

Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Чувашский государственный педагогический университет
имени И.Я. Яковлева»

Д.А. Абруков

Индивидуальные задания по стереометрии

Учебно-методическое пособие

Чебоксары 2004

ББК 22.151.02

А 169

Абруков Д.А. Индивидуальные задания по стереометрии: Учебно-методическое пособие. – Чебоксары: Чувашгоспедуниверситет им. И.Я. Яковлева, 2004. – 52 с.

Печатается по решению ученого совета Чувашского государственного педагогического университета имени И.Я. Яковлева.

Учебно-методическое пособие составлено в соответствии с действующей учебной программой курса «Элементарная геометрия: стереометрия» для специальностей «Математика и информатика», «Информатика и математика» физико-математических факультетов высших педагогических учебных заведений.

В пособии изложены основные факты стереометрии, необходимые для решения задач, описаны основные методы решения стереометрических задач, а также приводятся примеры решения задач. Даны варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы студентов.

Ответственный редактор доц. каф. математики и информатики Лиепайской педагогической академии кандидат пед. наук Гингуле К.Ю.

Р е ц е н з е н т ы:

1. Семёнов Ю.М. – кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой алгебры и геометрии ЧГУ им. И.Н. Ульянова.
2. Рыбакова Т.И. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры мат. анализа ЧГПУ им. И.Я. Яковлева.
3. Иванов В.Г. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии ЧГПУ им. И.Я. Яковлева

© Абруков Д.А., 2004

© ГОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет имени И.Я. Яковлева», 2004

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ	
И ТЕОРЕМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ.....	5
§ 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ	
СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ	13
§ 3. УГЛЫ МЕЖДУ	
ПРЯМЫМИ И ПЛОСКОСТЯМИ.....	16
1. Угол между скрещивающимися прямыми.....	16
2. Угол между прямой и плоскостью	17
3. Двугранный и многогранный углы.....	19
§ 4. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ,	
ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ И РАССТОЯНИЕ	
МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ.....	21
1. Расстояния от точки до прямой.....	21
2. Расстояние от точки до плоскости	24
3. Расстояние между скрещивающимися	
прямыми	25
§ 5. ПЛОЩАДИ СЕЧЕНИЙ	27
§ 6. ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ	29
§ 7. ОБЪЕМЫ.....	31
§ 8. КОМБИНАЦИИ МНОГОГРАННИКОВ	
И КРУГЛЫХ ТЕЛ	33
1. Комбинации с описанными сферами.....	33
2. Комбинации со вписанными сферами	34
ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ	
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ	37
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	51

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебно-методическое пособие составлено в соответствии с действующей учебной программой курса «Элементарная геометрия: стереометрия» для специальностей «Математика и информатика», «Информатика и математика» физико-математических факультетов высших педагогических учебных заведений.

В § 1 изложены основные факты стереометрии, необходимые для решения задач. Для удобства и компактности изложения мы отошли от строгого аксиоматического построения курса стереометрии. В § 2 описаны основные методы решения стереометрических задач, в частности, большое внимание уделяется векторно-координатному методу.

В § 3-8 рассматриваются примеры решения задач по следующим темам:

- ✓ Углы между прямыми и плоскостями.
- ✓ Расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости и расстояние между скрещивающимися прямыми.
- ✓ Площади сечений.
- ✓ Площади поверхностей.
- ✓ Объемы.
- ✓ Комбинации многогранников и круглых тел.

В заключение приводятся 30 примерно равных по сложности вариантов индивидуальной работы для самостоятельного выполнения студентами, каждый вариант содержит 5 задач.

Символом ★ отмечены определения, знаком ♦ – теоремы. Основные понятия выделены *курсивом*.

Автор будет признателен всем читателям – студентам, учителям, преподавателям – за отзывы и замечания об этой книге.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ

Рассмотрим некоторые факты стереометрии, необходимые для решения задач.

1. Взаимное расположение двух прямых в трехмерном евклидовом пространстве.

Возможны следующие случаи:

- ❖ *Пересечение* (прямые лежат в одной плоскости и пересекаются).
- ❖ *Параллельность* (прямые лежат в одной плоскости и не пересекаются).
- ❖ *Скрещивание* (прямые не лежат в одной плоскости).

Признаки параллельности прямых в пространстве.

- ◆ Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой.
- ◆ Если две прямые перпендикулярны к одной и той же плоскости, то они параллельны.

Признак скрещивающихся прямых.

- ◆ Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то данные прямые скрещиваются.

Свойство скрещивающихся прямых.

- ◆ Через две скрещивающиеся прямые можно провести две параллельные плоскости.

2. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.

Возможны следующие случаи:

- ❖ Прямая *принадлежит* плоскости (прямая имеет с плоскостью прямую общих точек).
- ❖ Прямая *пересекает* плоскость (прямая имеет с плоскостью единственную общую точку).
- ❖ Прямая *параллельна* плоскости (прямая не имеет с плоскостью общих точек).

Признаки параллельности прямой и плоскости.

- ◆ Прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна плоскости тогда и только тогда, когда она параллельна некоторой прямой, лежащей в плоскости.
- ◆ Если прямая и плоскость перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

3. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.

Возможны следующие случаи:

- ❖ *Совпадение* (плоскости имеют плоскость общих точек).
- ❖ *Пересечение* (плоскости имеют прямую общих точек).
- ❖ *Параллельность* (у плоскостей нет общих точек).

Признаки параллельности двух плоскостей.

◆ Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

◆ Если две непересекающиеся плоскости перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.

Свойства параллельных плоскостей.

◆ Если две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, то линии их пересечения параллельны.

◆ Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.

◆ Если прямая перпендикулярна одной из параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости.

4. Углы между прямыми и плоскостями.

★ *Углом между пересекающимися* прямыми называется острый угол между ними.

★ *Углом между скрещивающимися* прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся прямым.

★ *Угол между параллельными* прямыми считается равным нулю.

★ Если прямая пересекает плоскость и не перпендикулярна ей, то *углом между прямой и плоскостью* называется угол между прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость.

★ *Углом между пересекающимися плоскостями* называется угол между прямыми, перпендикулярными линии пересечения данных плоскостей.

5. Перпендикулярность прямых и плоскостей.

★ Прямая называется *перпендикулярной* плоскости, если она пересекается с плоскостью и перпендикулярна любой прямой лежащей в плоскости.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

◆ Если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна двум пересекающимся прямым в плоскости, то она перпендикуляр-

на данной плоскости.

★ Две плоскости называются *перпендикулярными*, если угол между ними равен 90° .

Признак перпендикулярности плоскостей.

◆ Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

Свойства перпендикулярных плоскостей и прямых.

◆ Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

◆ Две прямые, перпендикулярные одной плоскости параллельны.

◆ Две плоскости, перпендикулярные одной прямой параллельны.

6. Перпендикуляр и наклонная.

★ Отрезок прямой, перпендикулярной плоскости, соединяющий точку вне плоскости с точкой плоскости (*основание* перпендикуляра) называется *перпендикуляром* плоскости.

★ Отрезок, соединяющий конец перпендикуляра, не принадлежащий плоскости, с точкой плоскости (отличной от основания перпендикуляра) называется *наклонной*. Точка наклонной, лежащая в плоскости, называется *основанием* наклонной.

★ *Проекцией наклонной* на плоскость называется отрезок прямой, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной.

Теорема о трех перпендикулярах.

◆ Прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной перпендикулярно ее проекции, перпендикулярна и самой наклонной. Справедливо и обратное: прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной перпендикулярно наклонной, перпендикулярна и ее проекции.

7. Двугранные и трехгранные углы.

★ Фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей ограничивающей их прямой, называется *двугранным* углом. Данные полуплоскости называются *гранями* двугранного угла. Прямая – *ребро* двугранного угла.

★ *Линейным (плоским)* углом двугранного угла называется угол между плоскостями граней двугранного угла.

★ *Трехгранным углом* (abc) называется фигура, образованная тремя плоскими углами (ab), (ac), (bc), не лежащими в одной плоскости. Углы (ab), (ac), (bc) – *грани* трехгранного угла, общая точка

лучей a, b, c – вершина трехгранного угла.

♦ Во всяком трехгранном угле каждый плоский угол меньше суммы двух других плоских углов, но больше их разности.

8. Многогранники.

★ *Фигурой* называется любое множество точек.

★ *Телом* называется фигура трехмерного евклидова пространства.

★ *Многогранником* называется тело, ограниченное плоскими многоугольниками. Многоугольники, ограничивающие многогранник, называются его *гранями*, а стороны и вершины граней – *ребрами* и *вершинами* многогранника.

★ Отрезки прямых, соединяющие две вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, называются *диагоналями* многогранника.

★ Многогранник называется *выпуклым*, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой своей грани.

9. Призма.

★ *Призмой* называется многогранник, у которого две грани – равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а остальные грани – параллелограммы, плоскости которых параллельны одной и той же данной прямой.

★ Многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, называются *основаниями* призмы. Параллелограммы называются *боковыми гранями*, а их стороны, не принадлежащие основаниям, называются *боковыми ребрами*. Все боковые ребра призмы равны.

★ Перпендикуляр, опущенный из какой-либо точки одного основания на другое, называется *высотой* призмы.

★ *Призма* называется *прямой*, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям. У прямой призмы боковые грани – прямоугольники, а высоты равны боковому ребру.

★ Прямая призма называется *правильной*, если в её основании лежат правильные многоугольники. У правильной призмы все боковые грани – прямоугольники.

10. Параллелепипед.

★ Призма, основания которой – параллелограммы, называется *параллелепипедом*. Если высота параллелепипеда перпендикулярна основаниям, то он называется *прямым*, в противном случае он *наклонный*.

★ Прямой параллелепипед называется *прямоугольным*, если его

основаниях – прямоугольники.

✱ Три ребра параллелепипеда, исходящие из одной вершины, называются его *измерениями*.

✱ Прямоугольный параллелепипед, у которого все три измерения равны, называется *кубом*.

◆ В параллелепипеде противоположные грани равны и параллельны, все четыре диагонали пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

◆ В прямоугольном параллелепипеде квадрат диагонали равен сумме квадратов трех его измерений.

11. Пирамида.

✱ *Пирамидой* называется многогранник, у которого одна грань (*основание*) – многоугольник, а все остальные грани (*боковые грани*) – треугольники, имеющие общую вершину.

✱ Общая вершина S боковых треугольников называется *вершиной* пирамиды, а перпендикуляр SO , опущенный из вершины на основание, называется *высотой* пирамиды.

✱ Пирамида называется *правильной*, если в основании её лежит правильный многоугольник, а высота проходит через центр этого многоугольника. В правильной пирамиде все боковые грани – равнобедренные треугольники. Высота такого треугольника называется *апотемой* пирамиды.

✱ Плоскость, проведенная через вершину пирамиды и через какую-нибудь диагональ основания, называется *диагональной* плоскостью.

✱ Отличный от пирамиды многогранник, отсекаемый плоскостью, параллельной основанию пирамиды, называется *усеченной пирамидой*. Получаемые параллельные многоугольники называются *основаниями*, а расстояние между ними – *высотой* усеченной пирамиды.

◆ Если пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию, то:

- 1) боковые ребра и высота делятся этой плоскостью на пропорциональные части;
- 2) в сечении получаем многоугольник, подобный основанию;
- 3) площади сечения и основания относятся, как квадраты их расстояний от вершины.

◆ Если в пирамиде выполнено одно из следующих двух условий:

1) все боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы;

2) длины всех боковых ребер равны, то высота пирамиды падает в центр окружности, описанной около основания пирамиды (напомним, что это точка пересечения серединных перпендикуляров сторон основания пирамиды).

♦ Если в пирамиде выполнено одно из следующих двух условий:

1) все боковые грани образуют с плоскостью основания равные углы;

2) длины апофем всех боковых граней равны, то высота пирамиды падает в центр окружности, вписанной в основание пирамиды (напомним, что это точка пересечения биссектрис углов основания пирамиды).

12. Цилиндр.

★ *Круговым цилиндром* называется тело, которое состоит из двух кругов (*оснований*), не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков (*образующие*), соединяющих соответствующие точки этих кругов.

★ Расстояние между основаниями цилиндра называется его *высотой*.

★ Если образующие перпендикулярны плоскости основания, цилиндр называется *прямым*.

♦ Сечение кругового цилиндра плоскостью, параллельной основаниям, есть *круг*.

13. Конус.

★ *Круговым конусом* называется тело, которое состоит из круга (*основание*) и множества отрезков, соединяющих некоторую точку (*вершину*) с точками основания.

★ Перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на плоскость основания, называется *высотой конуса*.

★ Круговой конус называется *прямым круговым*, если его вершина проектируется в центр основания.

♦ Сечение прямого кругового конуса плоскостью, параллельной основанию, есть *круг*.

★ Часть конуса, заключенная между основанием и плоскостью, параллельной основанию конуса, называется *усеченным конусом*. Параллельные круги называются его *основаниями*, а расстояние между основаниями – *высотой* усеченного конуса.

14. Сфера и шар.

★ *Сферической поверхностью* или *сферой* называется множество точек пространства, равноудаленных от данной точки, называемой *центром сферы*.

★ Отрезок, соединяющий центр сферы с произвольной точкой сферы, называется *радиусом*.

★ Отрезок, соединяющий две точки сферы, называется *хордой*.

★ Хорда, проходящая через центр, называется *диаметром*.

★ Тело, ограниченное сферой, называется *шаром*. Заметим, что сфера – есть *шаровая поверхность*.

◆ Всякое сечение шара есть круг радиуса r : $r^2 = R^2 - d^2$. Здесь r – радиус круга, R – радиус шара, d – расстояние секущей плоскости от центра.

★ *Шаровым сегментом* называется часть шара, отсекаемая от него плоскостью.

★ *Шаровым сектором* называется тело, состоящее из шарового сегмента и соответствующего ему конуса с вершиной в центре шара.

★ Плоскость, имеющая с шаровой поверхностью только одну общую точку, называется *касательной плоскостью*.

