ТРИГОНОМЕТРИЯ

Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Градусное измерение угловых величин

Фигура, состоящая из двух различных лучей с общим началом и ограниченной ими части плоскости, называется *углом*.

Если стороны угла образуют прямую, то такой угол называется *развернутым*. Величина развернутого угла равна $180°$.

Если на оси Ox справа от начала координат отметить точку A и провести через нее окружность с центром в точке O, то радиус OA называется ***начальным радиусом***.

Условились считать:

угол поворота отрицательным, если повернуть начальный радиус около точки O по часовой стрелке,

угол поворота положительным, если повернуть начальный радиус против часовой стрелки.

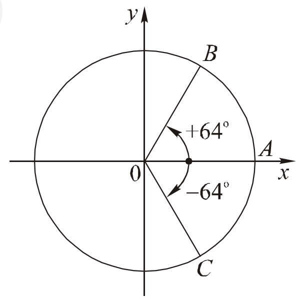


Рис. 1.1

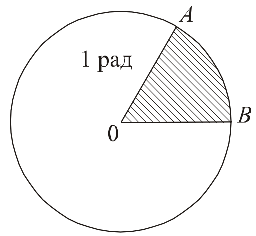


Рис. 1.2

На рис. 1.1 показаны повороты на $-64°$ и на $+64°$. В первом случае начальный радиус перешел в радиус OC, во втором – в радиус OB.

За единицу измерения углов и дуг принимают соответственно угол в 1 градус и дугу в 1 градус (обозначают 1°).

Угол в 1° – это угол, который опишет начальный радиус, совершив $1/360$ часть полного оборота вокруг своей начальной точки против часовой стрелки.

$1/60$ часть градуса называется минутой (обозначают $1'$).

$1/60$ часть минуты называется секундой (обозначают $1''$).

Радианное измерение угловых величин

Рассмотрим еще одну единицу измерения величины угла – 1 радиан.

Угол в 1 радиан есть центральный угол, опирающийся на такую дугу окружности, длина которой равна радиусу этой окружности (рис. 1.2).

Если начальный радиус совершит один полный оборот, то получится угол, равный 360° или 2π радианам.

Радианная мера 1° равна $\dfrac{2\pi}{360}=\dfrac{\pi}{180}$.

Если угол содержит A°, то его радианная мера

$$\alpha=\frac{A\pi}{180}.$$

Из последнего равенства следует, что угол, равный α радианам, содержит

$$\frac{\alpha 180}{\pi}\ \text{градусов.}$$

Длина дуги в α радиан определяется по формуле

$C=\alpha R$ (R – радиус окружности).

Длина дуги в A° определяется по формуле

$$C=\frac{\pi R A^{\circ}}{180^{\circ}}.$$

Поскольку $180^{\circ}=\pi$, то

$360^{\circ}=2\pi$; $90^{\circ}=\dfrac{\pi}{2}$; $60^{\circ}=\dfrac{\pi}{3}$; $45^{\circ}=\dfrac{\pi}{4}$; $30^{\circ}=\dfrac{\pi}{6}$ и т.д.

П р и м е р ы

1. ***Выразить в радианах величину угла*** A ***, если*** $A=150^{\circ}$.

□ $150^{\circ}=150\dfrac{\pi}{180}$ рад $=\dfrac{5\pi}{6}$ рад.

2. ***Выразить в градусах величину угла*** α ***, если*** $\alpha=4{,}5$ рад.

□ $4{,}5$ рад $=4{,}5\dfrac{180^{\circ}}{\pi}\approx 258^{\circ}$.

3. ***Найти длину дуги окружности радиуса*** 16 см ***, если дуга содержит*** $\dfrac{\pi}{4}$ ***радиана.***

□ Длина дуги в k радиан определяется формулой $C=kR$. Поэтому

$$C=16\frac{\pi}{4}=4\pi\ \text{см}.$$

4. ***Найти площадь сектора радиусом*** 20 см ***, если дуга сектора содержит*** $3\pi/4$ ***радиана.***

□ Площадь сектора в k радиан определяется формулой $S=kr^2/2$, где r – радиус круга. Поэтому $S=\dfrac{3\pi}{4}\dfrac{20^2}{2}=150\pi$ см^2.

Синус и косинус числового аргумента

Рассмотрим единичную окружность, т.е. окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 1 (рис. 1.3). На единичной окружности отметим точку $P_0(1;0)$. При повороте начального радиуса около центра O на угол α радиан точка $P_0(1;0)$ перейдет в точку P_α. Обозначим координаты этой точки через x_α и y_α. (Заметим, что поворот можно осуществить как в положительном, так и в отрицательном направлениях).

О п р е д е л е н и я:

Синусом угла α называют отношение ординаты точки P_α к радиусу, т.е.

$$\sin\alpha=\frac{y_\alpha}{R}=y_\alpha.$$

Oy – называют линией синуса.

Косинусом угла α называется отношение абсциссы точки P_α к радиусу, т.е.

$$\cos\alpha=\frac{x_\alpha}{R}=x_\alpha.$$

Ox – называют линией косинуса.

Каждому углу α соответствует единственная точка $P_\alpha(x_\alpha;y_\alpha)$ и, следовательно, единственное значение синуса и косинуса этого числа.

Таким образом, $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ являются функциями числового аргумента. (Заметим, что в курсе геометрии мы рассматривали $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ как функции угловой величины α, а не числа α.)

Основное соотношение между $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

Координаты любой точки $P_\alpha(x_\alpha;y_\alpha)$ единичной окружности удовлетворяют уравнению: $x^2+y^2=1$ (это следует из прямоугольного треугольника, катеты которого $|x_\alpha|$ и $|y_\alpha|$, а гипотенуза равна 1 (рис. 1.3). Отсюда

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\quad \text{где } \alpha\in R.$$

Из этой формулы следует, что:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}\ ; \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}\ .$$

В практических вычислениях часто используются значения синуса и косинуса, приведенные в табл. 1.1.

Таблица 1.1

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

Знаки синуса и косинуса по четвертям

Знаки $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ определяются знаками ординаты y_α и абсциссы x_α соответствующей точки единичной окружности.

Если $0 < \alpha < \pi/2$ (P_α в первой координатной четверти), то числу α соответствует точка окружности P_α, координаты которой $x_\alpha > 0$ и $y_\alpha > 0$. Следовательно, на числовом промежутке $(0;\pi/2)$ $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$ (рис. 1.3).

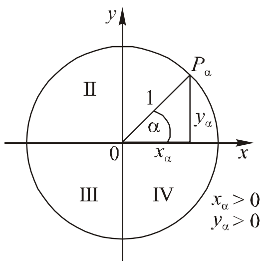


Рис. 1.3

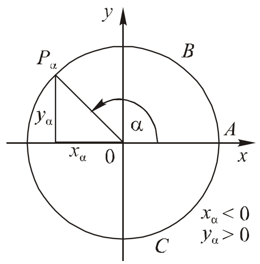


Рис. 1.4

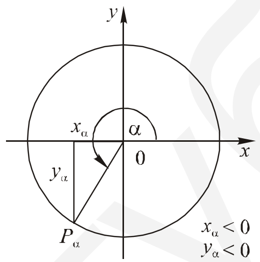


Рис. 1.5

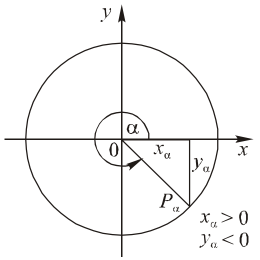


Рис. 1.6

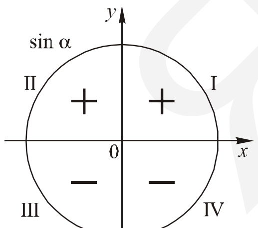


Рис. 1.7

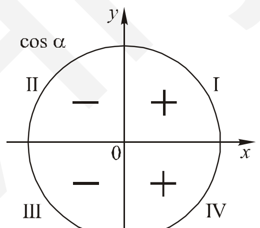


Рис. 1.8

Если $\pi/2 < \alpha < \pi$ (P_α во второй координатной четверти), то, рассуждая аналогично, $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$ (рис. 1.4).

Если $\pi < \alpha < 3\pi/2$ (P_α в третьей координатной четверти), то $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$ (рис 1.5).

Если $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$ (P_α в четвертой координатной четверти), то $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$ (рис. 1.6).

Схематически знаки $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ изображены на рис. 1.7 и 1.8 соответственно.

Примеры

5. ***Определить знак произведения***

$$\sin 67^\circ \cos 267^\circ \cos 375^\circ \sin(-68^\circ)\cos(-68^\circ)\sin 2\ .$$

☐ $\sin 67^\circ > 0$, так как угол 67° является углом первой четверти, а синус в первой четверти положителен;

$\cos 267^\circ < 0$, так как угол 267° является углом третьей четверти, а косинус в этой четверти отрицателен;

$\cos 375^\circ > 0$, так как угол 375° является углом первой четверти, а косинус в этой четверти положителен;

$\sin(-68^\circ) < 0$, так как угол – 68° является углом четвертой четверти, а синус в этой четверти отрицателен;

$\cos(-68^\circ) > 0$, так как угол – 68° является углом четвертой четверти, а косинус в этой четверти положителен;

$\sin 2 > 0$, так как угол, величина которого 2 радиана, является углом второй четверти, а синус во второй четверти положителен.

Ответ: произведение имеет положительный знак.

6. ***Сравнить значения выражений:***

$$\sin 45^\circ;\quad \cos(-90^\circ);\quad \sin 210^\circ;\quad \sin 180^\circ;\quad \cos(-45^\circ).$$

☐ $\sin 45^\circ = \sqrt{2}/2$; $\cos(-90^\circ) = 0$; $\sin 210^\circ = -1/2$; $\sin 180^\circ = 0$; $\cos(-45)^\circ = \sqrt{2}/2$.

Ответ: $\sin 210^\circ < \sin 180^\circ = \cos(-90^\circ) < \sin 45^\circ = \cos(-45^\circ)$.

7. ***Доказать тождество***

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + \sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha = 2 + \sin^2\alpha\ .$$

☐ В левой части тождества произведем указанные действия и приведем подобные члены:

$$2 + \sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha = 2 + \sin^2\alpha\ .$$

Преобразуем левую часть равенства:

$$2+(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)+\cos^2\alpha=$$
$$=2+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=2+\sin^2\alpha\ .$$

Следовательно, $2+\sin^2\alpha=2+\sin^2\alpha$. Тождество доказано.

8. ***Вычислить значение*** $\cos\alpha$ ***, если*** $\sin\alpha=-\dfrac{1}{8}$***, где*** $\pi<\alpha<\dfrac{3}{2}\pi$.

□ Найдем значение косинуса, используя формулу $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\frac{1}{64}}=\pm\frac{\sqrt{63}}{8}\ .$$

Выясним, какой знак надо оставить перед корнем. По условию $\pi<\alpha<3/2\pi$, т.е. P_α принадлежит III четверти, а косинус в этой четверти отрицателен. Следовательно, перед корнем надо оставить знак «минус».

Ответ: $\cos=-\dfrac{\sqrt{63}}{8}$.

Тангенс и котангенс числового аргумента

Определения:

Тангенсом числа α называется отношение ординаты точки P_α к ее абсциссе (рис. 1.3), т.е.

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_\alpha}{x_\alpha}.$$

Котангенсом числа α называется отношение абсциссы точки P_α к ее ординате (рис. 1.3), т.е.

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x_\alpha}{y_\alpha}.$$

Значение тангенса и котангенса для чисел $0;\ \frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{3\pi}{2};\ 2\pi$ легко найти из формул

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \cos\alpha\neq0 \qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \sin\alpha\neq0$$

(значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ возьмем из табл. 1.2).

Аналогично находим остальные значения. Заметим, что для некоторых чисел $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ не существуют. Например, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}=\frac{\sin(\pi/2)}{\cos(\pi/2)}=\frac{1}{0}$ (не имеет смысла).

В табл. 1.2 приведены значения тангенса и котангенса.

Знаки значений тангенса и котангенса можно определить по знакам значений синуса и косинуса.

Таблица 1.2

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$	Не существует	0	Не существует	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	Не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	Не существует	0	Не существует

Заметим, что знаки значений тангенса и котангенса можно легко определить по знаку ординаты и абсциссы.

Так как в I и III четвертях знаки значений синуса и косинуса одинаковые, а именно: в I четверти $\sin\alpha>0$ и $\cos\alpha>0$, а в III четверти $\sin\alpha<0$ и $\cos\alpha<0$, то в этих четвертях $\operatorname{tg}\alpha>0$ и $\operatorname{ctg}\alpha>0$.

Так как во II и IV четвертях знаки значений синуса и косинуса разные, а именно: во II четверти $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha<0$, а в IV четверти $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha>0$, то в этих четвертях $\operatorname{tg}\alpha<0$ и $\operatorname{ctg}\alpha<0$.

Ось тангенсов и котангенсов

Окружность, описанную концом *p* радиуса называют *единичной окружностью*.

Касательная к единичной окружности в точке ее пересечения с положительной частью оси абсцисс, направленная одинаково с осью ординат, называется *осью тангенсов* (рис. 1.9).

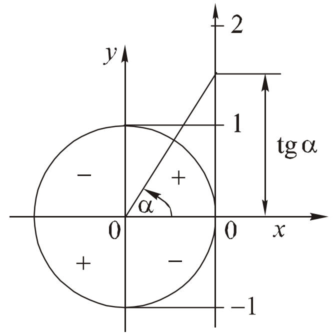


Рис. 1.9

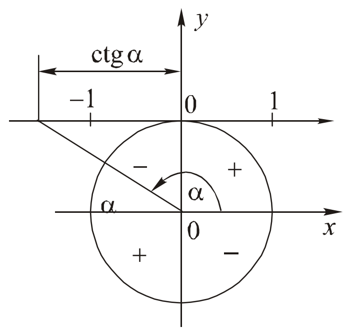


Рис. 1.10

Тангенс угла α равен алгебраической величине отрезка оси тангенсов, отсекаемого от нее продолжением радиуса (см. рис. 1.9).

Аналогично определяется *ось котангенса* (см. рис. 1.10).

Котангенс угла α равен алгебраической величине отрезка оси котангенсов, отсекаемого от нее продолжением радиуса.

Тригонометрические тождества

Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \ \alpha \in R. \quad (1)$$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}. \quad (2)$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}. \quad (3)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \ \cos\alpha \neq 0. \quad (4)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \ \sin\alpha \neq 0. \quad (5)$$

Дополнительные тождества

Из формул (4) и (5) следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1, \quad \sin\alpha \neq 0, \ \cos\alpha \neq 0. \quad (6)$$

Из формулы (6) следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}, \quad (7)$$

$$\sin\alpha \neq 0, \ \cos\alpha \neq 0.$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \quad (8)$$

Разделив обе части тождества (1) на $\cos^2\alpha$, получим

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \ \cos\alpha \neq 0. \quad (9)$$

Разделив обе части тождества (1) на $\sin^2\alpha$, получим

$$\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \ \sin\alpha \neq 0. \quad (10)$$

Примеры

9. ***Упростить выражение*** $\dfrac{\sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha}$.

□ Будем полагать, что данное выражение имеет смысл при всех допустимых значениях α.

Упростим числитель:

$$\sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha(\cos^2\alpha - 1) = -\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha.$$

Упростим знаменатель:

$$\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha(\sin^2\alpha - 1) = -\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha.$$

Таким образом,

$$\frac{\sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{-\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha}{-\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^6\alpha.$$

10. ***Дано:*** $\cos\alpha = -0{,}6$, $90° < \alpha < 180°$; ***вычислить значения остальных тригонометрических функций.***

□ Используем тождество $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Перед радикалом оставим знак «плюс», потому что синус во второй четверти положителен. Таким образом,

$$\sin\alpha = \sqrt{1-0{,}36} = 0{,}8; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}8}{-0{,}6} = -\frac{4}{3};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-0{,}6}{0{,}8} = -\frac{3}{4}.$$

11. ***Дано***: $\sin x + \cos x = k$. ***Найти*** $\sin^4 x + \cos^4 x$.

□ Дополним выражение $\sin^4 x + \cos^4 x$ до квадрата двучлена:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x =$$
$$= 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - 2(\sin x\cos x)^2.$$

Возведем обе части равенства $\sin x + \cos x = k$ в квадрат. Получим

$$1 + 2\cos x\sin x = k^2,$$

откуда

$$\sin x\cos x = \frac{k^2-1}{2}.$$

Тогда

$$1 - 2(\sin x\cos x)^2 = 1 - 2\left(\frac{k^2-1}{2}\right)^2 = 0{,}5 + k^2 - 0{,}5k^4.$$

Ответ: $\sin^4 x + \cos^4 x = 0{,}5 + k^2 - 0{,}5k^4, \quad \forall k \in \left[-\sqrt{1+\sqrt{3}};\ \sqrt{1+\sqrt{3}}\right]$.

Дополнительные свойства тригонометрических функций

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса не изменяются при прибавлении к данному углу целого числа оборотов.

При повороте радиуса OA на угол α получим радиус OB (рис. 1.11), тот же радиус получится и при повороте OA на угол, отличающийся от α на любое целое число оборотов. Следовательно, значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса любого угла определяются их значениями для неотрицательного угла, меньшего $360°$. Например:

$$\cos 785° = \cos(2 \cdot 360° + 65°) = \cos 65° .$$

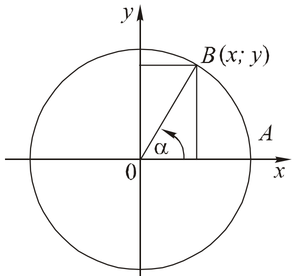


Рис. 1.11

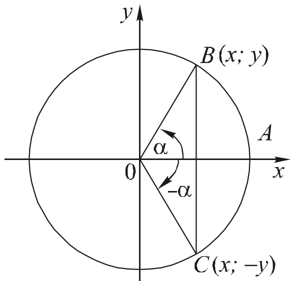


Рис. 1.12

Формулы, выражающие зависимость между синусами, косинусами, тангенсами и котангенсами противолежащих углов

Пусть координаты точки B равны x и y (рис. 1.11), а координаты точки C (рис. 1.12) равны x и $-y$, тогда

$$\sin(-\alpha) = \frac{-y}{R} = -\frac{y}{R} = -\sin\alpha \text{, т.е. } \sin(-\alpha) = -\sin\alpha . \qquad (11)$$

$$\cos(-\alpha) = \frac{x}{R} = \cos\alpha \text{, т.е. } \cos(-\alpha) = \cos\alpha . \qquad (12)$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\operatorname{tg}\alpha \text{, т.е. } \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha . \qquad (13)$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y} = -\operatorname{ctg}\alpha \text{, т.е. } \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha . \qquad (14)$$

Глава 2. ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Формулы приведения

Формулами приведения называются соотношения, с помощью которых значения тригонометрических функций аргументов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$, выражаются через значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$. Все формулы приведения сведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Функция β	Аргумент β							
	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
sin	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
ctg	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$

Не надо запоминать приведенные формулы, если использовать следующие правила:

- **при переходе от функции углов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ к функциям угла α название функции изменяют на сходное: синус на косинус, тангенс на котангенс, и наоборот**;
- **при переходе от функции углов $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ к функциям угла α название функции сохраняют**;
- **считая α острым углом (т.е. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), перед функцией угла α ставят такой знак, какой имеет приводимая функция углов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$.**

Например, $\sin\left((3\pi/2) - \alpha\right) = -\cos\alpha$, т.е. заменили название функции на сходное, от $3\pi/2$ отняли острый угол α и попали в третью четверть, где синус отрицателен, перед косинусом поставили знак минус.

Исходя из известных значений тригонометрических функций некоторых углов (см. главу 1), соответствия между градусной и радианной мерами величины угла и формул приведения, можно составить таблицу значений тригонометрических функций для наиболее часто встречающихся значений аргумента (табл. 2.2).

Таблица 2.2

Функция	Аргумент							
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не существует	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	Не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

Функция	Аргумент								
	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\alpha$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не существует	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	Не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	Не существует

Примеры

1. ***Привести к тригонометрической функции острого угла:***

а) $\sin 1914°$; б) $\cos 1914°$; в) $\cos(-1560°)$; г) $\sin(-1560°)$; д) $\operatorname{tg} 23{,}7\pi$.

□ а) $\sin 1914° = \sin(360°\cdot 5 + 114°) = \sin 114° =$
$= \sin(90° + 24°) = \cos 24°$ (у синуса период $360°$, или 2π);

б) $\cos 1914° = \cos(360\cdot 5) + 114° = \cos 114° =$
$= \cos(90° + 24°) = -\sin(24°)$ (у косинуса период $360°$, или 2π);

в) $\cos(-1560°) = \cos 1560° = \cos(360°\cdot 4 + 120°) =$
$= \cos 120° = \cos(90° + 30°) = -\sin 30° = -0{,}5$;
здесь использовали отношение $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$;

г) $\sin(-1560°) = -\sin 1560° = -\sin(360°\cdot 4 + 120°) =$
$= -\sin 120° = -\sin(90° + 30°) = -\cos 30° = -\sqrt{3}/2$.
здесь использовали соотношение $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

д) $\operatorname{tg} 23{,}7\pi = \operatorname{tg}(23\pi + 0{,}7\pi) = \operatorname{tg}(0{,}7\pi) = \operatorname{tg}(\pi - 0{,}3\pi) = -\operatorname{tg} 0{,}3\pi$.

