Захаров В.С.

Неравенства и системы неравенств. Задание С3.

Введение

Книга «Неравенства и системы неравенств. Задание С3» является логическим продолжением « Вводного курса по алгебре. Подготовка к ЕГЭ» и рассчитана на выпускников, желающих научиться решать задания С3.

Пособие состоит из 13 уроков и содержит более 400 задач. **Уникальной особенностью пособия является то, что все уроки есть в видео-формате на сайте zaharov.ru.** Это дает ощутимые преимущества по сравнению с репетитором:

-вы можете заниматься в любое удобное для вас время и в любом удобном темпе;

-вы можете всегда вернуться к пройденному уроку и повторить все, что забыли;

- важным фактором является значительная экономия денежных средств.

Как работать с пособием

Все уроки устроены одинаково. Сначала идет теоретическая справка, состоящая из напоминания основных фактов, теорем и формул, а также алгоритмов и примеров решения задач. Прежде всего, вы должны хорошо освоить эту часть урока.

Когда вы поймете и заучите теоретическую справку, переходите к практической части. Постарайтесь сначала решить задачи самостоятельно и только потом смотрите мое решение. Даже, если ответы совпали, просмотрите мое решение, это нужно по двум причинам. Во-первых, мое решение может быть проще и короче вашего. Во-вторых, вы научитесь правильно и логично выполнять задания.

В конце урока дается домашнее задание. Не переходите к следующему уроку, пока не решите домашнее задание и не получите за него положительную оценку. Это относится к урокам 1-10. Задачи уроков 11-13 необходимо оценивать по критериям, приведенным в конце книги.

Как выставлять оценку за домашнее задание

Если задача решена абсолютно верно, что означает верный ответ, верный рисунок и все выкладки, то ставьте себе отметку +. Если есть незначительная ошибка, т.е.

-арифметическая ошибка, повлиявшая на менее, чем треть ответа, или

-пропущено доказательство одного из свойств в геометрической задаче при верном ответе, или

-пропущено рассмотрение случая, который мог повлиять на ответ, но не повлиял,

то поставьте себе оценку $\pm$(плюс-минус).

Если ход решения правильный, но из за ошибок по невнимательности получено менее $\frac{2}{3}$, но не менее половины правильного ответа, или

- если найдена основная идея, упрощающая геометрическую задачу, или

-не доказано главное свойство, упрощающее задачу, но с его использованием получен правильный ответ,

То поставьте оценку $\mp$ $(\text{минус} - \text{плюс})$.

Оценка за урок и за домашнее задание выставляется стандартным образом. Это означает, что

-если у Вас 90% чистых плюсов (в число которых можно включить два плюс – минуса), Вы ставите себе 5.

-если у Вас 75% чистых плюсов (в число которых можно включить два плюс-минуса), то оценка 4.

-если у Вас 50% чистых плюсов, то оценка 3.

-все остальное 2.

Общие принципы изучения математики

1. *Принцип регулярности.* Лучше заниматься понемногу, но каждый день, чем раз в неделю, но много часов подряд.

2. *Принцип смены приоритетов.* Сначала главное идея, потом главное ответ.

3. *Принцип вариативности.* Старайтесь увидеть несколько способов решения задачи и сравнить эти решения с различных точек зрения: объем вычислений, простота выкладок, время решения.

4. *Принцип быстрого повторения.* По мере накопления методов решения следует просматривать эти методы. С этим пособием сделать это будет просто, так как все методы сгруппированы в блоки.

Все вопросы и пожелания присылать на почту zaharov.urfu@mail.ru

Видео уроки можно скачать на сайте zaharov.ru

Удачи!

Занятие 1. Свойства показательной функции. Основные методы решения показательных уравнений.

Теоретическая справка

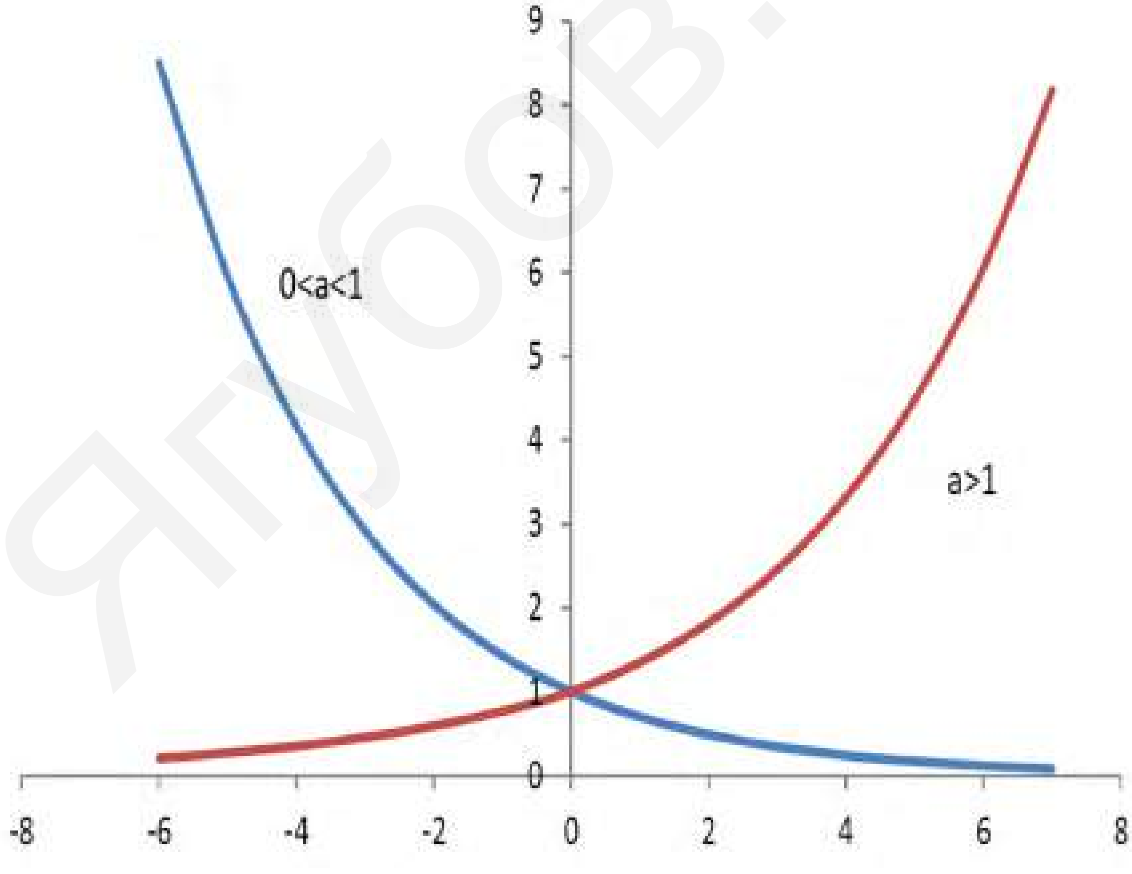
Блок 1. Основные свойства

Определение. Показательной функцией называется функция вида $y = a^x$, где a – заданное число, $a > 0, a \neq 1$.

Свойство 1. Область определения показательной функции-множество всех действительных чисел.

Свойство 2. Множество значений показательной функции - множество всех положительных чисел.

Свойство 3. Показательная функция $y = a^x$ возрастает на множестве всех действительных чисел, если $a > 1$, и убывает, если $0 < a < 1$.



Блок 2. Основные формулы

Принимается без доказательства, что для любых положительных чисел a и b и любых действительных x и y справедливы формулы

$a^{x+y} = a^x a^y$

$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

$(ab)^x = a^x b^x$

$(a^x)^y = a^{xy}$

$a^0 = 1$

$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

Любая горизонтальная прямая $y = b,\ b > 0$ пересекает график функции $y = a^x, a > 0, a \neq 1$ ровно один раз. Отсюда следует, что если $a > 0, a \neq 1$, то для любого положительного числа b, существует единственное число N, такое, что $a^N = b$. N называется логарифмом числа b по основанию a.

Блок 3. Показательные уравнения типа $\boldsymbol{a^x = b}$

1. Если $b \leq 0$, то решений нет.

2. Если $b > 0$, то b можно представить в виде $b = a^{\log_a b}$, тогда

$a^x = a^{\log_a b}$, значит $x = \log_{\mathrm{a}} \mathrm{b}$.

3. Пример. Решите уравнение $4^x = 5$.

$4^{2x} = 4^{\log_4 5}$

$2x = \log_4 5$

$x = \log_4 \sqrt{5}$.

Ответ. $x = \log_4 \sqrt{5}$.

Блок 4. Показательные уравнения типа $\boldsymbol{A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x + C = 0}$

1. Чтобы решить данное уравнение необходимо ввести замену переменных $a^x = t, t > 0$. Тогда получим обыкновенное квадратное уравнение $At^2 + Bt + C = 0$.

2. Пример. Решите уравнение $4^x - 10 \cdot 2^{x-1} = 24$.

$4^x - 5 \cdot 2^x - 24 = 0$

Вводим замену переменных $2^x = t, t > 0$.

$t^2 - 5t - 24 = 0$

$t_1 = -3 - \text{посторонний корень}$

$t_2 = 8 \quad \Leftrightarrow 2^x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3.$

Ответ. $x = 3$.

Блок 5. Показательные уравнения типа $\boldsymbol{A \cdot a^{x} + B \cdot a^{-x} + C = 0}$

1.Перепишем данное уравнение в виде $A \cdot a^x + \frac{B}{a^x} + C = 0$.Введем обозначение $a^x = t, t > 0$. Получим квадратное уравнение $At^2 + Ct + B = 0$.

Решив данное уравнение относительно t. Получим простейшие показательные уравнения из блока 3.

2. Пример. Решите уравнение $5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} = 24$.

$5^1 \cdot 5^{x^2} - \frac{5}{5^{x^2}} = 24$

Вводим замену переменных $5^{x^2} = t, t > 0$

$5t^2 - 24t - 5 = 0$

$t_1 = -0{,}2 - \text{посторонний корень}$

$t_2 = 5$

$x^2 = 1$

$x_{1,2} = \pm 1.$

Ответ. $x_{1,2} = \pm 1$.

Блок 6. Показательные уравнения вида $\boldsymbol{A\cdot a^{2x}+B\cdot (ab)^x+C\cdot b^{2x}=0}$

1. Разделим обе части на $b^{2x}>0$, тогда

$$A\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{2x}+B\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{x}+C=0.$$

Введем замену переменных $\left(\frac{a}{b}\right)^{x}=t, t>0$.

Получим квадратное уравнение относительно t: $At^2+Bt+C=0$.

Решив данное уравнение относительно t. Получим простейшие показательные уравнения из блока 3.

2. Пример. Решите уравнение $4\cdot 2^{2x}-6^x=18\cdot 3^{2x}$.

$$4\cdot 2^{2x}-2^x3^x-18\cdot 3^{2x}=0$$

$$4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-\left(\frac{2}{3}\right)^{x}-18=0$$

Введем замену переменных $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=t, t>0$.

$$4t^2-t-18=0$$

$t_1=-2-$ посторонний корень

$$t_2=\frac{9}{4}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=\frac{9}{4}$$

$x=-2$.

Ответ. $x=-2$.

Задачи

Задача 1. *Используя формулы блоков 2 и 3, решите уравнения*

1.1 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}=81$

1.2 $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1-3x}{2x-1}}=\sqrt[5]{81}$

1.3 $\left(\frac{1}{0{,}125}\right)^{x}=128$

1.4 $2^x5^x=0{,}1\cdot(10^{x-1})^5$.

Задача 2. *Используя формулы блоков 2 и 3, решить уравнения*

2.1 $7^{1+|x|}=5^{\log_{\sqrt{5}}7}$

2.2 $3^{-|5x-3|}=8^{\log_2\frac{1}{3}}$

2.3 $(0{,}6)^x \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3$.

Задача 3. *Используя формулы блока 4, решить уравнения*

3.1 $4^{\frac{2}{x}} - 5 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 4 = 0$ **3.2** $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$

3.3 $2^{2(\sqrt{x}-1)} - 2^{\sqrt{x}} - 8 = 0$ **3.4** $4 + \frac{2}{3^x-1} = \frac{5}{3^{x-1}}$

3.5 $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}-1} = 6$.

Задача 4. *Используя формулы блока 5, решить уравнения*

4.1 $5^x - 24 = \frac{25}{5^x}$ **4.2** $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99$

4.3 $5^{x-1} + 5 \cdot 0{,}2^{x-2} = 26$ **4.4** $2^{sin^2 x} + 2^{cos^2 x} = 3$.

Задача 5. *Используя формулы блока 6, решите уравнения*

5.1 $64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0$

5.2 $4^{-\frac{1}{x}} + 6^{-\frac{1}{x}} = 2 \cdot 9^{-\frac{1}{x}}$

5.3 $5 \cdot 3^{2x} + 15 \cdot 5^{2x-1} = 8 \cdot 15^x$.

Задача 6. *Используя различные приемы, решить уравнения*

6.1 $5^{2x^2-x} = 6^{2x^2-x}$

6.2 $\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}\right)^x = 12$.

Домашнее задание

Задача 1. *Используя формулы блоков 2 и 3, решить уравнения*

1.1 $2^x = \frac{1}{128}$ **1.2** $2^{3x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{3-x}$

1.3 $16^{\frac{x+10}{x-10}} = 0{,}5 \cdot 8^{\frac{x+5}{x-5}}$ **1.4** $5^{|2x+1|} = \left(\sqrt{5}\right)^{-4x+3}$

1.5 $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1} \left(\frac{9}{25}\right)^{x^2+2x-11} = \left(\frac{5}{3}\right)^9$ **1.6** $8 \cdot 7^{x^2-5x+7} - 7 \cdot 8^{x^2-5x+7} = 0$.

Задача 2. *Используя формулы блока 4, решить уравнения*

2.1 $9^{x-1} - 36 \cdot 3^{x-3} + 3 = 0$ **2.2** $8^{x+1} - 8^{2x-1} = 30$

2.3 $3{\cdot}2^{\sqrt{x}-1} - 8^{\frac{\sqrt{x}-1}{2}} - 4{=}0$ **2.4** $\frac{4}{2^x+2} - \frac{1}{2^x-3} = 2$

2.5 $3^{2x} - \frac{18}{3^{2x}} - 3^x - \frac{6}{3^x} = 2$ **2.6** $2^{cos2x} = 3 \cdot 2^{cos^2 x} - 4.$

Задача 3. *Используя формулы блока 5, решить уравнения*

3.1 $2^{2+x} - 2^{2-x} = 15$ **3.2** $9{\cdot}5^{2x-4} + 4 \cdot 5^{8-2x} = 325$

3.3 $2^x - 2 \cdot (0{,}5)^{2x} - (0{,}5)^x - 1 = 0.$

Задача 4. *Используя формулы блока 6, решить уравнения*

4.1 $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 3^{2x}$ **4.2** $2 \cdot 7^x - 3 \cdot 2^x = 6\frac{1}{7} \cdot 14^{0{,}5x}$

4.3 $6\sqrt[x]{9} + 6\sqrt[x]{4} - 13\sqrt[x]{6} = 0.$

Задача 5. *Используя различные приемы, решить уравнения*

5.1 $\left(4+\sqrt{15}\right)^x + (4-\sqrt{15})^x \ = 62$

5.2 $4^{3+2cos2x} = 2 + 7 \cdot 16^{cos^2 x}.$

Занятие 2. Различные методы решения показательных уравнений

Теоретическая справка

Блок 7. Метод разложения на множители

1. Данный метод используется для решения уравнений вида

$a^{f(x)+b_1}+a^{f(x)+b_2}+\cdots+a^{f(x)+b_n}=c.$

Чтобы решить данное уравнение выносим $a^{f(x)}$ как общий множитель:

$a^{f(x)}(b_1+b_2+\cdots+b_n)=c$

$a^{f(x)}=\frac{c}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$

Получившиеся уравнение является простейшим уравнением, описанным в блоке 3.

