

1) Используя геометрические построения, определить число вершин полиэдра в R^5 , задаваемого системой:

$$\begin{cases} x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\} \end{cases}$$

Определение. Многогранной областью, порождённой конечной системой точек P из $A f^n$ и конечной системой векторов V из R^n , называется множество всех точек из $A f^n$, которые представимы в виде $B + \vec{p}$, где B - произвольная выпуклая комбинация точек из P , $\vec{p}$ - произвольная неотрицательная комбинация векторов из V .

Определение. Многогранником, порождённым конечной системой точек P из $A f^n$, называется множество всех выпуклых комбинаций точек из P . Если при этом система P состоит только из двух различных точек, то порождённый ею многогранник называется отрезком, соединяющим эти точки.

Определение. Полиэдром в пространстве $A f^n$ называется множество точек, являющееся пересечением конечного числа полупространств и гиперплоскостей.

Теорема. Многогранная область - это полиэдр, и каждый полиэдр является многогранной областью. Многогранник - это ограниченный полиэдр, и каждый ограниченный полиэдр является многогранником

★ Определение числа вершин полиэдра графическим способом ★

Запишем расширенную матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ранг этой матрицы $r(A) = 2$.

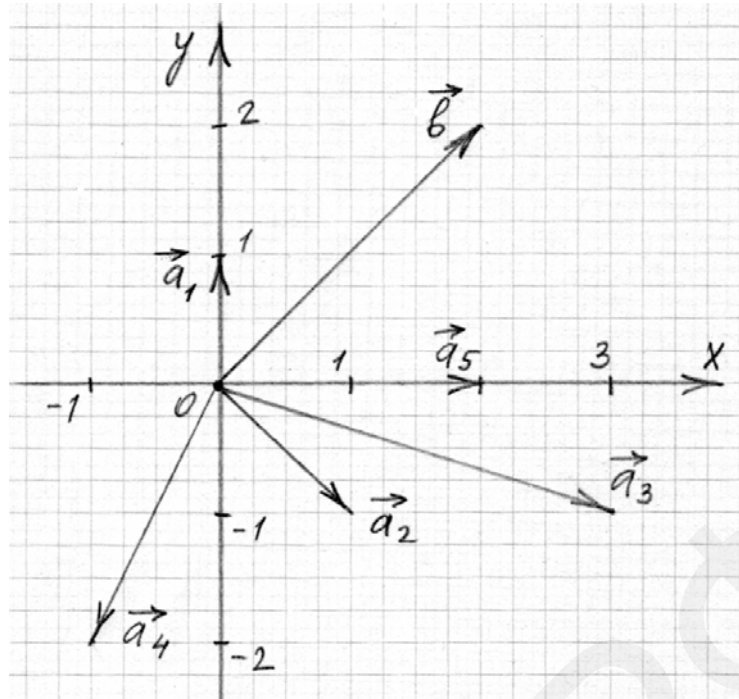
Представим данную систему линейных уравнений в векторном виде:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot x_2 + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot x_3 + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot x_4 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 5\}$$

где векторы условий

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Поскольку ранг матрицы $r(A) = 2$, то линейно независимы любые два вектора из множества $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5\}$, и вектор $\vec{b}$ может быть получен как линейная комбинация любых двух векторов из $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5\}$. Количество этих вариантов равно числу базисных решений системы, т.е.

$$C_n^r = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = 10,$$

где n - количество переменных системы линейных уравнений,
 r - ранг матрицы системы.

Но среди базисных решений возможно будут и такие, в которых $x_j < 0$, что противоречит условию задачи. Все базисные решения, в которых $x_j \geq 0$ называются опорными решениями и каждое такое решение соответствует одной определённой вершине полиэдра (многогранника).

Графически получить вектор $\vec{b}$ в виде суммы двух векторов с неотрицательными коэффициентами $x_j \geq 0$ можно тремя способами, используя пары векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$, $\{\vec{a}_1, \vec{a}_3\}$, $\{\vec{a}_1, \vec{a}_5\}$ (см. рисунок - вектор $\vec{b}$ должен пройти через треугольник, образованный подходящей парой векторов). Следовательно, число вершин полиэдра в R^5 , задаваемого системой задачи, равно 3.

