21$ км/ч. Тогда

скорость второго автомобиля равна $80 - 21 = 59$ км/ч.

Ответ: 59.

2.3.1. Решение. 1-й способ. Мотоциклист проехал за 10 минут такое же расстояние, какое велосипедист проехал за 40 минут, поэтому скорость мотоциклиста в 4 раза больше скорости велосипедиста. Обозначим скорости мотоциклиста и велосипедиста за $4v$ и v соответственно. Тогда разность их скоростей равна $3v$ и можно составить и решить уравнение вида $S = v \cdot t$:

$$30 = 3v \cdot 0,5;$$

$$v = 20.$$

Скорость мотоциклиста равна $4 \cdot 20 = 80$ км/ч.

Решение. 2-й способ. Пусть x км/ч - скорость велосипедиста, y км/ч - скорость мотоциклиста, тогда $(y - x)$ км/ч - скорость сближения или удаления. Составим два уравнения $\frac{0,5x}{y-x} = \frac{1}{6}$ и

$\frac{30}{y-x} = \frac{1}{2}$. Из второго уравнения находим $y - x = 60$. Подставляем в первое уравнение, находим $x = 20$. Тогда $y = 60 + 20 = 80$.

Ответ: 80.

2.4.1. Решение. Минутная стрелка в первый раз поравняется с часовой в период между 8 и 9 часами, во второй раз - между 9 и 10 часами, в 3 раз - между 10 и 11 часами, в 4 раз - между 11 и 12 часами. Между 11 и 12 часами стрелки могут поравняться только в 12:00. Это произойдет ровно через 4 часа, т.е. через 240 минут

Ответ: 240.

3. Движение по реке

3.1.1. Решение. Для решения подобных задач удобно составить таблицу, используя так называемую «схему $S - v - t$ ». За неизвестное будем обозначать то, что требуется найти в условии.

Пусть x км/ч - скорость течения реки, тогда скорость движения лодки по течению реки равна $(11 + x)$ км/ч, а против

течения реки - $(11 - x)$ км/ч. Составим таблицу:

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
Против течения	112	$11 - x$	$\frac{112}{11 - x}$
По течению	112	$11 + x$	$\frac{112}{11 + x}$

Против течения лодка шла на 6 часов дольше, чем по течению. Составим уравнение:

$$\frac{112}{11 - x} - \frac{112}{11 + x} = 6.$$

Решим это уравнение.

$$\frac{56}{11 - x} - \frac{56}{11 + x} = 3;$$

$$\frac{56(11 + x) - 56(11 - x)}{(11 - x)(11 + x)} = 3;$$

$$\frac{112x}{121 - x^2} = 3;$$

$$3(121 - x^2) = 112x, x \neq \pm 11;$$

$$3x^2 + 112x - 363 = 0;$$

$$\begin{cases} x = 3, \\ x = -\frac{121}{3}. \end{cases}$$

Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи. Итак, скорость течения 3 км/ч.

Ответ: 3.

3.2.1. Решение. Пусть x км/ч - скорость лодки в неподвижной воде, тогда скорость движения лодки по течению реки равна $(x + 1)$ км/ч, а против течения реки - $(x - 1)$ км/ч. Составим таблицу:

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
Против течения	255	$x - 1$	$\frac{255}{x - 1}$
По течению	255	$x + 1$	$\frac{255}{x + 1}$

Против течения лодка шла на 2 часа дольше, чем по течению. Составим уравнение.

$$\frac{255}{x - 1} - \frac{255}{x + 1} = 2.$$

Решим это уравнение.

$$\frac{255(x+1) - 255(x-1)}{(x-1)(x+1)} = 2;$$

$$\frac{255 \cdot 2}{x^2 - 1} = 2;$$

$$\frac{255}{x^2 - 1} = 1;$$

$$x^2 - 1 = 255, x \neq \pm 1;$$

$$x^2 = 256;$$

$$\begin{cases} x = 16, \\ x = -16. \end{cases}$$

Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи. Итак, скорость лодки в неподвижной воде 16 км/ч.

Ответ: 16.

3.3.1. Решение. Пусть x км/ч - собственная скорость лодки, тогда скорость движения лодки по течению реки равна $(x+1)$ км/ч, а против течения реки - $(x-1)$ км/ч. Составим таблицу:

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
Против течения	30	$x-1$	$\frac{30}{x-1}$
По течению	30	$x+1$	$\frac{30}{x+1}$

Всего в движении лодка находилась $8 - 2,5 = 5,5$ (часа). Составим уравнение:

$$\frac{30}{x-1} + \frac{30}{x+1} = \frac{11}{2}.$$

Решим это уравнение.

$$\frac{30(x+1) + 30(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{11}{2};$$

$$\frac{60x}{x^2 - 1} = \frac{11}{2};$$

$$11 \cdot (x^2 - 1) = 120x, x \neq \pm 1;$$

$$11x^2 - 120x - 11 = 0;$$

$$\begin{cases} x = 11, \\ x = -\frac{1}{11}. \end{cases}$$

Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи. Итак, собственная скорость лодки 11 км/ч.

Ответ: 11.

3.4.1. Решение. Пусть x км/ч - скорость течения реки, тогда скорость движения теплохода по течению реки равна

$(15+x)$ км/ч, а против течения реки - $(15-x)$ км/ч. Составим таблицу:

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
По течению	200	$15+x$	$\frac{200}{15+x}$
Против течения	200	$15-x$	$\frac{200}{15-x}$

Всего в движении теплоход находился $40 - 10 = 30$ (часов). Составим уравнение:

$$\frac{200}{15+x} + \frac{200}{15-x} = 30.$$

Решим это уравнение.

$$\frac{20}{15+x} + \frac{20}{15-x} = 3;$$

$$\frac{20(15-x) + 20(15+x)}{(15+x)(15-x)} = 3$$

$$\frac{20 \cdot 15 \cdot 2}{225 - x^2} = 3;$$

$$\frac{200}{225 - x^2} = 1;$$

$$225 - x^2 = 200, x \neq \pm 15;$$

$$x^2 = 25;$$

$$\begin{cases} x = 5, \\ x = -5. \end{cases}$$

Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи. Итак, скорость течения 5 км/ч.

Ответ: 5.

3.5.1. Решение. Пусть x км/ч - скорость теплохода в неподвижной воде, тогда скорость движения теплохода по течению реки равна $(x+1)$ км/ч, а против течения реки - $(x-1)$ км/ч. Составим таблицу:

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
По течению	255	$x+1$	$\frac{255}{x+1}$
Против течения	255	$x-1$	$\frac{255}{x-1}$

Всего в движении теплоход находился $34 - 2 = 32$ (часа). Составим уравнение:

$$\frac{255}{x+1} + \frac{255}{x-1} = 32.$$

Решим это уравнение.

$$\frac{255(x-1)+255(x+1)}{(x+1)(x-1)}=32;$$

$$\frac{2 \cdot 255x}{x^2-1}=32;$$

$$\frac{255x}{x^2-1}=16;$$

$$16 \cdot (x^2-1)=255x, \quad x \neq \pm 1;$$

$$16x^2-255x-16=0;$$

$$\begin{cases} x=16, \\ x=-\frac{1}{16}. \end{cases}$$

Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи. Итак, скорость теплохода в неподвижной воде 16 км/ч.

Ответ: 16.

3.6.1. Решение. Пусть x км/ч - скорость первого теплохода. Составим таблицу:

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
Первый теплоход	420	x	$\frac{420}{x}$
Второй теплоход	420	$x+1$	$\frac{420}{x+1}$

Первый теплоход находился в движении на 1 час больше, чем второй. Составим уравнение:

$$\frac{420}{x} - \frac{420}{x+1} = 1.$$

Решим это уравнение.

$$\frac{420(x+1)-420x}{x(x+1)}=1;$$

$$\frac{420}{x^2+x}=1;$$

$$x^2+x=420, \quad x \neq 0, x \neq -1;$$

$$x^2+x-420=0;$$

$$\begin{cases} x=20, \\ x=-21. \end{cases}$$

Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи. Итак, скорость первого теплохода 20 км/ч.