2. Пример. Решите уравнение $3^{x-1}+3^{x-2}+3^{x-3}=3159.$

$3^x\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\right)=3159$

$3^x\cdot\frac{13}{27}=3159$

$3^x=3^8 \quad \Leftrightarrow \quad x=8.$

Ответ. $x=8.$

Блок 8. Уравнения вида $\boldsymbol{\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}=\left(f(x)\right)^{g(x)}}$

1. $\boldsymbol{\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}=\left(f(x)\right)^{g(x)}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)\neq 1 \\ \varphi(x)=g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)=1 \\ \varphi(x)-\text{определена} \\ g(x)-\text{определена} \end{cases} \end{array}\right.$

2. Пример. Решите уравнение $(x-3)^{x^2+x}=(x-3)^{7x-5}.$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3>0 \\ x-3\neq 1 \\ x^2+x=7x-5 \end{cases} \\ x-3=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>3 \\ x\neq 4 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right. \end{cases} \\ x=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=5 \end{array}\right.$$

Ответ. $x=4$ и $x=5.$

Блок 9. Метод, основанный на ограниченности или монотонности функций

1. Решение данного типа задач основано на утверждении:

Если $y = f(x)$ монотонно возрастающая (убывающая) функция, то прямая $y = b$ пересекает ее не более чем в одной точке.

2. Если $y = f(x)$ строго возрастает, а $y = g(x)$ строго убывает, тогда уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного решения.

3. Пример. Решите уравнение $2^x + 5^x = 7^x$.

Очевидно, что $x = 1$ является решением данного уравнения. Докажем, что других корней нет. Разделим обе части на 7^x:

$$\left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x = 1$$

Левая часть данного уравнения убывающая функция, а, значит, график $y = 1$ пресекает данную функцию не более чем в одной точке. Отсюда следует, что $x = 1$ единственный корень.

Задачи

Задача 1. *Используя формулы блока 7, решите уравнения*

1.1 $3^{x+2} - 3^x = 72$

1.2 $2^{x^2+x-6} - 2^{x^2+x-9} = 56$

1.3 $10^x - 5^{x-1}2^{x-2} = 950$

1.4 $\sqrt{3^{x-54}} - 7\sqrt{3^{x-58}} = 162$

1.5 $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$.

Задача 2. *Используя формулы блока 8, решить уравнения*

2.1 $(x+5)^{x^2-x-1} = (x+5)^{2x+3}$

2.2 $|x|^{x^2-x-2} = 1$

2.3 $(x+4)^{x^2+9x+8} = 1$

2.4 $x^{\sqrt{x-1}} = x^{x-3}$.

Задача 3. *Используя ограниченность или монотонность функций, решить уравнения*

3.1 $2^x = 3 - x$

3.2 $3^{x-1} + 5^{x-1} = 34$

3.3 $5^x = \sqrt{26 - x}$

3.4 $2^x + 2^{-x} = 2cos\frac{x}{3}$.

Задача 4. *Решите уравнение* $\frac{8^x+2^x}{4^x-2}=5$.

Задача 5. *Решите систему уравнений* $\begin{cases}3^{2x}-2^y=725\\ 3^x-2^{\frac{y}{2}}=25\end{cases}$

Задача 6. *Решить систему уравнений* $\begin{cases}x^{y^2-7y+10}=1\\ x+y=8, x>0.\end{cases}$

Домашнее задание

Задача 1. *Используя формулы блока 7, решить уравнения*

1.1 $3^{x-1}+3^{x-2}+3^{x-3}=3159$ **1.2** $3^{x^2+1}+3^{x^2-1}=270$

1.3 $2^{3\sqrt{x}}+3\cdot 2^{3\sqrt{x}-1}=20$ **1.4** $2^{\sqrt{x}+2}-2^{\sqrt{x}+1}=12+2^{\sqrt{x}-1}$

1.5 $5^{2x-1}+4^x=5^{2x}-4^{x+1}$ **1.6** $x^2 4^{\sqrt{6-x}}+4^{2+x}=16\cdot 2^{2\sqrt{6-x}}+x^2 2^{2x}$.

Задача 2. *Используя формулы блока 8, решить уравнения*

2.1 $x^{2x}=1$ **2.2** $(x-1)^{3x+1}=(x-1)^{2x+4}$

2.3 $(1-x^2)^{(2+x)^2}=(1-x^2)^{(8x-2)(x+2)}$ **2.4** $|x-4|^{x^2-5x+4}=1$

2.5 $x^{\frac{5}{4}-2cos3x}=\sqrt[4]{x}$.

Задача 3. *Используя ограниченность и монотонность функций, решить уравнения*

3.1 $3^x+4^x=5^x$ **3.2** $7^{6-x}=x+2$

3.3 $4^{x-2}+6^{x-3}=100$ **3.4** $7^x=\sqrt{52-3x}$.

Задача 4. *Решить системы уравнений*

4.1 $\begin{cases}y-x=2\\ 3^x 2^y=\frac{1}{9}\end{cases}$ **4.2** $\begin{cases}x^{x^2-y^2-16}=1\\ x-y=2, x>0.\end{cases}$

Задача 5. *Решите уравнение* $5^{-|3x-5|cosx}=\left(\frac{1}{5}\right)^{|x-1|cosx}$.

Задача 6. *Решить уравнение* $2^{x^2-4x+5}=1+sin^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.

Занятие 3. Методы решения показательных неравенств.

Теоретическая справка

Блок 10. Неравенства вида $\boldsymbol{a^x < b, a^x > b}$.

1. Неравенство вида $a^x > b$

а) при $b \leq 0$ решение $x \in R$;

b) при $b > 0$ и $0 < a < 1$ решение $x < \log_a b$;

c) при $b > 0$ и $a > 1$ решение $x > \log_a b$.

2. Неравенство вида $a^x < b$

а) при $b \leq 0$ решений нет;

b) при $b > 0$ и $0 < a < 1$ решение $x > \log_a b$;

c) при $b > 0$ и $a > 1$ решение $x < \log_a b$.

3. Пример. Решить неравенство $2^{-x} > 8$.

$2^{-x} > 2^3$

$-x > 3 \Leftrightarrow x < -3$.

Ответ. $x < -3$.

Блок 11. Неравенства вида $\boldsymbol{A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x + C \vee 0, A \cdot a^x + B \cdot a^{-x} + C \vee 0,}$

$\boldsymbol{A \cdot a^{2x} + B \cdot (ab)^x + C \cdot b^{2x} \vee 0.}$

1. Данные неравенства решаются с помощью тех же замен, что и соответствующие уравнения.

2. Пример. Решить неравенство $25^x < 6 \cdot 5^x - 5$.

$(5^x)^2 - 6 \cdot 5^x + 5 < 0$

Введем замену переменных $5^x = t, t > 0$

$t^2 - 6t + 5 < 0$ $t \in (1; 5)$

$x \in (0; 1)$.

Ответ. $x \in (0; 1)$.

Блок 12. Решение показательных неравенств с переменным основанием

1. Без доказательства сформулируем общее правило, чтобы решить неравенство

$a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)} \vee 0.$

Чтобы решить неравенство $a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)} \vee 0$ необходимо решить систему

$$\begin{cases}(a(x)-1)(f(x)-1) \vee 0 \\ a(x) > 0.\end{cases}$$

Правило. Знак разности $a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)} \vee 0$ совпадает со знаком произведения $(a(x)-1)(f(x)-1) \vee 0$ на ОДЗ $a(x) > 0$.

Важно, что данное правило можно использовать и когда основание является постоянной величиной.

2. Пример. Решите неравенство $(x+1)^{\frac{x-1}{2x+1}} < 1$.

$(x+1)^{\frac{x-1}{2x+1}} < (x+1)^0$

$$\begin{cases}(x+1-1)\left(\frac{x-1}{2x+1} - 0\right) < 0 \\ x+1 > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x(x-1)}{2x+1} < 0 \\ x > -1\end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1; -0{,}5) \cup (0; 1).$$

Ответ. $x \in (-1; -0{,}5) \cup (0; 1)$.

Задачи

Задача 1. *Используя блок 10, решить неравенства*

1.1 $2^{\frac{x+1}{x-2}} \geq 4$

1.2 $(0{,}3)^{\frac{x}{x-2}} < (0{,}3)^{\frac{6}{x-1}}$

1.3 $125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2} \leq \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}$

1.4 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\left|\frac{x-1}{x+3}\right|} < 0{,}25$

1.5 $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{x+2}} > 5^{-x}$.

Задача 2. *Используя метод вынесения общего множителя, решить неравенства*

2.1 $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} \leq 9$

2.2 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}>5$ **2.3** $7^{x}-2^{x+2}<5\cdot 7^{x-1}-2^{x-1}$.

Задача 3. *Используя блок 11, решить неравенства*

3.1 $5^{2x+1}>5^{x}+4$ **3.2** $9^{x+1}-2\cdot 3^{x}<7$

3.3 $\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\leq 2^{3-x}-16$ **3.4** $2^{x}+2^{-x+1}-3<0$

3.5 $2^{\sqrt{x}}-2^{1-\sqrt{x}}\leq 1$

Задача 4. *Используя блок 11, решить неравенства*

4.1 $3\cdot 4^{x}+2\cdot 9^{x}-5\cdot 6^{x}<0$ **4.2** $9\cdot 4^{-\frac{1}{x}}+5\cdot 6^{-\frac{1}{x}}<4\cdot 9^{-\frac{1}{x}}$

4.3 $3\cdot 16^{x}+2\cdot 81^{x}-5\cdot 36^{x}<0$.

Задача 5. *Используя формулы блока 12, решить неравенства*

5.1 $(x^{2}-15)^{x-5}<1$ **5.2** $|x|^{x^{2}-x-2}<1$

5.3 $x^{x^{2}-2x}>x^{3}$ **5.4** $\left(\sqrt{x^{2}-4}\right)^{x^{2}-2x}\geq x^{2}-4$.

Домашнее задание

Задача 1. *Используя блок 10, решить неравенства*

1.1 $16^{x}>0{,}125$ **1.2** $6^{\frac{x+5}{x^{2}-9}}>1$

1.3 $8\cdot 2^{x^{2}-3x}<(0{,}5)^{-1}$ **1.4** $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-\frac{x-3}{x+2}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-2}{x+1}}$

1.5 $2^{x^{2}+3x}-8\cdot 2^{x}>0$ **1.6** $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{x+2}}>5^{-x}$

1.7 $-4\leq 3^{x^{2}-2x-1}-5\leq 4$.

Задача 2. *Используя метод вынесения общего множителя, решить неравенства*

2.1 $2^{x}-2^{x-4}>15$ **2.2** $3^{2x-1}+3^{2x-2}-3^{2x-4}\leq 315$

2.3 $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}+\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}\leq 26$ **2.4** $5\cdot 2^{\sqrt{x}}-3\cdot 2^{\sqrt{x}-1}\geq 56$

2.5 $3^{x}-2^{x+4}>3^{x-1}-55\cdot 2^{x-2}$

2.6 $2^{2x-1}+2^{2x-3}-2^{2x-5}>2^{7-x}+2^{5-x}-2^{3-x}$.

Задача 3. *Используя блок 11, решить неравенства*

3.1 $25^{-x}+5^{-x+1}\geq 50$

3.2 $3^{3x+1}+3^{x+2}+6>0$

3.3 $4^{x}+2^{x+3}>20$

3.4 $3^{2\left(1-\sqrt{x}\right)}+3^{\sqrt{x}}\leq 10$

3.5 $7^{-x}-3\cdot 7^{1+x}>4$

3.6 $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2}>2{,}25^{x^2-10}$.

Задача 4. *Используя блок 12, решить неравенства*

4.1 $x^{\frac{2x-1}{3-x}}>1$

4.2 $(x^2+x+1)^{x}>1$

4.3 $|x-3|^{2x^2-7x}>1$

4.4 $(x^2+x+1)^{\frac{x+5}{x+2}}\geq(x^2+x+1)^{3}$.

Занятие 4. Решение задач повышенной сложности

<u>Теоретическая справка</u>

Многие задачи данного занятия решаются с помощью метода замены переменных. При этом важно помнить, что после введения замены переменных в уравнениях, неравенствах и системах нужно определить множество значений новой переменной, поскольку это множество значений может отличаться от области определения исходной переменной и это существенно может поменять ход решения задач.

Пример. Решите неравенство $4^x \le 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}}$.

<u>Решение.</u> Одним из самых распространенных метод решения многих задача является метод сведения к квадратному неравенству (уравнению). Попробуем решить данное неравенство как квадратное относительно 2^x.

$(2^x)^2 - 3 \cdot 2^{\sqrt{x}} \cdot 2^x - 4^{1+\sqrt{x}} \le 0$

Введем замену переменных $2^x = m, m > 0$. Получим неравенство

$(m)^2 - 3 \cdot 2^{\sqrt{x}} \cdot m - 4^{1+\sqrt{x}} \le 0$

$a = 1, b = -3 \cdot 2^{\sqrt{x}}, c = 4^{1+\sqrt{x}}$

$D = b^2 - 4ac = 9 \cdot 2^{2\sqrt{x}} + 4 \cdot 4^{1+\sqrt{x}} = 25 \cdot 2^{2\sqrt{x}}$.

$m_1 = -2^{\sqrt{x}}, m_2 = 4 \cdot 2^{\sqrt{x}}$

$m \in \left[-2^{\sqrt{x}}; 4 \cdot 2^{\sqrt{x}}\right]$.

С учетом того, что $m > 0$, получаем $m \in \left(0; 4 \cdot 2^{\sqrt{x}}\right]$.Сделаем обратную замену

$2^x \le 4 \cdot 2^{\sqrt{x}} \quad \Leftrightarrow \quad x \le 2 + \sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad x - \sqrt{x} - 2 \le 0$

Данное неравенство можно решить, если ввести замену переменных и учесть, что $x \ge 0$, тогда $x \in [0; 4]$.

Ответ. $x \in [0; 4]$.

Задачи.

Задача 1. *Решить уравнение* $\sqrt{3}\cdot 3^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x+\sqrt{x}+2}{2(\sqrt{x}+1)}}=81.$

Задача 2. *Решить уравнение* $2^{|3x-5|}=4\cdot 8^{|x-1|}$.

Задача 3. *Решить уравнение* $5\cdot 2^{x+\frac{1}{2}}+4\cdot 3^{x+\frac{1}{2}}=11\cdot 4^{x}$.