Ответ: 3.

Переменные, относительно которых разрешена система линейных уравнений, называются **базисными переменными**. Число базисных переменных равно рангу системы. Все остальные переменные называются **свободными**.

Среди всевозможных решений выберем такие, у которых значения всех свободных переменных равны нулю. Эти решения системы называют **базисными решениями**. Число базисных решений равно

$$C_n^r = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

где n - количество переменных системы линейных уравнений;

r - ранг матрицы системы.

Последовательность перебора базисных решений, когда каждое последующее решение отличается от предыдущего только одной базисной переменной, называют **правильной**. Всегда можно построить правильную последовательность базисных решений.

Например, если число переменных системы линейных уравнений $n = 4$, а ранг матрицы системы $r = 2$, то правильную последовательность базисных решений можно записать как

0011, 0101, 1001, 1010, 0110, 1100.

Такие переходы от одного базисного решения к другому базисному решению называют **преобразованиями однократного замещения**, т.к. требуется лишь одна итерация метода Жордана-Гаусса. Название преобразования связано с тем, что в базис вводится одна из свободных переменных, в то время как одна из существующих базисных переменных становится свободной. Таким образом, вводимая в базис свободная переменная *замещает* в базисе одну из переменных.

Базисные решения системы линейных уравнений, у которых значения всех базисных переменных неотрицательны, называют **опорными решениями**. Каждому опорному решению системы линейных ограничений задачи линейного программирования соответствуют координаты угловых точек области определения функции цели, и обратно, каждой угловой точке области определения функции цели соответствует опорное решение системы линейных ограничений задачи.

Путём перебора базисных решений выявим опорные решения; количество опорных решений равно числу вершин полиэдра.

- Пусть x_1, x_2 - базисные переменные, x_3, x_4, x_5 - свободные (комбинация 11000).

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow X^{(1)} = (4; 2; 0; 0; 0)$$

(решение является базисным при нулевых свободных переменных $x_3 = x_4 = x_5 = 0$)

- первое базисное решение; является опорным, т.к. базисные переменные неотрицательны;
1-е опорное решение - 1-я вершина полиэдра.

- Пусть x_1, x_3 - базисные переменные, x_2, x_4, x_5 - свободные (комбинация 10100).

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 0 & -7/3 & 2/3 & 8/3 \\ 0 & 1/3 & 1 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \Rightarrow X^{(2)} = \left(\frac{8}{3}; 0; \frac{2}{3}; 0; 0 \right)$$

- второе базисное решение; является опорным, т.к. базисные переменные неотрицательны;
2-е опорное решение - 2-я вершина полиэдра.

- Пусть x_1, x_4 - базисные переменные, x_2, x_3, x_5 - свободные (комбинация 10010).

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X^{(3)} = (-2; 0; 0; -2; 0)$$

- третье базисное решение; но не опорное (базисные переменные отрицательны).

- Пусть x_1, x_5 - базисные переменные, x_2, x_3, x_4 - свободные (комбинация 10001).

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & -1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X^{(4)} = (2; 0; 0; 0; 1)$$

- четвертое базисное решение; является опорным, т.к. базисные переменные неотрицательны;
3-е опорное решение - 3-я вершина полиэдра.

- Пусть x_2, x_5 - базисные переменные, x_1, x_3, x_4 - свободные (комбинация 01001).

$$A \sim \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1 & -3/2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X^{(5)} = (0; -2; 0; 0; 2)$$

- пятое базисное решение; не опорное.

- Пусть x_2, x_4 - базисные переменные, x_1, x_3, x_5 - свободные (комбинация 01010).

$$A \sim \begin{pmatrix} -1/3 & 1 & 7/3 & 0 & 4/3 & 2/3 \\ -1/3 & 0 & -2/3 & 1 & -2/3 & -4/3 \end{pmatrix} \Rightarrow X^{(6)} = \left(0; \frac{2}{3}; 0; -\frac{4}{3}; 0\right)$$

- шестое базисное решение; не опорное.