Ответ: 20.

3.7.1. Решение. Пусть x км/ч - скорость второго теплохода. Составим таблицу:

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
Первый теплоход	110	$x-1$	$\frac{110}{x-1}$
Второй теплоход	110	x	$\frac{110}{x}$

Первый теплоход находился в движении на 1 час больше, чем второй. Составим уравнение:

$$\frac{110}{x-1} - \frac{110}{x} = 1.$$

Решим это уравнение.

$$\frac{110x-110(x-1)}{(x-1)x}=1;$$

$$\frac{110}{x^2-x}=1;$$

$$x^2-x=110, \quad x \neq 0, x \neq 1;$$

$$x^2-x-110=0;$$

$$\begin{cases} x=11, \\ x=-10. \end{cases}$$

Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи. Итак, скорость второго теплохода 11 км/ч.

Ответ: 11.

3.8.1. Решение. Пусть x км - расстояние, пройденное теплоходом в одну сторону. Составим таблицу:

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
По течению	x	$25+3=28$	$\frac{x}{28}$
Против течения	x	$25-3=22$	$\frac{x}{22}$

Всего в движении теплоход находился $30-5=25$ часов. Составим уравнение:

$$\frac{x}{28} + \frac{x}{22} = 25.$$

Решим это уравнение.

$$\frac{11x+14x}{308}=25;$$

$$\frac{25x}{308}=25;$$

$$\frac{x}{308}=1;$$

$$x=308.$$

За весь рейс теплоход прошел $308 \cdot 2 = 616$ км.

Ответ: 616.

3.9.1. Решение. Плот двигался со скоростью течения, поэтому в пути он находился $\frac{24}{2} = 12$ (часов). Яхта же находилась в движении в течение $12 - 1 = 11$ (часов). Пусть x км/ч - скорость яхты в неподвижной воде. Составим таблицу:

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
По течению	120	$x + 2$	$\frac{120}{x + 2}$
Против течения	120	$x - 2$	$\frac{120}{x - 2}$

Составим уравнение:

$$\frac{120}{x + 2} + \frac{120}{x - 2} = 11.$$

Решим это уравнение.

$$\frac{120(x - 2) + 120(x + 2)}{(x + 2)(x - 2)} = 11;$$

$$\frac{240x}{x^2 - 4} = 11;$$

$$11 \cdot (x^2 - 4) = 240x, \quad x \neq \pm 2;$$

$$11x^2 - 240x - 44 = 0;$$

$$\begin{cases} x = 22, \\ x = -\frac{2}{11}. \end{cases}$$

Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи. Итак, скорость яхты в неподвижной воде 22 км/ч.

Ответ: 22.

3.10.1. Решение. Пусть x км/ч - скорость течения реки. Составим таблицу:

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
По течению	15	$7 + x$	$\frac{15}{7 + x}$
Против течения	15	$7 - x$	$\frac{15}{7 - x}$

Всего в движении баржа находилась

$6 - 1\frac{1}{3} = 4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$ (часа). Составим уравнение:

$$\frac{15}{7 + x} + \frac{15}{7 - x} = \frac{14}{3}.$$

Решим это уравнение.

$$\frac{15(7 - x) + 15(7 + x)}{(7 + x)(7 - x)} = \frac{14}{3};$$

$$\frac{15 \cdot 7 \cdot 2}{49 - x^2} = \frac{14}{3};$$

$$\frac{15}{49 - x^2} = \frac{1}{3};$$

$$49 - x^2 = 45, \quad x \neq \pm 7;$$

$$x^2 = 4;$$

$$\begin{cases} x = 2, \\ x = -2. \end{cases}$$

Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи. Итак, скорость течения 2 км/ч.

Ответ: 2.

3.11.1. Решение. Пусть x км/ч - скорость баржи на пути из A в B . Составим таблицу:

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
$A \rightarrow B$	390	x	$\frac{390}{x}$
$B \rightarrow A$	390	$x + 3$	$\frac{390}{x + 3}$

С учетом остановки, в движении велосипедист на пути из A в B находился на 9 часов дольше, чем на пути из B в A . Составим уравнение:

$$\frac{390}{x} - \frac{390}{x + 3} = 9.$$

Решим это уравнение.

$$\frac{130}{x} - \frac{130}{x + 3} = 3;$$

$$\frac{130(x + 3) - 130x}{x(x + 3)} = 3;$$

$$\frac{130 \cdot 3}{x(x + 3)} = 3$$

$$\frac{130}{x(x + 3)} = 1;$$

$$x^2 + 3x = 130, \quad x \neq 0, x \neq -3;$$

$$x^2 + 3x - 130 = 0;$$

$$\begin{cases} x = 10, \\ x = -13. \end{cases}$$

Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи. Итак, скорость баржи на пути из A в B равна 10 км/ч.

Ответ: 10.

4. Движение протяженных тел

4.1.1. Решение. Чтобы проехать мимо придорожного столба полностью, поезду необходимо проехать путь, равный его длине l . Проехать этот путь со скоростью 80 км/ч = $\frac{80000 \text{ м}}{3600 \text{ с}} = \frac{800}{36}$ м/с поезд

должен за 36 секунд. Используя формулу $S = v \cdot t$, получим $l = \frac{800}{36} \cdot 36 = 800$ (м).

Ответ: 800.

4.2.1. Решение. Чтобы проехать мимо лесополосы длиной 400 м полностью, поезду необходимо проехать путь, равный сумме длины поезда l м и длины лесополосы. Поезд должен проехать этот путь со скоростью

$$60 \text{ км/ч} = \frac{60000 \text{ м}}{60 \text{ мин}} = 1000 \text{ м/мин}$$

за 1 минуту. Используя формулу $S = v \cdot t$, составим и решим уравнение:

$$l + 400 = 1000 \cdot 1;$$

$$l = 600.$$

Итак, длина поезда равна 600 метрам.

Ответ: 600.

4.3.1. Решение. Для перехода из первой ситуации во вторую второй сухогруз должен пройти путь, равный сумме начального расстояния от кормы первого сухогруза до носа второго сухогруза, длины первого сухогруза, конечного расстояния от кормы второго сухогруза до носа первого сухогруза, и длины второго сухогруза, т.е.

$$S = 400 + 120 + 600 + 80 = 1200 \text{ (м)}.$$

Пройти этот путь второй сухогруз должен за 12 минут. Скорость сближения и удаления равна

$$\frac{1200 \text{ м}}{12 \text{ мин}} = 100 \text{ м/мин} = 6000 \text{ м/ч} = 6 \text{ км/ч}.$$

Итак, скорость первого сухогруза меньше скорости второго на 6 км/ч.

Ответ: 6.

4.4.1. Решение. Чтобы проехать мимо товарного поезда полностью, пассажирскому поезду необходимо проехать путь, равный сумме длины товарного поезда 600 м и своей длины l м. Скорость, с которой пассажирский поезд обгоняет товарный, равна

$$90 - 30 = 60 \text{ (км/ч)} = \frac{60000 \text{ м}}{60 \text{ мин}} = 1000 \text{ м/мин},$$

время равно 1 минуте. Используя формулу $S = v \cdot t$, составим и решим уравнение:

$$l + 600 = 1000 \cdot 1;$$

$$l = 400.$$

Итак, длина пассажирского поезда равна 400 метрам.

Ответ: 400.

4.5.1. Решение. Чтобы проехать мимо пассажирского поезда полностью, скорому поезду необходимо проехать путь, равный сумме длины пассажирского поезда 0,7 км и своей длины l км. Скорость, с которой скорый поезд проходит мимо пассажирского, равна $65 - 35 = 100$

(км/ч), время равно $\frac{36}{3600} = \frac{1}{100}$ часа.