★ Часть сферы, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями, называется *шаровым поясом*.

◆ Касательная плоскость перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

15. Площади поверхности и объемы призм.

Обозначения: l – боковое ребро призмы, P – периметр основания, S – площадь основания, H – высота, $P_{\perp \text{сеч.}}$ – периметр перпендикулярного сечения, $S_{\text{бок.}}$ – площадь боковой поверхности, V – объем.

❖ Произвольная призма: $S_{\text{бок.}} = P_{\perp \text{сеч.}} \cdot l$; $V = S \cdot H$.

❖ Прямая призма: $S_{\text{бок.}} = P \cdot l$; $V = S \cdot H$.

❖ Прямоугольный параллелепипед (a, b, c – измерения, d – диагональ): $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$; $S_{\text{бок.}} = P \cdot H$; $V = a b c$.

❖ Куб (a – ребро): $d = a\sqrt{3}$; $S_{\text{бок.}} = P \cdot H$; $V = a^3$.

16. Площади поверхности и объемы пирамид.

Обозначения: k – апофема пирамиды, P – периметр основания, S – площадь основания, H – высота, $S_{\text{бок.}}$ – площадь боковой поверхности, V – объем.

❖ Произвольная пирамида: $V = \frac{1}{3} S \cdot H$.

❖ Правильная пирамида: $S_{бок} = \frac{1}{2} P \cdot k$; $V = \frac{1}{3} S \cdot H$.

❖ Произвольная усеченная пирамида (S_1, S_2 – площади оснований, h – высота): $V = \frac{1}{3} h (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$.

❖ Правильная усеченная пирамида (P_1, P_2 – периметры оснований, k – апофема): $S_{бок} = \frac{1}{2} (P_1 + P_2) \cdot k$; $V = \frac{1}{3} h (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$.

17. Площадь поверхности и объем кругового цилиндра.

Обозначения: R – радиус основания цилиндра, H – высота, $S_{бок.}$ – площадь боковой поверхности, $S_{полн.}$ – площадь полной поверхности, V – объем.

❖ $S_{бок} = 2\pi R H$; $S_{полн.} = 2\pi R (R + H)$; $V = \pi R^2 H$.

18. Площади поверхности и объемы кругового конуса.

Обозначения: R – радиус основания конуса, H – высота, l – образующая, $S_{бок.}$ – площадь боковой поверхности, $S_{полн.}$ – площадь полной поверхности, V – объем.

❖ Конус: $S_{бок.} = \pi R l$; $S_{полн.} = \pi R (l + R)$; $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$.

❖ Усеченный конус (R_1, R_2 – радиусы оснований, l – образующая): $S_{бок} = \pi l (R_1 + R_2)$; $S_{полн.} = \pi (R_1^2 + R_2^2 + l R_1 + l R_2)$;
 $V = \frac{1}{3} H (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)$.

Замечание. Для вычисления площади полной поверхности многогранника нужно к площади его боковой поверхности прибавить площадь основания (оснований).

19. Площадь сферы и объем шара.

Обозначения: R – радиус шара, S – площадь поверхности сферы, V – объем шара.

❖ $S = 4\pi R^2$; $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

20. Площадь поверхности и объем шарового пояса и шарового сегмента.

Обозначения: R – радиус шара, $S_{сег}$ – площадь поверхности шарового сегмента, $S_{ш.пояса}$ – площадь поверхности шарового пояса, $V_{сег}$ – объем сегмента, $V_{сект.}$

❖ Шаровой пояс (h – высота шарового пояса): $S_{ш.пояса} = 2\pi R h$.

❖ Шаровой сегмент (h – высота сегмента, r – радиус основания

сегмента):

$$S_{\text{сез.}} = 2\pi Rh, \quad V_{\text{сез.}} = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right), \quad V_{\text{сез.}} = \frac{1}{6}\pi h(h^2 + 3r^2).$$

❖ Шаровой сектор (h – высота сегмента, соответствующего данному сектору):

$$V_{\text{сект.}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

Замечание. При изображении пространственных фигур в параллельной проекции следует пользоваться методами начертательной геометрии, последнее накладывает на изображение ряд ограничений. Общие сведения о построении изображения различных фигур в пространстве изложены, например, в книгах [5, стр. 96], [6, стр. 92].

§ 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

При решении стереометрических задач применяют следующие способы (методы):

1. *Поэтапно-вычислительный.*
2. *Геометрический.*
3. *Векторно-координатный.*

Рассмотрим более подробно особенности каждого из способов.

1. **Поэтапно-вычислительный** способ использует основные понятия и теоремы стереометрии, описанные в § 1.

2. **Геометрический** способ заключается в некотором дополнительном построении, которое облегчает решение задачи. После чего, (как и в поэтапно-вычислительном методе) используются основные понятия и теоремы стереометрии.

3. **Векторно-координатный** способ требует введения прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$, связанной с конкретной фигурой. Данный метод эффективен при решении задач на:

❖ прямоугольные параллелепипеды, кубы – оси x, y, z выбирают по направлению трех измерений. Иногда можно применять данный метод и для прямых (наклонных) параллелепипедов. При этом центр O системы координат $Oxyz$ выбирается в одной из вершин параллелепипеда;

❖ правильные четырехугольные пирамидами – центр O прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$ выбирается в основании высоты пирамиды, ось z содержит высоту пирамиды, а оси x и y – содержат диагонали основания. Иногда можно применять данный метод и для правильной треугольной пирамиды.

После введения системы координат находятся координаты ключевых точек, которые в свою очередь можно использовать для отыскания направляющих векторов прямых и общих уравнений плоскостей.

Напомним некоторые факты, касающиеся прямоугольной декартовой системы координат:

1. Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке $A(x_1, y_1, z_1)$ и концом в точке $B(x_2, y_2, z_2)$ есть $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

2. Расстояние между точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ есть

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

3. Координаты точки M , делящей отрезок AB в заданном отношении λ есть: (x_3, y_3, z_3) , где

$$x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z_3 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

4. Общее уравнение плоскости Π , заданной точкой $C(x_0, y_0, z_0)$ и векторами $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ и $\vec{q}(q_1, q_2, q_3)$ записывается в виде:

$$\Pi: \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя определитель третьего порядка, получим следующий вид общего уравнения плоскости:

$$\Pi: Ax + By + Cz + D = 0.$$

Векторно-координатным способом, исходя из координат точек, векторов и общих уравнений плоскостей, можно решить следующие задачи:

❖ *Нахождение угла φ между прямыми l_1 и l_2 .* Если прямая l_1 имеет направляющий вектор $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$, а прямая l_2 – направляющим вектором $\vec{q}(q_1, q_2, q_3)$, то

$$\cos \varphi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{q}|} = \frac{p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} \cdot \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}. \quad (2.1)$$

❖ *Нахождение угла φ между прямой l и плоскостью Π .* Если прямая l имеет направляющий вектор $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$, а плоскость Π задана общим уравнением $\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$ (тогда $\vec{N}(A, B, C)$ – нормальный вектор Π), то

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{N}|}{|\vec{p}| \cdot |\vec{N}|} = \frac{|p_1 A + p_2 B + p_3 C|}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (2.2)$$

❖ *Нахождение угла φ между плоскостями Π_1 и Π_2 .* Если плоскости заданы общими уравнениями $\Pi_1: A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ (тогда $\vec{N}_1(A_1, B_1, C_1)$ – нормальный вектор Π_1) и $\Pi_2: A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ (тогда $\vec{N}_2(A_2, B_2, C_2)$ – нормальный вектор Π_2), то

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (2.3)$$

❖ *Нахождение расстояния от точки $C(x_0, y_0, z_0)$ до прямой l ,* заданной направляющим вектором $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ и точкой $A(x_l, y_l, z_l)$ производится по формуле:

$$\rho(C, l) = \frac{|\overrightarrow{AC} \times \vec{p}|}{|\vec{p}|}, \quad (2.4)$$

где

$$[\overrightarrow{AC} \times \vec{p}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_l - x_0 & y_l - y_0 & z_l - z_0 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix}$$

– векторное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\vec{p}$ (см. § 4, п.1).

❖ *Нахождение расстояния от точки $C(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$* производится по формуле:

$$\rho(C, \Pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (2.5)$$

❖ *Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми l_1 и l_2 .* Если прямая l_1 задана точкой $A(x_1, y_1, z_1)$ и направляющим вектором $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$, а прямая l_2 – точкой $B(x_2, y_2, z_2)$ и направ-

ляющим вектором $\vec{q}(q_1, q_2, q_3)$, то

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{\text{mod}(\overrightarrow{AB} \vec{p} \vec{q})}{\text{mod}[\vec{p} \times \vec{q}]}, \quad (2.6)$$

где

$$(\overrightarrow{AB} \vec{p} \vec{q}) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}$$

– смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\vec{p}$ и $\vec{q}$.

§ 3. УГЛЫ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ И ПЛОСКОСТЯМИ

1. Угол между скрещивающимися прямыми

Напомним, что *углом между скрещивающимися* прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся прямым.

При решении задач на нахождение угла между скрещивающимися прямыми можно воспользоваться всеми тремя методами, т. е.:

❖ Воспользоваться определением угла между скрещивающимися прямыми (*поэтапно-вычислительный* метод).

❖ Произвести дополнительные построения, для нахождения искомого соответственных параллельных прямых (*геометрический* метод).

❖ Применить *векторно-координатный* метод (см. формулу (2.1) стр. 13).

Пример 1. В правильном тетраэдре $SABC$ отрезок DO соединяет середину D ребра SA с центроидом O грани ABC , а точка E – середина ребра SB . Найти угол между прямыми DO и CE .

Решение. Решим задачу *поэтапно-вычислительным* методом. Пусть точка D – середина ребра SA , точка E – середина ребра SB и точка O – центроид грани ABC (см. рис. 1). Построим скрещивающиеся прямые DO и CE . Построим далее какой-нибудь угол, равный углу между прямыми DO и CE . Для этого найдем точку K – пересечение прямых CO и AB – и соединим ее с точкой E . В плоскости CEK через точку O проведем прямую $OF \parallel CE$. Тогда $\angle DOF$ равен

углу между прямыми DO и CE . Положим для краткости, что $\angle DOF = x$. Для определения x вычислим стороны $\triangle FOD$ и применим затем теорему косинусов.

Для подсчетов введем вспомогательный параметр, положив $AB = a$. Тогда, так как точка D – середина ребра SA , и треугольник SAO – прямоугольный, то $OD = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2}$, а из подобия $\triangle KFO$ и

$$\triangle KEC: \quad \frac{OF}{CE} = \frac{OK}{CK} = \frac{1}{3}, \quad \text{т. е.}$$

$$OF = \frac{1}{3}CE = \frac{a\sqrt{3}}{6}. \quad \text{Далее в } \triangle DKF$$

$DF^2 = DK^2 + KF^2 - 2DK \cdot KF \cdot \cos \angle DKF$. Так как точки D, E и K – середины сторон правильного $\triangle SAB$, то $DK = \frac{1}{2}SB = \frac{a}{2}$ и $\angle DKF = 60^\circ$. Кроме того, $KF = \frac{1}{3}KE = \frac{a}{6}$. Таким образом, получаем, что

$$DF^2 = \frac{7}{36}a^2. \quad \text{Так как } DF^2 < OD^2 + OF^2, \text{ то в } \triangle DOF \angle DOF \text{ острый (следовательно, именно этот угол, а не смежный с ним является искомым), и } DF^2 = OD^2 + OF^2 - 2OF \cdot OD \cdot \cos x, \text{ откуда}$$

$$\cos x = \frac{5\sqrt{3}}{18}.$$

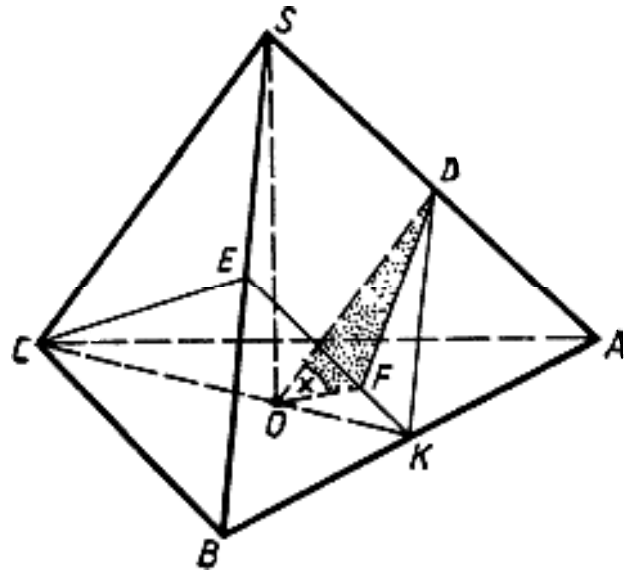


Рис. 1

2. Угол между прямой и плоскостью

Напомним, что если прямая пересекает плоскость и не перпендикулярна ей, то *углом между прямой и плоскостью* называется угол между прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость.

❖ При решении *поэтапно-вычислительным* методом следует:

- из точки прямой опустить перпендикуляр на плоскость;
- отыскать две стороны получаемого прямоугольного треугольника, в который входит искомым угол.

❖ *Геометрический* метод применяется редко.

❖ Решение *векторно-координатным* методом производится со-

гласно формуле (2.2) стр. 14.

Пример 2. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник с отношением сторон $AB : AD = 1:3$. Каждое боковое ребро образует угол 60° с плоскостью основания. Найти угол, который образует прямая DP с плоскостью SCD , если точка P – середина ребра SB .