- Пусть x_2, x_3 - базисные переменные, x_1, x_4, x_5 - свободные (комбинация 01100).

$$A \sim \begin{pmatrix} -3/2 & 1 & 0 & 7/2 & -1 & -4 \\ 1/2 & 0 & 1 & -3/2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X^{(7)} = (0; -4; 2; 0; 0)$$

- седьмое базисное решение; не опорное.

- Пусть x_3, x_4 - базисные переменные, x_1, x_2, x_5 - свободные (комбинация 00110).

$$A \sim \begin{pmatrix} -1/7 & 3/7 & 1 & 0 & 4/7 & 2/7 \\ -3/7 & 2/7 & 0 & 1 & -2/7 & -8/7 \end{pmatrix} \Rightarrow X^{(8)} = \left(0; 0; \frac{2}{7}; -\frac{8}{7}; 0\right)$$

- восьмое базисное решение; не опорное.

- Пусть x_3, x_5 - базисные переменные, x_1, x_2, x_4 - свободные (комбинация 00101).

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 3/2 & -1 & 0 & -7/2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow X^{(9)} = (0; 0; -2; 0; 4)$$

- девятое базисное решение; не опорное.

- Пусть x_4, x_5 - базисные переменные, x_1, x_2, x_3 - свободные (комбинация 00011).

$$A \sim \begin{pmatrix} -1/4 & 3/4 & 7/4 & 0 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X^{(10)} = \left(0; 0; 0; -1; \frac{1}{2}\right)$$

- десятое базисное решение; не опорное.

Итак, полиэдр, заданный системой условий данной задачи, имеет 3 вершины.

Ответ: 3.

Литература:

- 1) Плотников А.Д. "Математическое программирование", 2006;
- 2) Рудык Б.М. и др. "Общий курс высшей математики для экономистов", 2006, стр. 536;
- 3) Черняк А.А., Новиков В.А., Мельников В.И., Кузнецов А.В. "Математика для экономистов на базе Mathcad", 2003, стр. 94 (определение полиэдра).

2) На плоскости R^2 заданы пять точек:

$$x^1 = (-3; 0)$$

$$x^2 = (0; 2)$$

$$x^3 = (12; 2)$$

$$x^4 = (12; 0)$$

$$x^5 = (0; -3)$$

а также точка $x^0 = (5; -3/2)$, принадлежащая $\text{conv}\{x^1, \dots, x^5\}$.

Указать все такие наборы номеров $\{i, j, k\} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, что $x^0 \in \text{conv}\{x^i, x^j, x^k\}$.

Пусть M - непустое подмножество вещественного линейного пространства V ($M \subset V, M \neq \emptyset$).

► Множество всевозможных линейных комбинаций векторов $v_1, v_2, \dots, v_k$ из M называется **линейной оболочкой непустого подмножества M** и обозначается:

$$\text{Lin}(M) = \left\{ v: v = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i; k \in N, v_i \in M, \alpha_i \in R, i = 1, \dots, k \right\}.$$

Векторы $v_1, v_2, \dots, v_k$ называются **образующими линейной оболочки $\text{Lin}(M)$** .

► Линейная комбинация векторов $v_1, v_2, \dots, v_k$ из M называется **аффинной**, если сумма её коэффициентов равна единице. Множество всевозможных аффинных комбинаций векторов $v_1, v_2, \dots, v_k$ называется **аффинной оболочкой непустого подмножества M** и обозначается:

$$\text{Aff}(M) = \left\{ v: v = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i; k \in N, v_i \in M, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \alpha_i \in R, i = 1, \dots, k \right\}.$$

Векторы $v_1, v_2, \dots, v_k$ называются **образующими аффинной оболочки $\text{Aff}(M)$** .

► Линейная комбинация векторов $v_1, v_2, \dots, v_k$ из M называется **неотрицательной**, если все её коэффициенты - неотрицательные числа. Множество всевозможных неотрицательных комбинаций векторов $v_1, v_2, \dots, v_k$ называется **конической оболочкой непустого подмножества M** и обозначается:

$$\text{Con}(M) = \left\{ v: v = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i; k \in N, v_i \in M, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, k \right\}.$$

Векторы $v_1, v_2, \dots, v_k$ называются **образующими конической оболочки $\text{Con}(M)$** .