Используя формулу $S = v \cdot t$, составим и решим уравнение:

$$l + 0,7 = 100 \cdot \frac{1}{100};$$

$$l = 1 - 0,7;$$

$$l = 0,3.$$

Итак, длина скорого поезда l равна 0,3 км или 300 метрам.

Ответ: 300.

5. Средняя скорость

5.1.1. Решение. Всего автомобиль проехал $50 \cdot 2 + 100 + 75 \cdot 2 = 350$ (км) и затратил на это $2 + 1 + 2 = 5$ (часов). Средняя скорость автомобиля на протяжении всего пути $v_{cp} = \frac{350}{5} = 70$ (км/ч).

Ответ: 70.

5.2.1. Решение. Всего автомобиль проехал $190 + 180 + 170 = 540$ (км) и затратил на это $\frac{190}{50} + \frac{180}{90} + \frac{170}{100} = 7,5$ (часов).

Средняя скорость автомобиля на протяжении всего пути $v_{cp} = \frac{540}{7,5} = 72$ (км/ч).

Ответ: 72.

5.3.1. Решение. Пусть путь в одну сторону равен S км. На путь «туда» на яхте путешественник затратил $\frac{S}{20}$ часов, на

путь «обратно» на самолете $\frac{S}{480}$ часов.

Все пройденное расстояние составило $2S$ км, общее время движения составило $\frac{S}{20} + \frac{S}{480} = \frac{25S}{480} = \frac{5S}{96}$ (часов). Средняя скорость путешественника на протяжении всего пути $v_{cp} = \frac{2S}{\frac{5S}{96}} = \frac{2 \cdot 96}{5} = 38,4$

(км/ч).

Ответ: 38,4.

5.4.1. Решение. Пусть автомобиль проехал S км со скоростью 60 км/ч, S км со скоростью 120 км/ч и S км со скоростью 110 км/ч. Всего автомобиль проехал $3S$ км и затратил на это $\frac{S}{60} + \frac{S}{120} + \frac{S}{110} = \frac{45S}{1320} = \frac{3S}{88}$ (часов). Средняя скорость автомобиля на протяжении всего пути $v_{cp} = \frac{3S}{\frac{3S}{88}} = 88$ (км/ч).

Ответ: 88.

5.5.1. Решение. Пусть автомобиль ехал t часов со скоростью 74 км/ч и t часов со скоростью 66 км/ч. Тогда весь пройденный автомобилем путь равен $S = 74t + 66t = 140t$ км, а общее время движения $2t$ часов. Средняя скорость автомобиля $v_{cp} = \frac{140t}{2t} = 70$ (км/ч).

Ответ: 70.

II. Задачи на работу

1. Явный объем работы

1.1.1. Решение. Производительность первого насоса $\frac{5}{2} = 2,5$ (л/мин), произ-

водительность второго насоса $\frac{5}{3}$ (л/мин),

общая производительность $\frac{5}{2} + \frac{5}{3} = \frac{25}{6}$

(л/мин). Чтобы перекачать 25 литров воды, двум насосам потребуется $25 : \frac{25}{6} = 6$ (минут).

Ответ: 6.

1.2.1. Решение. Пусть x - количество вопросов в тесте. На выполнение теста Пете потребуется $\frac{x}{8}$ часов, Ване $\frac{x}{9}$ часов. Петя закончит выполнять тест на $\frac{1}{3}$ часа позже, чем Ваня. Составим и решим уравнение.

$$\frac{x}{8} - \frac{x}{9} = \frac{1}{3},$$

$$x = 24.$$

Итак, в тесте 24 вопроса.

Ответ: 24.

1.3.1. Решение. Пусть второй рабочий делает x деталей за час (производительность). Составим таблицу:

	Объем заказа (дет)	Производительность (дет/ч)	Время (ч)
Первый рабочий	110	$x + 1$	$\frac{110}{x + 1}$
Второй рабочий	110	x	$\frac{110}{x}$

Второй рабочий на выполнение заказа тратит на 1 час больше, чем первый. Составим уравнение.

$$\frac{110}{x} - \frac{110}{x + 1} = 1.$$

Решим это уравнение.

$$\frac{110(x + 1) - 110x}{x(x + 1)} = 1;$$

$$\frac{110}{x^2 + x} = 1;$$

$$x^2 + x = 110, \quad x \neq 0, \quad x \neq -1;$$

$$x^2 + x - 110 = 0;$$

$$\begin{cases} x = 10, \\ x = -11. \end{cases}$$

Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи. Итак, второй рабочий делает 10 деталей за час.

Ответ: 10.

1.4.1. Решение. Пусть производительность первого рабочего составляет x деталей в час. Составим таблицу:

	Объем заказа (дет)	Производительность (дет/ч)	Время (ч)
Первый рабочий	156	x	$\frac{156}{x}$
Второй рабочий	156	$x-1$	$\frac{156}{x-1}$

Второй рабочий на выполнение заказа тратит на 1 час больше, чем первый. Составим уравнение:

$$\frac{156}{x-1} - \frac{156}{x} = 1.$$

Решим это уравнение.

$$\frac{156x - 156(x-1)}{(x-1)x} = 1;$$

$$\frac{156}{x^2 - x} = 1;$$

$$x^2 - x = 156, \quad x \neq 0, x \neq 1;$$

$$x^2 - x - 156 = 0;$$

$$\begin{cases} x = 13, \\ x = -12. \end{cases}$$

Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи. Итак, первый рабочий делает 13 деталей за час.

Ответ: 13.

1.5.1. Решение. Пусть первый рабочий делает x деталей за час (производительность). Составим таблицу:

	Объем заказа (дет.)	Производительность (дет/ч)	Время (ч)
Первый рабочий	475	x	$\frac{475}{x}$
Второй рабочий	550	$x-3$	$\frac{550}{x-3}$

Второй рабочий на выполнение заказа тратит на 6 часов больше, чем первый. Составим уравнение:

$$\frac{550}{x-3} - \frac{475}{x} = 6.$$

Решим это уравнение.

$$\frac{550x - 475(x-3)}{(x-3)x} = 6;$$

$$\frac{75x + 475 \cdot 3}{x^2 - 3x} = 6;$$

$$\frac{25x + 475}{x^2 - 3x} = 2;$$

$$2x^2 - 6x = 25x + 475, \quad x \neq 0, x \neq 3;$$

$$2x^2 - 31x - 475 = 0;$$

$$\begin{cases} x = 25, \\ x = -9,5. \end{cases}$$

Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи. Итак, первый рабочий делает 25 деталей за час.

Ответ: 25.

1.6.1. Решение. Пусть второй рабочий делает x деталей за час (производительность). Составим таблицу:

	Объем заказа (дет.)	Производительность (дет./ч)	Время (ч)
Первый рабочий	99	$x+1$	$\frac{99}{x+1}$
Второй рабочий	110	x	$\frac{110}{x}$

Второй рабочий на выполнение заказа тратит на 2 часа больше, чем первый. Составим уравнение:

$$\frac{110}{x} - \frac{99}{x+1} = 2.$$

Решим это уравнение.

$$\frac{110(x+1) - 99x}{x(x+1)} = 2;$$

$$\frac{11x + 110}{x^2 + x} = 2;$$

$$2x^2 + 2x = 11x + 110, \quad x \neq 0, x \neq -1;$$

$$2x^2 - 9x - 110 = 0;$$

$$\begin{cases} x = 10, \\ x = -5,5. \end{cases}$$

Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи. Итак, второй рабочий делает 10 деталей за час.

Ответ: 10.