Упростить выражения:

2. $\dfrac{\operatorname{tg}(180° - \alpha)\cos(180° - \alpha)\operatorname{tg}(90° - \alpha)}{\sin(90° + \alpha)\operatorname{ctg}(90° + \alpha)\operatorname{tg}(90° + \alpha)}$.

□ $\dfrac{\operatorname{tg}(180° - \alpha)\cos(180° - \alpha)\operatorname{tg}(90° - \alpha)}{\sin(90° + \alpha)\operatorname{ctg}(90° + \alpha)\operatorname{tg}(90° + \alpha)} = \dfrac{(-\operatorname{tg}\alpha)(-\cos\alpha)\operatorname{ctg}\alpha}{\cos\alpha(-\operatorname{tg}\alpha)(-\operatorname{ctg}\alpha)} = 1$.

3. $\cos(\alpha - 90°) + \sin(\alpha - 180°) + \operatorname{tg}^2(180° - \alpha) + \operatorname{ctg}^2(\alpha - 180°)$.

□ $\cos(\alpha - 90°) = \cos[-(90° - \alpha)] = \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$;
здесь мы использовали соотношение $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

$$\sin(\alpha - 180°) = \sin[-(180° - \alpha)] = -\sin(180° - \alpha) = -\sin\alpha;$$

здесь мы использовали соотношение $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

$$\operatorname{tg}^2(180° - \alpha) = [\operatorname{tg}(180° - \alpha)]^2 = (-\operatorname{tg}\alpha)^2 = \operatorname{tg}^2\alpha.$$

$$\operatorname{ctg}^2(\alpha - 180°) = [\operatorname{ctg}(\alpha - 180°)]^2 = [\operatorname{ctg}(-(180° - \alpha))]^2 =$$
$$= [-\operatorname{ctg}(180° - \alpha)]^2 = [\operatorname{ctg}(180° - \alpha)]^2 = (-\operatorname{ctg}\alpha)^2 = \operatorname{ctg}^2\alpha;$$

здесь мы использовали соотношение $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$ и свойство степени с четным показателем.

Теперь данное выражение можно записать в виде

$$\sin\alpha - \sin\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha.$$

Формулы сложения

Синус суммы и разности двух аргументов:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\,, \qquad (1)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\,. \qquad (2)$$

Косинус суммы и разности двух аргументов:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\,, \qquad (3)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\,. \qquad (4)$$

Тангенс суммы и разности двух аргументов:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \qquad (5)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (6)$$

Котангенс суммы и разности двух аргументов:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}, \qquad (7)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}. \qquad (8)$$

Примеры

4. ***Вычислить без таблиц:*** $\sin 105^\circ$; $\operatorname{tg}15^\circ$.

☐ Представим 105° в виде суммы $60^\circ+45^\circ$. Тогда

$$\sin 105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)=\sin 60^\circ\cos 45^\circ+\sin 45^\circ\cos 60^\circ=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right).$$

Представим 15° в виде разности $45^\circ-30^\circ$. Тогда

$$\operatorname{tg}15^\circ=\operatorname{tg}(45^\circ+30^\circ)=\frac{\operatorname{tg}45^\circ-\operatorname{tg}30^\circ}{1+\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}30^\circ}=2-\sqrt{3}\,.$$

5. ***Вычислить*** $\cos(\alpha-\beta)$, ***если*** $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $\sin\beta=-\frac{3}{5}$ ***и*** $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$.

☐ Находим значения $\sin\alpha$ и $\cos\beta$ с учетом четверти, которой принадлежат P_α и P_β.

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}\,;$$

$$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}\,.$$

Подставляя найденные значения в соотношение (4), получим

$$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{4}{5}\frac{4}{5}+\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{7}{25}\,.$$

6. ***Доказать, что*** $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha=1$, ***если*** $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$.

☐ Имеем: $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha)=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)\times$

$$\times(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha)=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha)=$$

$$=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=1\,.$$

Формулы двойного угла

Из формул синуса и косинуса суммы получают формулы синуса и косинуса двойного угла.

Если в соотношениях

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\,,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

положить $\alpha=\beta$, то получим:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\,, \qquad (9)$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\,. \qquad (10)$$

Выразив правую часть формулы (10) через одну тригонометрическую функцию (синус или косинус), придем к соотношениям

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha,\quad \cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1\,. \qquad (11)$$

Из формул (11) можно выразить $\sin^2\alpha$ и $\cos^2\alpha$ через $\cos 2\alpha$:

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},\quad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\,. \qquad (12)$$

Полагая в формуле тангенса суммы $\alpha=\beta$, получаем формулу тангенса двойного угла:

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\,. \qquad (13)$$

Эта формула справедлива при $\alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}$, где $k \in Z$, и $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi m$, где $m \in Z$.

Кроме перечисленных выше формул (9) – (13), полезно знать и следующие формулы:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha; \ \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad (14)$$

Примеры

7. ***Вычислить без таблиц*** $\sin 75^\circ \sin 15^\circ$.

□ $\sin 75^\circ \sin 15^\circ = \sin(90^\circ - 15^\circ)\sin 15^\circ = \cos 15^\circ \sin 15^\circ =$

$= \dfrac{2\cos 15^\circ \sin 15^\circ}{2} = \dfrac{\sin 30^\circ}{2} = \dfrac{1}{4}$.

8. ***Упростить выражение*** $1 - \cos\left(\dfrac{\alpha}{2} - 3\pi\right) - \cos^2\dfrac{\alpha}{2} + \sin^2\dfrac{\alpha}{4}$.

□ $1 - \cos\left(\dfrac{\alpha}{2} - 3\pi\right) - \cos^2\dfrac{\alpha}{4} + \sin^2\dfrac{\alpha}{4} =$

$= 1 - \cos\left(3\pi - \dfrac{\alpha}{2}\right) - \left(\cos^2\dfrac{\alpha}{4} - \sin^2\dfrac{\alpha}{4}\right) = 1 + \cos\dfrac{\alpha}{2} - \cos\dfrac{\alpha}{2} = 1$.

9. ***Доказать тождество*** $\operatorname{tg} 4\alpha - \sec 4\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}$.

□ $\operatorname{tg} 4\alpha - \sec 4\alpha = \dfrac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha} - \dfrac{1}{\cos 4\alpha} = \dfrac{2\sin 2\alpha \cos 2\alpha - \sin^2 2\alpha - \cos^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha} =$

$= -\dfrac{(\sin 2\alpha - \cos 2\alpha)^2}{(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha)(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)} = \dfrac{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}$.

10. ***Доказать, что*** $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \dfrac{1}{8}$.

□ Умножив и разделив левую часть равенства на $2\cos 10^\circ$, получим:

$$\frac{2\cos 10^\circ \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ}{2\cos 10^\circ} = \frac{\sin 20^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ}{2\cos 10^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 20^\circ \cos 20^\circ \sin 50^\circ}{2\cos 10^\circ} = \frac{\sin 40^\circ \sin 50^\circ}{2 \cdot 2\cos 10^\circ} = \frac{\sin 40^\circ \cos 40^\circ}{4\cos 10^\circ} = \frac{\sin 80^\circ}{2 \cdot 4\cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ}{8\cos 10^\circ} = \frac{1}{8}.$$

11. ***Доказать тождество*** $3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha$.

□ $3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 2 + 4\cos 2\alpha + 1 + \cos 4\alpha =$

$= 2 + 4\cos 2\alpha + 2\cos^2 2\alpha = 2(1 + 2\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha) =$

$= 2(1 + \cos 2\alpha)^2 = 2(2\cos^2\alpha)^2 = 2 \cdot 4\cos^4\alpha = 8\cos^4\alpha$.

12. ***Дано***: $\sin\alpha = 0{,}8$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. ***Вычислить***: $\sin 2\alpha$; $\cos 2\alpha$; $\operatorname{tg} 2\alpha$.

□ $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - 0{,}64} = 0{,}6$.

Значение функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ подставим в формулу (9), получим $\sin 2\alpha = 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}96$.

Значения двух функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ подставим в формулу (10), получим $\cos 2\alpha = (0{,}6)^2 - (0{,}8)^2 = -0{,}28$.

Значения $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ подставим в формулу (13), получим $\operatorname{tg} 2\alpha = -\dfrac{0{,}96}{0{,}28} = -\dfrac{24}{7}$.

Упростить выражения:

13. $2\sin^2(45^\circ + 1{,}5\alpha) - 1$.

□ Вынесем –1 за скобки и воспользуемся формулой (11):

$2\sin^2(45^\circ + 1{,}5\alpha) - 1 = -(1 - 2\sin^2(45^\circ + 1{,}5\alpha)) = (-\cos 2(45^\circ + 1{,}5\alpha)) =$

$= -\cos(90^\circ + 3\alpha) = \sin 3\alpha$.

14. $1 - 8\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

□ Воспользуемся формулой (9), получим

$1 - 8\cos^2\alpha\sin^2\alpha = 1 - 2 \cdot 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 2(2\sin\alpha\cos\alpha)^2 = 1 - 2\sin^2 2\alpha$,

а это выражение по формуле (11) равно $\cos 4\alpha$. Таким образом, $1 - 2\sin^2 2\alpha = \cos 4\alpha$.

Имеем: $\sin\alpha = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $\quad 1 + \cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$.

15. $\dfrac{\sin\alpha + \sin\frac{\alpha}{2}}{1 + \cos\alpha + \cos\frac{\alpha}{2}}$.

□ Разложим числитель и знаменатель данного выражения на множители:

$$\frac{\sin\alpha + \sin\frac{\alpha}{2}}{1 + \cos\alpha + \cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\left(2\cos\frac{\alpha}{2} + 1\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\left(2\cos\frac{\alpha}{2} + 1\right)} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

Формулы для преобразования синуса и косинуса в сумму получаются из формул сложения для синуса и косинуса. Запишем формулы для синуса суммы и синуса разности углов α и β:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Сложив почленно эти равенства и разделив результат на 2, получим

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}. \qquad (15)$$

Аналогично получаем

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}. \qquad (16)$$

Вычитая из второго равенства первое, получаем:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}. \qquad (17)$$

Полезно также знать формулы преобразования произведения тангенсов и котангенсов в их сумму:

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}, \qquad (18)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta=\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}. \qquad (19)$$

П р и м е р ы

16. ***Представить*** $\cos^2 x\cos 3x$ ***в виде суммы тригонометрических функций.***

☐ Заменив $\cos^2 x$ выражением $\dfrac{1+\cos 2x}{2}$ и применив формулу (16), получим

$$\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\cos 3x=\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos 2x\cos 3x.$$

$$\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos 2x\cos 3x=\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{4}(\cos x+\cos 5x).$$

Итак: $\cos^2 x\cos 3x=\dfrac{1}{2}\cos 3x+\dfrac{1}{4}\cos x+\dfrac{1}{4}\cos 5x$.

17. ***Упростить выражение*** $\sin 4^\circ\sin 86^\circ-\cos 2^\circ\sin 6^\circ+0{,}5\sin 4^\circ$.

☐ Заменим $\sin 86^\circ$ на $\cos 4^\circ$ (по формуле $\sin\alpha=\cos(90^\circ-\alpha)$). Тогда $\sin 4^\circ\sin 86^\circ=\sin 4^\circ\cos 4^\circ$.

По формуле (9) имеем $\sin 4^\circ\cos 4^\circ=\dfrac{\sin 8^\circ}{2}$.

Произведение синуса на косинус преобразуем в сумму:

$\sin 6^\circ\cos 2^\circ=\dfrac{\sin 8^\circ+\sin 4^\circ}{2}$. Теперь данное выражение примет вид:

$$\frac{1}{2}\sin 8^\circ-\frac{\sin 8^\circ+\sin 4^\circ}{2}+\frac{1}{2}\sin 4^\circ=0.$$

Формулы суммы и разности одноименных тригонометрических функций

Выведем формулу, позволяющую преобразовать сумму $\sin\alpha+\sin\beta$ в произведение тригонометрических функций.

Положим $\alpha=x+y$, $\beta=x-y$, тогда

$$\sin\alpha+\sin\beta=\sin(x+y)+\sin(x-y)=$$

$$=\sin x\cos y+\cos x\sin x+\sin x\cos y-\cos x\sin y=2\sin x\cos y.$$

Решив систему уравнений

$$\begin{cases}\alpha=x+y,\\ \beta=x-y\end{cases},$$

относительно x и y, получим $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $y=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$. Следовательно,

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (20)$$

Аналогично выводятся формулы:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad (21)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (22)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (23)$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \text{т.е.}$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, k\in Z,\ n\in Z\right). \qquad (24)$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\left(\alpha \ne \frac{\pi}{2}+\pi k, \beta \ne \frac{\pi}{2}+\pi n, k\in Z,\ n \in Z\right). \quad (25)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\left(\alpha \ne \pi k, \beta \ne \pi n, k\in Z,\ n \in Z\right). \quad (26)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}\left(\alpha \ne \pi k, \beta \ne \pi n, k\in Z,\ n \in Z\right). \quad (27)$$

Этот прием называют «введение вспомогательного угла».

П р и м е р ы

Преобразовать в произведение или частное:

18. $1+\sin\alpha+\cos\alpha$.

☐ $1+\sin\alpha+\cos\alpha = (1+\cos\alpha)+\sin\alpha =$

$$= 2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos\frac{\alpha}{2}2\sin 45^\circ\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right).$$

19. $\sqrt{3}-2\sin\alpha$.

☐ $\sqrt{3}-2\sin\alpha = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\alpha\right) = 2\left(\sin 60^\circ - \sin\alpha\right) =$

$$= 4\sin\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right).$$

20. $3\sin x+4\cos x$.

☐ $3\sin x+4\cos x = \sqrt{3^2+4^2}\sin(x+\varphi) = 5\sin(x+\varphi)$, где $\cos\varphi = 3/5$ и $\sin\varphi = 4/5$.

21. $\dfrac{\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha}{\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha}$.

☐ Разделим числитель и знаменатель дроби на 2, получим:

$$\frac{\dfrac{\cos\alpha}{2}+\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha}{2}}{\dfrac{\cos\alpha}{2}-\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha}{2}} = \frac{\cos 60^\circ\cos\alpha+\sin 60^\circ\sin\alpha}{\cos 60^\circ\cos\alpha-\sin 60^\circ\sin\alpha} = \frac{\cos(60^\circ-\alpha)}{\cos(60^\circ+\alpha)}.$$

22. ***Доказать, что*** $\sin A+\sin B+\sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$, ***где*** A, B, C ***– углы треугольника.***

☐ Имеем: $\sin C = \sin\left[180^\circ-\left(A+B\right)\right] = \sin\left(A+B\right) = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$.

Следовательно,

$$\sin A+\sin B+\sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right) = 4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{3} =$$

$$= 4\sin\frac{180^\circ-C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{3} = 4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}.$$

Тригонометрические функции половинного аргумента

Если в формулах

$$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha, \quad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

положить $\alpha = x/2$, то получим

$$\cos x = 1-2\sin^2\frac{x}{2}, \quad \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}-1. \quad (29)$$

Из формулы (29) следует, что

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}, \quad (30)$$

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}. \quad (31)$$

С помощью формул (30) и (31) можно вычислить значения синуса и косинуса половинного аргумента $\frac{x}{2}$ по заданному значению косинуса аргумента x .

Разделив почленно равенство (30) на равенство (31), получим

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}. \quad (32)$$

В формулах (30), (31) и (32) знак перед радикалом зависит от того, в какой координатной четверти находится угол $x/2$.

Полезно знать следующие формулы:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin x}{1+\cos x};$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x},\quad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}. \qquad (33)$$

Примеры

23. ***Упростить выражение*** $1-2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha$.

□ 1-й способ.

$(1+\cos 2\alpha)-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha=2\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)=2\cos 2\alpha$.

2-й способ.

$$\left(1-2\sin^2\alpha\right)+\cos 2\alpha=\cos 2\alpha+\cos 2\alpha=2\cos 2\alpha.$$

Вычислить без таблиц:

24. $\operatorname{tg}112°30'$.

□ $\operatorname{tg}112°30'=\frac{1-\cos 225°}{\sin 225°}=\frac{1-\cos(180°+45°)}{\sin(180°+45°)}=\frac{1+\cos 45°}{-\sin 45°}=$

$=-\frac{1+\left(\sqrt{2}/2\right)}{\sqrt{2}/2}=-\left(1+\sqrt{2}\right)$.

25. $\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}$.

□ Используя формулу приведения $\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, получим

$$\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}=\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\cos^4\frac{3\pi}{16}+\cos^4\frac{\pi}{16}=$$

$$=\left(\sin^4\frac{\pi}{16}+2\sin^2\frac{\pi}{16}\cos^2\frac{\pi}{16}+\cos^4\frac{\pi}{16}\right)+\left(\sin^4\frac{3\pi}{16}+2\sin^2\frac{3\pi}{16}\cos^2\frac{3\pi}{16}+\cos^4\frac{3\pi}{16}\right)-$$

$$-2\sin^2\frac{\pi}{16}\cos^2\frac{\pi}{16}-2\sin^2\frac{3\pi}{16}\cos^2\frac{3\pi}{16}=2-\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}\right)=$$

$$=2-\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}\right)=1{,}5.$$

26. ***Дано:*** $\sin\alpha=0{,}8$ ***и*** $90°<\alpha<180°$. ***Найти*** $\sin\frac{\alpha}{2}$; $\cos\frac{\alpha}{2}$; $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

□ Поскольку $90°<\alpha<180°$, то $45°<\alpha/2<90°$. Чтобы воспользоваться формулами (30) и (31), надо определить $\cos\alpha$. Найдем его: $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-0{,}64}=-0{,}6$ (знак «минус», потому что $90°<\alpha<180°$).

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+0{,}6}{2}}=\sqrt{0{,}8}.\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-0{,}6}{2}}=\sqrt{0{,}2}.$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{0{,}2}{0{,}8}}=\frac{1}{2}.\qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2.$$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента

При решении тригонометрических уравнений, доказательстве тождеств и т.п. часто возникает необходимость выразить все четыре тригонометрические функции ($\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$) через какую-нибудь одну функцию $f(x)$.

Воспользуемся тригонометрическими формулами двойного аргумента:

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \qquad (34)$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}. \qquad (35)$$

Область определения рассматриваемых дробей и функций: $x\neq(2k+1)\pi,\ k\in Z$.

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \qquad (36)$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}. \qquad (37)$$

Формула (36) имеет смысл при $x \ne \frac{\pi}{2} + \pi k,\ x \ne \pi + 2\pi k,\ k \in Z$; формула (37) – при $x \ne \pi k,\ k \in Z$.

П р и м е р ы

27. ***Вычислить*** $\sin 4\alpha + \cos 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha$ ***, если*** $\operatorname{tg} 2\alpha = 4$.

☐ Выразив $\sin 4\alpha$ и $\cos 4\alpha$ через $\operatorname{tg} 2\alpha$ по формулам (34) и (35), получим

$$\sin 4\alpha + \cos 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha} + \frac{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{2\cdot 4}{1+16} + \frac{1-16}{1+16}\frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

28. ***Вычислить*** $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$ ***, если*** $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 0{,}5$.

☐ Упростим данное выражение:

$$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = -(\cos^4\alpha - \sin^4\alpha) = -\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -\cos 2\alpha.$$

Далее находим

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{3}{5},$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\frac{9}{25} - 1 = -\frac{7}{25}, \quad \text{т.е.} \quad \sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \frac{7}{25}.$$

Глава 3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

Свойства функции $y = \sin x$ и ее график

Основные свойства функции $y = \sin x$:

- область определения – множество всех действительных чисел;
- множество значений – отрезок $[-1;1]$, значит, синус – функция ограниченная;
- функция нечетная: $\sin(-x) = -\sin x$ для всех $x \in R$;
- функция периодическая с наименьшим положительным периодом 2π, т.е. $\sin(x+2\pi) = \sin x$ для всех $x \in R$;
- $\sin x = 0$ при $x = \pi k,\ k \in Z$;
- $\sin x > 0$ для всех $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k),\ k \in Z$;
- $\sin x < 0$ для всех $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k),\ k \in Z$;
- функция возрастает от -1 до 1 на промежутках
$$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right],\ k \in Z;$$
- функция убывает от 1 до -1 на промежутках
$$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right],\ k \in Z;$$
- функция принимает наибольшее значение, равное 1, в точках
$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z;$$
- функция принимает наименьшее значение, равное -1, в точках
$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \ \left(x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in Z;$$

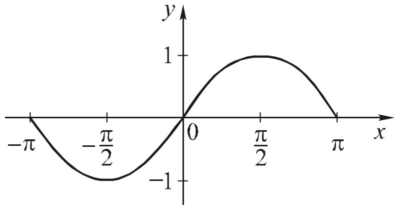
График синуса, исходя из его свойств, на промежутке $[-\pi;\pi]$, т.е. на промежутке, длина которого равна периоду функции, приведен на рис. 3.1.