Задача 4. *Решить неравенство* $\frac{\sqrt{3^{2x+1}-4\cdot 3^{x}+1}}{x^2-x-6}\leq 0.$

Задача 5. *Решить уравнение* $\sqrt{9^x-10\cdot 3^x+21}=\sqrt{9-2\cdot 3^x}$.

Задача 6. *Решить неравенство* $\frac{5}{4^x+3}\geq\frac{3}{3-4^x}$.

Задача 7. *Решить неравенство* $\sqrt{4^{x+1}-8}\geq 4^x-5.$

Задача 8. *Решить неравенство* $|15-5\cdot 2^{-x}|>4^{-x}-6\cdot 2^{-x}+13.$

Задача 9. *Решить неравенство* $3^{x^4-2(x+1)^2}\geq 3^{x^2(x+1)}$.

Домашнее задание.

Задача 1. *Решить уравнение* $\sqrt[3]{27^{5\sqrt{x}}}=3^{x(\sqrt{x}-4)}$.

Задача 2. *Решить неравенство* $\left(\frac{1}{5}\right)^{|x-2|}>\left(\frac{1}{25}\right)^{|x|}$.

Задача 3. *Решить неравенство* $\left|4^{x-1}-\frac{5}{4}\right|\leq\frac{4^x}{8}+\frac{3}{4}$. *В ответе укажите сумму целых решений.*

Задача 4. *Решить неравенство* $\frac{2^x+8}{2^x-1}>2^x$.

Задача 5. *Решить неравенство* $\sqrt{6-x}\cdot(2\cdot 9^{2x}-53\cdot 3^{2x}-27)\geq 0.$

В ответе укажите наименьшее целое решение.

Задача 6. *Решить неравенство* $\frac{7}{9^x-2}\geq\frac{2}{3^x-1}$.

Задача 7. *Решить неравенство* $\sqrt{4^x-2^{x+3}+8}\geq\sqrt{3-2^{x+1}}$.

Задача 8. *Решить неравенство* $\sqrt{2^x+3}-\sqrt{2^{x+1}-1}\leq\sqrt{3\cdot 2^x-2}$.

Задача 9. *Решить неравенство* $|4 \cdot 3^x - 8| > 9^x - 4 \cdot 3^x + 7$.

Задача 10. *Решить неравенство* $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^4+3(2x+1)^2} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{4x^2\cdot(2x+1)}$.

Занятие 5. Логарифмическая функция ее график и свойства. Преобразования логарифмических выражений.

Теоретическая справка

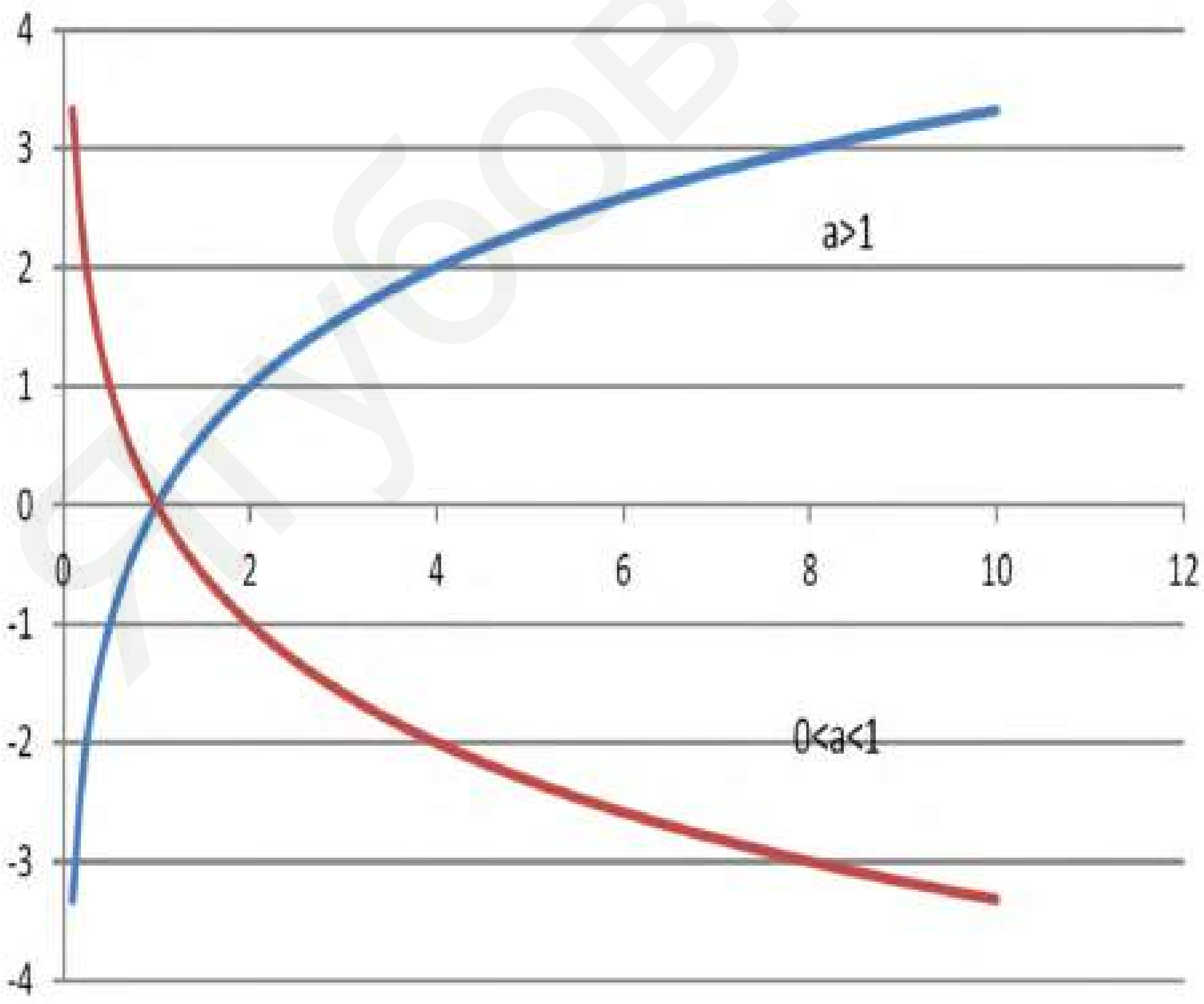
Блок 13. Определение и свойства логарифмической функции

Определение. Логарифмом положительного числа b по основанию a, a>0, a$\neq 1$, называется показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить b.

Свойство 1. Область определения функции $y = \log_a x$- множество $x \in (0; +\infty)$.

Свойство 2. Область значений функции $y = \log_a x$– множество всех действительных чисел.

Свойство 3. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ возрастает при $a \in (1; +\infty)$ и убывает при $a \in (0; 1)$.



Блок 14. Формулы преобразования логарифмов

1. $\log_a a = 1$

2. $\log_a 1 = 0$

3. $\log_a(xy) = \log_a|x| + \log_a|y|, xy > 0$

4. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a|x| - \log_a|y|, xy > 0$

5. $\log_a x^m = m\log_a|x|$, при m – четном

6. $\log_{a^m} x = \frac{1}{m}\log_{|a|} x$

7. $\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$, при $c > 0, c \neq 1$

8. $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$, при $x \neq 1$

9. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

10. Функция $y = \log_n(n+1)$ при $n \in N$ убывает с ростом n.

Задачи

Задача 1. *Используя блок 14, вычислить значение выражения*

1.1 $\log_5 150 - \log_5 3 + \log_5\frac{1}{2}$ **1.2** $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{8}} 27}$

1.3 $\log_9\log_4\sqrt[3]{4}$ **1.4** $25^{\frac{1}{2\log_{49} 25}}$

1.5 $\frac{3}{7}\left(\log_2 16 + 27^{\log_3 2}\right)^{\log_{12} 49}$ **1.6** $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$

Задача 2. *Упростить* $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$

Задача 3. *Упростить* $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}$

Задача 4. *Сравнить числа*

4.1 $\log_2 4$ и $\log_2\pi$ **4.2** $\log_{0,3} 5$ и $\log_{0,3} 8$

4.3 $\log_3 5$ и $\log_9 8$ **4.4** $\log_4 5$ и $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$

Задача 5. *Сравнить числа*

5.1 $\log_2 5$ и $\log_3 7$ **5.2** $\log_7 50$ и $\log_3 8$

Задача 6. *Сравнить числа* $\log_2 3$ и $\log_5 8$

Задача 7. *Сравнить числа* $\log_2 5$ и $\sqrt{5}$

Задача 8. *Сравнить числа* $\log_{11} 12$ и $\log_{12} 13$

Задача 9. *Сравнить числа* 3^{40} и 4^{30}

Добавить задачи на сравнение корней

Домашнее задание

Задача 1. *Используя блок 14, вычислить значение выражения*

1.1 $\log_2 39 - \log_2 13 - \log_2 24$ **1.2** $\log_3 63 - \log_3 9 + \frac{1}{2}\log_3 \frac{27}{49}$

1.3 $6^{\log_{\frac{1}{\sqrt{6}}} 2}$ **1.4** $6^{\log_{3\sqrt{6}} 2}$ **1.5** $\log_{\frac{3}{2}} \log_{25} 125$

1.6 $3^{\frac{4}{\log_7 9}}$ **1.7** $\log_3 64 \cdot \log_2 \frac{1}{27}$

Задача 2. *Используя блок 14, вычислить значение выражения*

$81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$

Задача 3. *Сравнить числа*

3.1 $10^{\log_9 3}$ и $7^{\log_4 2}$ **3.2** $\log_2 \pi + \log_\pi 2$ и 2

3.3 $\log_2 3$ и $\log_3 2$ **3.4** $\log_{11} 119$ и $\log_{15} 227$

3.5 $4^{\sqrt{\log_4 5}}$ и $5^{\sqrt{\log_5 4}}$

Задача 4. *Сравнить числа*

4.1 $\log_{0,5} 5$ и $\log_{0,6} 6$ **4.2** $\log_{0,6} 0{,}7$ и $\log_{0,5} 0{,}8$

4.3 $2^{\log_3 5}$ и $5^{\log_3 2}$

Занятие 6. Основные типы логарифмических уравнений

Теоретический материал

Блок 15. Уравнения вида $\log_a f(x) = b$

1. Данное уравнение равносильно уравнению $f(x) = a^b$. Все корни данного уравнения являются корнями исходного уравнения.

2. Пример. Решить уравнение $\log_3(x+3) = 2$

$x + 3 = 3^2$

$x = 6$

Замечание. При решении уравнений данного типа нет необходимости проверять условие $f(x) > 0$. Объясните почему.

Блок 16. Уравнения вида $\log_{a(x)} f(x) = A$

1. Данное уравнение равносильно системе

$$\log_{a(x)} f(x) = A \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a^A(x) \\ a(x) > 0 \\ a(x) \neq 1 \end{cases}$$

Замечание 1. Объясните, почему не надо проверять условие $f(x) > 0$.

Замечание 2. Если в системе условий соединены громоздко решаемые неравенства и уравнение, корни которого легко находятся, то бывает проще отобрать корни уравнения простой их подстановкой в неравенства, не решая сами неравенства.

2. Пример. Решить уравнение $\log_{x-1}(3x-1) = 3$

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 1 \neq 1 \\ 3x - 1 = (x-1)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \\ x^3 - 3x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ. $x = 3$.

Блок 17. Уравнения вида $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$ (потенцирование)

1. Данное уравнение равносильно одной из двух систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ a(x) > 0 \\ a(x) \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \\ a(x) > 0 \\ a(x) \neq 1 \end{cases}$$

Решайте ту систему, которая ПРОЩЕ!

2. Пример. Решить уравнение $\log_x \sqrt{3x+4} = \log_x x$.

$$\log_x \sqrt{3x+4} = \log_x x$$

$$\begin{cases} \sqrt{3x+4} = x \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$$

Ответ. $x = 4$.

При решении логарифмических уравнений часто совершаются преобразования, которые могут изменить область определения исходного уравнения. При этом если область определения преобразованного уравнения шире, чем область определения исходного уравнения, то возможно появление посторонних корней. Если область определения преобразованного уравнения уже, чем область определения исходного уравнения, то возможна потеря корней.

При логарифмировании уравнения происходит сужение области определения уравнения (возможна потеря корней), при потенцировании происходит расширение области расширения области определения уравнения (возможно приобретении посторонних корней).

1. Использование формул потенцирования

$$log_a f_1(x) + log_a f_2(x) = log_a\big(f_1(x) f_2(x)\big)$$

$$log_a f_1(x) - log_a f_2(x) = log_a\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)$$

$$m\, log_a f_1(x) = log_a\big(f_1(x)\big)^m$$

может привести только к приобретению посторонних корней.

2. Использование формул логарифмирования

$$log_a\big(f_1(x)f_2(x)\big) = log_a f_1(x) + log_a f_2(x)$$

$$log_a\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right) = log_a f_1(x) - log_a f_2(x)$$

$$log_a\big(f_1(x)\big)^m = m\, log_a f_1(x)$$

может привести к потере корней.

Чтобы эти формулы не приводили к потере корней, ими пользуются в виде

$$log_a\big(f_1(x)f_2(x)\big) = log_a|f_1(x)| + log_a |f_2(x)|$$

$$log_a\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right) = log_a |f_1(x)| - log_a |f_2(x)|$$

$$log_a\big(f_1(x)\big)^m = m\, log_a |f_1(x)|$$

Использование первых двух формул может лишь привести к появлению посторонних корней.

3. Использование основного логарифмического тождества $a^{\log_a f(x)} = f(x)$ может расширить область определения уравнения, а значит, привести к получению посторонних корней.

Использование формулы $f(x) = a^{log_a f(x)}$ может привести к сужению области определения уравнения, так как из этой области исключаются те значения неизвестного, при которых $a \leq 0, a = 1$. Значит, необходимо проверить, не являются ли указанные значения неизвестного корнями исходного уравнения.

4. Иногда при решении приходится переходить к новому основанию, содержащему неизвестное $\log_a f(x) = \frac{\log_{b(x)} f(x)}{\log_{b(x)} a}$.

При этом подразумевается, что новое основание положительно и отлично от единице. Поэтому, необходимо проверить не являются ли корнями исходного уравнения те значения x, при которых $b(x) \leq 0, b(x) = 1$. Иначе корни могут быть потеряны.

Если же мы применим формулу $\frac{\log_{b(x)} f(x)}{\log_{b(x)} a} = log_a f(x)$, то может произойти расширение области определения уравнения, и, следовательно, появление посторонних корней.

Вывод. При решении уравнений, выполняя различные преобразования, необходимо на каждом шаге следить за их эквивалентностью.

Пример. Решите уравнение $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}\right) = \log_4\left(\log_4 \frac{x}{2}\right)$.

Решение. Решение большинства логарифмических уравнений лучше начинать с области допустимых значений.