1.7.1. Решение. Пусть первая труба пропускает x литров воды в минуту (производительность). Составим таблицу:

	Объем резервуара (л)	Производительность (л/мин)	Время (мин)
Первая труба	110	x	$\frac{110}{x}$
Вторая труба	110	$x+1$	$\frac{110}{x+1}$

Первая труба заполняет резервуар на 1 минуту дольше, чем вторая труба. Составим уравнение:

$$\frac{110}{x} - \frac{110}{x+1} = 1.$$

Решим это уравнение.

$$\frac{110(x+1) - 110x}{x(x+1)} = 1;$$

$$\frac{110}{x^2 + x} = 1;$$

$$x^2 + x = 110, \quad x \neq 0, x \neq -1;$$

$$x^2 + x - 110 = 0;$$

$$\begin{cases} x = 10, \\ x = -11. \end{cases}$$

Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи. Итак, первая труба пропускает 10 литров воды в минуту.

Ответ: 10.

1.8.1. Решение. Пусть вторая труба пропускает x литров воды в минуту (производительность). Составим таблицу:

	Объем резервуара (л)	Производительность (л/мин)	Время (мин)
Первая труба	110	$x-1$	$\frac{110}{x-1}$
Вторая труба	110	x	$\frac{110}{x}$

Первая труба заполняет резервуар на 1 минуту дольше, чем вторая труба. Составим уравнение:

$$\frac{110}{x-1} - \frac{110}{x} = 1.$$

Решим это уравнение.

$$\frac{110x - 110(x-1)}{(x-1)x} = 1;$$

$$\frac{110}{x^2 - x} = 1;$$

$$x^2 - x = 110, \quad x \neq 0, x \neq 1;$$

$$x^2 - x - 110 = 0;$$

$$\begin{cases} x = 11, \\ x = -10. \end{cases}$$

Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи. Итак, вторая труба пропускает 11 литров воды в минуту.

Ответ: 11.

1.9.1. Решение. Пусть производительность первой трубы составляет x литров воды в минуту. Составим таблицу:

	Объем резервуара (л)	Производительность (л/мин)	Время (мин)
Первая труба	110	x	$\frac{110}{x}$
Вторая труба	99	$x+1$	$\frac{99}{x+1}$

Первая труба заполняет резервуар на 2 минуты дольше, чем вторая труба. Составим уравнение:

$$\frac{110}{x} - \frac{99}{x+1} = 2.$$

Решим это уравнение.

$$\frac{110(x+1) - 99x}{x(x+1)} = 2;$$

$$\frac{11x + 110}{x^2 + x} = 2;$$

$$2x^2 + 2x = 11x + 110, \quad x \neq 0, x \neq -1;$$

$$2x^2 - 9x - 110 = 0;$$

$$\begin{cases} x = 10, \\ x = -5,5. \end{cases}$$

Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи. Итак, первая труба пропускает 10 литров воды в минуту.

Ответ: 10.

1.10.1. Решение. Пусть вторая труба пропускает x литров воды в минуту (производительность). Составим таблицу:

	Объем резервуара (л)	Производительность (л/мин)	Время (мин)
Первая труба	500	$x-5$	$\frac{500}{x-5}$
Вторая труба	375	x	$\frac{375}{x}$

Первая труба заполняет резервуар на 10 минут дольше, чем вторая труба. Составим уравнение:

$$\frac{500}{x-5} - \frac{375}{x} = 10;$$

Решим это уравнение.

$$\frac{500x - 375(x-5)}{(x-5)x} = 10;$$

$$\frac{125x + 375 \cdot 5}{x^2 - 5x} = 10;$$

$$\frac{25x + 375}{x^2 - 5x} = 2;$$

$$2x^2 - 10x = 25x + 375, \quad x \neq 0, x \neq 5;$$

$$2x^2 - 35x - 375 = 0;$$

$$\begin{cases} x = 25, \\ x = -7,5. \end{cases}$$

Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи. Итак, вторая труба пропускает 25 литров воды в минуту.

Ответ: 25.

2. Неявный объем работы

2.1.1. Решение. За 1 час первый мастер выполняет $\frac{1}{12}$ часть заказа, второй

мастер $\frac{1}{6}$ часть заказа. Вместе за 1 час

они выполняют $\frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ часть заказа. На выполнение всего заказа им потребуется $1 : \frac{1}{4} = 4$ часа.

Ответ: 4.

2.2.1. Решение. За 1 минуту насос наполняет $\frac{1}{20}$ часть бака, второй насос

$\frac{1}{30}$ часть бака, третий насос $\frac{1}{60}$ часть

бака. Вместе за 1 минуту они наполняют $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$ часть бака. На наполнение всего бака трем насосам требуется $1 : \frac{1}{10} = 10$ минут.

Ответ: 10.

2.3.1. Решение. Так как 3 часа 36 минут равны $3\frac{36}{60} = 3\frac{3}{5} = \frac{18}{5}$ часа, то за 1 час

две трубы наполняют $1 : \frac{18}{5} = \frac{5}{18}$ бака, а

одна первая труба $\frac{1}{6}$ часть бака. Одна

вторая труба за 1 час наполняет $\frac{5}{18} - \frac{1}{6} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$ часть бака и весь бак она

наполнит за $1 : \frac{1}{9} = 9$ часов.

Ответ: 9.

2.4.1. Решение. За 1 час Игорь и Паша красят $\frac{1}{9}$ часть забора, Паша и Володя

$\frac{1}{12}$ часть забора, а Володя и Игорь $\frac{1}{18}$

часть забора. Дважды Игорь, Паша и Володя за 1 час красят $\frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

часть забора, тогда один раз Игорь, Паша, Володя за 1 час красят $\frac{1}{8}$ часть забора и

на покраску всего забора им потребуется $1 : \frac{1}{8} = 8$ часов.

Ответ: 8.

2.5.1. Решение. За 1 минуту Даша с Машей пропалывают $\frac{1}{12}$ часть грядки, а

одна Маша $\frac{1}{20}$ часть грядки. Тогда одна

Даша за 1 минуту пропалывает $\frac{1}{12} - \frac{1}{20} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$ часть грядки и всю

грядку Даша пропалывает за $1 : \frac{1}{30} = 30$

минут.

Ответ: 30.

2.6.1. Решение. За 1 час каждый рабочий выполняет $\frac{1}{15}$ часть заказа. За 3 часа

первый рабочий выполнит $3 \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{5}$

часть заказа. Далее два рабочих будут выполнять оставшиеся $\frac{4}{5}$ заказа с сов-

местной производительностью, равной

$\frac{2}{15}$ части заказа за час. Им потребуется на это $\frac{4}{5} : \frac{2}{15} = 6$ часов. Общее время выполнения заказа составит $3 + 6 = 9$ часов.
Ответ: 9.

2.7.1. Решение. Пусть x - производительность первой трубы, y - производительность второй трубы (части резервуара, которые наполняет каждая труба за 1 минуту). Составим по условию задачи систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 6. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения системы $x = \frac{1}{4} - y$ и подставим во второе уравнение системы. Получим уравнение $\frac{4}{1-4y} - \frac{1}{y} = 6$ или $24y^2 + 2y - 1 = 0$. Квадратное уравнение имеет два корня $\frac{1}{6}$ и $-\frac{1}{4}$ (отрицательное значение не удовлетворяет условию задачи). Тогда $x = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.

Следовательно, вторая труба наполняет резервуар за $1 : \frac{1}{6} = 6$ минут.

Ответ: 6.

2.8.1. Решение. Пусть x - производительность первого рабочего, y - производительность второго рабочего (части работы, которые выполняет каждый рабочий за 1 день). Составим по условию задачи систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{12}, \\ 2x = 3y. \end{cases} \quad \begin{cases} 12x + 12y = 1, \\ 2x = 3y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x + 4 \cdot 2x = 1, \\ 2x = 3y. \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{20}, \\ y = \frac{1}{30}. \end{cases}$$

Следовательно, первый рабочий выполнит работу за $1 : \frac{1}{20} = 20$ дней.

Ответ: 20.