Используя периодичность функции $y = \sin x$, график функции на всей числовой прямой приведен на рис. 3.2.

П р и м е р ы

Построить графики функций:

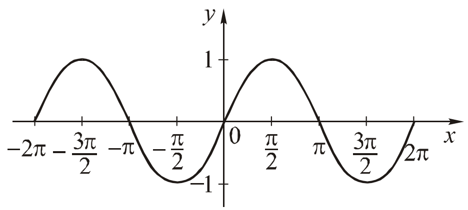
1. $y=\sin\frac{1}{2}x$.



□ Используем прием растяжения и сжатия графика по оси абсцисс, часто применяемый для построения графиков тригонометрических функций.

Область определения функции – вся числовая прямая. Множество значений функции $-1\le y\le 1$.

Функция нечетная, периодическая. Период данной функции найдем из равенства $\sin\frac{x}{2}=\sin\left(\frac{x}{2}+2\pi\right)=\sin\left(\frac{x+4\pi}{2}\right)$, $T=4\pi$. Следовательно, сначала достаточно построить часть графика на отрезке $[0;\ 2\pi]$.

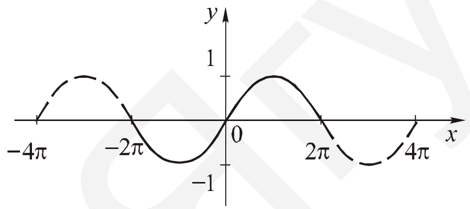


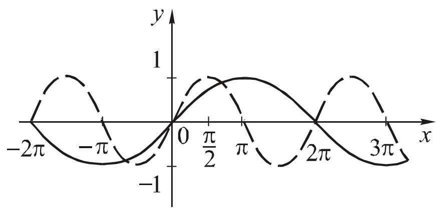
Найдем точки пересечения графика с осью Ox.

Если $y=0$, то $\sin\frac{x}{2}=0$, откуда $x/2=\pi k$, $x=2\pi k$, где $k=0;\ 1$, т.е. на данном полупериоде кривая пересекает ось Ox в точках $(0;\ 0)$ и $(2\pi;\ 0)$.

Максимум функции равен 1 при $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}$, т.е. при $x=\pi$.

По этим данным построим график функции $y=\sin(x/2)$. Сначала график строим для положительного полупериода $[0;\ 2\pi]$, затем на отрезке, соответствующем полупериоду $[0;\ -2\pi]$, и, наконец, на всей области определения (штриховая линия).





Замечание. График функции $y=\sin(x/2)$ можно построить иначе, приняв за исходный известный нам график функции $y=\sin x$, нанесенный штриховой линией.

Период исходной функции $y=\sin x$ равен $T_0=2\pi$, а период заданной функции $y=\sin(x/2)$ составляет $T=4\pi$, т.е. вдвое больше периода исходной функции. Таким образом, график, который требуется построить, получится из исходного графика (штрихового) путем растяжения его вдоль оси Ox вдвое.

2. $y=\sin 3x$.

□ Область определения функции – вся числовая прямая. Множество значений – отрезок $[-1;1]$.

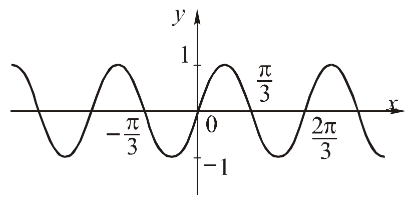
Период функции определяется из равенства

$$\sin 3x=\sin(3x+2\pi)=\sin 3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right),$$

откуда период $T=\frac{2\pi}{3}$, полупериод $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{3}$.

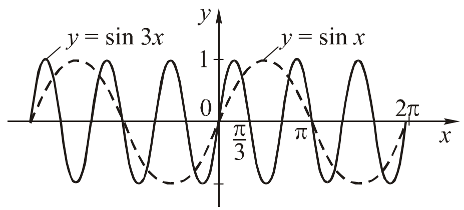
Найдем точки пересечения графика с осью Ox.

Если $y=0$, то $\sin 3x$, откуда $3x=\pi k$, $x=\pi k/3$, где $k=0;1$, т.е. на данном полупериоде кривая пересекает ось Ox в точках $(0;0)$ и $(\pi/3;0)$.



Максимум функции равен 1 при $3x=\frac{\pi}{2}$, т.е. при $x=\frac{\pi}{6}$.

По этим данным построим график $y=\sin 3x$.



Замечание. График функции $y=\sin 3x$ можно построить путем сжатия по оси Ox исходного графика $y=\sin x$ в 3 раза, так как период $2\pi/3$ заданной функции в 3 раза меньше периода 2π исходной функции.

Таким образом, если известен график $y=f(x)$, то график функции $y=f(kx)$ строится посредством сжатия по оси Ox исходного графика пропорционально коэффициенту k при аргументе, а именно:

если $k>1$, то сжатие в k раз;

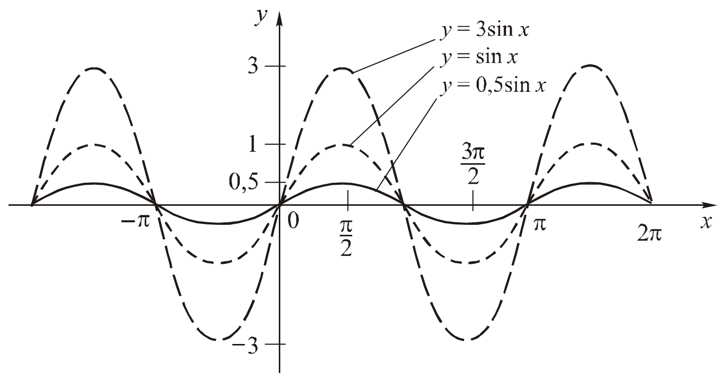
если $0<k<1$, то растяжение в $\frac{1}{k}$ раз.

3. $y = 3\sin x$.

□ Используем прием растяжения и сжатия по оси ординат.

Строить этот график методом полного исследования функции, как это мы делали в предыдущих примерах, нецелесообразно.

Нетрудно заметить, что ординаты графика $y = 3\sin x$ в 3 раза больше соответствующих ординат графика $y = \sin x$. Поэтому график заданной функции строится путем увеличения всех ординат исходного графика по оси Oy в 3 раза.



4. $y = \frac{1}{2}\sin x$.

□ По тем же соображениям этот график строится способом уменьшения всех ординат исходного графика в 2 раза, т.е. путем сжатия исходного графика по оси Oy в 2 раза.

Таким образом, если известен график функции $y = f(x)$, то график функции $y = kf(x)$ строится посредством растяжения вдоль оси Oy исходного графика пропорционально коэффициенту k, а именно:

если $k > 1$, то растяжение в k раз;

если $0 < k < 1$, то сжатие в $1/k$ раз.

5. $y = 1{,}5 - 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$.

□ Запишем функцию так:

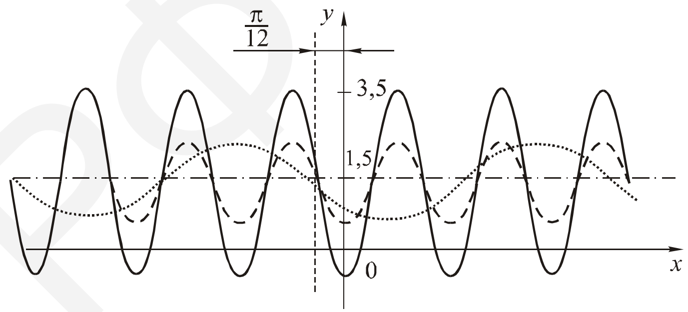
$$y = -2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + 1{,}5.$$

Преобразуем выражение в скобках таким образом, чтобы выявить «добавок» к аргументу x:

$$y = -2\sin\left[3\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right] + 1{,}5.$$

Строим график функции $y = -\sin x$.

Деформация по оси абсцисс (сжатие втрое) обязательно предшествует горизонтальному сдвигу оси ординат на $\pi/12$ влево, а деформация по оси ординат (растяжение вдвое) должна предшествовать вертикальному сдвигу оси абсцисс на $1{,}5$, так как весь график поднимать сложнее.



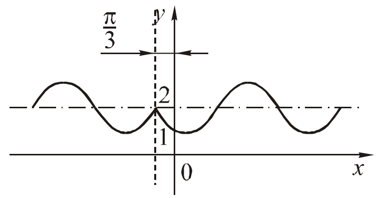
Порядок построения графика следующий: строим график функции $y = -\sin x$; этот график сжимаем по оси абсцисс в 3 раза; ось ординат переносим по горизонтали на $\pi/12$; график растягиваем по оси ординат в 2 раза; ось абсцисс переносим вверх на $1{,}5$.

6. $y = 2 - \sin\left|x + \frac{\pi}{3}\right|$.

□ 1-й способ.

Строим график функции $y = -\sin|x|$.

Ось ординат переносим на $\pi/3$ влево, а ось абсцисс – на 2 вверх.



2-й способ.

График имеет две ветви, уравнения которых различны.

Если $x + \frac{\pi}{3} \ge 0$, т.е. $x \ge -\frac{\pi}{3}$, то $y = 2 - \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Если $x + \frac{\pi}{3} < 0$, т.е. $x < -\frac{\pi}{3}$, то $y = 2 - \sin\left[-\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = 2 + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Область определения функции – вся числовая прямая.

Интервал изменения функции определяем из условия

$$-1 \le -\sin\left|x + \frac{\pi}{3}\right| \le 1, \text{ т.е. } -1 + 2 \le y \le 1 + 2,\ \ 1 \le y \le 3.$$

Общая точка для обеих ветвей графика: $x = -\pi/3$; $y = -\sin 0 + 2 = 2$, т.е. точка $(-\pi/3; 2)$.

Свойства функции $y=\cos x$ и ее график

Основные свойства функции $y=\cos x$:

- область определения – множество всех действительных чисел;
- множество значений – отрезок $[-1;\ 1]$, значит, косинус – функция ограниченная;
- функция четная: $\cos(-x)=\cos x$ для всех $x\in R$;
- функция периодическая с наименьшим положительным периодом 2π, т.е. $\cos(x+2\pi)=\cos x$ для всех $x\in R$;
- $\cos x=0$ при $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$;
- $\cos x>0$ для всех $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in Z$;
- $\cos x<0$ для всех $x\in\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\ \dfrac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in Z$;
- функция убывает от 1 до –1 на промежутках
$$[2\pi k;\ \pi+2\pi k],\ k\in Z;$$
- функция возрастает от –1 до 1 на промежутках
$$[-\pi+2\pi k;\ 2\pi k],\ k\in Z;$$
- функция принимает наибольшее значение, равное 1, в точках
$$x=2\pi k,\ k\in Z;$$
- функция принимает наименьшее значение, равное – 1, в точках
$$x=\pi+2\pi k,\ k\in Z.$$

Используя свойство косинуса, сначала строим график на отрезке $[-\pi;\ \pi]$, длина которого равна периоду функции (рис. 3.1) и распространяем его на всю числовую прямую.

Перечисленные свойства функции $y=\cos x$ позволяют построить график этой функции на всей числовой прямой (рис. 3.1).

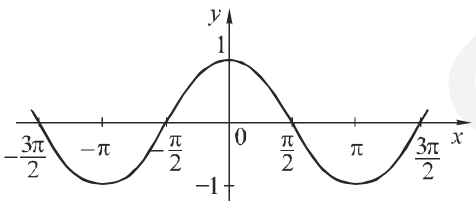


Рис. 3.1

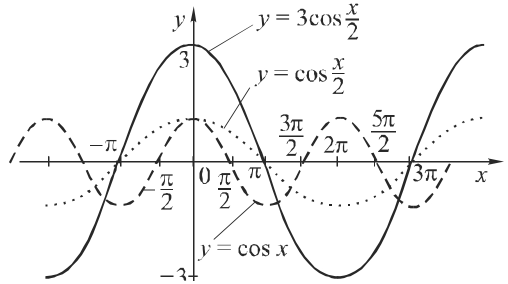
П р и м е р ы

Построить графики функций:

7. $y=3\cos\dfrac{x}{2}$.

☐ Мы знаем, как построить график функции $y=\cos x$ (на рисунке он изображен штриховой линией). Растягивая график функции $y=\cos x$ вдоль оси абсцисс в 2 раза, получим график функции $y=\cos\dfrac{x}{2}$. Затем полученный график растягиваем еще раз, но теперь по оси ординат в 3 раза, получим график функции $y=3\cos\dfrac{x}{2}$ (сплошная линия).

Замечание. В том, что график функции $y=\cos\dfrac{x}{2}$ пересекает ось абсцисс, можно убедиться так: $y=0$, т.е. $\cos\dfrac{x}{2}=0$, откуда $\dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, или $x=\pi+2\pi k$, $k\in Z$.



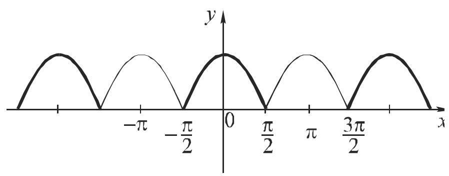
8. $y=\cos|x|$.

☐ $\cos|x|=\cos x$, так как $\cos x=\cos(-x)$. Следовательно, график данной функции тот же, что и график функции $y=\cos x$.

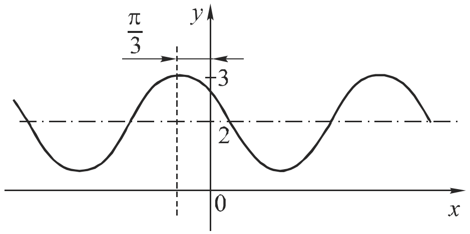
9. $y=|\cos x|$.

☐ При $\cos x\geq 0$ $y=\cos x$. Следовательно, на участке, где $\cos x\geq 0$, график будет тот же, что и график функции $y=\cos x$ (на рисунке эти участки показаны утолщенными линиями).

При $\cos x<0$ $y=-\cos x$. Следовательно, части графика функции $y=\cos x$, расположенные ниже оси абсцисс, зеркально отобразятся и будут расположены в верхней полуплоскости (тонкие линии).



10. $y = 2 + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.



☐ Строим график функции $y = \cos x$. Затем ось ординат переносим на $\dfrac{\pi}{3}$ влево, а ось абсцисс переносим на 2 единицы вверх).

Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ и ее график

Основные свойства функции $y = \operatorname{tg} x$:

- область определения функции – множество всех действительных чисел, кроме чисел вида $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$;
- множество значений – вся числовая прямая, значит, тангенс – функция неограниченная;
- функция нечетная: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ для всех x из области определения;
- функция периодическая с наименьшим положительным периодом π, т.е. $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$ для всех x из области определения;
- $\operatorname{tg} x = 0$ при $x = \pi k$, $k \in Z$;
- $\operatorname{tg} x > 0$ для всех $x \in \left(\pi k;\ \dfrac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$;
- $\operatorname{tg} x < 0$ для всех $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi k;\ \pi k\right)$, $k \in Z$;
- функция возрастает на промежутках $\left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi k;\ \dfrac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

Все перечисленные свойства тангенса позволяют построить его график сначала на промежутке $\left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, т.е. на промежутке, длина которого равна периоду функции (рис. 3.2), и затем на всей числовой прямой (рис. 3.3).

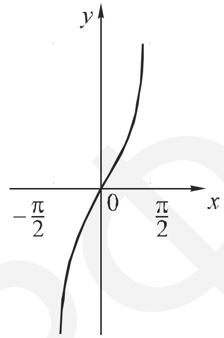


Рис. 3.2

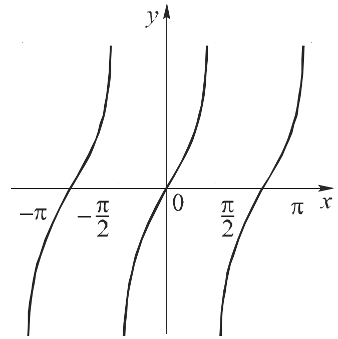
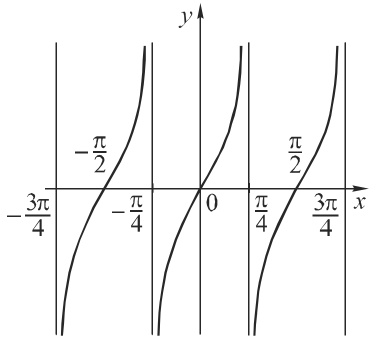


Рис. 3.3

П р и м е р ы

Построить графики функций:

11. $y = \operatorname{tg} 2x$.



☐ Область определения: x – любое число, кроме $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}$, где $k \in Z$, так как $2x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$;

область значений (изменения) – вся числовая прямая, т.е. $(-\infty;\ +\infty)$;

функция не является ограниченной;

функция не принимает экстремальных значений;

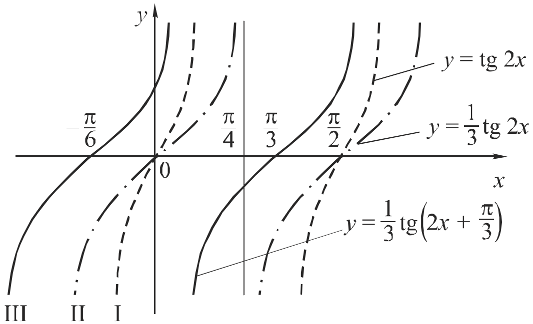
функция периодическая, главный период $T = \pi/2$, так как $y = \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(2x + \pi) = \operatorname{tg} 2\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$; функция не является монотонной на всей области определения, но функция возрастает на каждом из промежутков $\dfrac{\pi k}{2} - \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}$, где $k \in Z$;

точки пересечения с осями координат – точки $\left(\dfrac{\pi k}{2},\ 0\right)$, где $k \in Z$, так как $\sin 2x = 0$ при $2x = \pi k$, т.е. $x = \dfrac{\pi k}{2}$.

Учитывая периодичность, построим график функции $y = \operatorname{tg} 2x$.

12. $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

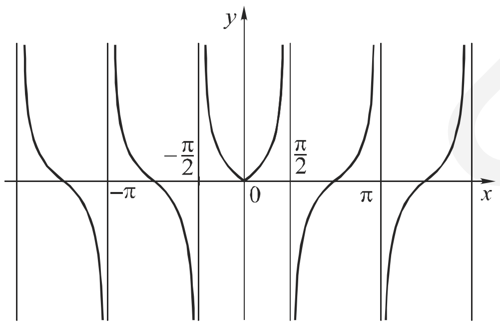
□ Для построения графика этой функции сначала представим ее в виде $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right]$. Выполнив сжатие тангенсоиды $y = \operatorname{tg} x$ по оси абсцисс вдвое, получим график функции $y = \operatorname{tg} 2x$ (рис. I). Выполнив сжатие графика $y = \operatorname{tg} 2x$ по оси ординат в 3 раза, получим кривую $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg} 2x$ (рис. II). Перенеся эту кривую параллельно на расстояние $\pi/6$, получим график данной функции (рис. III).



Замечание. Функция не определена при $\cos(2x + 60°) = 0$, т.е. в точках $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, где $k \in Z$.

Функция обращается в ноль при $\sin(2x + 60°) = 0$, т.е. график функции пересекает ось абсцисс в точках $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

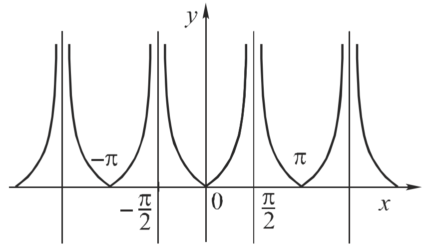
13. $y = \operatorname{tg}|x|$.



□ Функция четная, так как $\operatorname{tg}|-x| = \operatorname{tg} x$. При $x > 0$ график искомой функции тот же, что и график функции $y = \operatorname{tg} x$. При $x < 0$ $y = -\operatorname{tg} x$, график – зеркальное отображение относительно оси Ox. График искомой функции $y = \operatorname{tg}|x|$ изображен на рисунке.

14. $y = |\operatorname{tg} x|$.

□ График этой функции получается из графика функции $y = \operatorname{tg} x$, если ту часть графика, которая расположена в верхней полуплоскости, оставить без изменения, а часть графика, расположенную в нижней полуплоскости, зеркально отобразить относительно Ox.



Свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$ и ее график

Основные свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$:

- область определения – множество всех действительных чисел, кроме чисел вида πk, $k \in Z$;
- множество значений – все числовая прямая, значит, котангенс – функция неограниченная;
- функция нечетная: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$ для всех значений x из области определения;
- функция периодическая с наименьшим положительным периодом π, т.е. $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$ для всех значений x из области определения;
- $\operatorname{ctg} x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$;
- $\operatorname{ctg} x > 0$ для всех $x \in \left(\pi k,\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$;
- $\operatorname{ctg} x < 0$ для всех $x\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pi k\right)$, $k \in Z$.
- функция убывает на каждом из промежутков $(\pi k,\ \pi + \pi k)$, $k \in Z$.