Решение. Рассмотрим поэтапно-вычислительный способ решения задачи. Пусть O – основание высоты пирамиды $SABCD$ (рис. 2). Соединим точку O с вершинами C и A основания. Тогда $\angle SAO = \angle SCO = 60^\circ$, и прямоугольные треугольники SAO и SCO , имеющие общий катет SO и по равному острому углу, равны между собой. А это значит, что $OA = OC$, т. е. точка O – середина диагонали AC и, значит, точка пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$. Из равенства треугольников SAO и SCO следует также, что $SA = SC$, т. е. треугольник SAC – равнобедренный. Так как $\angle SAO = \angle SCO = 60^\circ$, то и $\angle ASC = 60^\circ$, а поэтому треугольник SAC равносторонний. Аналогично треугольник SBD также равносторонний.

Перейдем к построению искомого угла. Так как угол между прямой и плоскостью равен углу, образованному прямой с ее ортогональной проекцией на эту плоскость, то опустим перпендикуляр из какой-нибудь точки прямой DP на плоскость SCD . Для этого проведем сначала апофему SM грани SCD (точка M – середина ребра CD) и точку M соединим с точкой O . Тогда, так как $SM \perp CD$ и OM – проекция SM на плоскость $ABCD$, то по теореме о трех перпендикулярах $OM \perp CD$. Итак, $CD \perp SM$ и $CD \perp OM$, а это значит, что прямая CD будет перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости SOM .

Поэтому если из точки K опустить перпендикуляр KL на апофему SM , то KL будет перпендикуляром и к плоскости SCD ($KL \perp SM$, $KL \perp CD$) и, следовательно, $\angle KDL$ будет искомым углом. Положим

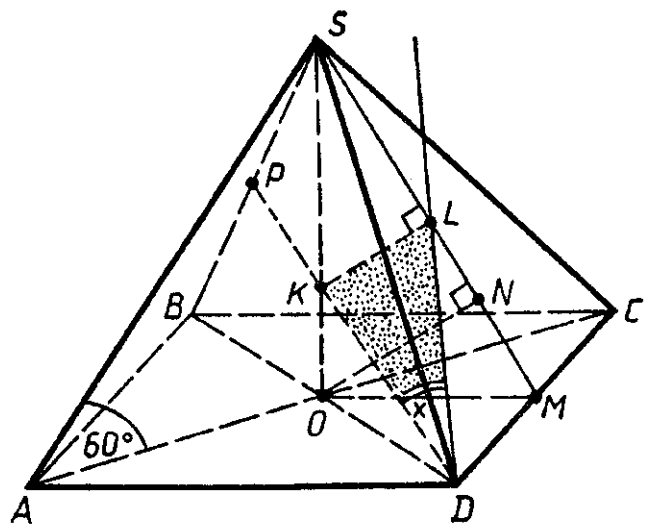


рис. 2

$\angle KDL = x$. Для построения $KL \perp SM$ построим сначала $ON \perp SM$. Это можно сделать, если подсчитать, в каком отношении точка N делит гипотенузу SM в треугольнике SOM .

Положив $AB = a$, последовательно получаем: $BC = 3a$, $OM = \frac{3a}{2}$,
 $AC = a\sqrt{10}$, $SC = a\sqrt{10}$, $OC = \frac{a\sqrt{10}}{2}$, $SO = \frac{a\sqrt{30}}{2}$, $SM = \frac{a\sqrt{39}}{26}$,
 $MN = \frac{3a\sqrt{39}}{2}$, т. е. $MN : SM = 3 : 13$. Построив точку N такую, что $MN : SM = 3 : 13$, проведем затем $KL \parallel ON$.

Теперь из подобия треугольников SKL и SMO получим:
 $\frac{KL}{MO} = \frac{SK}{SM}$, где $OM = \frac{3a}{2}$, $SM = \frac{a\sqrt{39}}{26}$, и так как точка K – точка пересечения медиан SO и DP треугольника SBD , то $SK = \frac{2}{3}SO = \frac{a\sqrt{30}}{3}$. Таким образом, $KL = \frac{MO \cdot SK}{SM} = \frac{a\sqrt{30}}{\sqrt{39}}$.

Наконец, из прямоугольного треугольника DKL имеем:
 $\sin x = \frac{KL}{DK}$. Но $DK = SK = \frac{a\sqrt{30}}{3}$. Итак, $\sin x = \frac{\sqrt{39}}{13}$, т. е.
 $x = \arcsin \frac{\sqrt{39}}{13}$.

3. Двугранный и многогранный углы

Напомним, что углом между *пересекающимися плоскостями* называется угол между прямыми, перпендикулярными линии пересечения данных плоскостей.

Фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей ограничивающей их прямой называется *двугранным углом*. Данные плоскости называются *гранями двугранного угла*. Прямая – *ребро двугранного угла*.

Линейным (плоским) углом двугранного угла называется угол между плоскостями граней двугранного угла.

❖ Применение *поэтапно-вычислительного* (или *геометрического*) метода связано с необходимостью построения линейного угла φ искомого двугранного угла и построения треугольника, содержа-

щего этот угол или угол смежный с φ . Подсчитывая стороны данного треугольника, находят φ .

❖ В ходе применения *векторно-координатного* метода используется формула (2.3) стр. 14.

Пример 3. Двугранный угол при боковом ребре правильной четырехугольной пирамиды равен α . Найти двугранный угол при ребре основания этой пирамиды.

Решение. Рассмотрим поэтапно-вычислительный способ решения задачи. Пусть точка O – точка пересечения диагоналей основания пирамиды $SABCD$, а SO – высота пирамиды (рис. 3). Заметим, что величина угла при боковом ребре пирамиды принадлежит интервалу $(90^\circ; 180^\circ)$.

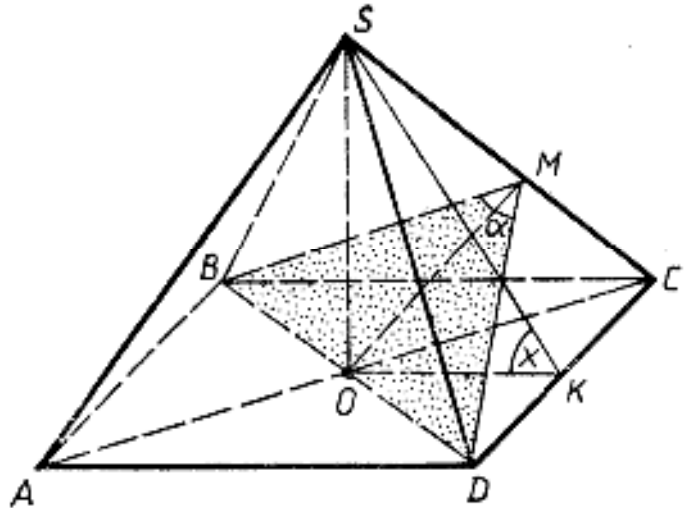


Рис. 3

Возьмем на ребре SC точку M и будем считать, что отрезок OM – перпендикуляр, опущенный на ребро SC . Построим далее отрезки DM и BM . Так как $BD \perp AC$ и $BD \perp SO$, то $BD \perp SC$. Таким образом, $SC \perp BD$ и $SC \perp OM$, т. е. $SC \perp DM$ и $SC \perp BM$. Тогда угол BMD является линейным углом двугранного угла при ребре SC , и поэтому $\angle BMD = \alpha$. Кроме того, можно показать, что отрезок OM – медиана треугольника BMD является также его биссектрисой и высотой. Поэтому $\angle BMO = \angle DMO = \frac{\alpha}{2}$ и OM

$\perp BD$. Построим еще SK – апофему грани SDC и OK – медиану треугольника OCD . Так как треугольники SDC и OCD равнобедренные, то $SK \perp CD$ и $OK \perp CD$, т. е. $\angle SKO$ является линейным углом двугранного угла при ребре CD . Теперь перейдем к вычислениям. Введем вспомогательный параметр, приняв $CD = a$, и положим для краткости $\angle SKO = x$.

Так как в прямоугольном треугольнике DOM $DO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, то

$DM = \frac{a\sqrt{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Подсчитаем теперь SK . Так как $\triangle SCK$ подобен

$\triangle DCM$, то $\frac{SC}{DC} = \frac{SK}{DM}$ или $\frac{SK}{SC} = \frac{DM}{CD}$, где $SC = \sqrt{SK^2 + \frac{a^2}{4}}$, а

$\frac{DM}{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Таким образом, $SK = \sqrt{SK^2 + \frac{a^2}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$, откуда

$SK = \frac{a}{2\sqrt{-\cos\alpha}}$. Тогда из прямоугольного треугольника SOK нахо-

дим, что $\cos x = \sqrt{-\cos\alpha}$, т. е. $x = \arccos\sqrt{-\cos\alpha}$.

§ 4. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ, ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ И РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

1. Расстояния от точки до прямой

Для определения расстояния от точки до прямой обычно рассматривают треугольник, одной из вершин которого является заданная точка, а две другие лежат на заданной прямой. Искомое расстояние находят как высоту этого треугольника, для чего в большинстве случаев подсчитывают сначала стороны треугольника.

❖ Вычисление сторон треугольника и затем его высоты выполняют *поэтапно-вычислительным* способом (иногда с применением *геометрического* способа).

❖ В некоторых случаях применяют *векторно-координатный способ*, действуя по формуле (2.4) стр. 14.

Пример 4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = AA_1 = a$, $AD = 3a$. На ребре $A_1 B_1$ взята точка P – середина этого ребра, а на ребре AD – точка Q – такая, что $AQ : AD = 2:3$. Из вершины D_1 опустим перпендикуляр $D_1 H$ на прямую PQ и найти длину $D_1 H$.

Решение (рис. 4, а). *Поэтапно-вычислительный* метод (с элементами *геометрического* метода). Для построения перпендикуляра $D_1 H$ подсчитаем стороны треугольника $D_1 P Q$. Из прямоугольного треугольника $D_1 D Q$ $D_1 Q = a\sqrt{2}$. Из прямоугольного треугольника

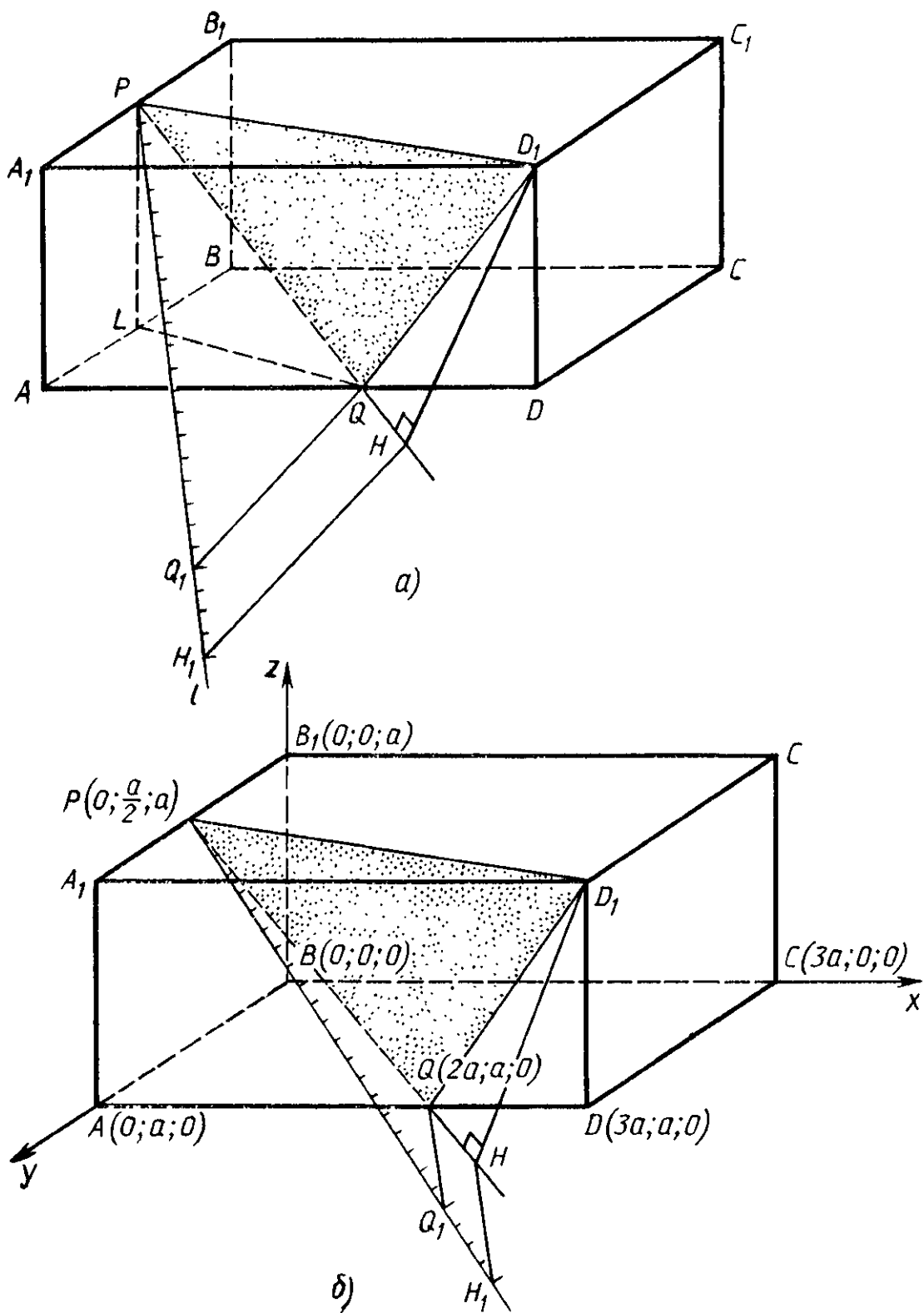


Рис. 4

$$D_1A_1P \text{ получаем } D_1P = \sqrt{A_1D_1^2 + A_1P^2} = \sqrt{9a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{37}}{2}.$$

В плоскости ABB_1 через точку P проведем прямую $PL \parallel AA_1$ и точку L соединим с точкой Q . Из прямоугольного треугольника PQL :

$$PQ = \sqrt{PL^2 + QL^2} = \sqrt{PL^2 + AQ^2 + AL^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{21}}{2}.$$

Так как в треугольнике D_1PQ $PQ^2 + D_1Q^2 = \frac{21a^2}{4} + 2a^2 = \frac{29a^2}{4}$, а $D_1P^2 = \frac{37a^2}{4}$, то $D_1P^2 < PQ^2 + D_1Q^2$, т. е. $\angle D_1QP$ тупой, и поэтому, если точка H – основание искомого перпендикуляра, то $PH = PQ + QH$.