III. Задачи на проценты

1. Части и проценты

1.1.1. Решение. Митя внес 14% или 0,14 уставного капитала. Антон внес $\frac{42000}{200000} = 0,21$ уставного капитала. Гоша внес 0,12 уставного капитала, а Борис внес $1 - 0,14 - 0,21 - 0,12 = 0,53$ уставного капитала. Из прибыли размером в 1000000 рублей Борис получит $0,53 \cdot 1000000 = 530000$ рублей.

Ответ: 530000.

2. Процентное сравнение величин

2.1.1. Решение. Будем решать задачу, выражая стоимость рубашек в процентах от стоимости куртки.

1 куртка – 100%.

4 рубашки – $100\% - 8\% = 92\%$.

1 рубашка – $92\% : 4 = 23\%$.

5 рубашек – $23\% \cdot 5 = 115\%$

Пять рубашек дороже куртки на $115\% - 100\% = 15\%$.

Ответ: 15.

2.2.1. Решение. Так как прибавление еще одной зарплаты мужа увеличивает общий доход семьи на 67%, то зарплата мужа составляет 67% от общего дохода семьи. Так как уменьшение стипендии дочери на $\frac{2}{3}$ уменьшает общий доход семьи на 4%, то $\frac{2}{3}$ стипендии дочери составляют 4% общего дохода семьи, а вся стипендия дочери соответственно составляет 6% общего дохода семьи. На долю зарплаты жены приходится оставшееся $100\% - 67\% - 6\% = 27\%$ общего дохода семьи.

Ответ: 27.

3. Сложные проценты

3.1.1. Решение. Используя формулу сложных процентов, находим, что в 2010 году в квартале стало проживать

$$40000 \cdot (1 + 0,08) \cdot (1 + 0,09) = \\ = 40000 \cdot 1,08 \cdot 1,09 = 47088$$

человек.

Ответ: 47088.

3.2.1. Решение. Используя формулу сложных процентов, находим, что в 2003 году Бубликов заработал

$$5000 \cdot \left(1 + \frac{300}{100}\right)^3 = 5000 \cdot 4^3 = 320000$$

рублей.

Ответ: 320000.

3.3.1. Решение. Пусть a - часть, на которую каждый год два года подряд уменьшалась цена холодильника. Используя формулу сложных процентов, составим и решим уравнение с учетом неотрицательности выражения $(1 - a)$:

$$2000 \cdot (1 - a)^2 = 15842;$$

$$(1 - a)^2 = \frac{15842}{20000};$$

$$(1 - a)^2 = 0,7921;$$

$$(1 - a)^2 = (0,89)^2;$$

$$1 - a = 0,89;$$

$$a = 0,11.$$

Итак, цена холодильника ежегодно уменьшалась на 11%.

Ответ: 11.

3.4.1. Решение. Будем использовать формулу сложных процентов.

Компания "Альфа" с начальным капиталом 5000 долларов через 5 лет получит капитал, равный

$$5000 \cdot \left(1 + \frac{200}{100}\right)^5 = 5000 \cdot 3^5 = 1215000$$

долларов.

Компания "Бета" с начальным капиталом 10000 долларов через 3 года получит капитал, равный

$$10000 \cdot \left(1 + \frac{400}{100}\right)^3 = 10000 \cdot 5^3 = 1250000$$

долларов.

Капитал компании «Бета» к концу 2006 года был больше капитала компании «Альфа» на $1250000 - 1215000 = 35000$ долларов.

Ответ: 35000.

3.5.1. Решение. Пусть $x > 0$ - первоначальная стоимость акций, а $p > 0$ - количество процентов, на которые в понедельник подорожали, а во вторник подешевели акции. Используя формулу сложных процентов, составим и решим уравнение с учетом положительности p :

$$x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) = x \left(1 - \frac{4}{100}\right);$$

$$1 - \left(\frac{p}{100}\right)^2 = 1 - \frac{4}{100};$$

$$\left(\frac{p}{100}\right)^2 = \left(\frac{2}{10}\right)^2;$$

$$\frac{p}{100} = \frac{2}{10};$$

$$p = 20.$$

Итак, в понедельник акции подорожали на 20%.

Ответ: 20.

IV. Задачи на концентрацию

1.1.1. Решение. По данным задачи составим таблицу:

	Общий объем (л)	Концентрация вещества	Объем вещества (л)
Первый раствор	5	0,12	$0,12 \cdot 5 = 0,6$
Вода	7	0	0
Новый раствор	12	?	0,6

Концентрация полученного раствора составит $\frac{0,6}{12} \cdot 100 = 5(\%)$.

Ответ: 5.

1.2.1. Решение. Для удобства вычислений возьмем 100 л объема раствора за «некоторое количество» и составим таблицу:

	Общий объем (л)	Концен- трация вещества	Объем вещества (л)
Первый раствор	100	0,15	$0,15 \cdot 100 = 15$
Второй раствор	100	0,19	$0,19 \cdot 100 = 19$
Новый раствор	200	?	$15 + 19 = 34$

Концентрация полученного раствора составит $\frac{34}{200} \cdot 100 = 17\%$.

Ответ: 17.

1.3.1. Решение. По данным задачи составим таблицу:

	Общий объем (л)	Концен- трация вещества	Объем вещества (л)
Первый раствор	4	0,15	$0,15 \cdot 4 = 0,6$
Второй раствор	6	0,25	$0,25 \cdot 6 = 1,5$
Новый раствор	10	?	$0,6 + 1,5 = 2,1$

Концентрация полученного раствора составит $\frac{2,1}{10} \cdot 100 = 21\%$.

Ответ: 21.

1.4.1. Решение. «Чистого» (или «сухого») вещества в 20 кг изюма содержится 95%, или $20 \cdot 0,95 = 19$ кг. Эти же 19 кг сухого вещества составляли 10% в винограде до сушки. Таким образом, масса винограда до сушки составляла $19 \cdot 10 = 190$ кг.

Ответ: 190.

1.5.1. Решение. Пусть масса первого сплава x кг, второго сплава y кг. Составим таблицу:

	Общая масса (кг)	Концен- трация никеля	Масса никеля (кг)
Пер- вый сплав	x	0,1	$0,1x$
Вто- рой сплав	y	0,3	$0,3y$
Новый сплав	200	0,25	$0,25 \cdot 200 = 50$

Используя общую массу сплавов и массу никеля, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ 0,1x + 0,3y = 50 \end{cases}$$

Решим эту систему.

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ x + 3y = 500 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 200 \\ 2y = 300 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 50 \\ y = 150 \end{cases}$$

Масса первого сплава меньше массы второго на $150 - 50 = 100$ (кг).

Ответ: 100.

1.6.1. Решение. Пусть x кг – масса первого сплава. Составим таблицу:

	Общая масса (кг)	Концен- трация меди	Масса меди (кг)
Первый сплав	x	0,1	$0,1x$
Второй сплав	$x + 3$	0,4	$0,4(x + 3)$
Новый сплав	$2x + 3$	0,3	$0,3(2x + 3)$

Используя массу меди, составим уравнение:

$$0,3(2x + 3) = 0,1x + 0,4(x + 3).$$

Решим это уравнение.

$$0,1x = 0,3;$$

$$x = 3.$$

Масса третьего сплава равна $2 \cdot 3 + 3 = 9$ кг.

Ответ: 9.