Используя свойства котангенса, сначала построим его график на промежутке $(0; \pi)$, т.е. на промежутке, длина которого равна периоду функции (рис. 3.4), а затем на всей числовой прямой (рис. 3.5).

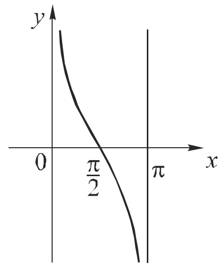


Рис. 3.4

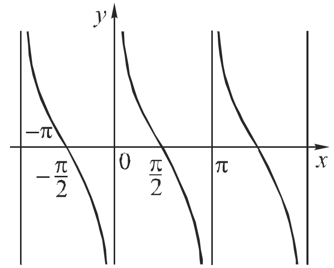
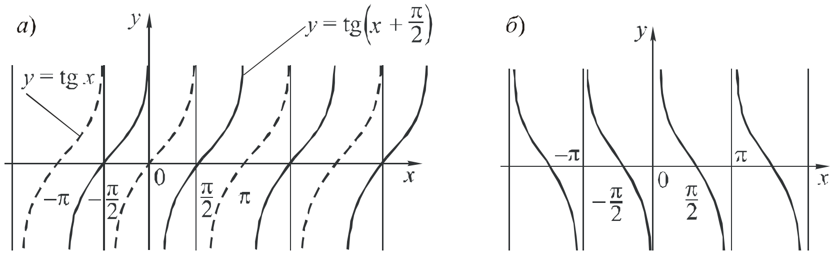


Рис. 3.5

П р и м е р ы

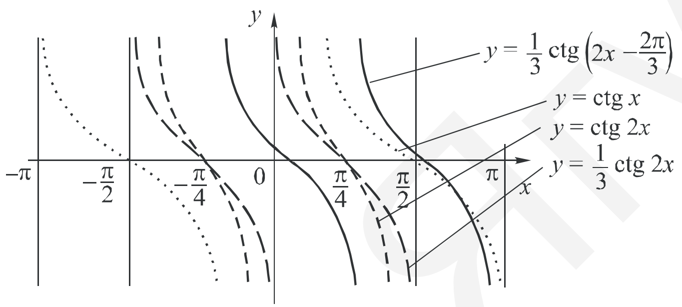
15. ***Построить график функции*** $y = \operatorname{ctg} x$ ***, используя формулу приведения.***

☐ По формуле приведения $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому график функции $y = \operatorname{ctg} x$ можно получить из графика функции $y = \operatorname{tg} x$ с помощью параллельного переноса влево на $\pi/2$ (рис. *а*) и симметрией относительно оси абсцисс. График функции $y = \operatorname{ctg} x$ изображен на рис. *б*.



16. ***Построить график функции*** $y = \frac{1}{3}\operatorname{ctg}\left(2x - 120°\right)$.

☐ График функции $y = \frac{1}{3}\operatorname{ctg}\left(2x - 120°\right) = \frac{1}{3}\operatorname{ctg} 2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ получен путем сдвига графика функции $y = \frac{1}{3}\operatorname{ctg} 2x$ вправо по оси абсцисс на расстояние $\frac{\pi}{3}$ (см. рис.).



Периоды тригонометрических функций

Периоды тригонометрических функций:

$$y = \sin x \quad - \quad 2\pi, \qquad y = \cos x \quad - \quad 2\pi,$$
$$y = \operatorname{tg} x \quad - \quad \pi, \qquad y = \operatorname{ctg} x \quad - \quad \pi.$$

Период функции, представляющей собой сумму непрерывных и периодических функций, равен наименьшему кратному периодов слагаемых, если он существует.

П р и м е р ы

Найти периоды функций:

17. $y = 3\sin 4x + 6\sin x + \sin\left(x - \pi\right) + 5\sin\left(x + \pi\right)$.

☐ Упростим данную функцию:

$$3\sin 4x + 6\sin x + \sin\left(x - \pi\right) + 5\sin\left(x + \pi\right) = 3\sin 4x + 6\sin x - \sin x - 5\sin x = 3\sin 4x.$$

Следовательно, $y = 3\sin 4x$. Период этой функции $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Этот период имеет и данная функция.

Периоды остальных слагаемых заданной функции не учитываются, так как сумма этих слагаемых тождественно равна нулю, т.е.

$$6\sin x + \sin\left(x - \pi\right) + 5\sin\left(x + \pi\right) = 0.$$

18. $y = \sin 2x + \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

☐ Так как $\sin 2x = \sin\left(2x + 2\pi\right) = \sin\left[2\left(x + \pi\right)\right]$, то период слагаемого функции $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Так как $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{x + 2\pi}{2}\right)$, то период второго слагаемого $T_2 = \frac{\pi}{1/2} = 2\pi$.

Периодом заданной функции будет наименьшее кратное периодов ее слагаемых, т.е. $T = 2\pi$.

19. $y = \cos\frac{x}{3} + \operatorname{tg}\frac{x}{5}$.

☐ Так как $\cos\left(\frac{x}{3} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{x + 6\pi}{3}\right)$, то период первого слагаемого функции $T_1 = \frac{2\pi}{1/3} = 6\pi$.

Так как $\operatorname{tg}\frac{x}{5} = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{5} + \pi\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{x+5\pi}{5}\right)$, то период этой функции $T_2 = \frac{\pi}{1/5} = 5\pi$.

Чтобы найти период данной функции, найдем наименьшее кратное чисел 6π и 5π, т.е. $T = 30\pi$.

20. $y = \sin\frac{3x}{4} + 5\cos\frac{2x}{3}$.

☐ $\sin\frac{3x}{4} = \sin\left(\frac{3x}{4} + 2\pi\right) = \sin\frac{3}{4}\left(x + \frac{8\pi}{3}\right)$; период $T_1 = \frac{2\pi}{3/4} = \frac{8\pi}{3}$.

$\cos\frac{2x}{3} = \cos\left(\frac{2x}{3} + 2\pi\right) = \cos\frac{2}{3}(x + 3\pi)$; период $T_2 = \frac{2\pi}{2/3} = 3\pi$.

Периодом данной функции будет наименьшее кратное чисел $\frac{8\pi}{3}$ и 3π, т.е. $T = 24\pi$.

Глава 4. СВОЙСТВА ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Арксинус и арккосинус

Теорема. *Пусть функция f возрастает (или убывает) на промежутке l, а число a – любое из значений, принимаемых функцией на этом промежутке. Тогда уравнение $f(x) = a$ имеет единственный корень на промежутке l.*

Функция синус возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и принимает значения от – 1 до 1. Таким образом (по теореме), для любого числа a, такого, что $-1 \le a \le 1$, на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ существует единственный корень α уравнения $\sin x = a$. Это число α называют ***арксинусом числа*** a и обозначают $\arcsin a$ (рис. 4.1*а*).

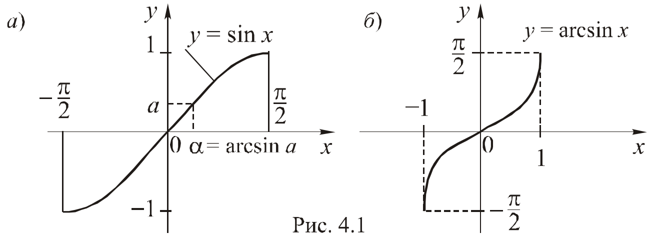


Рис. 4.1

Итак, арксинусом числа a называется такое число α из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, что его синус равен a.

Математическая запись данного предложения такова:

$$\arcsin a = \alpha \text{, если } \sin\alpha = a,$$

где $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$; $-1 \le a \le 1$.

Значение арксинуса можно найти по таблицам, или пользуясь калькулятором.

Функция косинус убывает на отрезке $[0; \pi]$ и принимает все значения от – 1 до 1. Поэтому для любого числа a, такого, что $-1 \le a \le 1$, на отрезке $[0; \pi]$ существует единственный корень уравнения $\cos x = a$.

Это число α называют ***арккосинусом числа*** a и обозначают $\arccos a$ (рис. 4.2*а*).

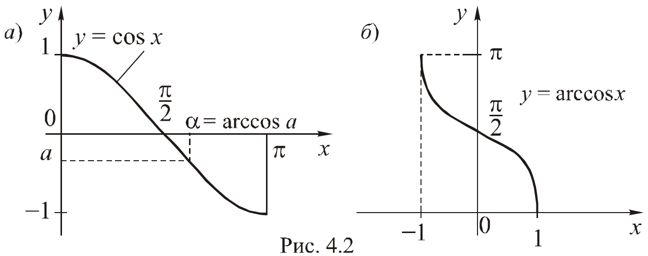


Рис. 4.2

Итак, арккосинусом числа a называют такое число α из отрезка $[0; \pi]$, что его косинус равен a.

Математическая запись данного предложения такова:

$$\arccos a = \alpha \text{, если } \cos\alpha = a,$$

где $0 \le \alpha \le \pi$, $-1 \le a \le 1$.

Значение арккосинуса можно найти по таблицам, или пользуясь калькулятором.

При всех допустимых значениях аргумента x справедливы тождества:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \text{, если } |x| \le 1.$$

Например: $\arcsin\frac{1}{2} + \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$.

$$\sin(\arcsin x) = x \text{, если } -1 \le x \le 1.$$

Например: $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

$$\cos(\arccos x) = x \text{, если } -1 \le x \le 1.$$

Например: $\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

$$\arcsin(\sin x) = x \text{, если } |x| \le \frac{\pi}{2}.$$

Например: $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

$$\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Функция $y = \arcsin x$ является нечетной, т.е. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, ее график показан на рис. 4.1*б*.

Функция $y = \arccos x$ – функция общего вида, ее график показан на рис. 4.2 *б*.

Например: $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\right)$;

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}\right).$$

П р и м е р ы

Вычислить:

1. $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right) + \cos\left(-3\arcsin\frac{1}{2}\right)$.

☐ Пусть $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \alpha$, тогда $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ и $\alpha \in [0; \pi]$.

Следовательно, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

Пусть $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \beta$, тогда $\sin\beta = -\frac{1}{2}$ и $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Следовательно, $\beta = -\frac{\pi}{6}$.

Пусть $\arcsin\frac{1}{2} = \gamma$, тогда $\sin\gamma = \frac{1}{2}$ и $\gamma \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Следовательно $\gamma = \frac{\pi}{6}$.

Сделаем подстановку в заданное выражение:

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) + \cos\left(-3\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \sin\frac{5\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

2. $\arcsin\frac{1}{2} - 3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\frac{1}{2} + 2\arcsin 1 - 2\arccos(-1)$.

☐ $\frac{\pi}{6} - 3\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3} + 2\frac{\pi}{2} - 2\pi = 0$.

3. $\cos\left(\arcsin x + 2\arccos y\right)$.

☐ Обозначим $\arcsin x = \alpha$, $\arccos y = \beta$, тогда $\sin\alpha = x$, $\cos\beta = y$, где $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \beta \le \pi$.

Таким образом, задача сводится к вычислению $\cos\left(\alpha + 2\beta\right)$ по известным значениям $\sin\alpha$ и $\cos\beta$.

Раскрывая косинус суммы, находим

$$\cos\alpha\left(\alpha + 2\beta\right) = \cos\alpha\cos 2\beta - \sin\alpha\sin 2\beta =$$

$$= \cos\alpha\left(\cos^2\beta - \sin^2\beta\right) - \sin\alpha 2\sin\beta\cos\beta,$$

где $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-x^2}$, а $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-y^2}$.

Оба радикала берутся со знаком плюс, так как $\cos\alpha > 0$ и $\sin\beta > 0$.

Тогда

$$\cos\left(\alpha + 2\beta\right) = \sqrt{1-x^2}\left(y^2 - 1 + y^2\right) - 2xy\sqrt{1-y^2} =$$

$$= \left(2y^2 - 1\right)\sqrt{1-x^2} - 2xy\sqrt{1-y^2}.$$

4. $\sin\left(\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{12}{13}\right)$.

☐ Обозначим $\arcsin\frac{5}{13} = \alpha$, $\arcsin\frac{12}{13} = \beta$, тогда $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\sin\beta = \frac{12}{13}$, где $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \beta \le \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, задача сводится к вычислению $\sin\left(\alpha + \beta\right)$ по известным значениям $\sin\alpha$ и $\sin\beta$.

Раскрывая синус суммы, находим $\sin\left(\alpha + \beta\right) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.

Здесь нам неизвестны $\cos\alpha$ и $\cos\beta$, но известно, что α и β принадлежат первой четверти. Найдем значения этих функций:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \frac{12}{13},$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\frac{144}{169}} = \frac{5}{13}.$$

Тогда получим

$$\sin\left(\alpha + \beta\right) = \frac{5}{13}\cdot\frac{5}{13} + \frac{12}{13}\cdot\frac{12}{13} = \frac{25}{169} + \frac{144}{169} = 1.$$

Арктангенс и арккотангенс

На интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ функция тангенс возрастает и принимает все значения из R.

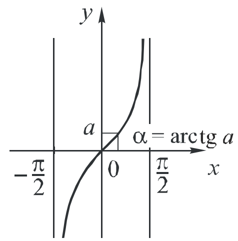


Рис. 4.3

Для любого числа a в интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ существует единственный корень α уравнения $\operatorname{tg} x = a$.

Это число α называют ***арктангенсом числа*** a и обозначают $\operatorname{arctg} a$ (рис. 4.3).

Итак, арктангенсом числа a называется такое число α из интервала $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, что его тангенс равен a.

Арккотангенсом числа a называется такое число $\alpha \in \left(0;\pi\right)$, что его котангенс равен a.

При всех допустимых значениях аргумента x справедливы тождества:

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \text{ если } |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Например: $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$.

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \text{ для любого действительного } x.$$

Например: $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 1) = 1$.

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x \text{ для любого действительного } x.$$

Например: $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}\sqrt{3}) = \sqrt{3}$.

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x) = x, \text{ если } 0 < x < \pi.$$

Например: $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$.

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Функция $y = \operatorname{arctg} x$ является нечетной, т.е. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.

Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ – функция общего вида.

Например: $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1\right)$; $\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}\left(\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = -1\right)$.

График функции $y = \operatorname{arctg} x$ имеет две асимптоты: $y = -\dfrac{\pi}{2}$ и $y = \dfrac{\pi}{2}$ (рис. 4.4).

График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ имеет две асимптоты: $y = 0$ и $y = \pi$ (рис. 4.5).

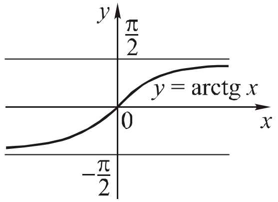


Рис. 4.4

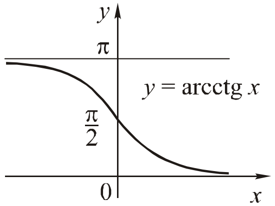


Рис. 4.5

П р и м е р ы

Вычислить:

5. $\operatorname{arctg}(-1)$.

☐ Пусть $\operatorname{arctg}(-1) = \alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = -1$ и $a \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Отсюда следует, что $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$. Таким образом, $\operatorname{arctg}(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$.

6. $\operatorname{arcctg}(-1)$.

☐ Пусть $\operatorname{arcctg}(-1) = \alpha$, тогда $\operatorname{ctg}\alpha = -1$ и $\alpha \in (0;\pi)$. Следовательно, $\alpha = 3\pi/4$. Таким образом, $\operatorname{arcctg}(-1) = 3\pi/4$.

7. $\sin\left(\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \arcsin(-1) - \operatorname{arctg} 0\right)$.

☐ Пусть $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = \alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$ и $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, $\alpha = -\pi/3$.

Пусть $\arcsin(-1) = \beta$, тогда $\sin\beta = -1$ и $\beta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Следовательно, $\beta = -\dfrac{\pi}{2}$.

Пусть $\operatorname{arctg} 0 = \gamma$, тогда $\operatorname{tg}\gamma = 0$ и $\lambda \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, $\gamma = 0$.

С учетом найденных значений данное выражение принимает вид: $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{2} + 0\right) = \sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\sin\dfrac{5\pi}{6} = -0{,}5$.

8. $\operatorname{tg}\left[\operatorname{arctg}(-1) + 2\operatorname{arcctg}(-1) + \operatorname{arcctg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$.

☐ Пусть $\operatorname{arctg}(-1) = \alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = -1$, $\alpha = -\pi/4$.

Пусть $\operatorname{arcctg}(-1) = \beta$, тогда $\operatorname{ctg}\beta = -1$, $\beta = 3\pi/4$.

Пусть $\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \gamma$, тогда $\operatorname{ctg}\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\gamma = \dfrac{\pi}{3}$.

С учетом найденных значений данное выражение принимает вид:

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4} + 2\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{ctg} 15° = -\operatorname{ctg}(45° - 30°) = \frac{1 + \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 30°}{\operatorname{tg} 45° - \operatorname{tg} 30°} = -2 - \sqrt{3}.$$

Упростить выражения:

9. $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)\right)$.

☐ Пусть $\arccos(-1/4) = \alpha$, тогда $\cos\alpha = -1/4$, $\pi/2 < \alpha < \pi$. Значит, $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{16}} = \dfrac{1}{4}\sqrt{15}$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{15}}{-\frac{1}{4}} = -\sqrt{15}.$$

10. $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{4}\right)$.

☐ Пусть $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} = \alpha$, $\operatorname{acrtg}\dfrac{1}{4} = \beta$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{4}$, $-\dfrac{\pi}{2} < \beta < \dfrac{\pi}{2}$.

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right) = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{2}\frac{1}{4}} = \frac{2}{9}.$$

11. $\operatorname{tg}\left(2\arccos\left(-\dfrac{2}{3}\right)\right)$.

☐ Пусть $\arccos\left(-\dfrac{2}{3}\right) = \alpha$, тогда $\cos\alpha = -\dfrac{2}{3}$, где $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Таким образом, задача сводится к вычислению $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и $\cos\alpha = -\dfrac{2}{3}$.

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt5}{3}; \quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{\sqrt5}{3}}{-\frac{2}{3}}=-\frac{\sqrt5}{2}.$$

По формуле тангенса двойного угла имеем:

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\left(-\frac{\sqrt5}{2}\right)}{1-\frac{5}{4}}=4\sqrt5.$$

12. $\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3$.

□ Обозначим $\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3$ через α. Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3)==\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2)+\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}3)}{1-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2)\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}3)}=\frac{2+3}{1-2\cdot3}=-1.$$

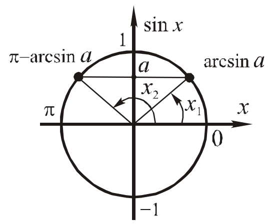
Теперь остается найти α по заданному значению тангенса этого аргумента. Для того чтобы эта задача была однозначной, нужно указать пределы изменения α. Так как $\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg}2<\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg}3<\frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3<\pi$, т.е. $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Следовательно, $\alpha=\frac{3\pi}{4}$.

Глава 5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения вида $\sin x=a$, $\cos x=a$, $\operatorname{tg}x=a$, $\operatorname{ctg}x=a$ называют простейшими.

Решение уравнений вида $\sin x=a$ при $a\in[-1;1]$

Для решения воспользуемся «универсальной тригонометрической шпаргалкой» – единичной окружностью.



Отметим на оси синусов (ось ординат) число a и проведем прямую, параллельную оси абсцисс. Видно, что ординату a имеют сразу две точки окружности (при $a\in(-1;1)$), или два угла x_1 и x_2, т.е. синус, равный a, имеет два числа на одном периоде (за исключением $a=\pm1$ – только одна точка: верхняя или нижняя).

Очевидно, что первая точка $x_1=\arcsin a$ (см. главу 4), вторую точку получим, если от π отнимем $\arcsin a$, т.е. $x_2=\pi-\arcsin a$. Учитывая период функции, общий ответ примет вид:

$$x=\arcsin a+2\pi k$$
$$x=\pi-\arcsin a+2\pi k,\quad n\in Z. \qquad (6)$$

Можно записать решение одной формулой:

$$x=(-1)^n\arcsin a+\pi n,\quad n\in Z \qquad (6')$$

В самом деле, при четном n ($n=2m$) получается верхняя, а при нечетном n ($n=2m+1$) – нижняя строчка формулы ($6'$).

Если вас просят просто решить уравнение, то ответ проще записать одной формулой.

Если требуется произвести отбор корней по ограничениям, то надо решение записывать раздельно.

Если $|a|>1$, то уравнение не имеет решений.

Частные случаи:

$$\sin x=0,\quad x=\pi k,\quad k\in Z; \qquad (7)$$

$$\sin x=1,\quad x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\quad k\in Z; \qquad (8)$$

$$\sin x=-1,\quad x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z. \qquad (9)$$

Если $a \in (-1;0)$, то решение записывается так:

$$x = (-1)^{k+1} \arcsin a + \pi k\,, \quad a \in (0;1). \qquad (6')$$

Формула корней уравнения $\sin^2 x = a$, где $0 \le a \le 1$, имеет вид:

$$x = \pm \arcsin \sqrt{a} + \pi k, \quad k \in Z\,. \qquad (10)$$

П р и м е р ы

1. ***Решить уравнение***

$$\left(\sin 2x - \frac{1}{2}\right)\left(\sin 3x + \frac{1}{2}\right)\sin 2x\left(\sin\frac{x}{2} - 1\right)(\sin 1{,}5x + 1)\left(\sin^2 2x - \frac{1}{8}\right) = 0\,.$$

□ Область определения: x – любое действительное число. Левая часть уравнения содержит шесть сомножителей, правая часть равна нулю. Произведение равно нулю тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Следовательно, данное уравнение распадается на шесть уравнений. Решим их.