1. ОДЗ $\begin{cases}\log_2 x > 0\\ \log_4 \frac{x}{2} > 0\end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$

2. $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}\right) = \frac{1}{2}\log_2\left(\log_4 \frac{x}{2}\right)$

$$\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}\right) = \log_2 \sqrt{\left(\log_4 \frac{x}{2}\right)}$$

Основания равны, логарифмы равны, значит и подлогарифмические выражения равны

$$\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}} = \sqrt{\left(\log_4 \frac{x}{2}\right)}$$

Так как обе части уравнения положительные, то при возведении обеих частей в квадрат получится равносильное уравнение

$$\frac{1}{\log_2 x} = \log_4 \frac{x}{2}$$

$$\frac{1}{\log_2 x} = \frac{1}{2}(\log_2 x - \log_2 2)$$

Введем замену переменных: $\log_2 x = m$

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{2}(m-1)$$

$$m^2 - m - 2 = 0$$

$$m_1 = -1 \Leftrightarrow \log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = 0{,}5 - \text{посторонний корень}$$

$m_2 = 2 \;\Leftrightarrow\; log_2 x = 2 \;\Leftrightarrow\; x = 4.$

Ответ. $x = 4$.

Задачи

Задача 1. *Используя блок 15, решить уравнения*

1.1 $\log_3(2x-1) = 3$

1.2 $\log_{\frac{1}{\sqrt{6}}}(x^2 - 3x + 2) = -2$

1.3 $\log_2(x^2 + 4x + 11) = \log_{0,5} 0{,}125$

1.4 $\log_{\frac{3}{4}} \frac{2x-1}{x+2} = 1$

Задача 2. *Используя блок 15, решить уравнения*

2.1 $\log_2 \sqrt{x-1} = 1$

2.2 $\log_{16}(2 + \log_2(3 + x)) = 0$

2.3 $\log_3(1 + \log_3(2^x - 7)) = 1.$

Задача 3. *Используя блок 16, решить уравнения*

3.1 $\log_{\frac{12-x}{x}} 3 - 1 = 0$

3.2 $\log_{x+1}(x^2 + 8x + 37) = 2$

3.3 $\log_{1-x} \sqrt{9 + 4x - x^2} = 1.$

Задача 4. *Используя блок 17, решить уравнения*

4.1 $\lg(5-x) - \frac{1}{3}\lg(35 - x^3) = 0$

4.2 $\lg\big(x(x+9)\big) + \lg\left(\frac{x+9}{x}\right) = 0$

4.3 $\log_{1-2x}(6x^2 - 5x + 1) - \log_{1-2x}(4x^2 - 4x + 1) = 0.$

Задача 5. *Используя метод разложения на множители, решить уравнения*

5.1 $x \log_2 x^2 + 1 = 2x + \log_2 x$

5.2 $3x^2 \log_3(2 + 3x) + 2x \log_3(2 + 3x) = 3x^2 + 2x.$

Домашнее задание

Задача 1. *Используя блок 15, решить уравнение*

1.1 $\log_{\frac{1}{7}}(5x - 6) = -2$

1.2 $5^{\log_{25} 9} = \log_2(x^2 + 2x)$

1.3 $\log_{\sqrt{2}}(x+1) = 2$

1.4 $\log_{sin\frac{\pi}{4}}(x^2 - 5x + 8) = -4$

1.5 $\log_{\frac{1}{3}}(12-x^2)=\frac{2^{\log_2 3}}{lg0,001}$

Задача 2. *Используя блок 15, решить уравнение*

2.1 $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{x+1}=-1$

2.2 $\log_2\frac{1}{\sqrt{x-1}}=-1$

2.3 $\log_2(\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)+\log_2 4)=1$

2.4 $\log_{\frac{1}{2}}(5-\log_3 x)=-2$

2.5 $\log_{\frac{1}{2}}(2+\log_5(3^x-2))=-2$

Задача 3. *Используя блок 16, решить уравнение*

3.1 $\log_{x+1}(3x^2+2x-1)=2$

3.2 $\log_{\sqrt{x-4}}(3x^2-28x+64)=4$

3.3 $\log_{\sqrt[3]{x+3}}(x^3+10x^2+31x+30)=9.$

Задача 4. *Решить уравнение*

4.1 $\log_3\frac{x-5}{x+5}=\log_{\frac{1}{3}}(x^2-25)$

4.2 $\log_4(x-11)=\log_4\sqrt{x+1}$

4.3 $\log_2 x\log_3 x=\log_2 x^2+\log_3 x^3-6$

4.4 $\log_2 sin2x+\log_{\frac{1}{2}} cosx=\frac{1}{2}.$

Занятие 7. Методы решения логарифмических уравнений

Теоретическая справка

Блок 18. Методы решения логарифмических уравнений

1. Сведение к квадратному уравнению

2. Метод подстановки. Иногда логарифмическое уравнение удается свести к алгебраическому уравнению относительно нового неизвестного.

3. Метод разложения на множители

4. Метод приведения к одному основанию

5. Метод логарифмирования

Это самые распространенные методы решения. Однако, существуют и другие способы.

Блок 19. Две замены

1. Любое положительное число b можно записать в виде некоторого значения показательной функции с любым заранее выбранным основанием a, a>0, a$\neq 1$

$$b = a^{\log_a b}$$

2. Любое число b можно записать в виде некоторого значения логарифмической функции с любым заранее заданным основанием a, a>0, a$\neq 1$

$$b = \log_a a^b$$

Замечание. Использование основного логарифмического тождества $a^{\log_a f(x)} = f(x)$ может расширить область определения уравнения, а значит, привести к получению посторонних корней.

Использование формулы $f(x) = a^{log_a f(x)}$ может привести к сужению области определения уравнения, так как из этой области исключаются те значения неизвестного, при которых $a \leq 0, a = 1$. Значит, необходимо проверить, не являются ли указанные значения неизвестного корнями исходного уравнения.

Пример 1. Решите уравнение $3\sqrt{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 = 0$.

Решение.

1. ОДЗ $x \geq 1$.

Разложим второй логарифм на множители

$3\sqrt{\log_3 x} - \log_3 x - \log_3 3 - 1 = 0$

$3\sqrt{\log_3 x} - \log_3 x - 2 = 0$

Введем замену переменных: $\sqrt{\log_3 x} = m, m \geq 0$. Получим

$m^2 - 3m + 2 = 0$

$m_1 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{log_3 x} = 1 \Leftrightarrow log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3$.

$m_2 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{log_3 x} = 2 \Leftrightarrow log_3 x = 4 \Leftrightarrow x = 81$.

Ответ. $x = 3, x = 81$.

Пример 2. Решите уравнение

$\log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2 + 23x + 21) = 4$.

Решение. Данное уравнение удобнее начинать не с ОДЗ, а с преобразования подлогарифмических выражений. Разложим их на множители

$\log_{3x+7}(2x+3)^2 + \log_{2x+3}(3x+7)(2x+3) = 4$

Так как $\begin{cases} 3x+7 > 0 \\ 3x+7 \neq 1 \\ 2x+3 > 0 \\ 2x+3 \neq 1 \end{cases}$, то

$\log_{3x+7}(2x+3)^2 = 2\log_{3x+7}(2x+3)$,

$\log_{2x+3}(3x+7)(2x+3) = log_{2x+3}(2x+3) + \log_{2x+3}(3x+7) =$

$= 1 + log_{2x+3}(3x+7)$. Подставим эти выражения в исходное уравнение

$2\log_{3x+7}(2x+3) + 1 + log_{2x+3}(3x+7) = 4$

$2\log_{3x+7}(2x+3) + \frac{1}{\log_{3x+7}(2x+3)} - 3 = 0$

Введем замену переменных: $\log_{3x+7}(2x+3) = m$. Получим

$$2m + \frac{1}{m} - 3 = 0$$

$$2m^2 - 3m + 1 = 0$$

1. $m_1 = 1 \Leftrightarrow log_{3x+7}(2x+3) = 1 \Leftrightarrow 3x+7 = 3+2x \Leftrightarrow x = -4$ – *посторонний корень*

2. $m_2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow log_{3x+7}(2x+3) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{3x+7} = 3+2x \Leftrightarrow x = 0{,}25.$

Ответ. $x = 0{,}25.$

Задачи

Задача 1. *Используя метод приведения к одному основанию, решить уравнения*

1.1 $\log_5 x + \log_x 25 = 3$

1.2 $\sqrt{log_5^2 x + log_x^2 5 + 2} = 2{,}5$

1.3 $\log_{x+1}(x - 0{,}5) = \log_{x-0{,}5}(x+1)$

1.4 $\log_2 x + \log_3 x = 1$

Задача 2. *Используя метод логарифмирования обеих частей, решить уравнение*

2.1 $x^{\frac{lgx+5}{3}} = 10^{5+lgx}$

2.2 $x^{2lg^2 x} = 10x^3$

2.3 $x^{\log_4 x} = 2^{3(\log_4 x + 3)}$

2.4 $9 \cdot x^{lgx} + 91 \cdot x^{-lgx} = 60.$

Задача 3. *Решить уравнение* $7^{lgx} = 98 - x^{lg7}$.

Задача 4. *Используя блок 19, решить уравнения*

4.1 $\log_3(4 \cdot 3^{x-1} - 1) = 2x - 1$

4.2 $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3 \sqrt{x+1} - \frac{1}{2}\log_3(x^2-1)} = \sqrt{2(x-1)}.$

Задача 5. *Используя метод сведения к квадратному уравнению, решить примеры*

5.1 $log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x$

5.2 $log_5^2(5-x) - 6\log_5\sqrt{x-8} = 4 - 25(x-8)(\log_5(x-8) - 4).$

Домашнее задание

Задача 1. *Используя метод приведения к одному основанию, решить уравнения*

1.1 $2\log_x 27 - \log_{27} x = 1$ **1.2** $\log_x 9 + \log_{x^2} 729 = 10$

1.3 $\sqrt{3\log_2^2 x - 1 - 9\log_x^2 2} = 5$ **1.4** $\log_{x+1}(x^3 - 9x + 8)\log_{x-1}(x+1) = 3$

1.5 $3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 = 0$

1.6 $\log_5 x - \log_{\frac{1}{6}} x = -3.$

Задача 2. *Используя метод логарифмирования обеих частей, решить уравнения*

2.1 $x^{lg^3 x - 5lgx} = 0{,}0001$ **2.2** $x^{2 - lg^2 x - lgx^2} = \frac{1}{x}$

2.3 $x^{3 + lg\frac{x}{20}} = 8000$ **2.4** $\sqrt{x^{lg\sqrt{x}}} = 10.$

Задача 3. *Используя метод смены оснований, решить уравнения*

3.1 $x^{lg3} + 3^{lgx} = 54$ **3.2** $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12$

Задача 4. *Используя блок 19, решить уравнения*

4.1 $\log_2(4^x + 4) = x + \log_2(2^{x+1} - 3)$

4.2 $\log_2\left(9^x + 3^{2x-1} - 2^{x+\frac{1}{2}}\right) = x + 3{,}5.$

Задача 5. *Используя метод сведения к квадратному уравнению, решить уравнения*

5.1 $(x+1)log_3^2 x + 4x \cdot log_3 x - 16 = 0$

5.2 $log_{x-3}^2 x + 16log_x^2(x-3) = 8.$

Занятие 8. Основные методы решения логарифмических неравенств

<u>Теоретическая справка</u>

Решение логарифмических неравенств основано на монотонности логарифмической функции (блок 13, свойство 3).

Блок 20. Неравенства вида $\log_a f(x) > b, log_a f(x) < b$

1. Представим правую часть в виде логарифма по основанию а

$$\log_a f(x) > \log_a a^b$$

Возможны два случая

1. а>1, тогда $f(x) > a^b$. Важно, что проверять условие $f(x) > 0$ проверять не надо.

2. 0<а<1, тогда $\begin{cases} f(x) < a^b \\ f(x) > 0. \end{cases}$

2. Пример. Решить неравенство $\log_2(x+3) > 1$.

$\log_2(x+3) > \log_2 2$

$x + 3 > 2$

$x > -1.$

Ответ. $x \in (-1; +\infty)$

3. Решить неравенство $\log_2(x^2 - 3) < 2$.

$\log_2(x^2 - 3) < \log_2 4 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x^2 - 3x > 0 \\ x^2 - 3x - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x(x-3) > 0 \\ (x+1)(x-4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty) \\ x \in (-1; 4) \end{cases} \Leftrightarrow$

$x \in (-1; 0) \cup (3; 4).$

Ответ. $x \in (-1; 0) \cup (3; 4).$

Блок 21. Различные способы решения логарифмических неравенств.

Вы должны знать, что при решении неравенств и уравнений нет принципиальной разницы. При решении неравенств применяются те же самые методы, что и при решении уравнений.

1. Метод введения новой переменной.

2. Метод сведения к одному основанию.

3. Метод потенцирования.

4. Метод вынесения общего множителя.

Примечание. Неравенства с переменным основанием будут рассмотрены в следующем уроке.

Пример 1. Решить неравенство $\frac{1}{1-\lg x} < \frac{2\lg x-5}{1+\lg x}$.

Решение. Данное неравенство можно решить, используя метод введения новой переменной.

Пусть $\lg x = m$, тогда

$$\frac{1}{1-m} - \frac{2m-5}{m+1} < 0$$

$$\frac{(m+1)-(1-m)(2m-5)}{(m-1)(m+1)} > 0$$

$$\frac{2m^2-6m+6}{(m-1)(m+1)} > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty).$$

Делаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l} \lg x < -1 \\ \lg x > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (0; 0{,}1) \\ x \in (10; +\infty). \end{array}\right.$$

Ответ. $x \in (0; 0{,}1) \cup (10; +\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство $\log_5 x - 2 + \log_x 5 \le 0$.

Решение. Решим эту задачу, используя метод сведения к одному основанию.

$\log_x 5 = \frac{1}{\log_5 x}$.

При этом важно отметить, что область определения уравнения не измениться.

Вводим замену переменных $\log_5 x = m$

$m - 2 + \frac{1}{m} \le 0$

$\frac{m^2-2m+1}{m} \le 0$

$\frac{(m-1)^2}{m} \le 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 0) \cup \{1\}$

Делая обратную замену, получим $x \in (0; 1) \cup \{5\}$.

Ответ. $x \in (0; 1) \cup \{5\}$.

Задачи

Задача 1. *Используя блок 20, решить неравенства*

1.1 $\log_5(3x - 1) < 1$

1.2 $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6) > -1$

1.3 $\log_{3,1}(2x - 8) - \log_{3,1} 6 \ge 0$

1.4 $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 1) + \log_{\frac{1}{2}} 12 > \log_{\frac{1}{2}} 10 + \log_{\frac{1}{2}} 6$

1.5 $\log_{\frac{1}{9}}(4x - x^2) < -0,5$

1.6 $\log_{\frac{1}{3}} \log_3(x - 1) > 0$

1.7 $\log_{0,3} \log_6 \frac{x^2+x}{x+4} < 0$.

Задача 2. *Решить неравенства*

2.1 $\log_4(3x - 1) < \log_4(2x + 3)$

2.2 $1 + \log_2(x - 2) > \log_2(x^2 - 3x + 2)$.