Выражая D_1H двумя способами, получим: $D_1Q^2 - QH^2 = D_1P^2 - PH^2$, или $D_1Q^2 - QH^2 = D_1P^2 - (PQ + QH)^2$, т. е. $2a^2 - QH^2 = \frac{37a^2}{4} - \left(\frac{a\sqrt{21}}{2} + QH\right)^2$, откуда $QH = \frac{2a}{\sqrt{21}}$.

$$\text{Тогда } PQ : QH = \frac{a\sqrt{21}}{2} : \frac{2a}{\sqrt{21}} = 21 : 4.$$

С помощью вспомогательного луча l строим точку H . Далее из прямоугольного треугольника D_1QH находим:

$$D_1H = \sqrt{D_1Q^2 - QH^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{4a^2}{21}} = \frac{a\sqrt{798}}{21}.$$

Векторно-координатный способ. Введем в пространстве прямоугольную декартову систему координат $Bxyz$. Сделаем это, как показано на рисунке 4, б, воспользовавшись тем, что прямые BC , BA , BB_1 попарно перпендикулярны.

Воспользуемся формулой для нахождения расстояния от точки до прямой. Для этого необходимы координаты точек P , Q , D_1 , векторов $\overrightarrow{PD_1}$ и $\overrightarrow{PQ}$: $P(0; \frac{a}{2}; a)$, $Q(2a; a; 0)$, $D_1(3a; a; a)$, $\overrightarrow{PD_1}(2a; \frac{a}{2}; -a)$, $\overrightarrow{PQ}(3a; \frac{a}{2}; 0)$. Тогда согласно формуле (2.4) получаем:

$$\rho(D_1, PQ) = \frac{\text{mod} [\overrightarrow{PD_1} \times \overrightarrow{PQ}]}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3a & a/2 & 0 \\ 2a & a/2 & -a \end{vmatrix}}{\sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{4} + a^2}} =$$

$$= \frac{\text{mod} \left\{ \left(-\frac{a^2}{2} \right) \cdot \vec{i} + 3a^2 \cdot \vec{j} + \frac{a^2}{2} \cdot \vec{k} \right\}}{\frac{\sqrt{21}}{2}a} = \frac{a^2 \sqrt{\frac{1}{4} + 9 + \frac{1}{4}}}{\frac{\sqrt{21}}{2}a} = \frac{a\sqrt{798}}{21}.$$

2. Расстояние от точки до плоскости

Для определения расстояния от точки до плоскости обычно опускают из этой точки перпендикуляр на заданную плоскость и находят длину этого перпендикуляра. Последнее, можно осуществить как *поэтапно-вычислительным* методом (в частности, *геометрическим*), так и *векторно-координатным* (см. (2.5) стр. 14).

Пример 5. На ребрах AB , AD и CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взяты соответственно точки P , Q и R – середины этих ребер. Построить сечение куба плоскостью PQR и найти расстояние от вершины C_1 до этой плоскости, если ребро куба равно a .

Решение. Рассмотрим *поэтапно-вычислительный способ* решения задачи. Построим заданное сечение куба (рис. 5). (Очевидно, что прямая PQ является следом этого сечения на плоскости $ABCD$.) Далее построим плоскость, проходящую через точку C_1 перпендикулярно следу PQ . Сделаем это, исходя из следующих соображений. Как нетрудно убедиться, $CP = CQ$, а поэтому и $C_1P = C_1Q$. Значит, точка C_1 принадлежит множеству точек, одинаково удаленных от точек P и Q , т. е. плоскости, проходящей через точку K – середину отрезка PQ , перпендикулярно прямой PQ . Этой плоскостью является плоскость AA_1C_1C – плоскость диагонального

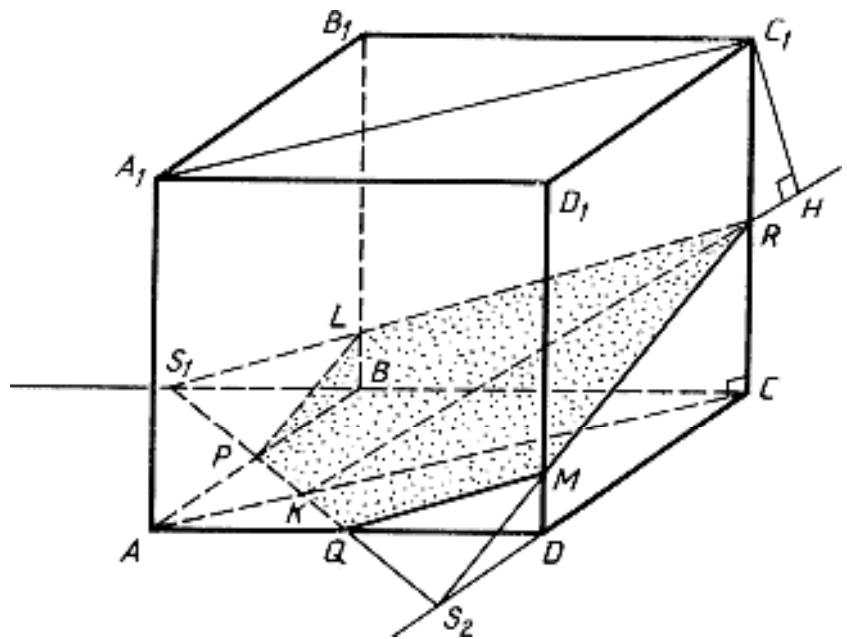


Рис. 5

соображений. Как нетрудно убедиться, $CP = CQ$, а поэтому и $C_1P = C_1Q$. Значит, точка C_1 принадлежит множеству точек, одинаково удаленных от точек P и Q , т. е. плоскости, проходящей через точку K – середину отрезка PQ , перпендикулярно прямой PQ . Этой плоскостью является плоскость AA_1C_1C – плоскость диагонального

сечения куба.

Построим затем прямую RK , по которой пересекаются плоскость PQR с плоскостью AA_1C_1C .

Очевидно, что $PQ \perp AC$, и так как CK – это проекция наклонной RK на плоскость ABC , то $PQ \perp RK$. Тогда прямая PQ перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости сечения AA_1C_1C . Если, в частности, из точки C_1 опустить перпендикуляр C_1H на прямую RK , то будет $PQ \perp C_1H$. Тогда C_1H – это перпендикуляр к плоскости заданного сечения, т. е. C_1H – искомое расстояние.

(Для построения $C_1H \perp RK$ можно, подсчитав стороны треугольника C_1KR и воспользовавшись равенством $C_1K^2 - KH^2 = C_1R^2 - RH^2$, найти, что $KR : KH = 12 : 13$.)

Подсчитаем C_1H из подобия прямоугольных треугольников C_1HR и KCR (у них $\angle C_1RH = \angle KRC$).

$$\text{Получаем } \frac{C_1H}{CK} = \frac{C_1R}{RK}, \quad \text{где } CK = \frac{3}{4}AC = \frac{3a\sqrt{2}}{4}, \quad C_1R = \frac{a}{2},$$

$$RK = \sqrt{CK^2 + CR^2} = \sqrt{\left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{22}}{4}, \quad \text{и, таким образом,}$$

$$C_1H = \frac{C_1R \cdot CK}{RK} = \frac{3a\sqrt{11}}{22}.$$

Замечание. Возможен и векторно-координатный способ решения данной задачи. При этом для нахождения расстояния от точки до плоскости надо воспользоваться формулой (2.5) стр. 14.

3. Расстояние между скрещивающимися прямыми

❖ Для решения задачи на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми *поэтапно-вычислительным* (или *геометрическим*) методом необходимо:

♦ просвети через первую прямую плоскость, параллельную второй прямой, после чего отыскать расстояние от любой точки второй прямой до построенной плоскости (см. § 4, п. 1).

❖ В некоторых случаях применяют *векторно-координатный* метод, действуя по формуле (2.6) стр. 15.

Пример 6. В основании правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник со стороной a . Боковое ребро призмы равно $2a$. На ребре BB_1 взята точка P – середина этого ребра. Найти расстояние между прямыми AB_1 и CP .

Решение. Поэтапно-вычислительный способ. Выполним необходимые дополнительные построения (рис. 6).

1. В плоскости BCC_1 через точку B_1 проведем прямую $B_1R \parallel CP$ и точку R соединим с точкой A . Так как прямая $CP \parallel B_1R$, то прямая CP параллельна плоскости AB_1R . Это значит, что расстояние от любой точки прямой CP до плоскости AB_1R равно искомому расстоянию. Найдем расстояние от точки P до плоскости AB_1R .

2. Опустим из точки P перпендикуляр PM на прямую AB_1 . Воспользуемся для этого тем, что если $PM \perp AB_1$, то треугольники B_1PM и B_1AB подобны, т. е. $\frac{B_1M}{B_1B} = \frac{B_1P}{B_1A}$ где $BB_1 = 2a$, $B_1P = a$, $AB_1 = a\sqrt{5}$,

т. е. $B_1M = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$, и, следовательно, $B_1M : AB_1 = 2 : 5$.

3. Так как по построению $CP \parallel B_1R$, то очевидно, что $CR = B_1P = a$, т. е. и $C_1R = a$. Тогда

$$AR = \sqrt{AC^2 + CR^2} = a\sqrt{2} \text{ и}$$

$$B_1R = \sqrt{B_1C_1^2 + C_1R^2} = a\sqrt{2}.$$

Поэтому, соединив точку R с точкой O – серединой стороны AB_1 треугольника AB_1R , мы получим $RO \perp AB_1$.

Также очевидно, что $RO \perp AB$, т. е. прямая RO перпендикулярна любой прямой плоскости ABB_1 , т. е. $RO \perp PM$, а следовательно, и $PM \perp RO$. Но $PM \perp AB_1$. Тогда прямая PM перпендикулярна плоскости AB_1R , т. е. длина отрезка PM равна искомому расстоянию.

4. Подсчитаем PM . Из прямоугольного треугольника B_1PM находим:

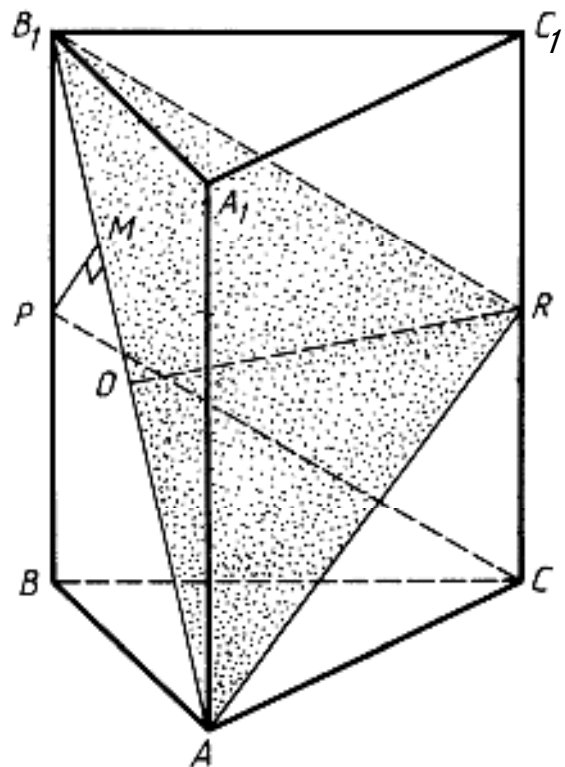


Рис. 6

$$PM = \sqrt{B_1P^2 - B_1M^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2a}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Замечание. Возможен и векторно-координатный способ решения данной задачи. При этом для нахождения расстояния от точки до плоскости надо воспользоваться формулой (2.6) стр. 15.

§ 5. ПЛОЩАДИ СЕЧЕНИЙ

Принципы построения сечений подробно описаны в книгах [5, стр. 139] и [6, стр. 160]. Данными способами мы будем пользоваться для построения сечений.

При вычислении площади сечения можно (сначала определив вид фигуры, полученной в сечении) воспользоваться соответствующей планиметрической формулой. В некоторых случаях проще бывает найти площадь проекции фигуры, а затем воспользоваться формулой $S_{\text{сечения}} = \frac{S_{\text{проекции}}}{\cos \varphi}$, где $S_{\text{проекции}}$ – площадь проекции сече-

ния, а φ – угол между плоскостью сечения и плоскостью проекции.

Пример 7. В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник. Боковое ребро SB перпендикулярно плоскости основания и $SB = AC = BC$. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку M – середину ребра AB , перпендикулярно прямой SC и найти площадь полученного сечения, если $SB = a$.

Решение. Построение искомого сечения выполним *геометрическим способом* (рис. 7). Сначала построим сечение пирамиды вспомогательной плоскостью, которая, как и искомая секущая плоскость, перпендикулярна прямой SC , но проходит через точку B , а не через точку M .

1. Проведем медиану BD треугольника SBC . Так как в этом треугольнике $SB = BC$, то $BD \perp SC$.

2. В треугольнике SAC проведем прямую $DE \parallel AC$. Так как $AC \perp BC$ и $AC \perp SB$, то прямая AC перпендикулярна плоскости SBC . Тогда и прямая DE перпендикулярна плоскости SBC , т. е. $DE \perp SC$. Точку B соединим с точкой E . Так как по построению $SC \perp BD$ и $SC \perp DE$, то прямая SC перпендикулярна плоскости BDE , т. е. и плоскость BDE перпендикулярна прямой SC .

Теперь построим сечение пирамиды плоскостью, параллельной плоскости BDE и проходящей через точку M , т. е. искомое сечение.

3. В плоскости SAB через точку M проведем прямую $MN \parallel BE$.