1) $\sin 2x - \frac{1}{2} = 0$, $\sin 2x = \frac{1}{2}$. По формуле ($6'$)

$2x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k,\ \ k \in Z$, так как $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, то

$2x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $\quad x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2},\ \ k \in Z$.

Следовательно, $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$ являются корнями первого уравнения и исходного уравнения.

2) $\sin 3x + \frac{1}{2} = 0$, $\sin 3x = -\frac{1}{2}$. По формуле ($6'$) $3x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k$,

$k \in Z$, так как $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$, то $3x = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k,\quad x = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{18}\right) + \frac{\pi k}{3}$,

$k \in Z$.

Учитывая, что $(-1)^k\left(-\frac{\pi}{18}\right) = (-1)^k(-1)\frac{\pi}{18} = -(-1)^{k+1}\frac{\pi}{18}$, получаем

$x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3},\ \ k \in Z$.

Следовательно, $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z$, являются корнями второго уравнения и исходного уравнения.

3) $\sin 2x = 0$. По формуле (7) $2x = \pi k$, $\quad x = \pi k/2,\ \ k \in Z$.

Следовательно, $x = \pi k/2,\ k \in Z$, являются корнями третьего уравнения и исходного уравнения.

4) $\sin\frac{x}{2} - 1 = 0$, $\sin\frac{x}{2} = 1$. По формуле (8) $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x = \pi + 4\pi k$, $k \in Z$.

Замечание. Множество корней $x = \pi + 4\pi k,\ k \in Z$, является подмножеством корней $x = \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$ (проверьте на круге). Поэтому эту серию корней: $x = \pi + 4\pi k$, $k \in Z$ – мы не включаем в окончательный ответ.

5) $\sin 1{,}5x + 1 = 0$, $\sin\frac{3x}{2} = -1$. По формуле (9) $\frac{3x}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi k}{3}$, $k \in Z$.

Следовательно, $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi k}{3},\ k \in Z$, являются корнями пятого уравнения и исходного уравнения.

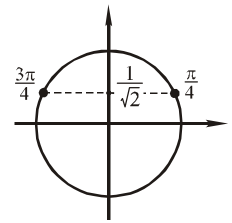
6) $\sin^2 2x - \frac{1}{8} = 0$, $\quad \sin^2 2x = \frac{1}{8}$. По формуле (10) $2x = \pm\arcsin\frac{1}{\sqrt{8}} + \pi k$, $\pi \in Z$, так как $\frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, то можно записать, что $x = \pm\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi k}{2},\ \ k \in Z$.

Следовательно, $x = \pm\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi k}{2},\ \ k \in Z$, являются корнями шестого уравнения и исходного уравнения.

Примеры решения простейших тригонометрических уравнений.

2. $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

□ Решаем уравнение $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad (\alpha = x + \frac{\pi}{3})$, т.е. находим значения всего аргумента тригонометрической функции.



Круг для α, а не для x. Решаем по формуле (6).

$$\left[\begin{aligned} &x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ \ n \in Z \\ &x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in Z \end{aligned}\right.$$

(Каждой отмеченной точке на окружности соответствует своя серия значений α).

Для получения окончательного ответа выразим x (как обычно при решении линейных уравнений).

$$x = -\frac{\pi}{12} + 2\pi n\,, \qquad x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi k\,.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{12} + 2\pi n$; $\ \frac{5\pi}{12} + 2\pi k$, $\ n,\ k \in Z$.

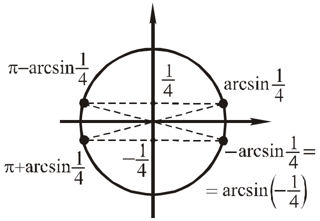
Замечания:

1. Если вы привыкли писать ответ в виде подформулы ($6'$), то в данной задаче получим:

$$x+\frac{\pi}{3}=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{4}+\pi k\ ; \qquad x=-\frac{\pi}{3}+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z\ .$$

2. Верный ответ в тригонометрическом уравнении может быть записан различными способами. Например, вместо серии « $-(\pi/13)+2\pi n$ » можно записать « $(23\pi/12)+2\pi n$ ».

3. $|\sin x|=\dfrac{1}{4}$.



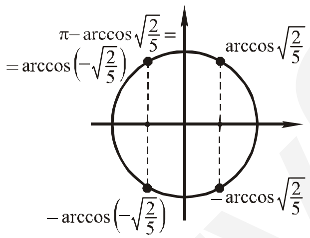
□ $\sin x=\pm\dfrac{1}{4}$. Если решать каждое из уравнений отдельно, получится 4 серии ответов. Попробуем изобразить все на одном круге и решить оба уравнения «на одной картинке».

Заметив, что диаметрально противоположные точки на круге отличаются друг от друга на полкруга, т.е. на π, пишем ответ двумя сериями (с периодом π, а не 2π).

Ответ: $\pm\arcsin\dfrac{1}{4}+\pi k\ ,\ \ k\in Z$.

4. $5\cos^2\pi x=2$.

1-й способ.



$$\cos^2\pi x=\frac{2}{5}\ ; \qquad \cos\pi x=\pm\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\pi x=\pm\arccos\left(\pm\sqrt{\frac{2}{5}}\right)+2\pi n,\ n\in Z\ ;$$

$$x=\pm\frac{1}{\pi}\arccos\left(\pm\sqrt{\frac{2}{5}}\right)+2n\ ;$$ или (если заметили симметрию):

$$\pi x=\pm\arccos\sqrt{\frac{2}{5}}+\pi n,\ n\in Z\ ; \quad x=\pm\frac{1}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{2}{5}}+n\ .$$

Ответ: $\pm\dfrac{1}{\pi}\arccos\left(\pm\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)+2n,\ n\in Z.\quad \left(x=\pm\dfrac{1}{\pi}\arccos\sqrt{\dfrac{2}{5}}+n,\ n\in Z\right).$

2-й способ.

Если мы не хотим иметь дело с большим количеством серий в ответе, можем понизить степень:

$$\cos^2\pi x=\frac{2}{5}\ ; \qquad \frac{\cos 2\pi x+1}{2}=\frac{2}{5}\ ; \qquad \cos 2\pi x=-\frac{1}{5}\ .$$

Тогда $2\pi x=\pm\arccos\left(-\dfrac{1}{5}\right)+2\pi n,\ n\in Z\ ;\quad x=\pm\dfrac{1}{2\pi}\arccos\left(-\dfrac{1}{5}\right)+n$.

Ответ: $\pm\dfrac{1}{2\pi}\arccos\left(-\dfrac{1}{5}\right)+n,\ n\in Z$.

(Как видим, опять в одной задаче ответ записан совершенно по-разному!)

Решение уравнений вида $\cos x=a$

Формула корней уравнения $\cos x=a$, где $-1\le a\le 1$, имеет вид:

$$x=\pm\arccos a+2\pi k,\quad k\in Z\ . \qquad (1)$$

Частные случаи:

$$\cos x=1,\ x=2\pi k,\ \ k\in Z\ ; \qquad (2)$$

$$\cos x=0,\ \ x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \ k\in Z\ ; \qquad (3)$$

$$\cos x=-1,\ \ x=\pi+2\pi k,\ \ k\in Z\ . \qquad (4)$$

Если $a\in(-1;0)$, то решение записывается так:

$$x=\pm(\pi-\arccos a)+2\pi k\ ,\ \ a\in(0;1)\ . \qquad (1')$$

Формула корней уравнения $\cos^2 x=a$, где $0\le a\le 1$, имеет вид:

$$x=\pm\arccos\sqrt{a}+\pi k,\ \ k\in Z\ . \qquad (5)$$

Примеры

5. ***Решить уравнение***

$$\left(\cos 2x-\frac{1}{2}\right)\left(\cos 3x+\frac{1}{2}\right)\cos 2x\left(\cos\frac{x}{2}-1\right)\left(\cos\frac{3x}{2}+1\right)\left(\cos^2 2x-\frac{1}{2}\right)=0\ .$$

□ Область определения $-x-$ любое действительное число. Левая часть уравнения содержит шесть сомножителей. Правая часть уравнения равна нулю. Произведение равно нулю тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю. Следовательно, надо решить шесть уравнений.

1) $\cos 2x-\dfrac{1}{2}=0$, $\quad\cos 2x=\dfrac{1}{2}$. По формуле (1) $2x=\pm\arccos\dfrac{1}{2}+2\pi k,\ \ k\in Z$,

так как $\arccos\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{3}$, то $2x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k\ ;\quad x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ \ k\in Z$.

Следовательно, $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$, – корни первого уравнения и исходного уравнения.

2) $\cos 3x+\frac{1}{2}=0$, $\cos 3x=-\frac{1}{2}$. По формуле (1) $3x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi k$, так как $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$, то $3x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$; $x=\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}k$, $k\in Z$.

Следовательно, $x=\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}k$, $k\in Z$, являются корнями второго уравнения и исходного уравнения.

3) $\cos 2x=0$. По формуле (3) $2x=\frac{\pi}{2}+\pi k$; $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$.

Следовательно, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$, являются корнями третьего уравнения и исходного уравнения.

4) $\cos\frac{x}{2}-1=0$, $\cos\frac{x}{2}=1$. По формуле (2) $\frac{x}{2}=2\pi k$; $x=4\pi k$.

Следовательно, $x=4\pi k$, $k\in Z$, являются корнями четвертого уравнения и исходного уравнения.

5) $\cos\frac{3x}{2}+1=0$, $\cos\frac{3x}{2}=-1$. По формуле (4) $\frac{3x}{2}=\pi+2\pi k$; $x=\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi k}{3}$.

Следовательно, $x=\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi k}{3}$, $k\in Z$, являются корнями пятого уравнения и исходного уравнения.

6) $\cos^2 2x-\frac{1}{2}=0$, $\cos^2 2x=\frac{1}{2}$. По формуле (5) $2x=\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}+\pi k$, так как $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}$, то $2x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$; $x=\pm\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$.

Следовательно, $x=\pm\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$, являются как корнями шестого уравнения, так и исходного.

Решение уравнений вида $\operatorname{tg} x=a$

Формула корней уравнения $\operatorname{tg} x=a$ имеет вид:

$$x=\operatorname{arctg} a+\pi k,\quad k\in Z. \tag{11}$$

Частные случаи:

$$\operatorname{tg} x=0,\quad x=\pi k,\ k\in Z; \tag{12}$$

$$\operatorname{tg} x=1,\quad x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z; \tag{13}$$

$$\operatorname{tg} x=-1,\quad x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z. \tag{14}$$

Формула корней уравнения $\operatorname{tg}^2 x=a$, где $a\in[0;\infty)$, имеет вид:

$$x=\pm\operatorname{arctg}\sqrt{a}+\pi k,\ k\in Z. \tag{15}$$

Примеры

6. ***Решить уравнение***

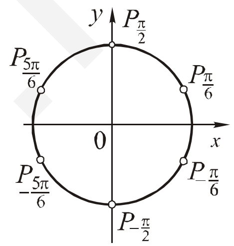


Рис. 1

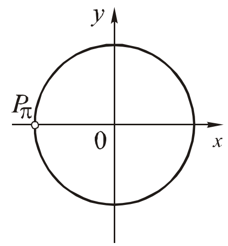


Рис. 2

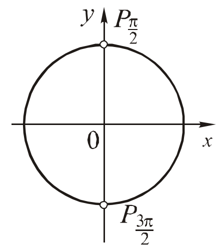


Рис. 3

$$\operatorname{tg}3x\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)(\operatorname{tg}x-1)\left(\operatorname{tg}2x-\sqrt{3}\right)\left(\operatorname{tg}^2 x-\frac{1}{3}\right)=0.$$

☐ Область определения данного уравнения:

$$\begin{cases}\cos 3x\neq 0,\\ \cos\frac{x}{2}\neq 0,\\ \cos x\neq 0,\\ \cos 2x\neq 0;\end{cases}\quad \begin{cases}3x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\\ \frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\\ 2x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k;\end{cases}\quad \begin{cases}x\neq\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3},\ k\in Z\ (\text{рис. }1),\\ x\neq\pi+2\pi k,\ k\in Z\ (\text{рис. }2),\\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z\ (\text{рис. }3),\\ x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z\ (\text{рис. }4).\end{cases}$$

Нанесем все исключенные точки на одну единичную окружность (рис. 5).

Чтобы решить данное уравнение, надо приравнять каждый сомножитель нулю, решить получившиеся уравнения и сравнить с точками на рис. 5.

1) $\operatorname{tg}3x=0$. По формуле (12) $3x=\pi k$, $x=\pi k/3$, $k\in Z$.

Нанесем эти точки на единичную окружность (рис. 6). Видно, что они не совпадают с точками на рис. 5, значит, удовлетворяют исходному уравнению.

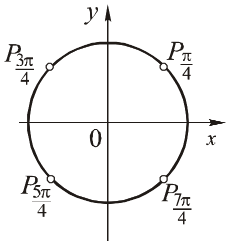


Рис. 4

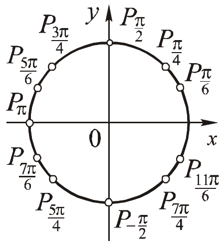


Рис. 5

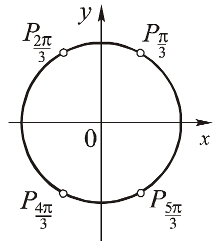


Рис. 6

2) $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1=0$, $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=-1$. По формуле (14) $\dfrac{x}{2}=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k$, $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$.

Нанесем найденные корни уравнения на единичную окружность (рис. 7). Совпадает с точкой на рис. 5, значит, не подходит в исходное уравнение.

3) $\operatorname{tg}x-1=0$, $\operatorname{tg}x=1$. По формуле (13) $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$.

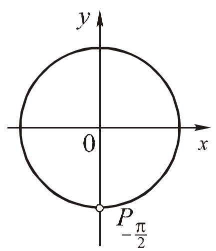


Рис. 7

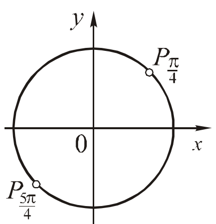


Рис. 8

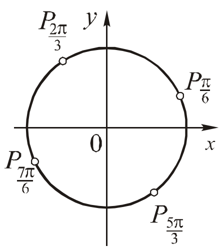


Рис. 9

Нанесем найденные корни уравнения на единичную окружность (рис. 8). Совпадают с точками на рис. 5.

4) $\operatorname{tg}2x-\sqrt{3}=0$, $\operatorname{tg}2x=\sqrt{3}$. По формуле (11) $2x=\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\pi k$, так как $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{3}$, то можно записать, что $2x=\dfrac{\pi}{3}+\pi k$, $x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{2}$, $k\in Z$.

Нанесем найденные корни уравнения на единичную окружность (рис. 9).

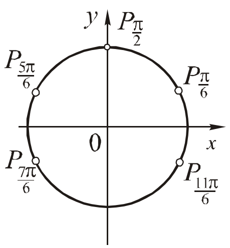


Рис. 10

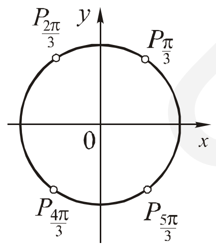


Рис. 11

5) $\operatorname{tg}^2x-\dfrac{1}{3}=0$, $\operatorname{tg}^2x=\dfrac{1}{3}$.

По формуле (15) $x=\pm\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\pi k$, так как $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\pi}{6}$, то можно записать, что $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$.

Нанесем найденные корни уравнения на единичную окружность (рис. 10). Совпадают с точками на рис. 5. Нет решения.

Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in Z$.

Решение тригонометрических уравнений, приводимых к квадратному

Если тригонометрическое уравнение целого вида содержит только синусы или (и) косинусы, то область допустимых значений переменной – множество действительных чисел, так как эти функции определены для любого действительного значения. Поэтому в дальнейшем при рассмотрении таких уравнений, как

$$a\sin^2 f(x)+b\sin f(x)+c=0,\quad a\cos^2 f(x)+b\sin f(x)+c=0$$

и т.п., область допустимых значений переменной не устанавливается.

Справедливы соотношения:

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha\,; \tag{16}$$

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha\,. \tag{17}$$

Примеры

Решить уравнения:

7. $8\sin^2x-6\sin x-5=0$.

□ Обозначим $\sin x$ через y, тогда данное уравнение можно записать в виде

$$8y^2-6y-5=0\,.$$

Мы получим квадратное уравнение относительно y. Решая его, найдем

$$y=\frac{3\pm7}{8};\ y_1=-\frac{1}{2},\ \ y_2=\frac{5}{4}\,.$$

Следовательно, $\sin x=-1/2$ или $\sin x=5/4$.

Решив уравнение $\sin x=-1/2$, получим $x=(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$.

Уравнение $\sin x=5/4$ корней не имеет, так как $\sin x$ не может быть больше единицы.

8. $8\cos^2x+6\sin x-3=0$.

□ Заменяя $\cos^2x$ через $1-\sin^2x$, получим

$$8\left(1-\sin^2x\right)+6\sin x-3=0,\qquad 8\sin^2x-6\sin x-5=0\,.$$

Пришли к уравнению, рассмотренному в примере 4.

9. $8\sin^2 x + 6\cos x - 3 = 0$.

□ Заменяя $\sin^2 x$ через $1 - \cos^2 x$, получим

$$8\left(1-\cos^2 x\right) + 6\cos x - 3 = 0, \quad 8\cos^2 x - 6\cos x - 5 = 0.$$

Введем новую переменную. Обозначим $\cos x$ через y. Тогда уравнение примет вид: $8y^2 - 6y - 5 = 0$.

Корни уравнения: $y_1 = -\dfrac{1}{2}$, $y_2 = \dfrac{5}{4}$. Следовательно, $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ или $\cos x = 5/4$.

Решив уравнение $\cos x = -1/2$, получим ответ.

Ответ: $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z$.

Ведь уравнение $\cos x = 5/4$ корней не имеет, так как $\cos x$ не может быть больше единицы.

10. $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{5}{8}$.

□ Дополним уравнение до полного квадрата, добавив $2\sin^2 x\cos^2 x$:

$$\sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \sin^4 x = \frac{5}{8} + 2\sin^2 x\cos^2 x,$$

$$\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 = \frac{5}{8} + 2\sin^2 x\cos^2 x,$$

$$3/8 = 2\sin^2 x\cos^2 x.$$

Домножив обе части уравнения на 2, получим $3/4 = \sin^2 2x$ или

$$2x = \pm\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k, \quad 2x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in Z.$$

Решение однородных тригонометрических уравнений

Справедливы соотношения:

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 1. \quad (21) \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}. \quad (22)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}. \quad (23) \qquad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}. \quad (24)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \quad (25)$$

Уравнения вида

$$\boxed{a\operatorname{tg} x + b\operatorname{ctg} x + c = 0}$$

приводятся к квадратному уравнению одной тригонометрической функции путем замены $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$.

Уравнения вида

$$\boxed{a\sin x + b\cos x = 0 \quad (a \ne 0, b \ne 0)} \qquad (26)$$

называются ***однородными первой степени*** относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Они решаются делением обеих частей на $\cos x \ne 0$, $\sin x \ne 0$. В результате получается уравнение вида

$$a\operatorname{tg} x + b = 0, \quad a + b\operatorname{ctg} x = 0. \qquad (27)$$

Уравнения вида

$$\boxed{a\sin^2 f(x) + b\sin f(x)\cos f(x) + k\cos^2 f(x) = 0} \qquad (28)$$

называются ***однородными второй степени*** относительно $\sin f(x)$ и $\cos f(x)$, если все три коэффициента a, b, k или какие-либо два из них, отличны от нуля.

Считая, что $a \ne 0$, разделим обе части уравнения на $\cos^2 f(x) \ne 0$, тогда получим

$$a\operatorname{tg}^2 f(x) + b\operatorname{tg} f(x) + k = 0. \qquad (29)$$

Уравнение (29) равносильно уравнению (28), так как корни уравнения $\cos^2 f(x) = 0$ не являются корнями уравнения (28).

Однако если $a = 0$, то уравнение (28) принимает вид $b\sin f(x)\cos f(x) + k\cos^2 f(x) = 0$, которое решается разложением левой части на множители: $\cos f(x)\left(b\sin f(x) + k\cos f(x)\right) = 0$.

Примеры

Решить уравнения:

11. $2\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 1$.

□ Область определения этого уравнения:

$$\begin{cases}\cos x \ne 0, \\ \sin x \ne 0;\end{cases} \quad \begin{cases} x \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \\ x \ne \pi k; \quad x \ne \dfrac{\pi}{2}k, \quad k \in Z.\end{cases}$$

Поскольку $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$, а $\operatorname{tg} x$ обозначим через y, то получим новое уравнение $2y - \dfrac{1}{y} - 1 = 0$, которое приводится к квадратному уравнению $2y^2 - y - 1 = 0$.