1.7.1. Решение. Пусть масса первого раствора x кг, второго раствора y кг. Составим первую таблицу:

	Общая масса (кг)	Концен- трация кислоты	Масса кислоты (кг)
1-й р-р	x	0,3	$0,3x$
2-й р-р	y	0,6	$0,6y$
вода	10	0	0
1-я смесь	$x + y + 10$	0,36	$0,36(x + y + 10)$

Используя массу чистой кислоты, составим первое уравнение:

$$0,3x + 0,6y = 0,36 \cdot (x + y + 10).$$

Составим вторую таблицу:

	Общая масса (кг)	Концентрация кислоты	Масса кислоты (кг)
1-й р-р	x	0,3	$0,3x$
2-й р-р	y	0,6	$0,6y$
3-й р-р	10	0,5	$0,5 \cdot 10 = 5$
2-я смесь	$x + y + 10$	0,41	$0,41(x + y + 10)$

Используя массу чистой кислоты, составим второе уравнение:

$$0,3x + 0,6y + 5 = 0,41 \cdot (x + y + 10).$$

В итоге получим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 0,3x + 0,6y = 0,36 \cdot (x + y + 10), \\ 0,3x + 0,6y + 5 = 0,41 \cdot (x + y + 10). \end{cases}$$

Решим эту систему.

$$\begin{cases} 30x + 60y = 36 \cdot (x + y + 10), \\ 30x + 60y + 500 = 41 \cdot (x + y + 10). \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - 24y = -360, \\ 11x - 19y = 90. \end{cases} \quad \begin{cases} x - 4y = -60, \\ 11x - 19y = 90. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11x - 44y = -660, \\ 11x - 19y = 90. \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4y - 60, \\ 25y = 750. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 60, \\ y = 30. \end{cases}$$

Итак, для получения смеси использовали 60 кг 30-процентного раствора.

Ответ: 60.

1.8.1. Решение. Пусть p - концентрация первого раствора, q - концентрация второго раствора (часть раствора, составляющая чистую кислоту). Составим первую таблицу:

	Общая масса (кг)	Концентрация кислоты	Масса чистой кислоты (кг)
1-й р-р	30	p	$30p$
2-й р-р	20	q	$20q$
1-я смесь	50	0,68	$0,68 \cdot 50 = 34$

Используя массу чистой кислоты, составим первое уравнение:

$$30p + 20q = 34$$

Составим вторую таблицу, взяв для удобства вычислений по 100 кг первого и второго растворов:

	Общая масса (кг)	Концентрация кислоты	Масса чистой кислоты (кг)
1-й р-р	100	p	$100p$
2-й р-р	100	q	$100q$
2-я смесь	200	0,7	$0,7 \cdot 200 = 140$

Используя массу чистой кислоты, составим второе уравнение:

$$100p + 100q = 140.$$

В итоге получим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 30p + 20q = 34, \\ 100p + 100q = 140. \end{cases}$$

Решим эту систему.

$$\begin{cases} 3p + 2q = 3,4, \\ 2p + 2q = 2,8 \end{cases} \quad \begin{cases} q = 0,8, \\ p = 0,6. \end{cases}$$

В первом сосуде содержится $30 \cdot 0,6 = 18$ кг кислоты.

Ответ: 18.

V. Задачи на арифметическую прогрессию

1.1.1. Решение. Так как норма покраски увеличивается ежедневно на одно и то же число метров, то величины, выражающие количество метров, покрашенных за последовательные дни, составляют арифметическую прогрессию. Пусть n - количество членов прогрессии (количество дней). При этом длина забора (240 м) будет суммой n первых членов этой прогрессии, а количество метров (60 м), покрашенных в сумме за первый и последний день - суммой первого и n -го членов прогрессии. Используя формулу суммы n первых членов прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,$$

получим

$$240 = \frac{60}{2} \cdot n$$

или $n = 8$.

Итак, бригада маляров красила забор 8 дней.

Ответ: 8.

1.2.1. Решение. Так расстояние, которое проползает улитка за день, увеличивается ежедневно на одно и то же число метров, то величины, выражающие количество метров, которые улитка проползает за день, составляют арифметическую прогрессию. Пусть n - количество членов прогрессии (количество дней). При этом расстояние между деревьями (150 м) будет суммой n первых членов этой прогрессии, а количество метров, которые улитка проползла в сумме за первый и последний день (10 м) – суммой первого и n -го членов прогрессии. Используя формулу суммы n первых членов прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,$$

получим

$$150 = \frac{10}{2} \cdot n$$

или $n = 30$.

Итак, на весь путь улитка потратила 30 дней.

Ответ: 30.

1.3.1. Решение. Так как норма прокладки тоннеля увеличивается ежедневно на одно и то же число метров, то величины, выражающие количество метров, проложенных за последовательные дни, составляют арифметическую прогрессию. Пусть количество дней (10) – количество членов прогрессии. При этом длина тоннеля (500 м) будет суммой 10 первых членов этой прогрессии, а количество метров (3 м), проложенных за первый день, первым членом прогрессии. Используя формулу суммы первых 10 членов прогрессии

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10,$$

получим

$$500 = \frac{3 + a_{10}}{2} \cdot 10$$

или $a_{10} = 97$.

Итак, в последний день рабочие проложили 97 метров тоннеля.

Ответ: 97.

1.4.1. Решение. Так как количество задач увеличивается ежедневно на одно и то же число, то величины, выражающие количество задач, решенных за последовательные дни, составляют арифметическую прогрессию. Пусть количество дней (14) – количество членов прогрессии. При этом общее количество задач (490) будет суммой 14 первых членов этой прогрессии, а количество задач (5), решенных за первый день, первым членом прогрессии. Используя формулу суммы 14 первых членов прогрессии

$$S_{14} = \frac{a_1 + a_{14}}{2} \cdot 14,$$

получим

$$490 = \frac{5 + a_{14}}{2} \cdot 14$$

или $a_{10} = 65$.

Итак, в последний день Вася решил 65 задач.

Ответ: 65.

1.5.1. Решение. Так как число пройденных туристом за день километров увеличивается ежедневно на одно и то же число километров, то величины, выражающие количество километров, пройденных туристом за последовательные дни, составляют арифметическую прогрессию. Пусть количество дней (6) - количество членов прогрессии. При этом расстояние между городами (120 км) будет суммой первых 6 членов этой прогрессии, а количество километров (10), пройденных туристом за первый день, первым членом прогрессии. Пусть d - разность этой прогрессии. Используя формулу суммы первых 6 членов прогрессии

$$S_6 = \frac{2a_1 + 5d}{2} \cdot 6,$$

получим

$$120 = \frac{20 + 5d}{2} \cdot 6$$

или $d = 4$. Используем формулу для третьего члена арифметической прогрессии $a_3 = a_1 + 2d = 10 + 2 \cdot 4 = 18$.

Итак, за третий день турист прошел 18 км.

Ответ: 18.

1.6.1. Решение. Так как норма перевозки увеличивается ежедневно на одно и то же число тонн, то величины, выражающие количество тонн щебня, перевезенных грузовиком за последовательные дни, составляют арифметическую прогрессию. Пусть количество дней (14) - количество членов прогрессии. При этом вес всей партии щебня (210 т) будет суммой первых 14 членов этой прогрессии, а количество тонн (2 т), перевезенных грузовиком за первый день, первым членом прогрессии. Пусть d - разность этой прогрессии. Используя формулу суммы 14 первых членов прогрессии

$$S_{14} = \frac{2a_1 + 13d}{2} \cdot 14,$$

получим

$$210 = \frac{2 \cdot 2 + 13d}{2} \cdot 14$$

или $d = 2$. Используем формулу для девятого члена арифметической прогрессии $a_9 = a_1 + 8d = 2 + 8 \cdot 2 = 18$.

Итак, за девятый день грузовик перевез 18 тонн щебня.

Ответ: 18.

1.7.1. Решение. Так как количество подписанных Верой открыток увеличивается ежедневно на одно и то же число, то величины, выражающие количество открыток, подписанных Верой за последовательные дни, составляют арифметическую прогрессию. Пусть количество дней (16) - количество членов прогрессии. При этом общее количество подписанных открыток (640) будет суммой первых 16 членов этой прогрессии, а количество открыток (10), подписанных Верой за первый день, первым членом прогрессии. Пусть d - разность этой прогрессии. Используя формулу суммы 16 первых членов прогрессии

$$S_{16} = \frac{2a_1 + 15d}{2} \cdot 16,$$

получим

$$640 = \frac{2 \cdot 10 + 15d}{2} \cdot 16$$

или $d = 4$. Используем формулу для четвертого члена арифметической прогрессии $a_4 = a_1 + 3d = 10 + 3 \cdot 4 = 22$.