Задача 3. *Решить неравенства*

3.1 $log_{0,2}^2(x - 1) > 4$

3.2 $lg^2 x + 6 > 5 lgx$

3.3 $lg^2(-x) + lgx^2 < 3$

3.4 $log_5^2(6 - x) + 2\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6 - x) + \log_3 27 \ge 0$.

Задача 4. *Используя метод введения новой переменной, решить неравенства*

4.1 $\frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_2 x - 1} < 1$

4.2 $\log_3(4^x + 1) + \log_{4^x+1} 3 > \frac{5}{2}$

4.3 $\frac{\log_2 \frac{x}{2}}{\log_2 x} - \frac{\log_2 x^2}{\log_2 x - 1} \le 1.$

Домашнее задание

Задача 1. *Используя блок 20, решить неравенства*

1.1 $\log_{0,2}(4 - 2x) > -1$

1.2 $\log_3 \frac{2-3x}{x} \ge -1$

1.3 $\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{35 - x^2}{x}\right) \ge -\frac{1}{2}$

1.4 $\log_3 |3 - 4x| > 2$

1.5 $\log_{0,5} \log_8 \frac{x^2 - 2x}{x - 3} \le 0$

1.6 $\log_{\frac{6}{7}}(5x + 1) - \log_{\frac{6}{7}} 6 > \log_{\frac{6}{7}} 8 - \log_{\frac{6}{7}} 3$

1.7 $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x - 1) + \log_2(x - 1) > -2.$

Задача 2. *Решить неравенства*

2.1 $\log_{\frac{1}{3}}(x + 4) > \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 2x - 2)$

2.2 $\log_{\frac{1}{3}}(x + 1) > \log_3(2 - x)$

2.3 $\log_2(x^2 - 3x) \le \log_2(3x - 5).$

Задача 3. *Решить неравенства*

3.1 $log^2_{\frac{1}{2}}(x - 3) \ge 1$

3.2 $lg^2 x + lgx > 2$

3.3 $log^2_2(x - x^2 + 2) + 3\, log_{\frac{1}{2}}(x - x^2 + 2) \le -2$

3.4 $log^2_2(2 - x) - 8\, log_{\frac{1}{4}}(2 - x) \ge 5.$

Задача 4. *Решить неравенства, введя замену переменных*

4.1 $\frac{1}{5 - lgx} + \frac{2}{1 + lgx} < 1$

4.2 $\frac{4}{lg10x} - \frac{5}{lg100x} \ge 0$

4.3 $\frac{3\log_{0,5} x}{2 - \log_{0,5} x} \ge 2\log_{0,5} x + 1$

4.4 $\log_2 x - \log_x 32 \le 4$

4.5 $\frac{1}{1 - \log_{0,5} x} + \frac{1}{\log_{0,5} x} \ge 1.$

Занятие 9. Решение логарифмических неравенств с переменным снованием

Теоретическая справка

Блок 22. Неравенства вида $\log_{a(x)} f(x) \geq \log_{a(x)} g(x)$

1. Пусть необходимо решить неравенство $\log_{a(x)} f(x) \geq \log_{a(x)} g(x)$. Рассмотрим два случая.

1. Если $a(x) > 1$, то логарифмическая функция будет возрастающей, то есть большему значению функции соответствует большее значение аргумента, поэтому $f(x) \geq g(x)$.

2. Если $0 < a(x) < 1$, тогда логарифмическая функция будет убывающей и

$f(x) \leq g(x)$.

Учитывая ОДЗ, запишем равносильную совокупность

$$\log_{a(x)} f(x) \geq \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) > 1 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a(x) < 1 \\ f(x) > 0 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

2. Пример. Решить неравенство $\log_x (x^2 - x) \geq \log_x x$.

Решение.

1. $\begin{cases} x > 1 \\ x^2 - 2x \geq x \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [2; +\infty).$

2. $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ x^2 - x \leq x \\ x^2 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$

Ответ. $x \in [2; +\infty)$.

В следующем блоке приведены схемы решения логарифмических неравенств с переменным основанием.

Блок 23. Логарифмические неравенства с переменным основанием

$$\textbf{1. } \log_{f(x)} g(x) \le A \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1)\begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ g(x) \ge \left(f(x)\right)^A \end{cases} \\ 2)\begin{cases} f(x) > 1 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \le \left(f(x)\right)^A \end{cases} \end{array}\right.$$

Замечание. Если неравенство строгое, то все знаки $\le, \ge$ меняются на $<, >$.

Вопрос. Почему в системе 1) не выписано условие $g(x) > 0$, которое необходимо для существования логарифма, а в системе 2) данное условие выписано?

$$\textbf{2. } \log_{f(x)} g(x) \le A \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1)\begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \le \left(f(x)\right)^A \end{cases} \\ 2)\begin{cases} f(x) > 1 \\ g(x) \ge \left(f(x)\right)^A \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\textbf{3. } \log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1)\begin{cases} a(x) > 1 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \\ 2)\begin{cases} 0 < a(x) < 1 \\ f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

Вопрос. Почему в первой системе не выписано условие $f(x) > 0$, которое необходимо для существования логарифма? Почему во второй системе не выписано условие $g(x) > 0$, которое необходимо для существования логарифма?

$$\textbf{4. } \log_{a(x)} f(x) \le \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \le g(x) \\ f(x) > 0 \\ a(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge g(x) \\ g(x) > 0 \\ 0 < a(x) < 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Замечание. Если неравенство строгое, то все знаки $\le, \ge$ меняются на $<, >$.

Блок 24. Сокращенная схема решения логарифмических неравенств с переменным основанием

Вам нет необходимости запоминать все схемы, приведенные в блоке 23. Так как существует правило, позволяющее объединить все эти случаи.

Под знаком $\vee$ (знак сравнения) будем понимать любой из знаков $>, <, \leq, \geq$.

Можно строго математически доказать, что знак разности $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) \vee 0$ совпадает со знаком произведения

$(a(x)-1)\big(f(x)-g(x)\big) \vee 0$ на ОДЗ.

Иными словами, чтобы решить неравенство $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) \vee 0$

необходимо решить систему $\begin{cases} (a(x)-1)\big(f(x)-g(x)\big) \vee 0 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ a(x) > 0 \\ a(x) \neq 1 \end{cases}$

Замечание 1. Аналогично можно решить неравенство вида $\log_{a(x)} f(x) \vee 0$. Для этого представим наше неравенство в виде $\log_{a(x)} f(x) \vee \log_{a(x)} 1$ и применим общую схему. Получим

$$\log_{a(x)} f(x) \vee 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a(x)-1)(f(x)-1) \vee 0 \\ f(x) > 0 \\ a(x) > 0 \\ a(x) \neq 1 \end{cases}$$

Замечание 2. Аналогично можно решить неравенство вида $\log_{a(x)} f(x) \vee A$.

Для этого представим наше неравенство в виде $\log_{a(x)} f(x) \vee \log_{a(x)} a^A(x)$ и

применим общую схему. Получим

$$\log_{a(x)} f(x) \vee A \Leftrightarrow \begin{cases} (a(x)-1)(f(x)-a^A(x)) \vee 0 \\ f(x) > 0 \\ a(x) > 0 \\ a(x) \neq 1 \end{cases}$$

Пример 1. Решить неравенство $\log_{x+4}(5x+20) \le \log_{x+4}(x+4)^2$.

<u>Решение.</u> Используя блок 24, запишем равносильную систему

$$\begin{cases} (x+4-1)(5x+20-x^2-8x-16) \le 0 \\ x+4>0 \\ x+4 \ne 1 \end{cases}$$

Последние два неравенства представляют собой ОДЗ. Подумайте, все ли условия выписаны.

Решим первое неравенство с помощью метода интервалов.

$(x+3)(-x^2-3x+4) \le 0$

$(x+3)(x-1)(x+4) \ge 0 \Leftrightarrow x \in [-4;-3] \cup [1;+\infty)$.

Учитывая ОДЗ, получаем $x \in (-4;-3) \cup [1;+\infty)$.

Ответ. $x \in (-4;-3) \cup [1;+\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство

$\frac{1}{2}\log_{x-1}(x^2-8x+16) + \log_{4-x}(-x^2+5x-4) > 3$.

<u>Решение.</u> Сначала преобразуем данное неравенство

$\frac{1}{2}\log_{x-1}(x-4)^2 + \log_{4-x}(x-1)(4-x) > 3$.

$\log_{x-1}|x-4| + \log_{4-x}(x-1)(4-x) > 3$

Чтобы продолжить преобразования выпишем ОДЗ

$$\begin{cases} x-1>0 \\ 4-x>0 \\ 4-x \ne 1 \\ x-1 \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1;2) \cup (2;3) \cup (3;4)$$

С учетом ОДЗ раскрываем модуль

$\log_{x-1}(4-x) + \log_{4-x}(x-1)(4-x) > 3$

Второй логарифм разложим на сумму двух логарифмов, при этом так как каждый их множителей подлогарифмического выражения является положительной величиной знаков модулей не будет.

$\log_{x-1}(4-x)+\log_{4-x}(x-1)+\log_{4-x}(4-x)>3$

$\log_{x-1}(4-x)+\log_{4-x}(x-1)-2>0$

Перевернем второй логарифм, при этом важно, что потери корней не произойдет (объясните почему).

$\log_{x-1}(4-x)+\frac{1}{log_{x-1}(4-x)}-2>0$

Сделаем замену переменных: $\log_{x-1}(4-x)=m$

$m+\frac{2}{m}-2>0 \Leftrightarrow m\in(0;1)\cup(1;+\infty)$.

Сделаем обратную замену

1. При $m\in(0;1)$ получим

$\begin{cases} log_{x-1}(4-x)<1 \\ log_{x-1}(4-x)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} log_{x-1}(4-x)<log_{x-1}(x-1) \\ log_{x-1}(4-x)>log_{x-1}1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(2x-5)>0 \\ (x-2)(x-3)<0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(2{,}5;3)$ – полностью входит в ОДЗ

2. При $m\in(1;+\infty)$ получим

$log_{x-1}(4-x)<1 \quad \Leftrightarrow (x-2)(2x-5)<0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in(2;2{,}5)$ –полностью входит в ОДЗ

Ответ. $x\in(2;2{,}5)\cup(2{,}5;3)$.

Задачи

Задача 1. *Используя блок 22-24, решить неравенства*

1.1 $\log_{x-1}\frac{1}{2}>1$ **1.2** $\log_{x^2}(3-2x)>1$

1.3 $\log_{x^2}\frac{2x}{x-3}\le\frac{1}{2}$ **1.4** $\log_{x^2+3x}(x+3)<1$

1.5 $\log_x\log_9(3^x-9)<1$.

Задача 2. *Используя блоки 22-24, решить неравенства*

2.1 $\log_{0{,}5}\log_2\log_{x-1}9>0$ **2.2** $\log_{\frac{x}{3}}\left(\log_x\sqrt{3-x}\right)>0$.

Задача 3. *Решить неравенство* $2\log_x 3-2\log_3 x+1\le|2\log_x 3-1|$.

Задача 4. *Решить неравенство*

$$\log_x(7-x) < \log_x(x^3-6x^2+14x-7) - \log_x(x-1).$$

Домашнее задание

Задача 1. *Используя блоки 22-24, решить неравенства*

1.1 $\log_{1-x}(2+x) < 1$ **1.2** $\log_{2x}(8-x^2) < 1$

1.3 $\log_x\left(\frac{4x-12}{x-4}\right) \le 1$ **1.4** $\log_{2-x}(5x-4-x^2) \le 2$

1.5 $\log_x \log_3(9^x-6) \ge 1$ **1.6** $\log_x(x^2+3x-3) > 1$

1.7 $\log_{x-4}(2x^2-9x+4) > 1.$

Задача 2. *Используя блоки 22-24, решить неравенства*

2.1 $\log_{\frac{x}{6}}\left(\log_x \sqrt{6-x}\right) > 0.$

2.2 $\log_x(x^3+1) \cdot \log_{x+1} x > 2.$

Задача 3. *Решить неравенство* $3\log_x 7 - \log_7 x + 1 \ge |1 - 3\log_x 7|.$

Занятие 10. Метод декомпозиции (рационализации)

Теоретическая справка

Блок 25. Базовые функции и их эквиваленты

Введем два важных понятия: базовая функция и её эквивалент.

Базовая функция-это такое выражение, при замене которого на эквивалент, множество решений неравенства не изменится.

Базовая функция M(x)	Эквивалент N(x)
1. $\lvert f(x)\rvert$	1. $f^2(x)$
2. $\lvert f(x)\rvert - \lvert g(x)\rvert$	2. $\big(f(x)-g(x)\big)\big(f(x)+g(x)\big)$
3. ax^2+bx+c	3. a, если D<0
4. $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}$	4. $f(x)-g(x)$, если $f(x)>0, g(x)>0$
5. $\lvert f(x)\rvert-\sqrt{g(x)}$	5. $f^2(x)-g(x)$,если $g(x)>0$
6. $a^{f(x)}-a^{g(x)}$	6. $(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)$
7.$a^{f(x)}-1$	7. $f(x)\cdot(a-1)$
8. $f(x)-g(x)$	8. $f^2(x)-g^2(x)$, если $f(x)>0, g(x)>0$
9.$\log_a f(x)$	9. $(a-1)(f(x)-1)$, если $f(x)>0$
10. $\log_{a(x)} f(x)$	10.$(a(a)-1)(f(x)-1)$, если $f(x)>0$, $a(x)>0, a(x)\neq 1$
11. $\log_a f(x)-\log_a g(x)$	11.$(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)$, если ,$g(x)>0$ $f(x)>0$
12. $\log_{a(x)} f(x)-\log_{a(x)} g(x)$	12. $(a(x)-1)\big(f(x)-g(x)\big)$, если ,$g(x)>0$, $f(x)>0$, $a(x)>0, a(x)\neq 1$
13. $\lvert f(x)\rvert-(ax^2+bx+c)$	13. $f^2(x)-(ax^2+bx+c)^2$, D<0

Основная идея метода декомпозиции

Если левая часть неравенства представляет собой выражение вида

$\frac{f_1 f_2 \dots f_n}{u_1 u_2 \dots u_m} \vee 0$, где f_n и u_m —базовые функции, а под знаком $\vee$ будем понимать любой из знаков $<, \leq, \geq, >$, тогда все базовые функции левой части можно заменить соответствующими эквивалентами.

Пример 1. Решить неравенство $\log_{\frac{2}{3}|x-2|} 2^{1-x^2} \geq 0$.

<u>Решение.</u>

1. Данное неравенство очень быстро позволяет решить метод декомпозиции. Для этого воспользуемся базовой функцией номер 10:

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{3}|x-2|-1\right)\left(2^{1-x^2}-1\right) \geq 0 \\ \frac{2}{3}|x-2| \neq 1 \\ \frac{2}{3}|x-2| > 0 \\ 2^{1-x^2} > 0 \end{cases}$$

Последние три неравенства представляют собой ОДЗ и решим мы их в конце.