► Линейная комбинация векторов $v_1, v_2, \dots, v_k$ из M называется **выпуклой**, если все её коэффициенты - неотрицательные числа, а их сумма равна единице. Множество всевозможных выпуклых комбинаций векторов $v_1, v_2, \dots, v_k$ называется **выпуклой оболочкой непустого подмножества M** и обозначается:

$$\text{Conv}(M) = \left\{ v: v = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i; k \in N, v_i \in M, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, k \right\}.$$

Векторы $v_1, v_2, \dots, v_k$ называются **образующими выпуклой оболочки $\text{Conv}(M)$** .

Из определений следуют включения:

$$M \subset \text{Conv}(M) \subset \text{Aff}(M) \subset \text{Lin}(M)$$

$$M \subset \text{Conv}(M) \subset \text{Con}(M) \subset \text{Lin}(M)$$

и равенство

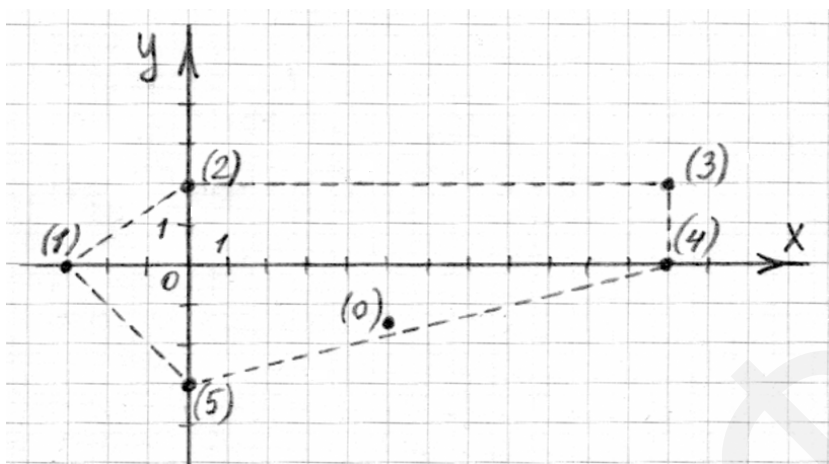
$$\text{Conv}(M) = \text{Con}(M) \cap \text{Aff}(M).$$

Если $M = \emptyset$, то по определению считается, что

$$\text{Lin}(M) = \text{Aff}(M) = \text{Con}(M) = \text{Conv}(M) = \{\mathbf{o}\},$$

где $\mathbf{o}$ - нулевой вектор.

Решаем задачу графически. Изобразим на плоскости xOy данные точки.



Всего наборов точек $\{i, j, k\} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = 10:$$

$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\},$
 $\{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}$

Из них условию $x^0 \in \text{conv}\{x^i, x^j, x^k\}$ удовлетворяют 3 набора:

$\{1, 4, 5\}$

$\{2, 4, 5\}$

$\{3, 4, 5\}$

(выделяя треугольные области, оцениваем попадание в них точки x^0).

Ответ: $\{1, 4, 5\}$

$\{2, 4, 5\}$

$\{3, 4, 5\}$

По определению выпуклого множества имеем (в векторном виде):

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot x_2 + \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot x_3 + \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_4 + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot x_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3/2 \end{pmatrix} \\ \sum_{i=1}^5 x_i = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i \in \{1, \dots, 5\} \end{cases} \quad (*)$$

В случае, когда выпуклое множество составляют три точки, два из коэффициентов x_i будут нулевыми. Найдём все общие решения системы. Одно решение получим вручную, остальные - в Mathcad'е.