Итак, за четвертый день Вера подписала 22 открытки.

Ответ: 22.

VI. Задачи на геометрическую прогрессию

1. Решение. Пусть b_1, b_2, b_3 и b_4 - числа, составляющие геометрическую прогрессию со знаменателем q . Согласно условию задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} b_1 + b_4 = 27, \\ b_2 \cdot b_3 = 72. \end{cases}$$

Используем формулу $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

$$\begin{cases} b_1 + b_1 q^3 = 27, & \begin{cases} b_1(1 + q^3) = 27, \\ b_1 q \cdot b_1 q^2 = 72. \end{cases} \\ b_1 q \cdot b_1 q^2 = 72. & \begin{cases} b_1^2 q^3 = 72. \end{cases} \end{cases}$$

Обозначим $q^3 = a$ (по условию $q \neq 0$, $b_1 \neq 0$).

$$\begin{cases} b_1(1 + a) = 27, & \begin{cases} b_1^2(1 + a)^2 = 27^2, \\ b_1^2 a = 72. \end{cases} \\ b_1^2 a = 72. & \begin{cases} b_1^2 a = 72. \end{cases} \end{cases}$$

Разделим первое уравнение системы на второе уравнение.

$$\frac{(1 + a)^2}{a} = \frac{81}{8}.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение $8a^2 - 65a + 8 = 0$, имеющее корни $a = \frac{1}{8}$ или $a = 8$. Пусть $a = \frac{1}{8}$, тогда $q^3 = \frac{1}{8}$, $q = \frac{1}{2}$ и $b_1 = \frac{27}{1 + \frac{1}{8}} = 24$. Пусть

$a = 8$, тогда $q^3 = 8$, $q = 2$ и $b_1 = \frac{27}{1 + 8} = 3$.

В первом случае получаем четыре числа 24, 12, 6, 3, а во втором случае - числа 3, 6, 12, 24.

Ответ: 24; 12; 6; 3 или 3; 6; 12; 24.

Ответы

I. Задачи на движение

1. Движение по прямой дороге

1.1.1. 4. 1.1.2. 3. 1.1.3. 2.

1.2.1. 50. 1.2.2. 50. 1.2.3. 70.

1.3.1. 12. 1.3.2. 51. 1.3.3. 12.

1.4.1. 240. 1.4.2. 200. 1.4.3. 250.

1.5.1. 70. 1.5.2. 60. 1.5.3. 60.

1.6.1. 10. 1.6.2. 10. 1.6.3. 10

1.7.1. 10. 1.7.2. 16. 1.7.3. 18.

1.8.1. 7. 1.8.2. 8. 1.8.3. 11.

1.9.1. 16. 1.9.2. 14. 1.9.3. 10.

1.10.1. 8. 1.10.2. 8. 1.10.3. 14.

1.11.1. 4. 1.11.2. 11. 1.11.3. 5.

1.12.1. 45. 1.12.2. 36. 1.12.3. 42.

1.13.1. 90. 1.13.2. 360. 1.13.3. 204.

1.14.1. 32. 1.14.2. 56. 1.14.3. 60.

1.15.1. 52. 1.15.2. 64. 1.15.3. 72.

2. Движение по замкнутой дороге

2.1.1. 20. 2.1.2. 33. 2.1.3. 30.

2.2.1. 59. 2.2.2. 65. 2.2.3. 57.

2.3.1. 80. 2.3.2. 60. 2.3.3. 120.

2.4.1. 240. 2.4.2. 435. 2.4.3. 320.

3. Движение по реке

3.1.1. 3. 3.1.2. 1. 3.1.3. 2.

3.2.1. 16. 3.2.2. 9. 3.2.3. 15.

3.3.1. 11. 3.3.2. 4. 3.3.3. 12.

3.4.1. 5. 3.4.2. 1. 3.4.3. 3.

3.5.1. 16. 3.5.2. 19. 3.5.3. 23.

3.6.1. 20. 3.6.2. 12. 3.6.3. 11.

3.7.1. 11. 3.7.2. 16. 3.7.3. 17.

3.8.1. 616. 3.8.2. 576. 3.8.3. 224.

3.9.1. 22. 3.9.2. 17. 3.9.3. 24.

3.10.1. 2. 3.10.2. 1. 3.10.3. 2.

3.11.1. 10. 3.11.2. 9. 3.11.3. 13.

4. Движение протяженных тел

4.1.1. 800. 4.1.2. 1000. 4.1.3. 150.

4.2.1. 600. 4.2.2. 1100. 4.2.3. 200.

4.3.1. 6. 4.3.2. 9. 4.3.3. 6.

4.4.1. 400. 4.4.2. 200. 4.4.3. 150.

4.5.1. 300. 4.5.2. 300. 4.5.3. 800.

5. Средняя скорость

5.1.1. 70. 5.1.2. 64. 5.1.3. 76.

5.2.1. 72. 5.2.2. 80. 5.2.3. 99.

5.3.1. 38,4. 5.3.2. 53,2. 5.3.3. 40,5.

5.4.1. 88. 5.4.2. 75. 5.4.3. 63.

5.5.1. 70. 5.5.2. 74. 5.5.3. 73.

II. Задачи на работу

1. Явный объем работы

1.1.1. 6. 1.1.2. 7. 1.1.3. 4.

1.2.1. 24. 1.2.2. 52. 1.2.3. 29.

1.3.1. 10. 1.3.2. 12. 1.3.3. 11.

1.4.1. 13. 1.4.2. 13. 1.4.3. 16.

1.5.1. 25. 1.5.2. 27. 1.5.3. 27.

1.6.1. 10. 1.6.2. 5. 1.6.3. 7.

1.7.1. 10. 1.7.2. 12. 1.7.3. 14.

1.8.1. 11. 1.8.2. 32. 1.8.3. 24.

1.9.1. 10. 1.9.2. 20. 1.9.3. 22.

1.10.1. 25. 1.10.2. 25. 1.10.3. 29.

2. Неявный объем работы

2.1.1. 4. 2.1.2. 6. 2.1.3. 6.

2.2.1. 10. 2.2.2. 9. 2.2.3. 6.

2.3.1. 9. 2.3.2. 2. 2.3.3. 3.

2.4.1. 8. 2.4.2. 20. 2.4.3. 15.

2.5.1. 30. 2.5.2. 7. 2.5.3. 6.

2.6.1. 9. 2.6.2. 9. 2.6.3. 7.

2.7.1. 6. 2.7.2. 30. 2.7.3. 27.

2.8.1. 20. 2.8.2. 24. 2.8.3. 3.

III. Задачи на проценты

1. Части и проценты

1.1.1. 530000. 1.1.2. 231000.
1.1.3. 14000.

2. Процентное сравнение величин

2.1.1. 15. 2.1.2. 40. 2.1.3. 17.

2.2.1. 27. 2.2.2. 38. 2.2.3. 28.

3. Сложные проценты

3.1.1. 47088. 3.1.2. 21216.

3.1.3. 22470.

3.2.1. 320000. 3.2.2. 1345600.
3.2.3. 2903040.

3.3.1. 11. 3.3.2. 19. 3.3.3. 10.

3.4.1. 35000. 3.4.2. 134500.
3.4.3. 256000.

3.5.1. 20. 3.5.2. 60. 3.5.3. 80.

IV. Задачи на концентрацию

1.1.1. 5. 1.1.2. 7. 1.1.3. 16.

1.2.1. 17. 1.2.2. 15. 1.2.3. 17.

1.3.1. 21. 1.3.2. 19. 1.3.3. 29

1.4.1. 190. 1.4.2. 209. 1.4.3. 342.

1.5.1. 100. 1.5.2. 75. 1.5.3. 75.