2. Решим неравенство $\left(\frac{2}{3}|x-2|-1\right)\left(2^{1-x^2}-1\right) \geq 0$, используя метод декомпозиции. Для этого покажем, что в каждой скобке стоит базовая функция. Умножим первую скобку на $\frac{3}{2}$, а единицу во второй скобке представим как два в степени ноль, получим

$$\left(|x-2|-\frac{3}{2}\right)\left(2^{1-x^2}-2^0\right) \geq 0$$

В первой скобке стоит базовая функция номер два, а во второй скобке стоит базовая функция номер 6. Вместо каждой базовой функции подставим соответствующий эквивалент, получим

$$\left(x-2-\frac{3}{2}\right)\left(x-2+\frac{3}{2}\right)(2-1)(1-x^2) \geq 0$$

$$(x-3{,}5)(x-0{,}5)(x-1)(x+1) \leq 0$$

$$x \in [-1; 0{,}5] \cup [1; 3{,}5]$$

3. Решением ОДЗ является объединение $x \in (-\infty; -1{,}5) \cup (-1{,}5; 2) \cup (2; 3{,}5) \cup (3{,}5; +\infty)$.

4. Объединим решение неравенства и ОДЗ. Получим

$x \in [-1; 0{,}5) \cup [1; 2) \cup (2; 3{,}5)$.

Ответ. $x \in [-1; 0{,}5) \cup [1; 2) \cup (2; 3{,}5)$.

Пример 2. Решить неравенство $2 \cdot x^{log_{\frac{1}{2}} x} - x^{-log_{\frac{1}{2}} x} < -1$.

<u>Решение.</u> Прежде всего, заметим, что ОДЗ данного неравенства $x > 0$.

Перевернем второе слагаемое

$$2 \cdot x^{log_{\frac{1}{2}} x} - \frac{1}{x^{log_{\frac{1}{2}} x}} + 1 < 0$$

и введем замену переменных $x^{log_{\frac{1}{2}} x} = m, m > 0$. Получаем неравенство

$\frac{2m^2+m-1}{m} < 0 \Leftrightarrow m \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

$$x^{log_{\frac{1}{2}} x} < \frac{1}{2}$$

Применим первую замену из блока 19, получаем

$$x^{log_{\frac{1}{2}} x} < x^{\log_x \frac{1}{2}}$$

<u>Очень важный момент.</u> Такая замена может привести к сужению области определения уравнения. Необходимо проверить не является ли $x = 1$ корнем данного уравнения. Проверкой убеждаемся, что это посторонний корень.

Применим базовую функцию номер 14:

$$(x-1)\left(\log_{\frac{1}{2}} x - \log_x \frac{1}{2}\right) < 0$$

Перепишем неравенство в более удобной форме

$$(x-1)(\log_x 2 - \log_2 x) < 0$$

Перевернем первый логарифм во второй скобке, при этом область определения не измениться (почему?). Проделаем преобразования

$$(x-1)\left(\frac{1}{log_2 x} - log_2 x\right) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)\left(\frac{1-log_2^2 x}{log_2 x}\right) < 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-1)\left(\frac{log_2^2 x - 1}{\log_2 x}\right) > 0 \qquad \frac{(x-1)(log_2 x - 1)(log_2 x + 1)}{log_2 x} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(log_2 x - \log_2 2)(log_2 x + \log_2 2)}{log_2 x} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)\log_2 \frac{x}{2} \log_2 2x}{\log_2 x} > 0$$

В данной дроби стоит произведение трех базовых функций под номером 9, применим эквиваленты

$$\frac{(x-1)(2-1)\left(\frac{x}{2}-1\right)(2-1)(2x-1)}{(2-1)(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}-1\right)(2x-1) > 0 \Leftrightarrow$$

$x \in (-\infty; 0{,}5) \cup (2; +\infty)$.

Теперь объединим это решение с ОДЗ, получаем:

$x \in (0; 0{,}5) \cup (2; +\infty)$.

Ответ. $x \in (0; 0{,}5) \cup (2; +\infty)$.

Задачи

Задача 1. *Используя блок 25, решить неравенства*

1.1 $\frac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9} < 0$ **1.2** $\left|2^{4x^2-1}-5\right| \leq 3$

1.3 $\left(\frac{15}{14}\right)^{|x+7|} < \left(\frac{15}{14}\right)^{|x^2-3x+2|}$.

Задача 2. *Используя блок 25, решить неравенства*

2.1 $\frac{\log_{0,3}\left(2x^2-\frac{1}{2}\right)}{\log_7(2x^2+2)} \geq 0$ **2.2** $\frac{\log_{\sqrt{5}}\left(12x^2-\frac{1}{3}\right)}{\log_2(1+2x^2)} \leq 0$.

Задача 3. *Используя блок 25, решить неравенства*

3.1 $\frac{x+4\sqrt{x}-12}{27-3^x} \leq 0$ **3.2** $\frac{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}{8+2x-x^2} \leq 0$

3.3 $x\log_3\left(\frac{x}{3}+2\right) \geq 8\log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{x}{3}+2\right)$ **3.4** $\frac{(\log_{x-1}(5-x))^2}{x^2-8x+15} \geq 0$.

Задача 4. *Используя блок 25, решить неравенства*

4.1 $\log_{3-x}(x+3)\cdot\log_{x+4}(4-x) \leq 0$ **4.2** $\log_{x-2}\frac{1}{5} \geq \log_{(x-3)(x-5)} 1$.

Задача 5. *Используя блок 25, решить неравенство* $|x-2|^{\log_4(x+2)-\log_2 x} < 1$.

Домашнее задание

Задача 1. *Используя блок 25, решить неравенства*

1.1 $\frac{\lg\left(3x^2-\frac{1}{3}\right)}{\log_{0,1}(1+x^2)} \geq 0$

1.2 $\frac{\log_{0,1}(1{,}1+x^2)}{\log_3\left(3x^2-\frac{1}{12}\right)} \leq 0$

1.3 $\frac{\lg(4x^2+x)}{\lg 2x} \geq 1$

1.4 $\frac{x+1-\log_3 9x}{1-\log_3 x} \geq 1.$

Задача 2. *Используя блок 25, решить неравенства*

2.1 $(x^2-7x+12)(5^x-25) \geq 0$

2.2 $\frac{3x^2-2x-1}{\log_3(x-1)} \leq 0$

2.3 $x\log_8\left(\frac{x}{5}-1\right) \geq 3\log_2\left(\frac{x}{5}-1\right)$

2.4 $\frac{(\log_{x+5}(1-x))^2}{x^2+3x-4} \geq 0$

2.5 $\log_{|x-4|}(2x^2-9x+4) > 1.$

Задача 3. *Используя блок 25, решить неравенства*

3.1 $\log_{2-x}(x+2)\log_{x+3}(3-x) \leq 0$

3.2 $\log_{x-1}\frac{3}{2} < \log_{x^2-6x+8} 1$

3.3 $1+\log_2(x+10) > \log_{(x-2)(x-4)}(x-2)(x-4).$

Задача 4. *Используя различные приемы решить неравенство*

$\log_{|x+6|} 2 \cdot \log_2(x^2-x-2) \geq 1.$

Задача 5. *Решить неравенство* $\log_{6x^2-5x+1} 2 > \log_{\sqrt{6x^2-5x+1}} 2.$

Занятие 11. Решение задач повышенной сложности

Теоретическая справка

Прежде чем решать задачи данного занятия, повторите все основные схеме решения уравнений и неравенств с модулем. Так же вам необходимо при решении данных задач очень внимательно следить за равносильностью.

Пример. Решить неравенство $\frac{1+\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+4}+\log_{\frac{1}{2}}(13-x)}{|x^2+2x-3|-|2x^2-10x+8|} \geq 0.$

Решение.

1. ОДЗ $x \in (-4; 13)$

2. Знаменатель дроби уже представляет собой базовую функцию, преобразуем числитель.

$$\frac{1+\log_2(x+4)-\log_2(13-x)}{|x^2+2x-3|-|2x^2-10x+8|} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\log_2 2+\log_2\frac{x+4}{13-x}}{|x^2+2x-3|-|2x^2-10x+8|} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\log_2\frac{2x+8}{13-x}}{|x^2+2x-3|-|2x^2-10x+8|} \geq 0$$

Числитель-это базовая функция номер 9, а знаменатель дроби- это базовая функция номер два. Применим эквиваленты

$$\frac{(2-1)\left(\frac{2x+8}{13-x}-1\right)}{(x^2+2x-3-2x^2+10x-8)(x^2+2x-3+2x^2-10x+8)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-5}{(x-13)(x^2-12x+11)(3x^2-8x+5)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-5}{(x-13)(x-11)(x-1)^2(3x-5)} \geq 0$$

Числитель и знаменатель можно сократить на $3x-5$, при этом учесть, что $x \neq \frac{5}{3}$.

$$\frac{1}{(x-13)(x-11)(x-1)^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1) \cup \left(1; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; 11\right) \cup (13; +\infty).$$

3. Объединим с ОДЗ, получим $x \in (-4; 1) \cup \left(1; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; 11\right)$.

Ответ. $x \in (-4;1) \cup \left(1;\frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3};11\right)$.

Задачи

Задача 1. Решить неравенство $\frac{\log_4(2-x)-\log_{14}(2-x)}{\log_{14}x-\log_{49}x} \le \log_4 49$.

Задача 2. *Решить неравенство*

$$\log_5\left(\left(7^{-x^2}-5\right)\left(7^{-x^2+16}-1\right)\right)+\log_5\frac{7^{-x^2}-5}{7^{-x^2+16}-1} > \log_5\left(7^{2-x^2}-1\right)^2.$$

Задача 3. *Решить неравенство* $\frac{2\log_{2x-1}|x|}{\log_{2x-1}(x+7)} \le \frac{\log_3(x+12)}{\log_3(x+7)}$.

Задача 4. *Решить неравенство* $\log_{(x+2)^2}\left(x(x+1)(x+3)(x+4)\right) > 1$.

Задача 5. *Решить неравенство* $x^{lg^2x+lgx^3+3} \le \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}}$.

Задача 6. *Решить неравенство* $\log_{x^2+x+1}|x+3| > \log_{x^2+x+1}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$.

Домашнее задание

Задача 1. *Решить неравенство* $\frac{2\log_3(x^2-4x)}{\log_3 x^2} \le 1$.

Задача 2. *Решить неравенство* $\frac{\log_{2x-1}(\log_2(x^2-2x))}{\log_{2x-1}(x^2+6x+10)} \le 0$.

Задача 3. *Решить неравенство*

$$\log_5\left(\left(3^{-x^2}-5\right)\left(3^{-x^2+9}-1\right)\right)+\log_5\frac{3^{-x^2}-5}{3^{-x^2+9}-1} > \log_5\left(3^{7-x^2}-4\right)^2.$$

Задача 4. *Решить неравенство* $\frac{\log_{3x+4}27}{\log_{3x+4}(-81x)} \le \frac{1}{\log_3\log_{\frac{1}{3}}3^x}$.

Задача 5. *Решить неравенство* $\log_{2x^2-x}(|x+2|-|x|) > \log_{2x^2-x}\sqrt{2-x^2}$.

Задача 6. *Решить неравенство* $\frac{\log_{(1-3|x|)}(42x^2-14|x|+3)}{\log_{(1-3|x|)}\left(x-\frac{5}{6}\right)^2} \le \frac{1}{2}$.

Задача 7. *Решить неравенство* $(4^{-x}+3\cdot 2^x)^{\log_7 x+\log_x 7-2} \le 1$.

Задача 8. *Решить неравенство* $\frac{log^2_{2x-3}\left(\frac{1}{3x-5}\right)+log_{2x-3}(9x^2-30x+25)+7}{2\,log_{2x-3}(6x^2-19x+15)-1} \le 3$.

Занятие 12. Решение смешанных систем

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{1+x}(y^2-2y+1)-\log_{1-y}(x^2+2x+1)=4 \\ \log_{1+x}(2y+1)+\log_{1-y}(2x+1)=2 \end{cases}$$

Решение. При решении систем не всегда просто понять с какого уравнения начать решение. И дать общий совет невозможно.

В данной задаче начнем решение с первого уравнения. Преобразуем подлогарифмические выражения

$$\log_{1+x}(1-y)^2-\log_{1-y}(x+1)^2=4$$

$$\log_{1+x}|1-y|-\log_{1-y}|x+1|=2$$

ОДЗ уравнения $\begin{cases} x+1>0 \\ 1-y>0 \end{cases}$. Учитывая это, раскроем модули

$$\log_{1+x}(1-y)-\log_{1-y}(x+1)=2$$

Перевернем второй логарифм, причем область определения уравнения не изменится (почему?).

$$\log_{1+x}(1-y)-\frac{1}{\log_{1+x}(1-y)}-2=0$$

Введем замену переменных: $\log_{1+x}(1-y)=m$, получим

$m-\frac{1}{m}-2=0 \quad \Leftrightarrow m=1 \Leftrightarrow \log_{1+x}(1-y)=1 \quad \Leftrightarrow x=-y$. Подставим это выражение во второе уравнение, получим

$$\log_{1-y}(2y+1)+\log_{1-y}(1-2y)=2$$

$\log_{1-y}(1-4y^2)=2 \Leftrightarrow y=\frac{2}{5}$. Значит, $x=-\frac{2}{5}$.

Ответ. $\left(-\frac{2}{5};\frac{2}{5}\right)$.