Корни этого уравнения: $y_1 = 1$, $y_2 = -1/2$.

Если $y_1 = \operatorname{tg} x = 1$, то $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in Z$.

Если $y_2 = \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$, то $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k,\ \ k \in Z$.

12. $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$.

☐ Значение аргумента, при которых $\cos x = 0$, не являются решениями этого уравнения, так как если $\cos x = 0$, то должно выполнятся равенство $2\sin^2 x = 0$, но косинус и синус не могут быть одновременно равны нулю. Поэтому можно обе части данного уравнения разделить на $\cos^2 x$ или $\sin^2 x$ и при этом получить равносильное уравнение.

Разделим обе части на $\cos^2 x$, получим $2\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 3 = 0$.

Решим его: $\operatorname{tg} x = 1$, поэтому $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$, и $\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$, поэтому $x_2 = \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi k,\ k \in Z$.

13. $22\cos^2 x + 8\sin x\cos x = 7$.

☐ Так как $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то данное уравнение можно заменить равносильным ему уравнением $22\cos^2 x + 8\sin x\cos x = 7\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$.

Раскроем скобки, перенесем все члены правой части уравнения в левую, сделаем приведение подобных членов. Получим:

$$7\sin^2 x - 8\sin x\cos x - 15\cos^2 x = 0.$$

Это однородное уравнение второй степени. Разделим обе части этого уравнения на $\cos^2 x$: $7\operatorname{tg}^2 x - 8\operatorname{tg} x - 15 = 0$, откуда $\operatorname{tg} x = -1$, значит, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in Z$, или $\operatorname{tg} x = \frac{15}{7}$, значит, $x = \operatorname{arctg}\frac{15}{7} + \pi k,\ \ k \in Z$.

14. $2\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$.

☐ Вынесем общий множитель за скобки, получим

$2\cos x(\sin x - \cos x) = 0$. Решим это уравнение.

$\cos x = 0$, значит, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k \in Z$. $\sin x - \cos x = 0$.

Разделив обе части на $\cos x$, получим $\operatorname{tg} x = 1$, значит, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in Z$.

Замечание. Если бы мы как в примерах 9 и 10, разделили обе части данного уравнения на $\cos^2 x$, то получили бы уравнение $2\operatorname{tg} x = 2$. Корни этого уравнения: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in Z$. Очевидно, что мы потеряли бы серию корней $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k \in Z$.

Тригонометрические уравнения, решаемые с помощью формул сложения, понижения степени

Формулы:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\cos\beta. \quad (30)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \quad (31)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha. \quad (32)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha. \quad (33)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \quad (34)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \quad (35)$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha. \quad (36)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \quad (37)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}. \quad (38)$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (39)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}. \quad (40)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (41)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\sin\frac{\alpha + \beta}{2}. \quad (42)$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}. \quad (43)$$

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (44)$$

$$1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha. \qquad (45)$$

$$1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha. \qquad (46)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (47)$$

П р и м е р ы

Решить уравнения:

15. $1+\cos x+\cos 2x = 0$.

□ По формуле (46) выражение $1+\cos 2x$ заменим выражением $2\cos^2 x$. Уравнение примет вид:

$$2\cos^2 x+\cos x = 0.$$

Это уравнение разложим на множители:

$$\cos x(2\cos x+1) = 0.$$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю, т.е. $\cos x = 0$ или $2\cos x+1 = 0$.

$\cos x = 0$, следовательно, $x = \frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$;

$\cos x = -\frac{1}{2}$, следовательно, $x = \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$.

16. $4\sin x-6\cos x = 1$.

□ Переходя к аргументу $\frac{x}{2}$, имеем:

$$4\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-6\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}.$$

После преобразования получим

$$5\sin^2\frac{x}{2}+8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-7\cos^2\frac{x}{2} = 0.$$

Это уравнение однородное. После деления на $\cos^2\frac{x}{2}$ получим

$$5\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+8\operatorname{tg}\frac{x}{2}-7 = 0.$$

Корни уравнения: $x = 2\pi k+2\operatorname{arctg}\frac{-4\pm\sqrt{51}}{5}$.

17. $\sin x-\sin 2x+\sin 3x-\sin 4x = 0$.

□ Преобразуем это уравнение следующим образом:

$$(\sin x+\sin 3x)-(\sin 2x+\sin 4x) = 0.$$

Преобразуем каждую из сумм по формуле (39) в произведение:

$$2\sin 2x\cos x-2\sin 3x\cos x = 0.$$

Вынесем общий множитель $2\cos x$ за скобки:

$$2\cos x(\sin 2x-\sin 3x) = 0.$$

Разность $(\sin 2x-\sin 3x)$ преобразуем в произведение, тогда уравнение примет вид: $2\cos x\; 2\sin\left(-\frac{x}{2}\right)\cos\frac{5x}{2} = 0$.

Решим это уравнение: $\cos x = 0$, значит, $x = \frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$;

$\sin\left(-\frac{x}{2}\right) = 0$, $-\sin\frac{x}{2} = 0$, значит, $\frac{x}{2} = \pi k$, $x = 2\pi k$, $k\in Z$;

$\cos\frac{5x}{2} = 0$, $\frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2}+\pi k$, $x = \frac{\pi}{5}+\frac{2\pi k}{5}$, $k\in Z$.

18. $\cos 2x+\cos 8x-\cos 6x = 1$ на промежутке $[0;\pi/2]$.

□ Имеем: $\cos 2x+\cos 8x = 1+\cos 6x$.

Преобразуем левую часть уравнения по формуле (41), а правую – по формуле (46), получим: $2\cos 5x\cos 3x = 2\cos^2 3x$, $2\cos 3x(\cos 5x-\cos 3x) = 0$.

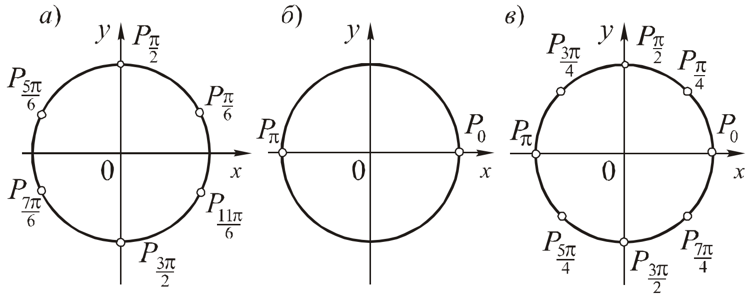
Преобразуем разность по формуле (42) в произведение:

$$2\cos 3x(-2\sin 4x\sin x) = 0.$$

Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю.

$\cos 3x = 0$, значит, $x = \frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$ (рис. *а*);

$\sin x = 0$, значит, $x = \pi k$, $k\in Z$ (рис. *б*); $\sin 4x = 0$, $x = \frac{\pi k}{4}$, $k\in Z$ (рис. *в*).



Нанесем полученные результаты на единичную окружность. Заметим, что множество корней $x=\pi k$ является подмножеством множества корней $x=\pi k/4$.

Отбирая из множеств $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$ и $x=\frac{\pi k}{4}$ значения x, принадлежащие промежутку $\left[0;\ \pi/2\right]$, получаем следующие значения корней: 0, $\pi/6$; $\pi/4$; $\pi/2$.

19. $\sin^2 x+\cos^2 2x+\sin^2 3x=1{,}5$.

□ Решим это уравнение способом понижения степени. Используя формулы (35) и (36), преобразуем уравнение:

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 4x}{2}+\frac{1-\cos 6x}{2}=\frac{3}{2};$$

$$1-\cos 2x+1+\cos 4x+1-\cos 6x=3; \qquad \cos 2x+\cos 6x-\cos 4x=0.$$

Сумму преобразуем в произведение по формуле (41), получим

$$2\cos 4x\cos 2x-\cos 4x=0.$$

Вынесем общий множитель за скобки: $\cos 4x\left(2\cos 2x-1\right)=0$.

Произведение равно нулю тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю:

$$\cos 4x=0 \text{, значит, } x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4},\ k\in Z.$$

20. $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{7}{8}$.

□ 1-й способ.

Воспользуемся равенством

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x,$$

откуда $\quad 1-2\sin^2 x\cos^2 x=7/8, \quad 2\sin^2 x\cos^2 x=1/8$.

Умножим обе части последнего равенства на 2, получим

$$2\sin x\cos x 2\sin x\cos x=1/4; \quad \sin^2 2x=1/4;$$

$$\sin 2x=\pm\frac{1}{2},\quad 2x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\quad x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z.$$

2-й способ.

Понизим степень синуса и косинуса:

$$\sin^4 x+\cos^2 x=\left(\sin^2 x\right)^2+\left(\cos^2 x\right)^2=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2.$$

После преобразования получим

$$\frac{2+2\cos^2 2x}{4}=\frac{7}{8};\quad \cos^2 2x=\frac{3}{4};\quad \cos 2x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2};$$

значит, $2x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$.

Введение вспомогательного аргумента

Напомним, что два числа могут быть синусом и косинусом одного и того же аргумента, если сумма их квадратов равна 1. Например, этому условию удовлетворяют числа $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (проверьте!). (При положительных a и b эти числа – sin и cos одного и того же угла прямоугольного треугольника.)

Теперь рассмотрим уравнение $a\sin x+b\cos x=c$. Напишем третье число: из a и b – $\sqrt{a^2+b^2}$.

Разделим уравнение на $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Положим $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$.

$$\sin x\sin\varphi+\cos x\cos\varphi=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

(Если Вам больше нравится синус, положим

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi,\quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi.)$$

Где $\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $x+\varphi=(-1)^k\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+\pi k$.

Замечание.

$\varphi=\arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\operatorname{arctg}\frac{a}{b}$ в первом варианте и $\varphi=\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ во втором варианте записи, если a и $b>0$.

Примеры

21. $3\cos 7x-5\sin 7x=2$ и получим в нем ответ совершенно другого вида.

$$\sqrt{9+25}\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\cos 7x-\frac{5}{\sqrt{34}}\sin 7x\right)=2.$$

$$\frac{3}{\sqrt{34}}\cos 7x-\frac{5}{\sqrt{34}}\sin 7x=\frac{2}{\sqrt{34}};\quad \cos\left(7x+\mathrm{arctg}\frac{5}{3}\right)=\frac{2}{\sqrt{34}}.$$

$$7x=-\mathrm{arctg}\frac{5}{3}\pm\arccos\frac{2}{\sqrt{34}}+2\pi n,\quad n\in Z.$$

$\frac{3}{\sqrt{34}}=\cos\varphi$; $\frac{5}{\sqrt{34}}=\sin\varphi$; можно взять $\varphi\in(0;\ \frac{\pi}{2})$, $\mathrm{tg}\varphi=\frac{5}{3}$.

Ответ: $-\frac{1}{7}\mathrm{arctg}\frac{5}{3}\pm\frac{1}{7}\arccos\frac{2}{\sqrt{34}}+\frac{2\pi n}{7},\quad n\in Z$.

Замечание. В тригонометрии часто один и тот же ответ записывается в разных видах, это зависит от способа решения. На самом деле, одну запись можно преобразовать в другую.

22. ***При каких значениях параметра*** a ***уравнение*** $3\sin x-a\cos x=2a$ ***имеет решения?***

□ $3\sin x-a\cos x=2a$; $\sqrt{9+a^2}\left(\frac{3}{\sqrt{9+a^2}}\sin x-\frac{a}{\sqrt{9+a^2}}\cos x\right)=2a$;

$$\frac{3}{\sqrt{9+a^2}}\sin x-\frac{a}{\sqrt{9+a^2}}\cos x=\frac{2a}{\sqrt{9+a^2}};\quad \sin(x-\varphi)=\frac{2a}{\sqrt{9+a^2}}.$$

Уравнение имеет решения при условии $\sin(x-\varphi)\in[-1;\ 1]$, т.е. $|\sin(x-\varphi)|\le 1$, т.е. $\frac{2|a|}{\sqrt{9+a^2}}\le 1$. Решим это неравенство, домножив на **положительную** величину $\sqrt{9+a^2}$ и возводя обе **неотрицательные** части неравенства в квадрат:

$$\frac{2|a|}{\sqrt{9+a^2}}\le 1;\quad 2|a|\le\sqrt{9+a^2};\quad 4a^2\le 9+a^2;\quad a^2\le 3;\quad |a|\le\sqrt{3}.$$

Ответ: $a\in\left[-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right]$.

23. $2\sin 11x+\sqrt{3}\sin 5x+\cos 5x=0$.

□ Введем вспомогательный угол. Разделив уравнение на $\sqrt{3+1}$, получим

$$\sin 11x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 5x+\frac{1}{2}\cos 5x=0.$$

Так как $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$, а $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$, то это уравнение примет вид:

$$\sin 11x+\cos\frac{\pi}{6}\sin 5x+\sin\frac{\pi}{6}\cos 5x=0;\quad \sin 11x+\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)=0.$$

Заменим сумму произведением по формуле (39):

$$2\sin\frac{11x+5x+\frac{\pi}{6}}{2}\cos\frac{11x-5x-\frac{\pi}{6}}{2}=0,$$

$$x=\frac{\pi}{96}(12k-1)\ \text{ и }\ x=\frac{\pi}{36}(12k+7),\quad k\in Z.$$

24. $\sin^4 x+\cos^4 x-3\sin 2x+\frac{5}{2}\sin^2 2x=0$.

□ Имеем: $\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x-3\sin 2x+\frac{5}{2}\sin^2 2x=0$.

Так как $2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{2}4\sin^2\cos^2 x=\frac{1}{2}\sin^2 2x$, то последнее уравнение примет вид:

$$1-\frac{1}{2}\sin^2 2x-3\sin 2x+\frac{5}{2}\sin^2 2x=0;\quad 2\sin^2 2x-3\sin 2x+1=0.$$

Последнее уравнение квадратное относительно $\sin 2x$; решив его, получим $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, и $x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$.

Решение систем тригонометрических уравнений

При решении систем тригонометрических уравнений последние сводят либо к одному уравнению с одним неизвестным, либо к системе уравнений относительно самих аргументов или функций этих аргументов.

Рассмотрим лишь некоторые типы систем тригонометрических уравнений и наиболее употребительные методы их решения.

Решим систему вида

$$\begin{cases}\sin x\sin y=a,\\ \cos x\cos y=b.\end{cases}$$

Складывая и вычитая уравнения системы, получаем равносильную систему:

$$\begin{cases}\cos(x-y)=a+b,\\ \cos(x+y)=b-a.\end{cases}$$

Эта система, а значит, и исходная система, имеют решения в том и только в том случае, когда выполняются условия $-1\le a+b\le 1$ и $-1\le b-a\le 1$. Если эти условия выполнены, то

$$\begin{cases} x-y=\pm\arccos(a+b)+2\pi k, \\ x+y=\pm\arccos(b-a)+2\pi n, \end{cases}$$

где k и n – любые целые числа, а знаки выбираются произвольно.

Пусть $\arccos(a+b)=\alpha,\ \ \arccos(b-a)=\beta$.

Таким образом, система определяет четыре серии решений:

$$1)\begin{cases} x-y=\alpha+2\pi k, \\ x+y=\beta+2\pi n, \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} x-y=-\alpha+2\pi k, \\ x+y=\beta+2\pi n, \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} x-y=\alpha+2\pi k, \\ x+y=-\beta+2\pi n, \end{cases} \qquad 4)\begin{cases} x-y=-\alpha+2\pi k, \\ x+y=-\beta+2\pi n. \end{cases}$$

Решая эти системы, находим:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\pi(k+n), \\ y=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)+\pi(n-k), \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)+\pi(k+n), \\ y=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\pi(n-k), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+\pi(k+n), \\ y=-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\pi(n-k), \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\pi(k+n), \\ y=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+\pi(n-k). \end{cases}$$

Аналогично решается система вида

$$\begin{cases} \sin x\cos y=a, \\ \cos x\sin y=b. \end{cases}$$

П р и м е р ы

Решить системы:

25. $\begin{cases} \sin x\cos y=-0{,}5, \\ \cos x\sin y=0{,}5. \end{cases}$

☐ Складывая уравнения системы, получаем равносильную систему

$$\begin{cases} \sin x\cos y+\cos x\sin y=0, \\ \cos x\sin y-\sin x\cos y=1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin(x+y)=0, \\ \sin(y-x)=1. \end{cases}$$

Решая последнюю систему, получаем:

$$\begin{cases} x+y=\pi n, \\ y-x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, \quad k,n\in Z. \end{cases}$$

Складывая уравнения этой системы, получаем $2y=\pi n+\frac{\pi}{2}+2\pi k$, или $y=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}+\pi k$.

Вычитая из первого уравнения системы второе, получаем $2x=\pi n-\frac{\pi}{2}-2\pi k$, или $x=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}-\pi k$.

Ответ: $x=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}-\pi k$, $k\in Z$, $n\in Z$; $y=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}+\pi k$, $k\in Z$, $n\in Z$.

26. $\begin{cases} x-y=\frac{5\pi}{3}, \\ \sin x=2\sin y. \end{cases}$

☐ Из первого уравнения системы находим $y=x-\frac{5\pi}{3}$. Тогда второе уравнение системы примет вид: $\sin x=2\sin\left(x-\frac{5\pi}{3}\right)$.

Упростим правую часть уравнения:

$$2\sin\left(x-\frac{5\pi}{3}\right)=2\left(\sin x\cos\frac{5\pi}{3}-\cos x\sin\frac{5\pi}{3}\right)=$$

$$=2\left(\sin x\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=\sin x+\sqrt{3}\cos x.$$

Таким образом, уравнение примет вид: $\sin x=\sin x+\sqrt{3}\cos x$, откуда $\cos x=0$, $x=(\pi/2)+\pi k$, $k\in Z$.

Так как $y=x-\frac{5\pi}{3}$, а $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, то $y=\frac{\pi}{2}+\pi k-\frac{5\pi}{3}=\pi k-\frac{7\pi}{6}$, $k\in Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \ y=\pi k-\frac{7\pi}{6}$, $k\in Z$.

27. $\begin{cases} \operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=1, \\ x+y=\frac{\pi}{4}. \end{cases}$

☐ Область определения системы:

$$\begin{cases} \cos x\neq 0, \\ \cos y\neq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, \quad k\in Z, \\ y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in Z. \end{cases}$$

Применяя способ подстановки, получаем

$$\begin{cases} y=\dfrac{\pi}{4}-x,\\ \operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=1.\end{cases}$$

Решаем второе уравнение этой системы:

$$\operatorname{tg}x+\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}x}=1.$$

В результате упрощений получаем

$$\operatorname{tg}x^2-\operatorname{tg}x=0,\quad \operatorname{tg}x\left(\operatorname{tg}x-1\right)=0.$$

Теперь систему заменим двумя совокупными системами:

$$1)\ \begin{cases}\operatorname{tg}x=0,\\ y=\dfrac{\pi}{4}-x,\end{cases}\qquad 2)\ \begin{cases}\operatorname{tg}-1=0,\\ y=\dfrac{\pi}{4}-x.\end{cases}$$

Решения первой системы:

$$\begin{cases}x=\pi k,\\ y=\dfrac{\pi}{4}-\pi k,\quad k\in Z.\end{cases}$$

Решения второй системы:

$$\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\\ y=\dfrac{\pi}{4}-\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi k\right),\quad k\in Z.\end{cases}$$

Ответ: $x_1=\pi k,\ y_1=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z;\ x_2=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\quad y_2=-\pi k,\quad k\in Z.$

28. $\begin{cases}\sin x\sin y=0,75,\\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=3.\end{cases}$

□ Область определения системы:

$$\begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in Z,\\ y\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \ k\in Z.\end{cases}$$

Разделив почленно первое уравнение заданной системы на второе, получим уравнение $\cos x\cos y=1/4$.