4. В плоскости SAC через точку N проведем прямую $NL \parallel DE$.

5. В плоскости SBC через точку L проведем прямую $LK \parallel BD$.

6. Соединим точку K с точкой M .

Из построения очевидно, что сечение $MKLN$ является искомым.

Определим вид четырехугольника $MKLN$. Так как $NL \parallel DE$, то $NL \parallel AC$. Это значит, что прямая NL параллельна плоскости ABC и тогда плоскость $MKLN$ пересекает плоскость ABC по прямой MK , параллельной прямой AC . Очевидно также, что, так как прямые BE и BD пересекаются, то и параллельные им прямые, соответственно MN и LK , также пересекаются. Это значит, что четырехугольник $MKLN$ – трапеция.

Далее, из того, что $NL \parallel AC$ и прямая AC перпендикулярна плоскости SBC , следует, что и прямая NL перпендикулярна плоскости SBC , т. е. $NL \perp LK$. Таким образом, трапеция $MNLK$ прямоугольная.

Теперь можно перейти к вычислению площади трапеции $MNLK$. Сделаем это *поэтапно-вычислительным* способом:

$$S_{MKLN} = \frac{MK + NL}{2} \cdot LK.$$

Так как в треугольнике ABC MK является средней линией, то $MK = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}$. Так как в треугольнике SBC точка K – середина стороны BC и $LK \parallel BD$, то LK – средняя линия треугольника CBD и $LK = \frac{1}{2}BD$. Но BD – высота, опущенная на гипотенузу, т. е.

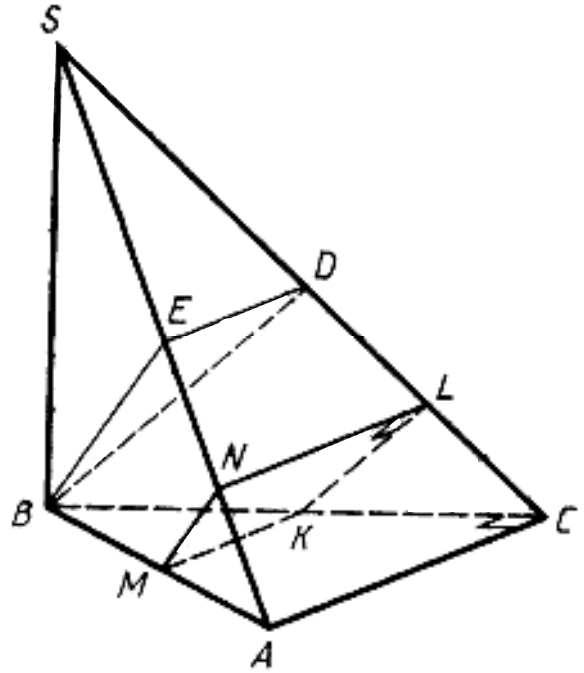


Рис. 7

$BD = \frac{1}{2}SC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Тогда $LK = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Далее, в трапеции $ACDE$ NL – средняя линия, т. е. $NL = \frac{1}{2}(AC + DE) = \frac{3a}{4}$.

$$\text{Итак, } S_{MKLN} = \frac{MK + NL}{2} \cdot LK = \frac{\frac{a}{2} + \frac{3a}{4}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{5a^2\sqrt{2}}{32}.$$

§ 6. ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Пример 8. Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна сумме площадей его оснований, а отношение радиусов оснований равно 1:3. Найти угол наклона образующей к плоскости основания конуса.

Решение (рис. 8). Рассмотрим равнобокую трапецию AA_1BB_1 , которая является осевым сечением заданного конуса.

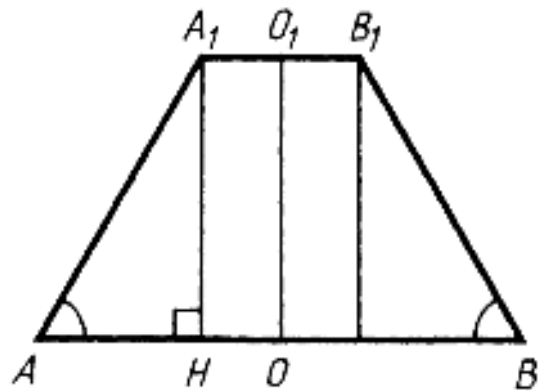


Рис. 8

Положим для краткости $OA = r$, $O_1A_1 = r_1$, $AA_1 = l$. По условию $\pi(r + r_1)l = \pi r^2 + \pi r_1^2$, или $(r + r_1)l = r^2 + r_1^2$. Но $r = 3r_1$, т. е. $(3r_1 + r_1)l = 9r_1^2 + r_1^2$, откуда $l = \frac{5}{2}r_1$.

Опустим из точки A_1 перпендикуляр A_1H на AB .

Тогда AH является проекцией наклонной AA_1 на плоскость нижнего основания конуса. Следовательно, угол A_1AH – это угол наклона образующей к плоскости основания.

Из прямоугольного треугольника A_1AH $\cos \angle A_1AH = \frac{AH}{AA_1}$. Но $AH = AO - HO = AO - A_1O_1 = r - r_1 = 3r_1 - r_1 = 2r_1$.

Таким образом, $\cos \angle A_1AH = \frac{AH}{AA_1} = \frac{2r_1}{l} = \frac{2r_1}{\frac{5r_1}{2}} = \frac{4}{5}$, то есть иско-

мый угол равен $\arccos \frac{4}{5}$.

Пример 9. На окружности основания цилиндра взяты точки A, B, C такие, что $\angle ACB = 90^\circ$. Через прямые AC и BC проведены секущие плоскости, параллельные оси цилиндра. Площади полученных сечений S_1 и S_2 . Найти площадь боковой поверхности цилиндра.

Решение (рис. 9). $S_{\text{бок.}} = 2\pi RH$ (см. § 1). Так как $\angle ACB = 90^\circ$, то AB – диаметр основания, т. е. $AB = 2R$.

Положив для краткости $AA_1 = H$, $AC = u$, $BC = v$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 4R^2, \\ uH = S_1, \\ vH = S_2. \end{cases}$$

Возведя второе и третье уравнения этой системы почленно в квадрат, получим уравнения $u^2 H^2 = S_1^2$ и $v^2 H^2 = S_2^2$. Складывая почленно эти уравнения, находим, что $u^2 + v^2 = \frac{S_1^2 + S_2^2}{H^2}$.

Но $u^2 + v^2 = 4R^2$. Тогда $\frac{S_1^2 + S_2^2}{H^2} = 4R^2$, или $4R^2 H^2 = S_1^2 + S_2^2$.

Здесь $4R^2 H^2$ – это «почти» $(S_{\text{бок.}})^2$, не хватает лишь множителя π^2 . Умножаем обе части последнего равенства на π^2 , получим $4\pi^2 R^2 H^2 = \pi^2 (S_1^2 + S_2^2)$, т. е. $S_{\text{бок.}} = \pi \sqrt{S_1^2 + S_2^2}$.

Пример 10. Плоскость, пересекающая сферу, удалена от ее центра на расстояние d , а длина окружности, получающейся при этом в сечении сферы, равна L . Найти площадь сферы.

Решение (рис. 10). Пусть точка A лежит

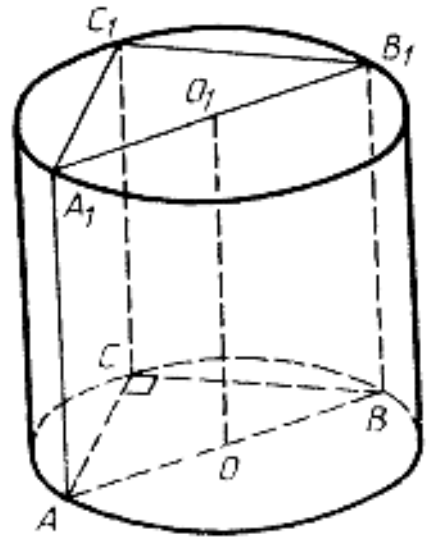


Рис. 9

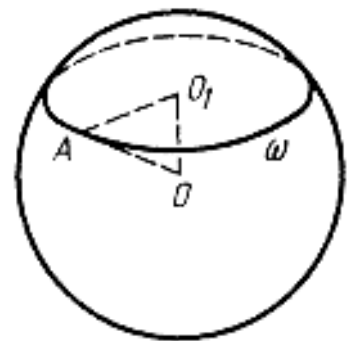


Рис. 10

на окружности ω , являющейся заданным сечением сферы. Тогда точка A лежит и на самой сфере и OA – ее радиус, т. е. площадь сферы равна (см. § 1): $S = 4\pi OA^2$.

Таким образом, задача сводится к нахождению OA . Пусть точка O_1 – центр окружности ω . Тогда OO_1 является перпендикуляром к секущей плоскости, т. е. $OO_1 = d$, и, следовательно, соединив точку O_1 с точкой A , мы получим $\triangle OO_1A$, являющийся прямоугольным.

Радиусом окружности ω является отрезок O_1A , т. е. $2\pi \cdot O_1A = L$, откуда $O_1A = \frac{L}{2\pi}$. Из прямоугольного треугольника OO_1A

$$OA = \sqrt{OO_1^2 + O_1A^2} = \sqrt{d^2 + \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2} = \frac{\sqrt{4\pi^2 d^2 + L^2}}{2\pi}.$$

Итак,

$$S = 4\pi \left[\frac{\sqrt{4\pi^2 d^2 + L^2}}{2\pi} \right]^2 = \frac{4\pi^2 d^2 + L^2}{\pi}.$$

§ 7. ОБЪЕМЫ

Пример 11. Боковые грани треугольной пирамиды попарно перпендикулярны, а их площади равны Q_1 , Q_2 и Q_3 . Найти объем пирамиды.

Решение (рис. 11). Заметим предварительно, что, считая по традиции $\triangle ABC$ основанием пирамиды, мы должны были бы сначала подсчитать $S_{\triangle ABC}$ и высоту пирамиды, проведенную из вершины S на плоскость ABC . В рассматриваемом примере можно, однако, произвести необходимые подсчеты проще, если догадаться «поставить» пирамиду на какую-нибудь из ее боковых граней. Так, заметив, что ребро SA перпендикулярно грани SBC , можно за основа-

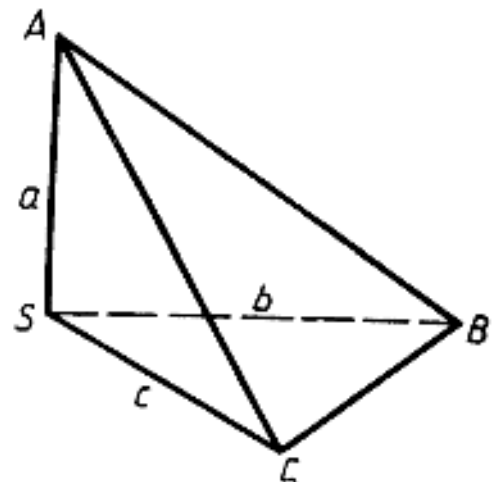


Рис. 11

ние пирамиды принять ΔSBC . Тогда $S = \frac{1}{3}SA \cdot S_{\Delta SBC} = \frac{1}{6}SA \cdot SB \cdot SC$.

Полагая для краткости $SA = a$, $SB = b$ и $SC = c$, имеем:

$$V = \frac{1}{6}abc.$$

Из прямоугольных треугольников SAB , SBC и SAC получаем: $ab = 2Q_1$, $bc = 2Q_2$, $ac = 2Q_3$. Перемножив почленно эти три равенства, находим: $(abc)^2 = 8Q_1Q_2Q_3$, откуда $abc = 2\sqrt{2Q_1Q_2Q_3}$.

Таким образом,

$$V = \frac{1}{3}\sqrt{2Q_1Q_2Q_3}.$$

Пример 12. Боковая поверхность конуса, радиус основания которого R , равна сумме площадей основания и осевого сечения. Найти объем конуса.

Решение. Объем конуса

$$V = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot SO, \text{ где } S_{\text{осн.}} = \pi R^2 \text{ (рис. 12).}$$

Положим, что $SO = x$. Таким образом, для подсчета V необходимо найти x .

Так как $S_{\text{бок.}} = \pi R \cdot SA$, $S_{\text{осн.}} = \pi R^2$, и $S_{\Delta SAB} = Rx$, то составляем уравнение $\pi R \cdot SA = \pi R^2 + Rx$, или $\pi \cdot SA = \pi R + x$.

Из прямоугольного ΔSAO имеем: $SA = \sqrt{x^2 + R^2}$.

Итак, получаем: $\pi\sqrt{x^2 + R^2} = \pi R + x$.

Возведя в квадрат обе части этого уравнения, получим после необходимых

упрощений $(\pi^2 - 1)x^2 - 2\pi R x = 0$, откуда $x_1 = \frac{2\pi R}{\pi^2 - 1}$, $x_2 = 0$. Оче-

видно, что второе решение не удовлетворяет условию задачи.

Следовательно,

$$V = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot x_1 = \frac{2\pi^2 R^3}{3(\pi^2 - 1)}.$$

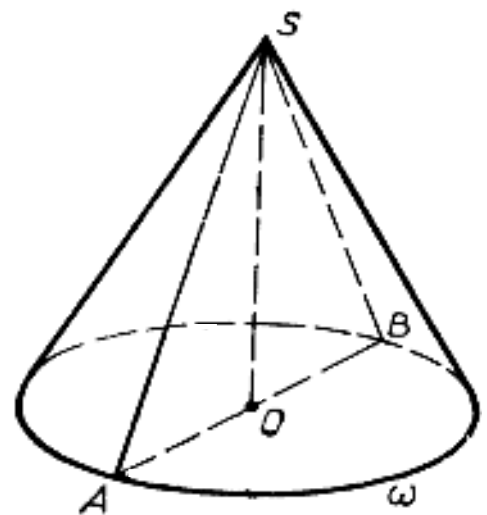


Рис. 12

§ 8. КОМБИНАЦИИ МНОГОГРАННИКОВ И КРУГЛЫХ ТЕЛ

1. Комбинации с описанными сферами

Напомним прежде всего, что

- ❖ сфера называется *описанной около многогранника*, если все вершины многогранника лежат на этой сфере;
- ❖ сфера называется *описанной около конуса*, если вершина конуса и окружность его основания лежат на этой сфере;
- ❖ сфера называется *описанной около цилиндра*, если окружности оснований цилиндра лежат на этой сфере.