1.6.1. 9. 1.6.2. 27. 1.6.3. 36.

1.7.1. 60. 1.7.2. 70. 1.7.3. 15.

1.8.1. 18. 1.8.2. 14. 1.8.3. 62.

V. Задачи на арифметическую прогрессию

1.1.1. 8. 1.1.2. 9. 1.1.3. 4.

1.2.1. 30. 1.2.2. 6. 1.2.3. 4.

1.3.1. 97. 1.3.2. 15. 1.3.3. 22.

1.4.1. 65. 1.4.2. 69. 1.4.3. 32.

1.5.1. 18. 1.5.2. 17. 1.5.3. 13.

1.6.1. 18. 1.6.2. 19. 1.6.3. 8.

1.7.1. 22. 1.7.2. 44. 1.7.3. 52.

VI. Задачи на геометрическую прогрессию

1. 24; 12; 6; 3 или 3; 6; 12; 24. 2. 255
или 765. 3. 8.

Дополнительные задачи

1. 15. 2. 45. 3. 24. 4. 32. 5. 452. 6. 6; 54.
7. 25. 8. 31; 41. 9. 6 км. 10. 60 км. 11. 50 км/ч. 12. 14 км/ч; 16 км/ч. 13. $3\frac{1}{3}$ км. 14. 5 км/ч; 3 км/ч. 15. 88 км/ч. 16. 50 км/ч. 17. 50 км/ч. 18. 50 км/ч. 19. 12 км/ч. 20. 6 км/ч; 32 км. 21. 28 км/ч. 22. 2 км/ч. 23. 28 ч. 24. 24 м/ч. 25. 20 км/ч; 4 км/ч. 26. 60 км/ч. 27. 3 км/ч; 4 км/ч. 28. 10 км/ч; 12 км/ч. 29. 8 ч. 30. 429 деталей. 31. 4 ч. 32. 2 недели. 33. 10 ч. 34. 9 т/ч. 35. 12 деталей/час; 9 деталей/час. 36. 32 детали в день. 37. 18 ц/га; 15 ц/га. 38. 4 контейнера за рейс. 39. 12 т/день; 10 т/день. 40. 8 ч. 41. 240 страниц. 42. 3,75 ч. 43. 12 дней; 24 дня. 44. 0,4. 45. 5 ч. 46. 0,1. 47. 28 ч. 48. 4 ч. 49. Да. $n = 16$. 50. 6; 4,8; 3,6; 2,4; 1,2; 0; -1,2; -2,4; -3,6. 51. 5. 52. 4905. 53. 82350. 54. 1265. 55. 45059. 56. 1210. 57. $a_n = 8n - 7$. 58. 115. 59. 12. 60. 10. 61. 119/3. 62. 7. 63. 14. 64. 67. 65. 25. 66. $a_1 = 5$; $d = 4$. 67. 80. 68. 11. 69. $a_1 = 3$; $d = 4$. 70. 40. 71. 8 ч. 72. 9. 73. 1050 м. 74. 39300 р. 75. 17. 76. 3. 77. 2. 78. $180 = 12 + 24 + 48 + 96$ или $180 = 4,5 + 13,5 + 40,5 + 121,5$. 79. 2; 10; 50 или 50; 10; 2. 80. 2. 81. 4 или $\frac{4}{3}$. 82. $b_1 = 12$; $q = \frac{1}{2}$. 83. $b_1 = 6$; $q = \frac{1}{3}$. 84. 2; 8; 32. 85. 63. 86. 4; 8; 16 или $\frac{4}{25}$; $-\frac{16}{25}$; $\frac{64}{25}$. 87. 30. 88. 273. 89. 387,8 тыс. р. 90. 556 деталей. 91. 80%. 92. 72%. 93. 250%. 94. 20%. 95. 720 и 150. 96. 500. 97. 10%; 8%. 98. 32%. 99. 0,4. 100. 437,5. 101. 35 кг и 45 кг. 102. 40 или 60 д.е. 103. 75%. 104. 20 см^2 . 105. 30 и 50 д.е. 106. 120 и 1080 д.е. 107. 70%. 108. в 6 раз. 109. 25%. 110. 80%. 111. в 1,5 раз. 112. 5%. 113. 20%. 114. 5%. 115. 9%. 116. 35%. 117. 44%. 118. 3%. 119. 50%. 120. 20 скрипачей; 8 виолончелистов; 4 трубача. 121. 30 т; 15 т; 25 т. 122. 25%. 123. 215 кг. 124. 2. 125. 20%. 126. уменьшится на 1%. 127. 8,9%. 128. 13,2%. 129. 38%. 130. 30%. 131. 7,1%. 132. 28%. 133. 25%. 134. 50%. 135. 56,25%. 136. 20%. 137. 12,5%. 138. 20%. 139. 26%. 140. 25%. 141. 24%. 142. 47%.

143. 5%. 144. 30%. 145. 16%. 146. 30%. 147. в 17 раз. 148. 20352 рубля. 149. 6000 рублей. 150. 40 р. 151. 20,2 руб. 152. 27,75%. 153. 4,04%. 154. 25%. 155. 50%. 156. 35%. 157. 51,8%. 158. повышалась на 20%. 159. 10%. 160. 10%. 161. 20%. 162. 10%. 163. 20%. 164. 30%. 165. 5%. 166. 10%. 167. 1000 рублей. 168. 10%. 169. 60%. 170. 5 лет. 171. 130/11%. 172. 2,5%. 173. 5,5%. 174. 35. 175. 88%. 176. 102 г. 177. 100 г. 178. 9 кг. 179. 12,5 л. 180. 40 т; 60 т. 181. 4 кг; 6 кг. 182. 187,5 кг. 183. 30%; 60%. 184. 9 г; 10 г. 185. 9:35. 186. в 2 раза. 187. 2:1. 188. 300 г. 189. 120 г. 190. 40%. 191. 25,5%. 192. 15 кг. 193. 410 т. 194. 2,5 кг. 195. 53%. 196. 60%. 197. 50 г. 198. 22,5 кг. 199. 22,5 кг. 200. 3 кг; 800-я проба. 201. 35 кг. 202. 13%. 203. 2 л. 204. 2 л. 205. 18 л. 206. 4 км. 207. 140. 208. 40%. 209. 120 минут. 210. 10%. 211. 9.

Список и источники литературы

1. 3000 конкурсных задач по математике. – М.: Рольф, 1997. – 608 с.
2. Аналитический отчет ФИПИ о результатах ЕГЭ и ГИА – 2012.
3. Денищева Л.О., Глазков Ю.А., Краснянская К.А., Рязановский А.Р., Семенов П.В. Единый государственный экзамен 2008. Математика. Учебно-тренировочные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2007.
4. ЕГЭ 2014. Математика. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 800 заданий части 2(С) / И.Р. Высоцкий, П.И. Захаров, В.С. Панферов, С.Е. Посицельский, А.В. Семенов, А.Л. Семенов, М.А. Семенова, И.Н. Сергеев, В.А. Смирнов, С.А. Шестаков, Д.Э. Шноль, И.В. Яценко; под ред. А.Л. Семенова, И.В. Яценко. – М.: Издательство «Экзамен», 2014. – 215, [1] с. (Серия «ЕГЭ. Типовые тестовые задания») ISBN 978-5-377-06990-4
5. Шестаков С. А. ЕГЭ 2014. Математика. Задача В13. Задачи на составление уравнений. Рабочая тетрадь / Под ред. А.Л. Семенова и И.В. Яценко. – 5-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2014. – 56 с.
6. www.mathege.ru – Математика ЕГЭ 2013 (открытый банк заданий).

7. www.alexlarin.net – сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ, поступлению в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики.

8. <http://eek.diary.ru/> – сайт по оказанию помощи абитуриентам, студентам, учителям по математике.

9. <http://reshuege.ru> – Образовательный портал для подготовки к экзаменам «Решу ЕГЭ. Математика».