► Базисные переменные - x_1 , x_2 и x_3 :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -3 & 0 & 12 & 12 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -3 & -3/2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -4 & 0 & -5/3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3/2 & -3/4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -4 & 0 & -5/3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3/2 & -3/4 \\ 0 & -1 & -5 & -5 & -1 & -8/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -4 & 0 & -5/3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & -5/2 & -41/12 \end{pmatrix} \sim \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -4 & 0 & -5/3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 5/2 & 41/12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 5/2 & 7/4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 5/2 & 41/12 \end{pmatrix} \sim \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 5/2 & 7/4 \\ 0 & 1 & 0 & -5/4 & -17/8 & -77/48 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & 5/8 & 41/48 \end{pmatrix} \\ & \begin{cases} x_1 = -x_4 - \frac{5}{2}x_5 + \frac{7}{4} \\ x_2 = \frac{5}{4}x_4 + \frac{17}{8}x_5 - \frac{77}{48} \\ x_3 = -\frac{5}{4}x_4 - \frac{5}{8}x_5 + \frac{41}{48} \end{cases} \end{aligned}$$

Приняв в общем решении свободные переменные x_4 и x_5 равными нулю, получим базисное решение:

$$\begin{cases} x_1 = 7/4 \\ x_2 = -77/48 < 0 \\ x_3 = 41/48 \end{cases}$$

но оно не является опорным, и набор точек $\{1, 2, 3\}$ решением задачи не является, т.к. система (*) не имеет решений.

► Исследуем все наборы точек в Mathcad 14:

$$A := \begin{pmatrix} -3x_1 + 12x_3 + 12x_4 = 5 \\ 2x_2 + 2x_3 - 3x_5 = -\frac{3}{2} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \end{pmatrix}$$

$$A \left| \begin{array}{l} \text{solve}, x_1, x_2, x_3 \\ \text{assume}, x_4 = 0, x_5 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -77 & 41 \\ 4 & -48 & 48 \end{pmatrix}$$

$$A \left| \begin{array}{l} \text{solve}, x_1, x_4, x_5 \\ \text{assume}, x_2 = 0, x_3 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 13 & 1 \\ 15 & 30 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \left| \begin{array}{l} \text{solve}, x_1, x_2, x_4 \\ \text{assume}, x_3 = 0, x_5 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 16 & -3 & 41 \\ 15 & -4 & 60 \end{pmatrix}$$

$$A \left| \begin{array}{l} \text{solve}, x_2, x_3, x_4 \\ \text{assume}, x_1 = 0, x_5 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -4 & 7 \\ 12 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \left| \begin{array}{l} \text{solve}, x_1, x_2, x_5 \\ \text{assume}, x_3 = 0, x_4 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 13 & 41 \\ -3 & 10 & 30 \end{pmatrix}$$

$$A \left| \begin{array}{l} \text{solve}, x_2, x_3, x_5 \\ \text{assume}, x_1 = 0, x_4 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 5 & 7 \\ -60 & 12 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A \left| \begin{array}{l} \text{solve}, x_1, x_3, x_4 \\ \text{assume}, x_2 = 0, x_5 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -3 & 77 \\ 15 & -4 & 60 \end{pmatrix}$$

$$A \left| \begin{array}{l} \text{solve}, x_2, x_4, x_5 \\ \text{assume}, x_1 = 0, x_3 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 20 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

$$A \left| \begin{array}{l} \text{solve}, x_1, x_3, x_5 \\ \text{assume}, x_2 = 0, x_4 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 13 & 77 \\ -51 & 34 & 102 \end{pmatrix}$$

$$A \left| \begin{array}{l} \text{solve}, x_3, x_4, x_5 \\ \text{assume}, x_1 = 0, x_2 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 \\ 8 & 24 & 12 \end{pmatrix}$$

Как видим, $x^0 \in \text{conv}\{x^i, x^j, x^k\}$ при $\{i, j, k\} \in \{\{1, 4, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}\}$.

В процессе решения задачи были найдены базисные решения системы, и среди них выделены опорные решения системы, которые и соответствуют искомым наборам точек.

Литература:

- 1) Бортакровский А.С., Пантелеев А.В. "Линейная алгебра в примерах и задачах", 2005, стр. 374;
- 2) Черняк А.А., Новиков В.А., Мельников В.И., Кузнецов А.В. "Математика для экономистов на базе Mathcad", 2003, стр. 94.