Напомним далее некоторые наиболее важные факты.

❖ *Сфера и призма*. Около призмы можно описать сферу тогда и только тогда, когда призма прямая и около ее основания можно описать окружность. Центром этой сферы является середина отрезка, соединяющего центры описанных около оснований окружностей. Центр сферы, описанной около призмы, — точка, равноудаленная от всех вершин призмы.

❖ *Сфера и пирамида*. Около пирамиды можно описать сферу тогда и только тогда, когда около основания пирамиды можно описать окружность. Центр сферы, описанной около пирамиды, лежит на перпендикуляре к плоскости основания пирамиды, восстановленном из центра окружности, описанной около основания.

Если боковые ребра пирамиды равнонаклонены к плоскости основания (а это утверждение равносильно тому, что боковые ребра пирамиды равны), то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания. В этом случае около пирамиды можно описать сферу и центр сферы лежит на высоте пирамиды (или на ее продолжении).

Сфера, описанная около усеченной пирамиды, существует тогда и только тогда, когда боковые ребра усеченной пирамиды равны. Центр сферы, описанной около усеченной пирамиды, лежит на высоте этой пирамиды (или на ее продолжении).

❖ *Сфера и круглые тела* (цилиндр, конус, усеченный конус). Если прямоугольник (равнобедренный треугольник, равнобедренную трапецию) и описанную около него окружность вращать вокруг оси симметрии, то получится фигура (рис. 13, а, б, в), представляющая собой цилиндр (конус, усеченный конус) и описанную около

него сферу.

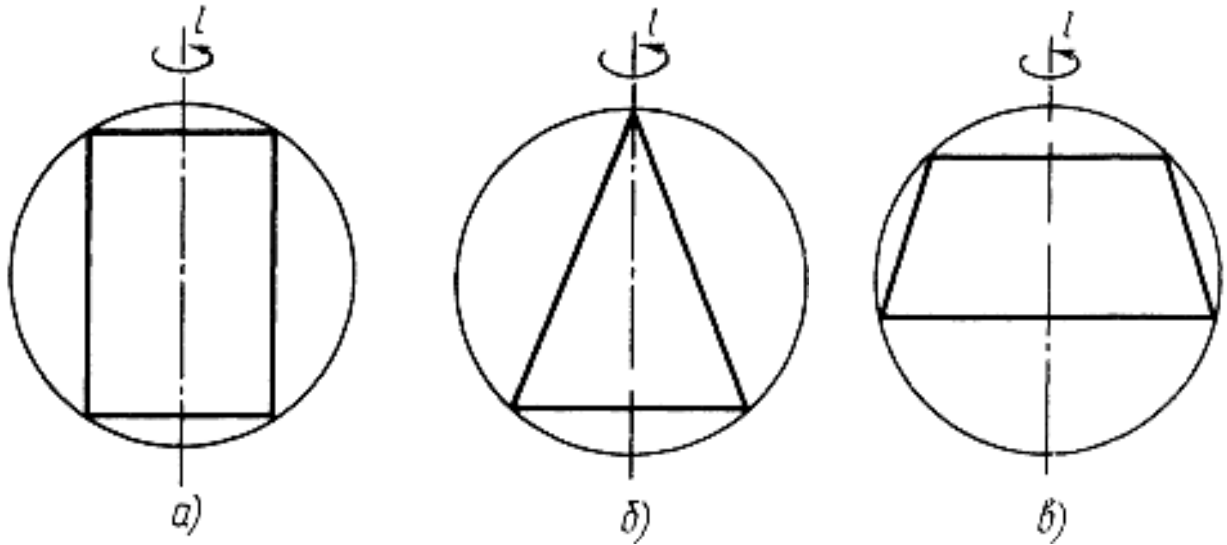


Рис. 13

Пример 13. Каждое боковое ребро n -угольной пирамиды равно b , а высота пирамиды равна h . Найдём радиус описанной сферы.

Решение. Пусть пирамида $SABH$ – n -я часть заданной пирамиды (рис. 14). Центр O описанной сферы лежит на высоте SH , причём $AO = OS = R$ (радиус сферы). Тогда из $\triangle ASH$ $AH^2 = AS^2 - SH^2 = b^2 - h^2$. С другой стороны, из $\triangle AOH$ $AH^2 = AO^2 - OH^2$, или $b^2 - h^2 = R^2 - (h - R)^2$, откуда $R = \frac{b^2}{2h}$. Пользуясь этой

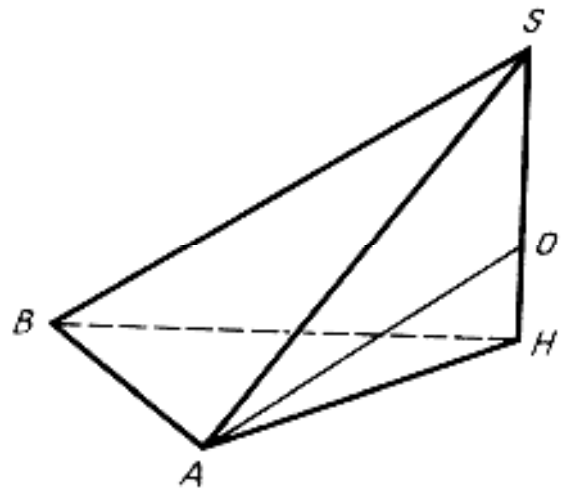


Рис. 14

формулой, можно найти радиус сферы, описанной около пирамиды с равными боковыми ребрами, в частности около правильной пирамиды. Полученная формула верна и для конуса (в этом случае b – образующая конуса).

2. Комбинации со вписанными сферами

❖ *Сфера и прямая призма.* Сфера называется вписанной в мно-

гогранник, если все грани многогранника касаются сферы. В прямую призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда в основание призмы можно вписать окружность, диаметр которой равен высоте призмы. Центром сферы является середина отрезка, соединяющего центры вписанных в основания окружностей (центр вписанной сферы – это точка, равноудаленная от всех граней призмы).

❖ *Сфера и пирамида.* Если в пирамиду вписана сфера, то ее центр (т. е. точка, равноудаленная от всех граней пирамиды) есть точка пересечения биссекторных плоскостей двугранных углов пирамиды.

В частности, если боковые грани пирамиды равнонаклонены к плоскости основания, то вершина пирамиды проектируется в центр вписанной в основание окружности. В этом случае точка пересечения высоты пирамиды с биссектрисой угла между апофемой (любой) и ее проекцией на плоскость основания равноудалена от всех граней пирамиды, а значит, служит центром вписанной сферы.

❖ *Сфера и круглые тела* (цилиндр, конус, усеченный конус). Если прямоугольник (равнобедренный треугольник, равнобокую трапецию) и вписанную в него окружность (если она существует) вращать вокруг оси симметрии, то получится фигура, представляющая собой цилиндр и вписанную в него сферу (конус и вписанную сферу, усеченный конус и вписанную сферу).

В прямоугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он является квадратом. Цилиндр, осевым сечением кото-

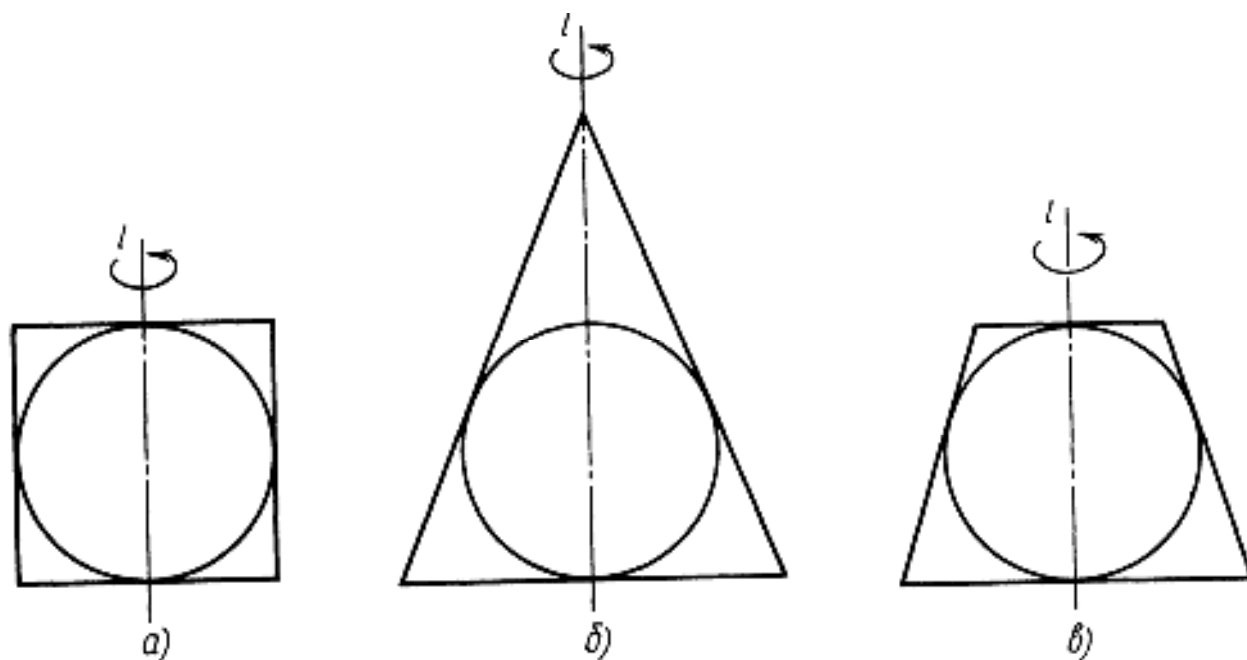


Рис. 15

рого является квадрат, называют *равносторонним* (рис. 15, а).

Так как в равнобедренный треугольник всегда можно вписать окружность, то в конус всегда можно вписать сферу (рис. 15, б).

В равнобочную трапецию окружность можно вписать тогда и только тогда, когда сумма оснований равна сумме боковых сторон. На рисунке 15, в изображено осевое сечение усеченного конуса. Если в него вписана окружность, то $2R_1 + 2R_2 = l + l$, т. е. $R_1 + R_2 = l$.

Пример 14. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 10 и 24 см. Найти объем этой призмы, если известно, что в нее можно вписать сферу.

Решение. Высота призмы равна диаметру вписанной сферы, который в свою очередь, равен радиусу окружности, вписанной в основание призмы. В основании – прямоугольный треугольник со сторонами 10, 24, 26 см. Радиус вписанной окружности найдем по формуле $r = \frac{a + b - c}{2}$. Получим $r = \frac{10 + 24 - 26}{2} = 4$ см. Значит (см. § 1),

$$V_{\text{призмы}} = S_{\text{осн.}} \cdot H = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 24 \cdot 8 = 960 \text{ см}^3.$$

Пример 15. В усеченный конус вписана сфера. Найдем отношение боковой поверхности конуса к поверхности сферы, если известно, что образующая конуса составляет с большим основанием конуса угол 45° .

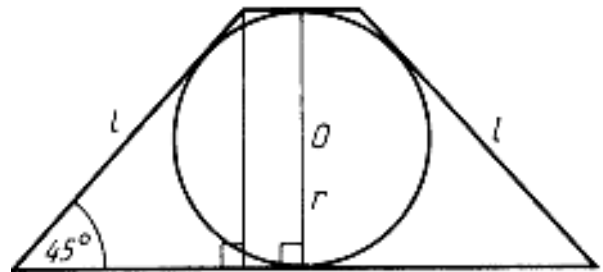


Рис. 16

Решение. Пусть l – образующая усеченного конуса, r – радиус вписанной в него сферы,

R_1 и R_2 – радиусы нижнего и верхнего оснований конуса. Рассмотрим осевое сечение заданного конуса (рис. 16). Имеем

$$S_{\text{бок. пов. усеч. кон.}} = \pi l(R_1 + R_2) = \pi l^2, \quad 2r = l \cdot \sin 45^\circ = \frac{l\sqrt{2}}{2}, \text{ т. е. } r = \frac{l\sqrt{2}}{4},$$

$$S_{\text{сферы}} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot \frac{l^2}{8} = \frac{\pi l^2}{2}.$$

$$\text{Значит, } \frac{S_{\text{бок. пов. усеч. кон.}}}{S_{\text{сферы}}} = 2.$$

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

1. Прямая AB лежит в плоскости P , по одну сторону от которой через точку B проведены прямые BC и BD , перпендикулярные прямой AB и образующие с плоскостью P углы, равные 50° и 15° . Найти угол CBD .

2. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a . Угол между смежными боковыми ребрами равен 2α . Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через одну из сторон основания перпендикулярно противоположащему боковому ребру. Найти площадь сечения.

3. В прямоугольной трапеции, описанной около окружности радиуса R , острый угол равен α . Найти поверхность тела, полученного при вращении этой трапеции около меньшей из ее параллельных сторон.

4. Площадь основания прямоугольного параллелепипеда равна S . Через вершину A_1 верхнего основания $A_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, которая пересекает боковые ребра BB_1 , CC_1 и DD_1 соответственно в точках B_2 , C_2 и D_2 . Найти объем той части параллелепипеда, которая расположена под секущей плоскостью, если известно, что $CC_2=c$, а высота параллелепипеда равна H .

5. Шар касается трех граней куба, содержащих одну вершину, и трех ребер этого куба, содержащих противоположащую вершину. Найти ребро куба, если радиус шара равен R .

Вариант 2

1. В кубе $ABCD A_1B_1C_1D_1$ проведена секущая плоскость PQC_1B_1 , где точки P и Q – середины соответственно ребер AA_1 и DD_1 . Найти угол между прямой CQ и секущей плоскостью.