Заменим второе уравнение системы полученным уравнением. Имеем равносильную систему

$$\begin{cases}\sin x\sin y=0,75,\\ \cos x\cos y=1/4.\end{cases}$$

Складывая и вычитая уравнения этой системы, получаем равносильную систему

$$\begin{cases}\cos x\cos y+\sin x\sin y=1,\\ \cos x\cos y-\sin x\sin y=-1/2,\end{cases}\qquad \begin{cases}\cos\left(x-y\right)=1,\\ \cos\left(x+y\right)=-1/2.\end{cases}$$

Из первого уравнения последней системы находим $x-y=2\pi n$, $n\in Z$. Второе уравнение системы равносильно двум уравнениям:

$$x+y=\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\quad x+y=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in Z.$$

Таким образом, последняя система равносильна двум системам:

$$а)\ \begin{cases}x-y=2\pi n,\\ x+y=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\end{cases}\qquad б)\ \begin{cases}x-y=2\pi n,\\ x+y=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k.\end{cases}$$

Ответ: $x_1=\dfrac{\pi}{3}+\pi\left(k+n\right);\ y_1=\dfrac{\pi}{3}+\pi\left(k-n\right),\ k\in Z,\ n\in Z;$

$x_2=-\dfrac{\pi}{3}+\pi\left(k+n\right);\ y_2=-\dfrac{\pi}{3}+\pi\left(k-n\right),\ k\in Z,\ n\in Z.$

29. $\begin{cases}\sin^2x+\cos^2y=0,5,\\ x+y=\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

□ Используем формулы (43) и (44). Тогда система равносильна системе

$$\begin{cases}\dfrac{1-\cos 2x}{2}+\dfrac{1+\cos 2y}{2}=\dfrac{1}{2},\\ x+y=\dfrac{\pi}{4};\end{cases}\qquad \begin{cases}\cos 2y-\cos 2x=1,\\ x+y=\dfrac{\pi}{4};\end{cases}$$

$$\begin{cases}2\sin\dfrac{2y-2x}{2}\sin\dfrac{2y+2x}{2}=1,\\ x+y=\dfrac{\pi}{4};\end{cases}\qquad \begin{cases}2\sin\left(x+y\right)\sin\left(x-y\right)=-1,\\ x+y=\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

Так как $x+y=\dfrac{\pi}{4}$, то $\begin{cases}2\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\left(x-y\right)=-1,\\ x+y=\dfrac{\pi}{4};\end{cases}\qquad \begin{cases}\sin\left(x-y\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ x+y=\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

Решая последнюю систему уравнений, находим:

$$\begin{cases}x-y=\left(-1\right)^{k+1}\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\quad k\in Z,\\ x+y=\dfrac{\pi}{4};\end{cases}$$

и поэтому $x=\dfrac{\pi}{8}\left(1+\left(-1\right)^{k+1}\right)+\dfrac{\pi k}{2};\quad y=\dfrac{\pi}{8}\left(1+\left(-1\right)^{k}\right)-\dfrac{\pi k}{2},\quad k\in Z.$

Глава 6. РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Решение неравенств вида $\sin x > a$, $\sin x < a$

Неравенства, содержащие переменную только под знаком тригонометрической функции, называются ***тригонометрическими***.

При решении тригонометрических неравенств используют свойство монотонности тригонометрических функций, а также промежутки их знакопостоянства.

Для решения простейших тригонометрических неравенств вида $\sin x > a\ (\sin x < a)$ используют единичную окружность или график функции $y = \sin x$.

Важно знать, что:

$\sin x = 0$, если $x = \pi k$, $k \in Z$;

$\sin x = -1$, если $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$;

$\sin x = 1$, если $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$;

$\sin x > 0$, если $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$, $k \in Z$;

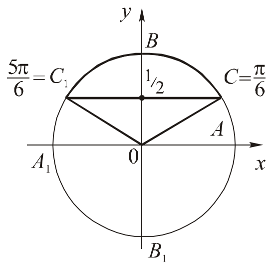
$\sin x < 0$, если $-\pi + 2\pi k < x < 2\pi k$, $k \in Z$.

П р и м е р ы

Решить неравенства:

1. $\sin x > \dfrac{1}{2}$.

☐ 1-й с п о с о б .



На единичной окружности строим дуги AC и AC_1, синус которых равен $1/2$. Данному неравенству удовлетворяют все дуги, начало которых находится в точке C, а конец – в любой внутренней точке дуги CBC_1, т.е. $\pi/6 < x < 5\pi/6$.

Чтобы получить все решения данного неравенства, достаточно к концам этого промежутка прибавить $2\pi k$. (Почему?)

Окончательно имеем:

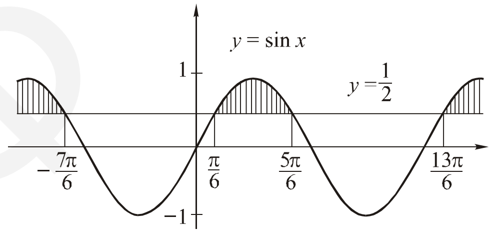
$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

2-й с п о с о б .

Для решения данного неравенства строим график функции $y = \sin x$ и $y = \dfrac{1}{2}$.

Прямая $y = 1/2$ пересекает синусоиду в бесконечном числе точек.

На графике выделены несколько промежутков значений аргумента, удовлетворяющих данному неравенству, один из них $(\pi/6; 5\pi/6)$. Воспользовавшись периодичностью синуса, запишем окончательный ответ:



$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

2. $\sin x < \dfrac{1}{2}$.

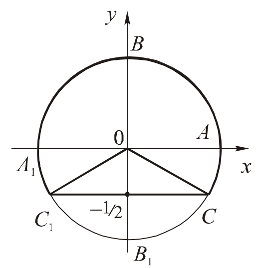
☐ Концы искомых дуг должны лежать на дуге C_1B_1C (рис. 6.1 и 6.2), т.е. $\dfrac{5\pi}{6} < x < \dfrac{13\pi}{6}$ или $-\dfrac{7\pi}{6} < x < \dfrac{\pi}{6}$.

Общее решение данного неравенства имеет вид:

$$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

3. $\sin x \ge -\dfrac{1}{2}$.

☐ На единичной окружности построим дуги, синус которых равен $-1/2$. Данному неравенству удовлетворяют все дуги, начало которых находится в точке A, а конец – в любой точке дуги CBC_1, т.е. $-\dfrac{\pi}{6} \le x \le \dfrac{7\pi}{6}$.



Общее решение данного неравенства имеет вид:

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi k \le x \le \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

Замечание. В отличие от предыдущих примеров концы этой дуги входят в искомое множество. (Почему?)

4. $\sin 3x\cos x+\cos 3x\sin x\ge \frac{1}{2}$.

☐ Левая часть неравенства представляет собой синус суммы, т.е. $\sin(3x+x)$, или $\sin 4x$. Следовательно, данное неравенство примет вид $\sin 4x\ge \frac{1}{2}$. Пользуясь рис. 6.1, находим

$$\frac{\pi}{6}+2\pi k\le 4x\le \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \ k\in Z,$$

откуда

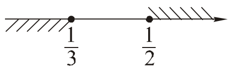
$$\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}\le x\le \frac{5\pi}{24}+\frac{\pi k}{2},\ \ k\in Z.$$

5. $6\sin^2 x-5\sin x+1\ge 0$.

☐ Введем новую переменную $y=\sin x$. Тогда данное неравенство можно записать в виде $6y^2-5y+1\ge 0$. Мы получили квадратное неравенство. Корни трехчлена: $y_1=1/2$ и $y_2=1/3$.

Разложим трехчлен $6y^2-5y+1$ на линейные множители, по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ имеем: $6y^2-5y+1=6\left(y-\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)\ge 0$.

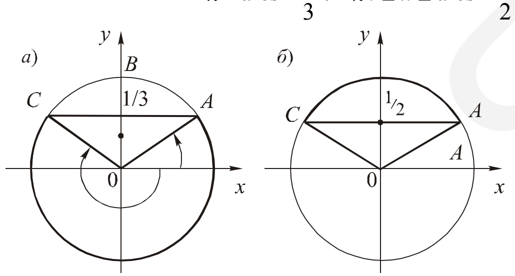
Решим это неравенство методом интервалов. Его решением будет объединение промежутков $y\le 1/3$ и $y\ge 1/2$. Тогда получаем, что $\sin x\le 1/3$ и $\sin x\ge 1/2$.



Для решения первого неравенства используем единичную окружность (рис. *а*), отсюда видим, что этому неравенству удовлетворяют такие значения x: $-\pi-\arcsin\frac{1}{3}\le x\le \arcsin\frac{1}{3}$.

Чтобы получить все решения неравенства, достаточно к концам указанного промежутка прибавить $2\pi k$. (Почему?) Окончательно имеем:

$$-\pi-\arcsin\frac{1}{3}+2\pi k\le x\le \arcsin\frac{1}{2}+2\pi k,\ \ k\in Z.$$



Для решения второго неравенства используем также единичную окружность (рис. *б*), из которого видим, что этому неравенству удовлетворяют следующие значения x:

$$\frac{\pi}{6}+2\pi k\le x\le \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \ k\in Z.$$

Решением заданного неравенства являются значения x, удовлетворяющие двум последним неравенствам.

6. $\frac{15}{\sin x+1}<11-2\sin x$.

☐ Введем новую переменную $y=\sin x$, тогда данное неравенство можно записать в виде: $\frac{15}{y+1}<11-2y$.

Решим неравенство:

$$\frac{15}{y+1}-11+2y<0,\qquad \frac{15-11(y+1)+2y(y+1)}{y+1}<0,$$

$$\frac{15-11y-11+2y^2+2y}{y+1}<0,\qquad \frac{2y^2-9y+4}{y+1}<0.$$

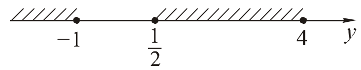
Найдем корни квадратного трехчлена в числителе:

$$2y^2-9y+4=0,\ \ y_1=4 \text{ и } y_2=\frac{1}{2}. \text{ Тогда}$$

$$\frac{2y^2-9y+4}{y+1}=\frac{2(y-4)\left(y-\frac{1}{2}\right)}{y+1}<0.$$

Решим неравенство методом интервалов. Из рисунка видим, что решением являются $y<-1$ и $\frac{1}{2}<y<4$. Следовательно, $\sin x<-1$ и $\frac{1}{2}<\sin x<4$.

Нам известно, что функция синус ограничена, т.е. $-1\le\sin x\le 1$, поэтому неравенство $\sin x<-1$ решений не имеет.



Осталось решить неравенство $1/2<\sin x<4$. Учитывая ограниченность функции синус, имеем $1/2<\sin x\le 1$. Решением этого неравенства, а следовательно, и заданного неравенства, будет $\frac{\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \ k\in Z$.

Решение неравенств вида $\cos x>a$, $\cos x<a$

Для решения простейших тригонометрических неравенств вида

$$\cos x>a,\ \ \cos x<a$$

используют единичную окружность или график функции $y=\cos x$.

Важно знать, что:

$\cos x = 0$, если $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$;

$\cos x = -1$, если $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$;

$\cos x = 1$, если $x = 2\pi k$, $k \in Z$;

$\cos x > 0$, если $2\pi k - \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \ k \in Z$;

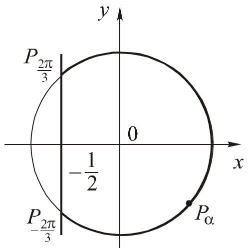
$\cos x < 0$, если $2\pi k + \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3}{2}\pi + 2\pi k,\ \ k \in Z$.

П р и м е р ы

Решить неравенства:

7. $\cos 3x \ge -\dfrac{1}{2}$.

□ Обозначим $3x$ через α, тогда данное неравенство примет вид $\cos\alpha \ge -1/2$. Этому неравенству удовлетворяют все точки P_α единичной окружности, абсциссы



которых больше или равны $-1/2$ (см. рис.), т.е. эти точки дуги лежат правее прямой $x = -1/2$ или на самой этой прямой. Следовательно, множество всех точек, удовлетворяющих, данному неравенству, есть дуга (выделена на рис.). Концы этой дуги входят в искомое множество, так как их абсциссы равны $-1/2$ и, значит, удовлетворяют данному неравенству.

Таким образом, $-\dfrac{2\pi}{3} \le \alpha \le \dfrac{2\pi}{3}$.

Учитывая периодичность косинуса, запишем множество всех решений неравенства $\cos\alpha \ge -1/2$: $-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k \le \alpha \le \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ \ k \in Z$.

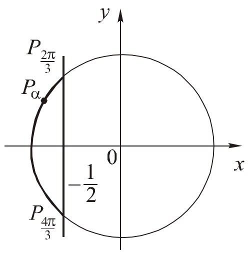
Переходя снова к переменной x, получаем

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \le 3x \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ \ k \in Z;\quad -\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3} \le x \le \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3},\ \ k \in Z.$$

Для решения данного неравенства можно было использовать графики функций $y = \cos\alpha$ и $y = -1/2$.

8. $\cos 2x < -\dfrac{1}{2}$.

□ Обозначим через α $2x$, тогда данное неравенство примет вид $\cos\alpha < -1/2$. Этому неравенству удовлетворяют все точки единичной окружности, абсциссы которых меньше $-1/2$ (см. рис.), т.е. эти точки лежат левее прямой $x = -1/2$.



Следовательно, искомое множество точек есть дуга (выделена на рис.). Концы этой дуги не входят в искомое множество, так как мы решаем строгое неравенство.

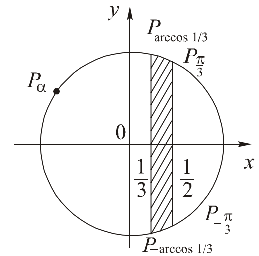
Ограничиваясь рассмотрением углов α, лежащих в промежутке $(0;\ 2\pi)$, получаем $2\pi/3 < \alpha < 4\pi/3$.

Учитывая периодичность косинуса, запишем множество всех решений неравенства $\cos\alpha < -1/2$: $\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k < \alpha < \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi k,\ \ k \in Z$.

Перейдя снова к переменной x, получаем

$$\frac{\pi}{3} + \pi k < x < \frac{2\pi}{3} + \pi k,\ \ k \in Z.$$

9. $6\cos^2 x - 5\cos x + 1 \le 0$.



□ Введем новую переменную $y = \cos x$. Тогда данное неравенство можно записать в виде: $6y^2 - 5y + 1 \le 0$.

Получили квадратное неравенство; корни трехчлена: $y_1 = 1/2$ и $y_2 = 1/3$.

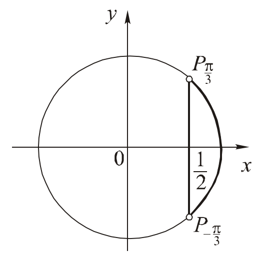
Решением этого неравенства служит отрезок $\dfrac{1}{3} \le y \le \dfrac{1}{2}$ или $\dfrac{1}{3} \le \cos x \le \dfrac{1}{2}$.

Все искомые точки лежат правее прямой $x = \dfrac{1}{3}$ и левее прямой $x = \dfrac{1}{2}$ (см. рис.).

Получили ответ:

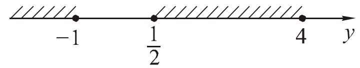
$$\frac{\pi}{3} + 2\pi k \le x \le \arccos\frac{1}{3} + 2\pi k,\ \ k \in Z;\quad -\arccos\frac{1}{3} + 2\pi k \le x \le -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \ k \in Z.$$

10. $\dfrac{15}{\cos x + 1} < 11 - 2\cos x$.



□ Введем новую переменную $y = \cos x$, тогда данное неравенство примет вид: $\dfrac{15}{y+1} < 11 - 2y$. После преобразования получаем $\dfrac{2(y-4)\left(y - \frac{1}{2}\right)}{y+1} < 0$.

Решим это неравенство методом интервалов.



Решение неравенства: $y < -1$ и $1/2 < y < 4$.

Неравенство $\cos x < -1$ решения не имеет.

Так как $-1 \le \cos x \le 1$, то неравенство $1/2 < \cos x < 4$ надо заменить неравенством $1/2 < \cos x \le 1$. Решением этого неравенства является $2\pi k - \dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Решение неравенств вида $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{tg} x < a$

Для решения простейших тригонометрических неравенств вида

$$\operatorname{tg} x > a, \quad \operatorname{tg} x < a$$

используют единичную окружность или график функции $y = \operatorname{tg} x$.

Важно знать, что:

$$\operatorname{tg} x > 0, \qquad \text{если } \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z;$$

$$\operatorname{tg} x < 0, \qquad \text{если } \pi k - \frac{\pi}{2} < x < \pi k,\ k \in Z;$$

$$\text{тангенс не существует, если } x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z.$$

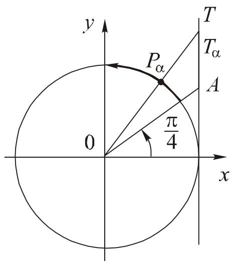
П р и м е р ы

Решить неравенства:

11. $\operatorname{tg} 2x \ge 1$.

□ Введем новую переменную, т.е. обозначим через α $2x$, тогда неравенство примет вид $\operatorname{tg}\alpha \ge 1$.

Построим единичную окружность и проведем линию тангенсов, которая является касательной к окружности в точке $(1;\ 0)$.



Так как α – решение неравенства $\operatorname{tg}\alpha \ge 1$, то ордината точки T_α линии тангенсов, равная $\operatorname{tg}\alpha$, должна быть больше или равна 1. Все такие точки лежат на луче AT (см. рис.).

Точки P_α единичной окружности, соответствующие точкам T_α, образуют дугу (выделена на рис.). Для точек P_α этой дуги и выполняется неравенство $\pi/4 \le \alpha < \pi/2$.

Чтобы получить все решения неравенства $\operatorname{tg}\alpha \ge 1$, достаточно к концам указанного промежутка $\pi/4 \le \alpha < \pi/2$ прибавить период тангенса, получим

$$\pi k + \frac{\pi}{4} \le \alpha < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z. \quad \text{Так как } \alpha = 2x, \text{ то } \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{8} \le x < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z.$$

12. $\operatorname{tg}^2 x - \dfrac{1}{4}\operatorname{tg} x - \dfrac{3}{4} > 0$.

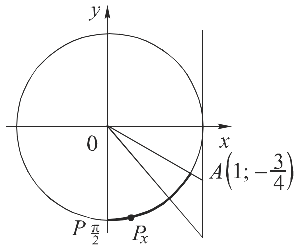
□ Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена, если $\cos x \ne 0$, т.е. $x \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

Это надо учитывать при окончательной записи ответа неравенства, которое решается.

Введем новую переменную $y = \operatorname{tg} x$. Тогда данное неравенство можно записать в виде квадратного неравенства: $y^2 - \dfrac{y}{4} - \dfrac{3}{4} > 0$.

Корнями квадратного трехчлена являются $y_1 = 1$ и $y_2 = -3/4$. Решением неравенства являются $y < -3/4$ и $y > 1$, делая обратную замену, получим: $\operatorname{tg} x < -3/4$; $\operatorname{tg} x > 1$. Эти два неравенства нам и предстоит теперь решить.

Неравенство $\operatorname{tg} x > 1$ мы уже решили в предыдущем примере. Ответ его известен.



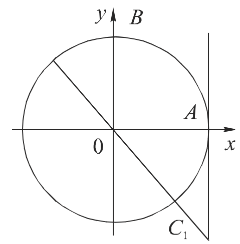
Чтобы решить неравенство $\operatorname{tg} x < -3/4$, воспользуемся единичной окружностью (см. рис.). Этому неравенству удовлетворяют все точки линии тангенсов, ординаты которых меньше $-3/4$. Этому условию удовлетворяют все точки дуги единичной окружности (выделена на рис.). Для точек P_x этой дуги выполняется неравенство $-\dfrac{\pi}{2} < x < -\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$.

В силу периодичности функции $y = \operatorname{tg} x$, чтобы получить все решения неравенства $\operatorname{tg} x < -3/4$, достаточно к концам этого промежутка прибавить период тангенса. Получим $\pi k - \dfrac{\pi}{2} < x < -\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4} + \pi k, \quad k \in Z$.

Решением данного неравенства являются:

$$\pi k - \frac{\pi}{2} < x < -\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \pi k; \quad \pi k + \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z.$$

13. $\operatorname{tg} x \ge -1$.



□ Построим на единичной окружности дуги, тангенс которых равен –1. Концы исходных дуг – точки дуги C_1AB, за исключением точки B, так как при $x = \pi/2$ функция $\operatorname{tg} x$ не существует. Следовательно, $-\pi/4 \le x < \pi/2$.

Учитывая периодичность функции $y = \operatorname{tg} x$, получаем

$$\pi k - \frac{\pi}{4} \le x < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z.$$

Решение неравенств разных видов

Здесь будем пользоваться справочным материалом и примерами решения неравенств данной главы.

П р и м е р ы

Решить неравенства:

14. $\sin x > \cos x$.

□ $\sin x - \cos x > 0$. Так как $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$, то последнее неравенство примет вид:

$$\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0\ ; \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0 .$$

Отсюда $2\pi k < x - \frac{\pi}{4} < \pi + 2\pi k$, $k \in Z$; $2\pi k + \frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

15. $\cos^2 x + \sin x \cos x \ge 1$.

□ Имеем: $\sin x \cos x \ge 1 - \cos^2 x$, $\sin x \cos x \ge \sin^2 x$.

Умножив обе части последнего неравенства на 2, получим:

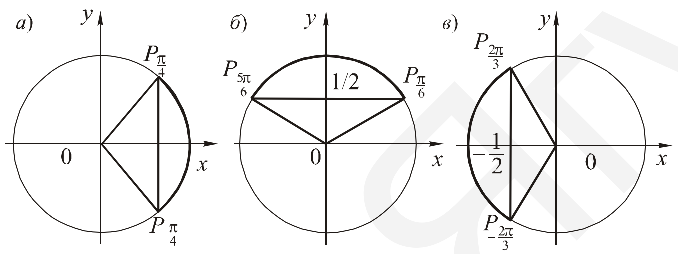
$$2\sin x \cos x \ge 2\sin^2 x\ , \quad \sin 2x \ge 1 - \cos 2x ,$$

$$\cos 2x + \sin 2x \ge 1 .$$

Применим к этому неравенству тот же прием, что в предыдущем примере, получим

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x\right) \ge 1 .$$

Отсюда $\cos 2x \cos\frac{\pi}{4} + \sin 2x \sin\frac{\pi}{4} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$.