Задачи

Задача 1. *Решить систему уравнений* $\begin{cases} x+y=1 \\ 3^x+3^y=4. \end{cases}$

Задача 2. *Решить систему уравнений* $\begin{cases} \lg(x^2+y^2) = 1 + \lg 13 \\ \lg(x+y) = \lg 32 - \lg(x-y) \end{cases}.$

Задача 3. *Решить систему уравнений* $\begin{cases} (x+y)\cdot 3^{y-x} = \frac{5}{27} \\ 3\log_5(x+y) = x-y. \end{cases}$

Задача 4. *Решить систему уравнений* $\begin{cases} 20\cdot x^{\log_3 y} + 7\cdot y^{\log_3 x} = 81\sqrt[3]{3} \\ xy = 9\sqrt[3]{9} \end{cases}$

Задача 5. *Решить систему неравенств* $\begin{cases} 8\cdot 4^x - 65\cdot 2^x + 8 \le 0 \\ log_{|x|}^2 x^4 + log_3 x^2 \le 18. \end{cases}$

Задача 6. *Решить систему* $\begin{cases} 5^{|x^2-2x-8|-\log_5 9} = 3^{-y-4} \\ 3|y+1| - 2|y| + (y-1)^2 \le 8. \end{cases}$

Задача 7. *Решить систему* $\begin{cases} \frac{\sqrt{2x^2-5x+2}}{2x^2+6x} \le 0 \\ 9^{\log_{\frac{1}{9}}\log_5 x^2} < 5^{\log_{\frac{1}{5}}\log_9 x^2} \end{cases}$

Задача 8. *Решить систему неравенств*

$$\begin{cases} 5\cdot 3^{2x} + 15\cdot 5^{2x-1} \ge 8\cdot 15^x \\ \log_2\left(\log_3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) \le \log_{\frac{1}{8}}\left(\log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}\right)\right) \end{cases}$$

Домашнее задание

Задача 1. *Решить систему уравнений* $\begin{cases} y - x = 2 \\ 3^x 2^y = \frac{1}{9} \end{cases}$

Задача 2. *Решить систему уравнений* $\begin{cases} 3^{x^2+y^2} = 81 \\ \log_2 x + 2\log_4 y = 1 \end{cases}$

Задача 3. *Решить систему уравнений* $\begin{cases} 35log_4^2 x + 36log_3^2 y = 99 \\ 7log_{\frac{1}{4}}x - 6log_{\frac{1}{3}}y = 1. \end{cases}$

Задача 4. *Решить смешанную систему* $\begin{cases} 2^{-x}y^4 - 2y^2 + 2^x \le 0 \\ 8^x - y^4 + 2^x - 1 = 0 \end{cases}$

Задача 5. *Решить систему* $\begin{cases} 7^{|x^2-3x-28|-\log_7 4} = 2^{y-6} \\ |y+3| + |y-1| - (y-2)^2 \ge 6. \end{cases}$

Задача 6. *Решить систему* $\begin{cases} 3^{x+2} + 9^{x+1} - 810 > 0 \\ log_3^2 x + 4\,log_3 x \ge -3 \end{cases}$

Задача 7. *Решить систему* $\begin{cases} \log_2 \frac{3x-2}{x-1} + 3\log_8 \frac{(x-1)^3}{3x-2} < 1 \\ \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \le \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9} \end{cases}$

Задача 8. *Решить систему* $\begin{cases} \frac{3\cdot 64^x + 2^x - 70}{64^x - 2} \ge 3 \\ log_3^2(x+3) - 3log_3(x+3) + 2 \le 0 \end{cases}$

Задача 9. *Решить систему* $\begin{cases} \log_2(x^2y + 2xy^2) - \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y}\right) = 4 \\ \log_5\left|\frac{xy}{6}\right| = 0 \end{cases}$

Занятие 13. Решение смешанных систем

Задача 1. *Решить систему неравенств* $\begin{cases} \log_{\log_x 2x}(5x-2) \geq 0 \\ 15^x - 9 \cdot 5^x - 3^x + 9 \leq 0 \end{cases}$

Задача 2. *Решить систему* $\begin{cases} \log_2(100-x^2) \leq 2 + \log_2(x+1) \\ \log_{0,3}(2|x+5| + |x-11| - 30) < 1 \end{cases}$

Задача 3. *Решить систему неравенств*

$$\begin{cases} 7^{x-1} + 7^x + 7^{x+1} > 171 \\ \log_3 \frac{1}{x} + \log_3(x^2+3x-9) \leq \log_3\left(x^2 + 3x + \frac{1}{x} - 10\right) \end{cases}$$

Задача 4. *Решить систему неравенств*

$$\begin{cases} 16^x + 12^x - 2 \cdot 9^x < 0 \\ \log_{\left(1-\frac{x^2}{26}\right)}(x^2 - 10|x| + 26) - \log_{\left(1+\frac{x^2}{26}\right)}(x^2 - 10|x| + 26) \geq 0 \end{cases}$$

Задача 5. *Решить систему неравенств*

$$\begin{cases} 9^x - 10 \cdot 3^x + 9 < 0 \\ \frac{9}{\log_{2,1}(x-10)^2 \log_{1,9} x} \geq \frac{(x-1)^{\log_3(x-1)}}{9\left(\log_{2,1}(x-10)^2\right) \log_{1,9} x} \end{cases}$$

Задача 6. *Решить систему неравенств*

$$\begin{cases} (x-1)\lg 2 + \lg(2^{x+1} + 1) < \lg(7 \cdot 2^x + 12) \\ \log_x(x+2) > 2 \end{cases}$$

Задача 7. *Решить систему неравенств*

$$\begin{cases} 1 + \lg x^6 \cdot \log_5 x > \log_5 x^2 + \lg x^3 \\ \log_{\log_2\left(\frac{x}{2}\right)}(x^2 - 10x + 22) > 0 \end{cases}$$

Домашнее задание

Задача 1. *Решить систему неравенств* $\begin{cases} \log_{\log_x 3x}(4x-1) \geq 0 \\ 21^x - 9 \cdot 7^x - 3^x + 9 \leq 0 \end{cases}$

Задача 2. *Решить систему неравенств*

$$\begin{cases} \log_2(49-x^2) \leq 2 + \log_2(x+1) \\ \log_{0,4}(2|x-3| + |x-8| - 8) < 1 \end{cases}$$

Задача 3. *Решить систему неравенств*

$$\begin{cases} 25^x + 3 \cdot 10^x - 4 \cdot 4^x < 0 \\ \log_{\left(1-\frac{x^2}{37}\right)}(x^2 - 12|x| + 37) - \log_{\left(1+\frac{x^2}{37}\right)}(x^2 - 12|x| + 37) \geq 0 \end{cases}$$

Задача 4. *Решить систему неравенств*

$$\begin{cases} 9^{x-3} + 9^{x-2} + 9^{x-1} > 511 \\ \log_7 \frac{3}{x} + \log_7(x^2 - 7x + 11) \leq \log_7 \left(x^2 - 7x + \frac{3}{x} + 10\right) \end{cases}$$

Задача 5. *Решить систему неравенств*

$$\begin{cases} \frac{2x^2-11x+15}{2^x-6} < 0 \\ \frac{1}{2}\log_{tg\frac{\pi}{12}} x^2 \geq \log_{tg\frac{\pi}{12}} \sqrt{2x+3} \end{cases}$$

Задача 6. *Решить систему неравенств*

$$\begin{cases} 9^x - 4 \cdot 3^x + 3 \geq 0 \\ \log_{\frac{2x^2+3x+1}{3x+1}} |x| \leq 0 \end{cases}$$

Задача 7. *Решить систему неравенств*

$$\begin{cases} \frac{4^x}{2^x-1} \leq \frac{2^x+12}{3} \\ \log_4(3 \cdot 4^{x+1} - 8) < 2x + 1 \end{cases}$$

Задача 8. *Решить систему неравенств*

$$\begin{cases} 2^x + 2^{|x|} \geq 2\sqrt{2} \\ \log_{0,5}(6|x| - 3) \leq \log_{0,5}(4 - x^2) \end{cases}$$

Задача 9.*Решить систему неравенств*

$$\begin{cases} \frac{2^{x+1}-22}{2^x-2} \geq 1 \\ log_5^2 x + |\log_5 x| \geq 6 \end{cases}$$

Задача 10. *Решить систему неравенств*

$$\begin{cases} (9 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 1) \log_{x+1}|x - 3,5| \geq 0 \\ 9^{x+1} + \log_{x+1}|x - 3,5| + 1 \geq 10 \cdot 3^x \end{cases}$$

Теоретические вопросы

1. Дайте определение показательной функции. График и основные свойства

2. Показательное уравнение вида $a^x = b$. Схема, примеры.

3. Показательное уравнение вида $A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x + C = 0$. Метод решения, примеры.

4. Показательные уравнения типа $\mathrm{A} \cdot \mathrm{a}^{\mathrm{x}} + \mathrm{B} \cdot \mathrm{a}^{-\mathrm{x}} + \mathrm{C} = 0$. Метод решения, примеры.

5. Показательные уравнения вида $A \cdot a^{2x} + B \cdot (ab)^x + C \cdot b^{2x} = 0$. Метод решения, примеры.

6. Метод разложения на множители при решении показательных уравнений и неравенств.

7. Уравнения вида $\left(f(x)\right)^{\varphi(x)} = \left(f(x)\right)^{g(x)}$. Схема решения, примеры.

8. Метод, основанный на ограниченности или монотонности функций. Примеры.

9. Неравенства вида $a^x < b, a^x > b$. Схемы решения, примеры.

10. Неравенства вида $A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x + C \vee 0$, $A \cdot a^x + B \cdot a^{-x} + C \vee 0$,

$A \cdot a^{2x} + B \cdot (ab)^x + C \cdot b^{2x} \vee 0$. Метод решения.

11. Схема решений неравенств с переменным основанием

12. Определение и свойства логарифмической функции.

13. Формулы преобразования логарифмов.

14. Уравнения вида $\log_a f(x) = b$. Схема решения, пример.

15. Уравнения вида $\log_{a(x)} f(x) = A$. Схема решения, пример.

16. Уравнения вида $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$. Схема решения, примеры.

17. Основные методы решения логарифмических уравнений.

18. Две замены

19. Неравенства вида $\log_a f(x) > b, log_a f(x) < b$. Схемы решения, примеры.

20. Неравенства вида $\log_{a(x)} f(x) \geq \log_{a(x)} g(x)$. Выведете равносильную систему.

21. схемы решения логарифмических неравенств с переменным основанием.

22. Обобщенная схема решения логарифмических неравенств с переменным основанием.

23. Базовые функции и их эквиваленты. Суть метода декомпозиции.

Задание С3. Характеристика, критерии проверки и оценка решения.

Весь массив работ основного потока был разбит на 4 группы

Номер группы	Первичный балл	Тестовый балл	Уровень подготовки	Процент участников
1	0-5	0-30	Низкий	15,6
2	6-12	31-56	Базовый	57,9
3	13-22	57-82	Повышенный	25,3
4	23-30	82-100	Высокий	1,2

Начиная с задания С3, сложность заданий соответствует высокому и повышенному уровням подготовки. В целом по стране результаты были не слишком высоки: 56,6% -не приступали, 23,9%-0 баллов, 12,8%-1 балл, 3%-2 балла, 3,7%-3 балла. С целью повышения числа участников, приступающих к выполнению задания С3, было принято решение сделать задание С3 двушаговым, и один из шагов сделать более простым.

В результате, задание С3 выглядит, как система двух неравенств с одной переменной.

Критерии оценивания задания С3

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведенных выше	0
Максимальный балл	3

Данные критерии требуют пояснения.

Во-первых, если решение не содержит слов-комментариев и не корректно используются знаки импликаций, но логика решения верная, то нет причин снижать баллы.

Во-вторых, слова «обоснованно получен верный ответ» не подразумевают обязательного наличия явно выписанного ответа: его достаточно получить в процессе решения.

Иногда в ходе решения возникает необходимость сравнения чисел. Если сравнение проведено верно, то не следует проявлять особых требований к аргументации полученного ответа. В этом случае следует ставить полные баллы, а если ответ для системы неравенств выписан не верно, то тогда следует оценивать решения неравенств.

Ответы

Занятие 1. Свойства показательной функции. Основные методы решения показательных уравнений.

Задачи. **1.1** $x = 4$. **1.2** $x = \frac{1}{7}$. **1.3** $x = \frac{7}{3}$. **1.4** $x = 1{,}5$. **2.1** $x = \pm 1$. **2.2** $x = 0$, $x = 1{,}2$. **2.3** $x = -2{,}5$, $x = 3$. **3.1** $x = 1$. **3.2** $x = 2$. **3.3** $x = 9$. **3.4** $x = 1, x = \log_3 1{,}25$. **3.5** $x = 1{,}5$. **4.1** $x = 2$. **4.2** $x = \pm 1$. **4.3** $x = 3$. **4.4** $x = \frac{\pi k}{2}$. **5.1** $x = 2$. **5.2** $x = -0{,}5$. **5.3** $x = 0, x = 1$. **6.1** $x = \pm 1$. **6.2** $x = \pm 3$.

Домашнее задание. **1.1** $x = -7$. **1.2** $x = -6$. **1.3** $x = -10, x = 0$. **1.4** $x = 0{,}125$. **1.5** $x = -3{,}5, x = 2$. **1.6** $x = 2, x = 3$. **2.1** $x = 1, x = 2$. **2.2** $x = \frac{2}{3}, x = \log_8 60$. **2.3** $x = 9$. **2.4** $x = \pm 1$. **2.5** $x = 1$. **2.6** $x = \pi n$. **3.1** $x = 2$. **3.2** $x = 3, x = 2 + \log_5 \frac{10}{3}$. **3.3** $x = 1$. **4.1** $x = -2$. **4.2** $x = 2$. **4.3** нет решений. **5.1** $x = \pm 4$. **5.2** $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$.

Занятие 2. Различные методы решения показательных уравнений.

Задачи. **1.1** $x = 3$. **1.2** $x = -4, x = 3$. **1.3** $x = 3$. **1.4** $x = 66$. **1.5** $x = 0$. **2.1** $x = \pm 4, x = -1$. **2.2** $x = \pm 1, x = 2$. **2.3** $x = -3, x = -1$. **2.4** $x = 1, x = 5$. **3.1** $x = 1$. **3.2** $x = 3$. **3.3** $x = 1$ **3.4** $x = 0$. **4.** $x = 1$, $x = \log_2\left(\frac{3+\sqrt{29}}{2}\right)$. **5.** $(3; 2)$ **6.** $(3; 5), (6; 2)$.

Домашнее задание. **1.1** $x = 8$. **1.2** $x = \pm 2$. **1.3** $x = 1$. **1.4** $x = 9$. **1.5** $x = 1$. **1.6** $x = 2, x = \pm 4$. **2.1** $x = \pm 1$. **2.2** $x = 1, x = 2, x = 3$. **2.3** $x = 0, x = 1$, $x = -2, x = \frac{4}{7}$. **2.4** $x = 1, x = 3, x = 5$. **2.5** $x = 1$, $x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}$. **3.1** $x = 2$. **3.2** $x = 5$. **3.3** $x = 5$. **3.4** $x = 2$. **4.1** $(0; 1), (1; 0)$. **4.2** $(5; 3), (1; -1)$. **5.** $x = 2, x = 1{,}5, x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. **6.** $x = 2$.

Занятие 3. Методы решения показательных неравенств.

Задачи. **1.1** $x \in (2; 5]$. **1.2** $x \in (-\infty; -4), (-3; 1), (2; +\infty)$. **1.3** $x \in (-\infty; -3]$, $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **1.4** $x \in (-7; -3), \left(-3;\ -\frac{5}{3}\right)$. **1.5** $x \in [2; +\infty)$. **2.1** $x \in (-\infty; -2]$.

2.2 $x \in (-\infty: 0)$. **2.3** $x \in (-\infty; 2)$. **3.1** $x \in (0; +\infty)$. **3.2** $x \in (-\infty: 0)$.

3.3 $x = -2$. **3.4** $x \in (0; 1)$. **3.5** $x \in [0; 1]$. **4.1** $x \in (0; 1)$. **4.2** $x \in (-0{,}5; 0)$.

4.3 $x \in (0; 1)$. **5.1** $x \in (-\infty; -4), (4; 5)$. **5.2** $x \in (1; 2)$
5. 3 $x \in (0; 1), (3; +\infty)$. **5. 4** $x \in \left(-\infty; -\sqrt{5}\right), \left(2; \sqrt{5}\right], \left[1 + \sqrt{3}; +\infty\right)$.
Домашнее задание **1.1** $x \in (-0{,}75; +\infty)$. **1.2** $x \in (-5; -3), (3; +\infty)$.

1.3 $x \in (1; 2)$. **1.4** $x \in \left(-2; -\frac{11}{8}\right), (-1; +\infty)$. **1.5** $x \in (-\infty; -3), (1; +\infty)$.

1.6 $x \in (2; +\infty)$. **1.7** $x \in \left[-1; 1 - \sqrt{2}\right], \left[1 + \sqrt{2}; 3\right]$. **2.1** $x \in (4; +\infty)$.