2. Радиус основания конуса R . Осевое сечение конуса – прямоугольный треугольник. Найти площадь этого сечения.

3. Высота правильной треугольной призмы равна H . Прямая, проходящая через центроид верхнего основания и середину стороны нижнего основания, образует с плоскостью основания угол α . Найти полную поверхность призмы.

4. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом α . Все боковые грани составляют угол β с плоскостью основания. Площадь сечения, проведенного через большую диагональ основания и вершину пирамиды, равна S . Найти объем пирамиды.

5. В цилиндр, высота которого равна H , вписана треугольная пирамида. Две грани пирамиды перпендикулярны плоскости ее основания, а два

боковых ребра образуют с плоскостью основания углы, каждый из которых равен α . Угол между этими ребрами равен β . Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

Вариант 3

1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена секущая плоскость BDP , где точка P – середина ребра CC_1 . Найти угол между прямой $A_1 Q$ и секущей плоскостью, если точка Q – середина ребра DD_1 .

2. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде высота равна 2 см, а стороны основания 3 см и 5 см. Найти диагональ пирамиды.

3. Основанием призмы является правильный треугольник, сторона которого равна a . Каждое боковое ребро призмы равно b , угол между одним из боковых ребер и прилежащими к нему сторонами основания равен 45° . Найти боковую поверхность призмы.

4. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна c , а острый угол равен α . Каждое боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости основания под углом β . Найти объем пирамиды.

5. Доказать, что отношение объема конуса к объему вписанного в него шара равно отношению площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара.

Вариант 4

1. В основании прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит параллелограмм с острым углом при вершине A , равным 60° . Найти угол между диагональю $B_1 D$ параллелепипеда и боковой гранью $CC_1 D_1 D$, если $AB : AD : AA_1 = 2 : 1 : 3$.

2. Секущая плоскость, параллельная основанию правильной треугольной пирамиды, делит пополам ее боковую поверхность. Найти, в каком отношении делится этим сечением высота пирамиды.

3. Равнобокая трапеция с углом при основании в 60° вращается вокруг биссектрисы этого угла. Найти отношение поверхности тела вращения к площади трапеции, если высота трапеции в $\sqrt{3}$ раз меньше полусуммы ее оснований.

4. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Боковые грани SAB и SBC перпендикулярны плоскости основания. Через середины ребер AD и CD проведена секущая плоскость, параллельная ребру SB . Найти отношение объемов полученных тел.

5. Шар касается боковой поверхности конуса по окружности основания. Площадь поверхности шара делится при этом на части, из кото-

рых одна в n раз больше другой. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

Вариант 5

1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка P – середина ребра AB . Найти угол между прямой $C_1 P$ и диагональным сечением $AA_1 C_1 C$ куба.
2. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда образуют с плоскостью основания углы α и β . Найти угол между этими диагоналями.
3. Найти площадь поверхности правильной треугольной пирамиды, объем которой равен V , а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен α .
4. Основанием пирамиды является прямоугольник. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие образуют с ней углы α и β . Найти площадь основания пирамиды, если ее объем равен V .
5. Найти угол при вершине в осевом сечении конуса, если известно, что на его поверхности можно провести три попарно перпендикулярные образующие.

Вариант 6

1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведены секущая плоскость BDC_1 и диагональ CD_1 боковой грани $CC_1 D_1 D$. Найти угол между диагональю CD_1 и секущей плоскостью.
2. Правильная треугольная пирамида пересечена плоскостью, проходящей через вершину основания и середины двух боковых ребер. Найти отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади основания, если известно, что секущая плоскость перпендикулярна одной из боковых граней.
3. Секущая плоскость, проведенная через сторону AD основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ перпендикулярно грани SBC , делит эту грань на две равновеликие фигуры. Найти полную поверхность пирамиды, если $AD = a$.
4. В правильной треугольной призме середины боковых ребер соединены с серединами противоположных сторон основания. Получившиеся отрезки взаимно перпендикулярны. Найти объем призмы, если ее высота равна h .
5. В прямой круговой конус с радиусом основания R вписан шар радиуса r . Вычислить объем конуса.

Вариант 7

1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведены плоскость $C_1 DB$ и прямая DP , где точка P – середина ребра BB_1 . Найти угол между прямой DP и секущей плоскостью.

2. В правильной треугольной усеченной пирамиде сторона нижнего основания 8 см, верхнего – 5 см, а высота – 3 см. Построить сечение, проходящее через сторону нижнего основания и противоположащую вершину верхнего основания. Найти площадь сечения и двугранный угол между сечением и нижним основанием.

3. Из круглого листа металла выштампован цилиндрический стакан диаметром 25 см и высотой 50 см. Предполагая, что площадь листа при штамповке не изменилась, найти диаметр листа.

4. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1 B_1 C_1$, у которой $AC:AA_1=3:4$. Найти, в каком отношении делит объем призмы плоскость, проведенная через вершину A и пересекающая боковые ребра BB_1 и CC_1 соответственно в точках M и N , если $BM=MB_1$, а AN – биссектриса угла CAC_1 .

5. Шар касается трех ребер куба, содержащих одну вершину, и проходит через вершину куба, противоположащую первой. Найти радиус шара, если ребро куба равно a .

Вариант 8

1. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ диагонали $B_1 D$ и BD_1 взаимно перпендикулярны. Найти угол между диагоналями $B_1 D$ и $A_1 C$.

2. В правильной треугольной усеченной пирамиде сторона большего основания a , а сторона меньшего – b . Боковое ребро образует с плоскостью основания угол 45° . Найти площадь сечения, проходящего через боковое ребро и ось пирамиды.

3. В правильной четырехугольной пирамиде плоскость, проходящая через сторону основания и среднюю линию противоположащей боковой грани, образует с плоскостью основания угол 60° . Найти объем пирамиды, если сторона основания равна a .

4. Из круга, радиус которого равен R , вырезан сектор с центральным углом α . Сектор свернут в коническую воронку. Найти объем этой воронки.

5. В полушар радиуса R вписан усеченный конус так, что его большее основание совпадает с основанием полушара, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α . Найти площадь поверхности конуса.

Вариант 9

1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ через точки P и Q – середины соответственно

ребер AB и AD и вершину C_1 проведена секущая плоскость. Найти расстояние от вершины C до секущей плоскости, если ребро куба равно a .

2. Построить сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S – вершина) плоскостью, проходящей через точку A , точку P – середину высоты SO и точку K ребра SD , если $SK : KD = 2 : 1$ и $SB = SD = BD$. Найти двугранный угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.

3. Докажите, что полная поверхность равностороннего конуса (осевое сечение – правильный треугольник) равновелика поверхности шара, построенного на высоте конуса как на диаметре.

4. В основании наклонной призмы лежит правильный треугольник со стороной a . Одна из боковых граней призмы перпендикулярна плоскости основания и представляет собой ромб, диагональ которого равна b . Найти объем призмы.

5. В цилиндр вписана правильная треугольная призма, а в призму вписан цилиндр. Найти отношение объемов цилиндров.

Вариант 10

1. Угол между скрещивающимися прямыми a и b равен 60° . Расстояние от общего перпендикуляра прямых a и b до точки A , лежащей на прямой a , равно расстоянию от него до точки B прямой b и равно расстоянию между прямыми a и b . Найти угол между общим перпендикуляром и прямой AB .

2. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребро которого равно a , точка F – середина ребра $C_1 D_1$. Найти расстояние от точек A_1 , A и C_1 до плоскости, проходящей через точки B , F и D .

3. Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна a и острый угол между его сторонами равен α . Каждый из двугранных углов при ребрах основания равен φ . Найти боковую поверхность пирамиды.

4. Боковые ребра наклонной треугольной призмы равны 15 см, а расстояния между содержащими их параллельными прямыми 26, 25 и 17 см. Найти объем призмы.

5. В прямом круговом конусе даны площадь основания S_1 и площадь боковой поверхности S_2 . Найти радиус шара, вписанного в конус.

Вариант 11

1. В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник с прямым углом C . Каждое боковое ребро образует с плоскостью основания угол 45° . Найти угол между медианой AM грани SAB и плоскостью грани SBC .

2. Правильная четырехугольная призма пересечена плоскостью так,

что в сечении получился ромб, острый угол которого равен 2α . Найти двугранный угол между секущей плоскостью и плоскостью основания призмы.

3. Равнобокая трапеция с углом при основании в 60° вращается вокруг биссектрисы этого угла. Найти отношение поверхности тела вращения к площади трапеции, если высота трапеции в $\sqrt{3}$ раз меньше полусуммы ее оснований.

4. Площадь осевого сечения шарового сектора в три раза меньше площади большого круга шара. Найти отношение объема этого сектора к объему шара.

5. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка E – середина ребра DC , точка F – середина ребра BB_1 . Какую часть объема куба занимает объем пирамиды $AFED_1$?

Вариант 12

1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на ребрах AA_1 и DD_1 взяты соответственно точки P и Q – середины этих ребер. Найти угол между лучами DP и QC_1 .

2. Радиус основания конуса R , а образующая наклонена к плоскости основания под углом α . Через вершину конуса проведена плоскость под углом φ к его высоте. Найти площадь полученного сечения.

3. Расстояние между любыми двумя боковыми ребрами наклонной треугольной призмы равно a . Боковое ребро равно l и наклонено к плоскости основания под углом 60° . Определить площадь полной поверхности призмы.

4. Основанием пирамиды является равнобокая трапеция, острый угол которой равен α , а площадь равна S . Каждая боковая грань пирамиды образует с плоскостью основания угол β . Найти объем пирамиды.

5. Из точки, взятой на поверхности шара, проведены три равные хорды, угол между каждой парой из которых равен α . Найти длины хорд, если радиус шара равен R .

Вариант 13

1. В правильном тетраэдре $SABC$ найти угол между медианой AM грани SAB и лучом SC .

2. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a . Угол между боковым ребром и высотой пирамиды равен 30° . Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину основания перпендикулярно противоположащему ребру. Найти площадь сечения.

3. Боковая поверхность конуса – четверть круга, свернутая в коническую поверхность. Найти отношение полной поверхности конуса к площа-

ди его осевого сечения.

4. Секущая плоскость проходит через точки P , Q и R , лежащие на продолжениях соответственно ребер AB , AA_1 и AD куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, причем $AP:BP=AQ:A_1Q=AR:DR=5:3$. Найти отношение объемов полученных при сечении тел.

5. На листе бумаги, являющемся квадратом $PQML$, прорезано отверстие – равносторонний треугольник ABC – так, что $AB \parallel PL$ и $AB:PL=1:2$. Затем квадрат свернут в круглую цилиндрическую поверхность, ось которой перпендикулярна отрезку AB . Найти отношение площади квадрата к площади треугольника ABC , вершины которого лежат на цилиндрической поверхности.

Вариант 14

1. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB = 6$ см, высота равна 4 см. Найти расстояние от вершины A до плоскости грани SCD .

2. Основанием наклонного параллелепипеда является ромб $ABCD$, у которого $\angle BAD = 60^\circ$. Каждое боковое ребро параллелепипеда образует с плоскостью основания угол, равный 60° , а плоскость $AA_1 C_1 C$ перпендикулярна плоскости основания. Найти отношение площади сечения $BB_1 D_1 D$ к площади сечения $AA_1 C_1 C$.

3. Основание пирамиды – равнобедренный треугольник с боковыми сторонами, равными a , и углом при вершине α . Боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания углы, каждый из которых равен 45° . Найти объем пирамиды.

4. В усеченный конус вписан шар, объем которого составляет $6/13$ объема конуса. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его нижнего основания.

5. В кубе, ребро которого равно a , проведена диагональ. Ребра куба, сходящиеся на одном конце диагонали, разделены пополам. Полученные точки деления и другой конец диагонали приняты за вершины пирамиды. Найти объем этой пирамиды.

Вариант 15

1. Квадратная пластинка $ABCD$ перегнута по диагонали AC так, что плоскость ABC стала перпендикулярна плоскости ACD . Точки K и L выбраны на диагонали AC таким образом, что $CK=KL=LA$. Найти угол между лучами KB и CD .

2. Каждое из ребер правильной четырехугольной пирамиды равно a . Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середины

двух смежных сторон основания и середину высоты. Найти площадь этого сечения.

3. Основанием параллелепипеда, боковое ребро которого равно b , является квадрат со стороной a . Одна из вершин верхнего основания одинаково удалена от всех вершин нижнего основания. Найти полную поверхность параллелепипеда.

4. Круговой сектор с углом 30° и радиусом R вращается вокруг одного из боковых радиусов. Найти объем полученного тела.

5. Диаметр шара 25 см. На его поверхности даны точка A и окружность, все точки которой удалены (по прямой) от точки A на 15 см. Найти радиус этой окружности.

Вариант 16

1. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ все плоские углы при вершине S прямые. Найти угол между лучами CP и SD , если точки P и D – середины соответственно ребер SA и BC .

2. Высота конуса H . На каком расстоянии от вершины надо провести плоскость, параллельную основанию, чтобы площадь сечения была равна половине площади основания.

3. Центроид одной грани куба соединен с вершинами противоположащей грани. Найти отношение полной поверхности образовавшейся пирамиды к полной поверхности куба.

4. Основанием прямой треугольной призмы является равнобедренный треугольник, равные стороны которого имеют длину a и образуют между собой угол α . Диагональ грани, противоположащей этому углу, образует с другой боковой гранью угол, равный φ . Найти объем призмы.

5. При вращении прямоугольного треугольника вокруг катетов и вокруг гипотенузы образуются тела вращения, объемы которых равны соответственно V_1 , V_2 и V_3 . Доказать, что $\frac{1}{V_3^2} = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2}$.

Вариант 17

1. Высота правильной четырехугольной призмы равна h . Найти расстояние от стороны основания, длина которой равна a , до не пересекающей ее диагонали призмы.