Как видно из рис. *а*: $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k \le 2x - \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, откуда

$$2\pi k \le 2x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi k\ , \ k \in Z\ ; \quad \pi k \le x \le \frac{\pi}{4} + \pi k\ , \ k \in Z .$$

16. $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{4}$.

□ Умножив обе части неравенства на 2, получим $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2}$.

Обозначив $2x + \frac{\pi}{3} = \alpha$, получим неравенство $\sin\alpha > \frac{1}{2}$. С помощью единичной окружности (рис. *б*) находим решение неравенства $\sin\alpha > 1/2$:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < \alpha < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\ , \ k \in Z .$$

Возвращаясь к переменной x , получим:

$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < 2x + \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$; $-\frac{\pi}{12} + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

Это решение является решением и исходного неравенства.

17. $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x \ge -1$.

□ Умножим обе части неравенства на $1/2$, получим

$$\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x \ge -\frac{1}{2} .$$

Преобразуем это неравенство:

$$\sin\frac{\pi}{6}\sin 2x + \cos\frac{\pi}{6}\cos 2x \ge -\frac{1}{2}\ , \quad \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \ge -\frac{1}{2} .$$

Решим это неравенство. Обозначим $2x - \frac{\pi}{6} = \alpha$, тогда получим неравенство $\cos\alpha \ge -1/2$, решение которого находим с помощью единичной окружности (рис. *в*):

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \le \alpha \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi k .$$

Возвращаясь к переменной x , получим

$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \le 2x - \frac{\pi}{6} \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$; $-\frac{\pi}{4} + \pi k \le x \le \frac{5\pi}{12} + \pi k$, $k \in Z$.

Разные примеры

Решить уравнения:

18. $\cos x + \sqrt{\sin x} = 0$.

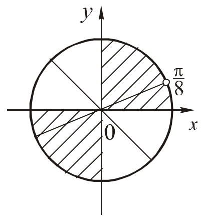
□ Такого типа уравнения решаются как иррациональные уединением радикала, т.е. $\sqrt{\sin x} = -\cos x$, причем $-\cos x > 0$ или $\cos x < 0$. Знак равенства не ставится, так как cos и sin вместе не могут быть нулем. После возведения в квадрат получим $\sin x = \cos^2 x$ или $\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.

Решая как квадратное уравнение, находим: $\sin x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < -1$ – не подходит; $\sin x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $x = \arcsin\frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 2\pi k$ – не удовлетворяет условию $\cos x < 0$, следовательно, $x = \pi - \arcsin\frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 2\pi k$.

Ответ: $x = \pi - \arcsin\frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 2\pi k$.

19. $\lg\cos 2x = \lg\sin 2x$.

□ Потенцируя при $\sin 2x > 0$, получим $\cos 2x = \sin 2x$. Решая как однородное, делим на $\cos 2x \neq 0$, $\operatorname{tg} 2x = 1$ или $2x = \frac{\pi}{4} + \pi k$; $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$. Нанесем на круг (см. рис.). Заштрихованные зоны удовлетворяют условию $\sin 2x > 0$.



Ответ: $\frac{\pi}{8} + \pi k$.

20. $|x+5| + |x-1| = 6\sin x$.

□ Вскрываем модуль методом интервалов.

1) $x < -5$, $-x-5-x+1 = 6\sin x$, $\sin x = \frac{x+2}{2}$.

$-1 \le -\frac{x+2}{2} \le 1$, $-5 \le x \le 1$ с учетом $x < -5$ $x \in \varnothing$.

2) $x \in [-5;1]$, $x+5-x+1 = 6\sin x$, $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$,

$-5 \le \frac{\pi}{2} + 2\pi k \le 1$; $-1{,}05 \le k \le -0{,}4$; $k = -1$, $x = -\frac{3\pi}{2}$.

3) $x > 1$. $\sin x = \frac{x+2}{3}$, $-1 \le \frac{x+2}{3} \le 1$, $x \in \varnothing$.

Ответ: $-3\pi/2$.

21. $\dfrac{\sin^3\frac{x}{2} - \cos^3\frac{x}{2}}{2+\sin x} = \frac{1}{3}\cos x$.

□ $\dfrac{\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)\left(1 + \sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\right)}{2+\sin x} = \frac{1}{3}\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)$.

1) $\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = 0$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$, $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

2) $\dfrac{1 + \frac{1}{2}\sin x}{2+\sin x} = -\frac{1}{3}\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)$, $\frac{3}{2} = \sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} \Rightarrow x \in \varnothing$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

22. $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$.

□ $\sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \left(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos x\right)^4 =$

$= \frac{1}{4}(\sin x + \cos x)^4 = \frac{1}{4}(1 + 2\sin x\cdot\cos x)^2 = \frac{1}{4}\left(1 + 4\sin x\cdot\cos x + 4\sin^2 x\cdot\cos^2 x\right)$.

После подстановки в исходное уравнение получим

$\sin^4 x + \sin^2 x\cdot\cos^2 x + \sin x\cdot\cos x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ или

$\sin^2 x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) + \sin x\cdot\cos x = 0$;

$\sin x = 0$, $x = \pi k$, $\sin x + \cos x = 0$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$.

Ответ: $\left\{\pi k;\ -\frac{\pi}{4} + \pi k\right\}$.

23. $\dfrac{\cos x}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2} = |\cos x|$.

□ Так как $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 > 0$ и уравнение имеет смысл, если $\cos x \ge 0$, тогда $\dfrac{\cos x}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2} = \cos x$. Это уравнение разбивается на две совокупности: $\begin{matrix}\cos x = 0 \\ \dfrac{1}{(x+3/2)^2} = 1\end{matrix}$

и $x \neq -\frac{3}{2}$. $\cos x = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$;

$(x+3/2)^2 = 1 \Rightarrow |x+3/2| = 1 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}$ и $x_3 = -\frac{5}{2}$.

Выясним, какие из x_{1-3} удовлетворяют условию $\cos x \ge 0$.

x_1 – удовлетворяет этому условию и ни при каких k $x_1 \neq -3/2$;

$\cos\left(-\frac{1}{2}\right) = \cos\frac{1}{2} > 0$, так как $0 < \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$;

$\cos\left(-\frac{5}{2}\right) = \cos\frac{5}{2} < 0$, так как $\frac{\pi}{2} < \frac{5}{2} < \frac{3}{2}\pi$, где cos отрицателен.

Ответ: $x = -\frac{1}{2}$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.

24. ***При каких значениях параметра*** b ***уравнение*** $b\sin x + \sqrt{12}\cos x = b^2$ ***не имеет решений?***

☐ Используя метод введения вспомогательного угла (см. с. 279), разделим обе части уравнения на $\sqrt{b^2+12}$ и получим уравнение

$$\frac{b}{\sqrt{b^2+12}}\sin x + \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{b^2+12}}\cos x = \frac{b^2}{\sqrt{b^2+12}},$$

где $\frac{b}{\sqrt{b^2+12}} = \cos\varphi$, $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{b^2+12}} = \sin\varphi$.

Тогда $\sin(x+\varphi) = \frac{b^2}{\sqrt{b^2+12}}$. Это уравнение не будет иметь решений, если $\left|\frac{b^2}{\sqrt{b^2+12}}\right| > 1$ или $\frac{b^2}{\sqrt{b^2+12}} > 1 \Leftrightarrow b^2 > \sqrt{b^2+12} \Leftrightarrow b^4 > b^2 + 12$,

$$b^4 - b^2 - 12 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2 < -3 \Rightarrow b^2 \in \varnothing, \\ b^2 > 4 \Rightarrow |b| > 2. \end{array}\right.$$

Ответ: $b \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$.

Решить неравенства:

25. $\left(x^2 - 3x + 3\right)^{\sin x} < 1$.

☐ Возможны два случая:

1) $\begin{cases} 0 < x^2 - 3x + 3 < 1, \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2, \\ \pi k < x < \pi + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1;2)$

2) $\begin{cases} x^2 - 3x + 3 > 1, \\ \sin x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;1) \cup (2;+\infty), \\ \pi + 2\pi k < x < 2\pi + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \pi + 2\pi k < x < 2\pi + 2\pi k$.

Ответ: $x \in (1;2) \cup (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$.

26. $\frac{2}{2^{|\sin x|-1}} > 2^{|\sin x|}$.

☐ $2^{|\sin x|} = t$, $\frac{2}{t-1} - t > 0$, $\left(t^2 - t - 2\right)(t-1) < 0$;

$1 < t < 2$, $1 < 2^{|\sin x|} < 2$, $0 < |\sin x| < 1$.

Ответ: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi k}{2}\right\}$.

27. ***Решить уравнение*** $4\cos^2 x + \sqrt{2}\sin|x| = 1$.

☐ Не вскрывайте рано модуль. Наберитесь терпения. После замены получим:
$4 - 4\sin x + \sqrt{2}\sin|x| - 1 = 0$ или

$4\sin^2 x - \sqrt{2}\sin|x| - 3 = 0$ и $\sin|x| = t$, тогда

$$4t^2 - \sqrt{2}\,t - 3 = 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{50}}{8} = \frac{\sqrt{2} \pm 5\sqrt{2}}{8};\quad t_1 = \frac{3\sqrt{2}}{4} > 1,\quad t_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\sin|x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Теперь можно вскрыть модуль.

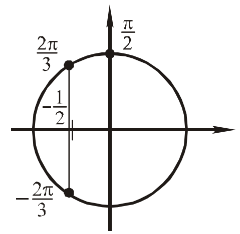
1) $x > 0$ $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$ при $k \in \mathbb{N};0$.

2) $x < 0$ $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k$ при $k \in -\mathbb{N};0$.

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$ при $k \in \mathbb{N};0$; $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k$ при $k \in -\mathbb{N};0$.

Разложение на множители

28. $\sin 2x - 2\cos x + \sin x = 1$.



☐ $(2\sin x\cos x - 2\cos x) + (\sin x - 1) = 0$;

$(2\cos x + 1)(\sin x - 1) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \cos x = -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Замена переменной

29. $8\cos^3\pi x+4\cos\pi x-3\cos^2\pi x-3\sin^2\pi x=0$.

□ $8\cos^3\pi x+4\cos\pi x-3=0$; $t=\cos\pi x\in[-1;\ 1]$.

$8t^3+4t-3=0$; $\left((2t)^3-1\right)+2\left((2t)-1\right)=0$; $\left((2t)-1\right)\left((2t)^2+(2t)+3\right)=0$.

(Уравнение $z^2+z+3=0$ действительных корней не имеет.)

$\left[\begin{array}{l}2t=1\\ (2t)^2+(2t)+3=0\end{array}\right.$; $t=\dfrac{1}{2}$. $\cos\pi x=\dfrac{1}{2}$; $\pi x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $\pm\dfrac{1}{3}+2n$, $n\in Z$.

Уравнение имеет вид $F(\sin x,\ \cos^2 x)=0$ или $F(\cos x;\ \sin^2 x)=0$, т.е. уравнение включает $\sin x$ и $\cos x$, причем одну из функций только в четной степени.

В таком случае вторую функцию очень удобно брать в качестве новой переменной.

30. $\sin^4 x+2\cos^2 x+3\cos x=1$.

□ $t=\cos x\in[-1;\ 1]$. Тогда $\sin^2 x=1-t^2$.

(Предостерегаем Вас от использования равенств типа $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}$, так как знак синуса в большинстве ситуаций неизвестен, а рассматривать два случая весьма неудобно.)

Итак, $(1-t)+2t^2+3t-1=0$; $t^4+3t=0$; $t(t^3+3)=0$; $t\in\left\{0;\ -\sqrt[3]{3}\right\}$.

Учитывая $t\in[-1;\ 1]$, получаем $t=0$. $\cos x=0$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

Однородные уравнения с особенностями

Однородное уравнение (см. стр. 272)

1-й степени имеет вид: $k\sin x+m\cos x=0$,

2-й степени: $k\sin^2 x+l\sin x\cos x+m\cos^2 x=0$ и т.д.

Решаются однородные уравнения делением уравнения на n-ю степень синуса или косинуса с последующим введением новой переменной $t=\mathrm{ctg}x$ или $t=\mathrm{tg}x$ соответственно.

Внимание! Делить уравнение на выражения с переменной нужно осторожно! Т.е. можно, но только рассмотрев отдельно случай равенства этого выражения нулю. Например, если Вы собираетесь делить на $\cos^2 x$, то Вы отдельно проверяете, есть ли корни исходного уравнения при $\cos x=0$.

Казалось бы, в однородных уравнениях приведенного вида cos и sin вместе нулем быть не могут, а значит, деление на cos или sin безопасно. Но $2\sin^2 x-4\sin x\cos x=0$ однородное, здесь делить на $\sin^2 x$ нельзя! Потеряем серию решений $x=\pi k$.

Примеры

31. $3\cos 7x-5\sin 7x=0$.

□ Пусть $\sin 7x=0$, тогда $\cos 7x=0$, но $\sin^2 7x+\cos^2 7x=0$.

Таким образом, уравнение $\sin 7x=0$ не содержит решений исходного уравнения.

Краткая запись всего предыдущего выглядит так: $\sin 7x\neq 0$.

(Это минимум. Отсутствие упоминания об этом случае считается, точнее, является ошибкой в решении задачи.)

Итак, $\sin 7x\neq 0$; $3\mathrm{ctg}7x-5=0$; $\mathrm{ctg}7x=\dfrac{5}{3}$; $7x=\mathrm{arcctg}\dfrac{5}{3}+\pi k$, $k\in Z$.

Ответ: $\dfrac{1}{7}\mathrm{arcctg}\dfrac{5}{3}+\dfrac{\pi k}{7}$, $k\in Z$.

32. $7\sin^2\dfrac{3x}{2}-2\sin\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{3x}{2}-9\cos^2\dfrac{3x}{2}=0$.

□ $\cos\dfrac{3x}{2}\neq 0$ (иначе $\sin^2\dfrac{3x}{2}+\cos^2\dfrac{3x}{2}\neq 1$);

$7\mathrm{tg}^2\dfrac{3x}{2}-2\mathrm{tg}\dfrac{3x}{2}-9=0$. $\mathrm{tg}\dfrac{3x}{2}\in\left\{-1;\ \dfrac{9}{7}\right\}$. $\left[\begin{array}{l}\dfrac{3x}{2}=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z\\ \dfrac{3x}{2}=\mathrm{arctg}\dfrac{9}{7}+\pi n,\ n\in Z.\end{array}\right.$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi k}{3}$; $\dfrac{2}{3}\mathrm{arctg}\dfrac{9}{7}+\dfrac{2\pi n}{3}$, $n,k\in Z$.

33. $3\sin^2 x-2\sin 2x+1=0$.

□ Это уравнение легко сводится к однородному, если вспомнить, что $1=\sin^2 x+\cos^2 x$ (ОТТ).

$3\sin^2 x-2\cdot 2\sin x\cdot\cos x+\sin^2 x+\cos^2 x=0$.

$\cos^2 x-4\sin x\cos x+4\sin^2 x=0$.

$(\cos x-2\sin x)^2=0$; $\cos x-2\sin x=0$

Оказывается, уравнение – однородное, причем 1-й степени!

$\sin x\neq 0$ $\mathrm{ctg}x=2$.

Ответ: $\mathrm{arcctg}2+\pi k$, $k\in Z$.

34. $5\cos^3 x - \sin^2 x = 4\sin x\cos^2 x$.

□ $\cos x \neq 0$; $5 - \text{tg}^3 x = 4\text{tg}x$; $\text{tg}^3 x + 4\text{tg}x - 5 = 0$;

$(\text{tg}^3 x - 1) + 4(\text{tg}x - 1) = 0$;

(знакомые со схемой Горнера могут разделить $t^3 + 4t - 5$ на $t - 1$).

$(\text{tg}x - 1)(\text{tg}^2 x + \text{tg}x + 1 + 4) = 0$; $(\text{tg}x - 1)(\text{tg}^2 x + \text{tg}x + 5) = 0$.

$\text{tg}x = 1$, очевидно, $\text{tg}^2 x + \text{tg}x + 5 = 0$ решений не имеет.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

Применение различных тригонометрических формул при решении уравнений (Преобразование суммы в произведение, произведения в сумму, понижение степени)

Примеры

35. $\cos 3x + \sin 2x - \cos x = 0$.

□ Приравнивать к 0 легче произведение, а не сумму. Поэтому нужно преобразовать левую часть равенства в произведение. (Увидели для начала разность косинусов? Или заметили, что $\frac{3x + x}{2} = 2x$?– Это подсказки.)

$\sin 2x + 2\sin 2x \cdot \sin(-x) = 0$; $\sin 2x(1 - 2\sin x) = 0$; $2\sin 2x(\frac{1}{2} - \sin x) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l} 2x = \pi k,\ k \in Z \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $k, n, m \in Z$.

Замечание. Можно записывать одну букву, так как отбор корней не нужен.

36. $\sin x \cdot \sin 5x = \sin 2x \cdot \sin 4x$.

□ $\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 6x) = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 6x)$; $\cos 4x = \cos 2x$;

$$\left[\begin{array}{l} 4x = 2x + 2\pi n,\ n \in Z \\ 4x = -2x + 2\pi m,\ m \in Z, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \pi n \\ x = \frac{\pi m}{3}. \end{array}\right.$$

Обратим внимание на то, что серия решений $\pi m/3$ включает серию πn, т.е. содержит все числа, кратные π (при $m \vdots 3$).

Ответ: $\frac{\pi m}{3}$, $m \in Z$.

Замечание. Уравнение $\cos 4x = \cos 2x$ можно решать по-разному. Кто-то перенесет все в левую часть равенства и преобразует разность косинусов в произведение; кто-то заметит, что $4x = 2 \cdot 2x$, и применит формулу для косинуса двойного аргумента, сведя задачу к квадратному уравнению относительно $\cos 2x$.

37. $\sin^2 x + \cos^2 3x + \sin^2 5x + \cos^2 7x = 2$.

□ Для удобства дальнейшего решения домножим обе части на 2:

$2\sin^2 x + 2\cos^2 3x + 2\sin^2 5x + 2\cos^2 7x = 4$;

$1 - \cos 2x + 1 + \cos 6x + 1 - \cos 10x + 1 + \cos 14x = 4$;

$\cos 6x + \cos 14x = \cos 2x + \cos 10x$;

$2\cos 10x \cdot \cos 4x = 2\cos 6x \cdot \cos 4x$;

$\cos 10x \cdot \cos 4x - \cos 6x \cdot \cos 4x = 0$; $\cos 4x(\cos 10x - \cos 6x) = 0$;

$\cos 4x \cdot 2\sin 8x \cdot \sin(-2x) = 0$; $\cos 4x \cdot \sin 8x \cdot \sin 2x = 0$.

Можно здесь приравнять каждый множитель к 0, но мы раскроем $\sin 8x$ и увидим, что лишних уравнений решать не потребуется.

$\sin 8x = 2\sin 4x\cos 4x = 2\cos 4x \cdot 2\sin 2x \cdot \cos 2x$.

В множителе $\sin 8x$ содержится и $\sin 2x$, и $\cos 4x$. Следовательно, исходное уравнение равносильно следующему: $\sin 8x = 0$.

Ответ: $\pi k/8$, $k \in Z$.

Введение вспомогательного аргумента

Подробно см. с. 279.

Примеры

38. $\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{3}$.

□ Конечно, мы уже умеем решать подобные задачи через тангенс половинного аргумента. Но в данном случае можно записать одну строчку, после чего следует ответ. Внимательные люди уже заметили в левой части неравенства формулу сложения (кому как симпатичнее: синус суммы или косинус разности):

$\sin x\cos\frac{\pi}{3} + \cos x\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{3}$ или $\cos x\cos\frac{\pi}{6} + \sin x\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}$.

Далее уравнение становится простейшим: $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}$; $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + (-1)^k \cdot \arcsin\frac{1}{3} + \pi k$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{6} \pm \arccos\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

39. $\sin x + \cos x = 1$.

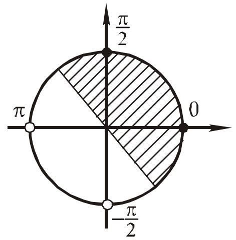
☐ Доказано, что уравнения вида $\pm\sin x \pm \cos x = \pm 1$ в любой комбинации знаков можно решать, составив совокупность 2-х систем:

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} & x = 2\pi k; \\ \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases} & x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi. \end{array}\right.$$

Иногда задачу пытаются решить возведением в квадрат обеих частей уравнения:

$\sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 1$,

$1 + 2\sin x \cos x = 1$, $\sin 2x = 0$, $x = \dfrac{\pi k}{2}$.



Как видим, решение простое, но ответ другой – точек на круге не две, а целых четыре (см. рис.).

В этом случае решаются два уравнения: исходное и $\sin x + \cos x = -1$, отсюда и лишние корни.

Производим отбор корней: (две точки попали в нужную область, две – нет).

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$; $2\pi n$, $n \in Z$.