2.2 $x \in (-\infty; 3]$. **2.3** $x \in [-1; +\infty)$. **2.4** $x \in [16; +\infty)$. **2.5** $x \in (3; +\infty)$.

2.6 $x \in \left(2\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **3.1** $x \in (-\infty; -1]$. **3.2** $x \in R$. **3.3** $x \in (1; +\infty)$. **3.4** $x \in [0; 4]$.

3.5 $x \in (-\infty; -1)$. **3.6** $x \in \left(-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right)$. **4.1** $x \in (0; 0{,}5), (1; 3)$. **4.2** $x \in (-1; -0), (0; +\infty)$. **4.3** $x \in (-\infty; -0), (2; 3), (3; 3{,}5), (4; +\infty)$. **4.4** $x \in (-2; -1]$,

[-0,5;0).

Занятие 4. Решение задач повышенной сложности.

Задачи. **1.** $x = 81$. **2.** $x \in (-\infty; 1]$. **3.** $x = 0{,}5$. **4.** $x \in (-2; -1], [0; 3)$. **5.** $x = \log_3 2$. **6.** $x \in (-\infty; \log_4 0{,}75], (\log_4 3; +\infty)$. **7.**$x \in [0{,}5; \log_4 11]$. **8.** $x \in (-\log_2 7; -2)$,$(-1; +\infty)$. **9.** $x \in \left(-\infty; 1 - \sqrt{3}\right), \left(1 + \sqrt{3}; +\infty\right)$.

Домашнее задание. **1.** $x = 0, x = 0{,}25$. **2.** $x \in (-\infty; -2), \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **3.** 3.

4. $x \in (0; 2)$. **5.** 2. 6. $x \in [-\log_3 2; 0), (0{,}5 \log_3 2; 1]$. **7.** $x \in (-\infty; 0]$.

8. $x \in [0; +\infty)$. **9.** $x \in (-\infty; 0), (1; \log_3 5)$. **10.** $x \in \left[3 - 2\sqrt{3}; 1 - \sqrt{2}\right]$,

$\left[1 + \sqrt{2}; 3 + 2\sqrt{3}\right]$.

Занятие 6. Основные типы логарифмических уравнений.

Задачи. **1.1** $x = 14$. **1.2** $x = -1, x = 4$. **1.3** $x = -3, x = -1$. **1.4** $x = 2$. **2.1** $x = 5$. **2.2** $x = -2{,}5$. **2.3** $x = 4$. **3.1** $x = 3$. **3.2** $x = -6$. **3.3** $x = -1$. **4.1** $x = 2, x = 3$. **4.2** $x = -10$. **4.3** нет решений. **5.1** $x = 0{,}5, x = 2$. **5.2** $x = 0, x = \frac{1}{3}$.

Домашнее задание. **1.1** $x = 11$. **1.2** $x = -8$. **1.3** $x = 2$. **1.4** $x = 1, x = 4$. **1.5** $x = \pm 3$. **2.1** $x = 26$. **2.2** $x = 5$. **2.3** $x = 1$. **2.4** $x = 3$. **2.5** $x = 3$ **3.1** $x = 1$. **3.2** $x = 6$. **3.3** $x = -1$. 4.1 $x = 6$. 4.2 $x = 15$. 4.3 $x = 8, x = 9$. 4.4 $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$.

Занятие 7. Методы решения логарифмических уравнений.

Задачи. 1.1 $x = 2, x = 5$. **1.2** $x = 25, x = 0{,}04, x = 5^{\frac{1}{2}}, x = 5^{-\frac{1}{2}}$. **1.3** $x = 1$. **1.4** $x = 2^{\log_6 3}$. **2.1** $x = 19^{-5}, x = 1000$. **2.2** $x = 0{,}1, x = 10^{\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}}$. **2.3** $x = 64, x = 0{,}125$. **2.4** $x = 10^{\pm\sqrt{\lg\frac{13}{3}}}$, $x = 10^{\pm\sqrt{\lg\frac{7}{3}}}$. **3.** $x = 100$. **4.1** $x = 0, x = 1$. **4.2** $x = 3$. **5.1** $x = 0{,}25, x = 2$. **5.2** $x = 633, x = 8{,}04$.

Домашнее задание. 1.1 $x = \frac{1}{729}, x = 27$. **1.2** $x = \sqrt{3}$. **1.3** $x = 0{,}125, x = 8$. **1.4** $x = 3$. **1.5** $x = 0{,}125, x = 0{,}5$. **1.6** $x = 5^{-3\log_{30} 6}$. **2.1** $x = 0{,}01, x = 0{,}1, x = 10, x = 100$. **2.2** $x = 0{,}001, x = 1, x = 10$. **2.3** $x = 0{,}001, x = 20$. **2.4** $x = 0{,}01, x = 100$. **3.1** $x = 1000$. **3.2** $x = 1/6, x = 6$. **4.1** $x = 2$. **4.2** $x = 1{,}5$. **5.1** $x = 3^{-4}, x = 3$. **5.2** $x = \frac{7+\sqrt{13}}{2}$.

Занятие 8. Основные методы решения логарифмических неравенств.

Задачи. 1.1 $x \in (0{,}2; 2)$. **1.2** $x \in (1; 2), (3; 4)$. **1.3** $x \in [7; +\infty)$. **1.4** $x \in (0{,}5; 3)$. **1.5** $x \in (1; 2)$. **1.6** $x \in (2; 4)$. **1.7** $x \in (-4; -3), (8; +\infty)$. **2.1** $x \in \left(\frac{1}{3}; 4\right)$.

2.2 $x \in (2; 3)$. **3.1** $x \in \left(1; \frac{26}{25}\right), (26; +\infty)$. **3.2** $x \in (100; 1000)$. **3.3** $x \in (-10; -0{,}001)$. **3.4** $x \in (-\infty; -119], [1; 6)$. **4.1** $x \in (0; 1), (2; +\infty)$.

4.2 $x \in \left(-\infty; \log_4\left(\sqrt{3} - 1\right)\right), (1{,}5; +\infty)$. **4.3** $x \in (0; 0{,}5], \left(1; 2^{\frac{1}{2}}\right], (2; +\infty)$.

Домашнее задание. 1.1 $x \in (-0{,}5; 2)$. **1.2** $x \in (0; 0{,}6]$. **1.3** $x \in \left[-7; -\sqrt{35}\right]$, $\left[5; \sqrt{35}\,\right]$. **1.4** $x \in (-\infty; -1{,}5), (3; +\infty)$. **1.5** $x \in (3; 4], [6; +\infty)$. **1.6** $x \in (-0{,}2; 3)$

1.7 $x \in (1; 5)$. **2.1** $x \in (-4; -3), (2; +\infty)$. **2.2** $x \in \left(-1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 2\right)$.

2.3 $x \in (3; 5]$. **3.1** $x \in (3; 3{,}5], [6; +\infty)$. **3.2** $x \in (0; 0{,}01), (10; +\infty)$.

3.3 $x \in [0; 1]$. **3.4** $x \in (-\infty; 0], \left[\frac{63}{32}; 2\right)$. **4.1** $x \in (0; 0{,}1), (10; 1000), (10000; +\infty)$

4.2 $x \in (0; 0{,}01), (0{,}1; 1000)$. **4.3** $x \in (0{,}25; 0{,}5], [2; +\infty)$. **4.4** $x \in (3; 0{,}5]$, $(1; 32]$. **4.5** $x \in (0{,}5; 1)$.

Занятие 9. Решение логарифмических неравенств с переменным основанием

Задачи. 1.1 $x \in (1{,}5; 2)$. **1.2** $x \in (-3; -1)$. **1.3** $x \in (-\infty; -1), [5; +\infty)$.

1.4 $x \in \left(0; \frac{\sqrt{13}-3}{2}\right), (1; +\infty)$. **1.5** $x \in (\log_3 10\,; +\infty)$. **2.1** $x \in (4; 10)$.

2.2 $x \in (0; 1), \left(\frac{\sqrt{13}-1}{2}; 3\right)$. **3.** $x \in \left[3^{-\sqrt{2}}; 1\right), [3; +\infty)$. **4.** $x \in (1; 2), (3; 7)$.

Домашнее задание. 1.1 $x \in (-2; -0{,}5), (0; 1)$. **1.2** $x \in (0; 0{,}5), \left(2; 2\sqrt{2}\right)$.

1.3 $x \in (0; 1), [2; 3), [6; +\infty)$. **1.4** $x \in \left[\frac{9-\sqrt{17}}{4}; 2\right)$. **1.5** $x \in (\log_9 7\,; 1), (1; +\infty)$.

1.6 $x \in \left(\frac{\sqrt{21}-3}{2}; -1\right), (1; +\infty)$. **1.7** $x \in (5; +\infty)$. **2.1** $x \in (0; 1), (2; 6)$.

2.2 $x \in (2; +\infty)$. **3.** $x \in \left(0; 7^{-\sqrt{6}}\right], (1; 49]$.

Занятие 10. Метод декомпозиции (рационализации)

Задачи. 1.1 $x \in (-5; -2), (2; 3), (3; 5)$. **1.2** $x \in \left[-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right], \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right]$. **1.3** $x \in (-1; 5)$. **2.1** $x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. **2.2** $x \in \left[-\frac{1}{3}; -\frac{1}{6}\right), \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right]$. **3.1** $x \in [0; 1]$, $(3; +\infty)$. **3.2** $x \in [2; 4)$. **3.3** $x \in (-6; -4], [-3; +\infty)$. **3.4** $x \in (1; 2), (2; 3)$.

4.1 $x \in (-3; -2], (2; 3)$. **4.2** $x \in \left(2; 4-\sqrt{2}\right), \left(4-\sqrt{2}; 3\right)$. **5.** $x \in (1; 2), (3; +\infty)$.

Домашнее задание. 1.1 $x \in \left[-\frac{2}{3}; 0\right), \left(0; \frac{2}{3}\right]$. **1.2** $x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{16}}{6}\right), \left(\frac{\sqrt{16}}{6}; +\infty\right)$.

1.3 $x \in (0; 0{,}25], (0{,}5; +\infty)$. **1.4** $x \in [2; 3)$. **2.1** $x \in [2; 3], [4; +\infty)$. **2.2** $x \in (1; 2)$. 2.3 $x \in (5; 9], [10; +\infty)$. 2.4 $x \in (-5; -4), \{0\}$. 2.5 $x \in (-\infty; 0)$, $(5; +\infty)$. **3.1** $x \in (-2; -1], (1; 2)$. **3.2** $x \in \left(1; 3-\sqrt{2}\right), \left(3-\sqrt{2}; 2\right)$.

3.3 $x \in \left(-9;\ 3-\sqrt{2}\right), \left(3-\sqrt{2}; 2\right), \left(4; 3+\sqrt{2}\right), \left(3+\sqrt{2}; +\infty\right)$. **4.** $x \in (-\infty; -7)$, $(-5; -2], [4; +\infty)$. **5.** $x \in \left(0; \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{6}\right)$.

Занятие 11. Решение задач повышенной сложности

Задачи. 1. $x \in (0; 1), (1; 2)$. **2.** $x \in (-\infty; -4), (4; +\infty)$. **3.** $x \in (-7; -6)$,

$[-3;0),(0;1),(1;4]$. **4.** $x\in\left(-\infty;-2-\sqrt{3+\sqrt{5}}\right),\left(-3;-2-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right),$

$\left(-2+\sqrt{3-\sqrt{5}};-1\right),\left(-2+\sqrt{3+\sqrt{5}};\ +\infty\right)$. **5.** $x\in(0;0{,}01],[0{,}1;1]$.

6. $x\in\left(\frac{\sqrt{6}-6}{3};-1\right)$.

Домашнее задание. 1. $x\in(-1;0),(4;5]$. **2.** $x\in\left(\sqrt{2}+1;\sqrt{3}+1\right]$.

3. $x\in(-\infty;-3),(3;+\infty)$. **4.** $x\in[-9;-4),(-4;-1),\left(-\frac{1}{81};0\right)$.

5. $x\in\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{6}-4}{5}\right),\left(1;\sqrt{2}\right)$. **6.** $x\in\left(-\frac{1}{6};0\right),\left(0;\frac{1}{3}\right)$. **7.** $x\in(0;1),\{7\}$. **8.** $x=\frac{7}{4}$.

Занятие 12. Решение смешанных систем

Задачи. 1. $(0;1),(1;0)$. **2.** $(9;7),(9;-7)$. **3.** $(4;1)$. **4.** $\left(9;3^{\frac{2}{3}}\right),\left(3^{\frac{2}{3}};9\right)$.

5. $x\in[-3;-1),(-1;0),(0;1),(1;3]$. **6.** $(-2;-2),(4;-2)$. **7.** $x\in(-3;-2),\{2\}$

8. $x\in(-\infty;-2]$.

Домашнее задание. 1. $(-2;0)$. **2.** $\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$. **3.** $\left(4;3\sqrt[3]{3}\right),\left(4^{-\frac{7}{6}};3^{-\frac{43}{36}}\right)$.

4. $(0;1),(0;-1)$. **5.** $(-4;4),(7;4)$. **6.** $x\in(2;+\infty)$. **7.** $x\in\left(1-\sqrt{2};\frac{2}{3}\right),\{2\}$.

8. $x\in\left[0;\frac{1}{6}\right],\{6\}$. **9.** $(2;-3),(-6;1)$.

Занятие 13. Решение смешанных систем

Задачи. 1. $x\in(0{,}4;0{,}5),(1;2]$. **2.** $x\in(9{,}3;10)$. **3.** $x\in[2;+\infty)$. **4.** $x=-5$.

5. $x\in\left[\frac{10}{9};2\right)$. **6.** $x\in(1;2)$. **7.** $x\in\left(3;5-\sqrt{3}\right),(7;+\infty)$.

Домашнее задание. 1.$x\in\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right),(1;2]$. **2.** $x\in(6{,}4;7)$. **3.** $x=6$.

4. $x\in[5;+\infty)$. **5.** $x\in[-1;0),(0;2{,}5),(\log_2 6;3)$. **6.** $x\in\left(-\frac{1}{3};0\right),\{1\}$.

7. $x\in\left(\log_4\frac{2}{3};0\right),[\log_2 1{,}5\,;2]$. **8.** $x\in\left(-2;\log_2\left(\sqrt{2}-1\right)\right],[1;2)$.

9. $x\in(0;0{,}04],[25;+\infty)$. **10.** $x\in(0;2{,}5],[4{,}5;+\infty)$.

Список использованной литературы

1. А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонский, М.С.Якир. Алгебраический тренажер. Москва, издательство «Илекса», 2001.

2. В.В.Ткачук. Математика абитуриенту. МЦНМО, 2001

3. В.П.Моденов. Математика. Москва, издательство «Новая волна», 2002.

4. Математика. Сборник задач с решениями для поступающих в ВУЗы. Под редакцией В.М.Говорова, Н.В.Мирошина. Москва, издательство «Астель», 2002.

5. Корянов А.Г. Прокофьев А.А. Системы неравенств с одной переменной.

6. Нараленков М.И. Вступительный экзамен по математике. Алгебра. Москва, издательство «Экзамен», 2003.

Оглавление