2. В треугольной пирамиде $SABC$ грани SAC и SAB – равнобедренные прямоугольные треугольники с общей гипотенузой SA . Двугранный угол при ребре SA равен α . Найти двугранные углы при ребрах SB и SC .

3. Боковая поверхность правильной четырехугольной пирамиды

равна S , а двугранный угол при ребре основания равен α . Найти расстояние между центроидом основания и боковой гранью пирамиды.

4. Поверхности двух шаров относятся как $m:n$. Как относятся их объемы?

5. В равносторонний конус (осевое сечение – правильный треугольник) вписан полушар так, что его большой круг находится в плоскости основания конуса. Найти отношение, в котором окружность касания делит боковую поверхность полушара и боковую поверхность конуса.

Вариант 18

1. Найти расстояние между диагональю куба и непересекающим ее ребром, если ребро куба равно a .

2. Два равных ромба $ABCD$ и ABC_1D_1 имеют общую сторону AB , а плоскости их образуют между собой двугранный угол, равный 45° . Найти угол между сторонами BC и BC_1 ромбов, если острый угол каждого из них равен 60° .

3. Основанием прямой призмы является равнобедренный треугольник, в котором угол между равными сторонами равен 2α . Из вершины верхнего основания проведены две диагонали равных боковых граней. Угол между этими диагоналями равен 2β . Найти отношение боковой поверхности призмы к площади ее основания.

4. Плоскость, проходящая через одно из ребер правильного тетраэдра, делит его объем в отношении 3:5. Найти тангенсы углов, на которые эта плоскость делит двугранный угол тетраэдра.

5. Плоскость, параллельная основанию конуса и проходящая через центр вписанного в этот конус шара, делит конус на две части, объемы которых равны. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

Вариант 19

1. Найти расстояние между непересекающимися диагоналями смежных граней куба, если его ребро равно a .

2. Прямой параллелепипед, имеющий в основании ромб со стороной a и острым углом 2α , пересечен плоскостью, проходящей через вершину угла 2α и дающий в сечении ромб с острым углом α . Определить площадь сечения.

3. В правильной четырехугольной пирамиде найти сторону основания, если боковое ребро равно 5 см, а полная поверхность 16 см^2 .

4. Основанием наклонной призмы является равносторонний треугольник со стороной a ; одна из боковых граней перпендикулярна основанию и

является ромбом, у которого меньшая диагональ равна c . Найти объем призмы.

5. Образующая конуса равна 13 см, высота 12 см. Конус пересечен прямой, параллельной основанию; расстояние от нее до основания равно 6 см, а до высоты 2 см. Найти отрезок этой прямой, заключенный внутри конуса.

Вариант 20

1. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда образуют с плоскостью основания углы α и β . Найти угол между этими диагоналями.

2. Найти двугранные углы октаэдра.

3. Секущая плоскость, проведенная через сторону AC основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ перпендикулярно ребру SB , отсекает пирамиду $DABC$, объем которой в 1,5 раза меньше объема пирамиды $SABC$. Найти боковую поверхность пирамиды $SABC$, если $AC = a$.

4. Длина образующей конуса равна l , а длина окружности основания c . Найти объем конуса.

5. В куб с ребром a вписан шар так, что его поверхность касается всех ребер куба. Найти объем части шара, заключенной внутри куба.

Вариант 21

1. Внутри трехгранного угла, все плоские углы которого равны 2α , через вершину угла проведен луч, образующий одинаковые углы с ребрами трехгранного угла. Найти угол наклона этого луча с каждым ребром.

2. Угол между боковой гранью правильной четырехугольной пирамиды и плоскостью ее основания равен α . Апофема боковой грани равна a . Через одну из сторон основания проведено сечение пирамиды, образующее с плоскостью основания угол β . Найти площадь этого сечения.

3. Прямоугольный треугольник с катетами a, b вращается вокруг гипотенузы. Найти объем полученного тела вращения.

4. Каждое ребро параллелепипеда равно 1 см. У одной из вершин параллелепипеда все три плоских угла острые, равные по 2α . Найти объем параллелепипеда.

5. Даны радиус основания R и высота H конуса. Найти ребро вписанного в него куба.

Вариант 22

1. Высота правильной n -угольной пирамиды вдвое меньше стороны

основания. Найти угол между боковой гранью и плоскостью основания.

2. В правильной четырехугольной призме через середины двух смежных сторон основания проведена плоскость, пересекающая три боковых ребра и наклоненная к плоскости основания под углом α . Сторона основания равна a . Найти площадь полученного сечения.

3. В правильной треугольной пирамиде через ребро основания, длина которого равна a , проведено сечение, перпендикулярное противоположному боковому ребру. Найти площадь поверхности пирамиды, если секущая плоскость делит боковое ребро в отношении $m:n$.

4. Как относятся между собой боковая и полная поверхности равностороннего конуса (в сечении правильный треугольник)?

5. Шар касается четырех ребер куба, принадлежащих одной из его граней, и противоположной грани. Найти отношение объема части шара, лежащей вне куба, к объему шара.

Вариант 23

1. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро SA перпендикулярно плоскости ABC , $AC = BC = a$, $AS = AB = a\sqrt{2}$. Через середину ребра AC проведена плоскость, перпендикулярная ребру SB . Найти расстояние от вершины A до этой плоскости.

2. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$. В боковой грани SAB , которая перпендикулярна плоскости основания и является правильным треугольником, проведена медиана AK . Точка K соединена с вершиной C . Найти углы, которые образуют стороны AK и CK треугольника ACK с плоскостью основания.

3. Радиусы оснований усеченного конуса r и R , образующая наклонена к плоскости основания под углом 45° . Найти объем усеченного конуса.

4. В прямом параллелепипеде стороны основания $2\sqrt{2}$ см и 5 см образуют угол 45° . Меньшая диагональ параллелепипеда равна 7 см. Найти объем параллелепипеда.

5. Доказать, что если вершины нижнего основания прямой треугольной призмы лежат на поверхности шара, а стороны верхнего основания касаются этого шара, то призма правильная.

Вариант 24

1. Через точку A плоскости P проведена наклонная AB , образующая с плоскостью P угол α . Через AB проведена плоскость Q , образующая угол β с плоскостью P . Найти угол между прямой AB и линией пересечения плоскостей P и Q .

2. Построить сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через вершину A , середину ребра CD и центроид грани $BCC_1 B_1$. Найти двугранный угол между плоскостью сечения и плоскостью $ABCD$, если $AB : AD : AA_1 = 2:3:4$.

3. Плоскость, перпендикулярная диаметру шара, делит его на части 3 и 9 см. На какие части делится объем шара?

4. Перпендикуляр, опущенный из центроида основания правильной треугольной пирамиды на боковую грань, равен l . Найти объем пирамиды, если угол между боковым ребром и плоскостью основания равен β .

5. Высота цилиндра 2 см. Радиус основания 7 см. В цилиндр наклонно вписан квадрат так, что все его вершины лежат на окружностях основания. Найти сторону квадрата.

Вариант 25

1. В наклонной треугольной призме расстояние между боковыми ребрами равны 37 см, 13 см и 40 см. Найти расстояние между большей боковой гранью и противоположащим боковым ребром.

2. В правильной n -угольной пирамиде угол между боковым ребром и смежным с ним ребром основания равен α . Найти двугранный угол, образованный боковой гранью с плоскостью основания.

3. Равнобокая трапеция, острый угол которой равен 45° , а боковая сторона равна меньшему основанию, вращается вокруг боковой стороны. Найти объем полученного тела вращения, если боковая сторона трапеции равна b .

4. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка M – середина ребра AA_1 , а точка N – середина ребра $A_1 B_1$. Плоскость, проведенная через точки M , N и C , делит куб на два многогранника. Найти отношение их объемов.

5. Диагонали ромба 15 см и 20 см. Сфера радиуса 10 см касается всех его сторон. Найти расстояние от центра сферы до плоскости ромба.

Вариант 26

1. Основанием прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб со стороной, равной a , и острым углом φ . Найти расстояние от вершины B_1 верхнего основания до диагонали $A_1 D$ боковой грани, если боковое ребро призмы равно h .

2. Радиусы оснований усеченного конуса 3 см и 7 см, образующая 5 см. Найти площадь осевого сечения.

3. Полная поверхность правильной четырехугольной пирамиды равна S . Двугранный угол при ребре основания равен α . Найти сторону основания.

4. В треугольной пирамиде площади двух взаимно перпендикулярных граней равны P и Q , а длина их общего ребра равна b . Найти объем пирамиды.

5. Шар проходит через вершины A , B и D куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и середину ребра $A_1 B_1$. Найти радиус шара, если ребро куба равно a .

Вариант 27

1. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 15 см, а высота 20 см. Найти кратчайшее расстояние от стороны основания до не пересекающей ее диагонали призмы.

2. Площади оснований усеченного конуса m и M . Найти площадь сечения усеченного конуса, которое проходит через середину высоты параллельно основаниям.

3. В правильной четырехугольной пирамиде боковая поверхность равна $14,76 \text{ см}^2$, а полная поверхность 18 см^2 . Найти сторону основания и высоту пирамиды.

4. Треугольник ABC , у которого $AC = b$, $AB = c$ и $\angle BAC = a$, вращается вокруг оси, которая проходит через вершину A вне треугольника и образует равные углы со сторонами AC и AB . Найти объем полученного тела вращения.

5. Найти радиус шара, описанного около правильного тетраэдра с ребром a .

Вариант 28

1. Один из плоских углов трехгранного угла равен 90° , а два других по 60° . Найти угол между плоскостью прямого угла и плоскостью, отсекающей от ребер трехгранного угла равные отрезки.

2. Секущая плоскость, параллельная основанию правильной треугольной пирамиды, делит пополам ее боковую поверхность. Найти, в каком отношении делится этим сечением высота пирамиды.

3. Высота правильной четырехугольной призмы равна H , а угол между диагоналями, проведенными из одной вершины основания в двух смежных боковых гранях, равен α . Найти боковую поверхность призмы.

4. Площадь осевого сечения усеченного конуса равна разности площадей оснований, а радиусы оснований r и R . Найти объем усеченного конуса.

5. В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида с плоским углом α при вершине. Найти высоту пирамиды.

Вариант 29

1. Боковое ребро прямого параллелепипеда 5 см, стороны основания 6 см и 8 см, а одна из диагоналей основания 12 см. Найти диагонали параллелепипеда.

2. Угол между скрещивающимися прямыми a и b равен 60° . Расстояние от общего перпендикуляра прямых a и b до точки A , лежащей на прямой a , равно расстоянию от него до точки B прямой b и равно расстоянию между прямыми a и b . Найти угол между общим перпендикуляром и прямой AB .

3. Равнобедренный треугольник с основанием, равным a , и углом при основании, равным α , вращается вокруг оси, проходящей через один из концов основания перпендикулярно к основанию. Найти поверхность полученного тела вращения.

4. В треугольной пирамиде все боковые ребра и два ребра основания равны a . Угол между равными сторонами основания равен 2α . Найти объем пирамиды.

5. В куб с ребром a вписан шар. Затем в один из трехгранных углов при вершине куба вписан второй шар, касающийся первого шара. Найти радиус второго шара.

Вариант 30

1. В равностороннем цилиндре (диаметр равен высоте цилиндра) точка A окружности верхнего основания соединена с точкой B окружности нижнего основания. Угол между радиусами, проведенными в эти точки равен 60° . Найти угол между прямой AB и осью цилиндра.

2. Высота конуса H . На каком расстоянии от вершины надо провести плоскость, параллельную основанию, чтобы площадь сечения была равна половине площади основания.

3. Секущая плоскость, проведенная через сторону AD основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ перпендикулярно грани SBC , делит эту грань на две равновеликие фигуры. Найти полную поверхность пирамиды, если $AD = a$.

4. Ребра параллелепипеда, равные a и b , взаимно перпендикулярны, а ребро, длина которого равна c , образует с каждым из первых двух ребер угол α . Найти объем параллелепипеда.

5. В куб вписана пирамида, одной из вершин которой является центр грани куба, а четыре другие – вершины противоположной грани куба. В пирамиду вписан шар. В каком отношении делит объем куба плоскость, проходящую через центр шара параллельно основанию пирамиды?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Адамар Ж.* Элементарная геометрия : пособие для учителей средних школ. Ч. 2 : Стереометрия. – М.: Учпедгиз, 1958. – 760 с.
2. *Болодурин В.С., Вахмянина О.А., Измайлова Т.С.* Пособие по элементарной геометрии. – Оренбург: Оренбургский госпединститут, 1991. – 197 с.
3. *Ваховский Е.Б., Рывкин А.А.* Задачи повышенной трудности по элементарной математике. – М.: Наука, 1971. – 360 с.
4. *Вересова Е.Е., Денисова Н.С., Полякова Т.Н.* Практикум по решению математических задач: Геометрия. – М.: Просвещение, 1979. – 240 с.
5. *Гусев В.А., Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г.* Практикум по решению математических задач: Геометрия. – М.: Просвещение, 1985. – 223 с.
6. *Гусев В.А., Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г.* Практикум по элементарной математике: Геометрия. – М.: Просвещение, 1992. – 352 с.
7. *Кутепов А.К., Рубанов А.Т.* Задачник по геометрии для техникумов. – М.: Высшая школа, 1970. – 176 с.
8. *Литвиненко В.Н.* Практикум по решению задач школьной математики: Геометрия. – М.: Просвещение, 1982. – 160 с.
9. *Погорелов А.В.* Геометрия : учебник для 7-11 кл. сред. шк. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1991. – 384 с.
10. *Фетисов А.И.* Геометрия в задачах. – М.: Просвещение, 1977. – 192 с.
11. *Шарыгин И.Ф.* Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами. – М.: ООО «Изд-во АСТ», 2001. – 400 с.
12. Типовые задачи вступительных экзаменов в вузы по математике / сост. А.И. Болотин, В.М. Жуков и др. – М.: Машиностроение, 1992. – 144 с.