

С.К. Кожухов

**УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА
С ПАРАМЕТРОМ**

*Учебно-методическое пособие для учителей математики,
студентов математических специальностей
педагогических вузов, абитуриентов*

ОРЕЛ – 2013

Кожухов С.К.

Уравнения и неравенства с параметром. – Орел, 2013

В пособии систематизирован опыт работы автора по изучению темы "Уравнения и неравенства с параметром" в классах физико-математического профиля. Оно содержит большое число разобранных примеров, к каждой теме предлагаются упражнения для самостоятельного решения. Данное пособие можно использовать при подготовке к сдаче ЕГЭ по математике.

Книга адресована учителям математики, студентам математических специальностей педагогических вузов, выпускникам средних учебных заведений.

© С.К. Кожухов, 2013

Предисловие

Решение уравнений и неравенств, содержащих параметр, является, пожалуй, одним из самых трудных разделов элементарной математики. Это связано с тем, что в школе стараются развить умения и навыки решения определенного набора стандартных задач, связанных часто с техникой алгебраических преобразований. Задачи с параметром относятся к другому типу. Для их решения обычно требуются гибкость мышления, логика в рассуждениях, умение хорошо и полно анализировать ситуацию.

Опыт показывает, что учащиеся, владеющие методами решения задач с параметром, успешно справляются и с другими задачами. Именно поэтому задачи с параметром обладают диагностической и прогностической ценностью.

На протяжении ряда лет многие вузы включают уравнение (неравенство) с параметром в задания вступительных экзаменов (олимпиад). Но до сих пор задача с параметром остается самой "неудобной" для абитуриентов. Более того, в последние годы задачи с параметром регулярно встречаются в вариантах ГИА и ЕГЭ. И здесь далеко не все школьники приступают к решению этих заданий, и еще меньшее число – выполняют решение верно.

Автор надеется, что предлагаемое пособие поможет старшеклассникам самостоятельно овладеть некоторыми приемами решения уравнений и неравенств с параметром, а учителям – планомерно организовать работу по данной теме в классе на уроке или факультативных занятиях (элективных курсах).

Введение

Параметр (от греческого “parametron” – отмеривающий) – величина, значения которой служат для различения элементов некоторого множества между собой.

С использованием параметров проводятся исследования многих систем и процессов реальной жизни. В частности, в физике в качестве параметров могут выступать температура, время и др. В математике параметры вводятся для обозначения некоторой совокупности объектов. Так, уравнение $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$ с параметрами a , b и c определяет совокупность всех окружностей; уравнение $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1$ – всех единичных окружностей; уравнение $x^2 + y^2 = c^2$ – совокупность концентрических окружностей с центром в начале координат.

Рассмотрим с точки зрения алгебры, как определяется уравнение (неравенство) с параметром.

Пусть $P(x; a)$ (I) – предложение с двумя переменными, где $x \in R$ и $a \in R$. Если переменным x и a придать числовые значения x_i , a_i из множества R , то может получиться:

- запись, лишенная смысла (Например, в уравнении $\frac{x}{a} = 3$ при $x=3, a=0$),
- ложное высказывание (Например, в уравнении $\frac{x}{a} = 3$ при $x=3, a=-1$),
- истинное высказывание (Например, в уравнении $\frac{x}{a} = 3$ при $x=3, a=1$).

Множество всех (x_i, a_i) , при которых имеем 2-й или 3-й случай называется областью допустимых значений переменных (ОДЗ).

Множество всех (x_i, a_i) , при которых имеем 3-й случай называется областью истинности (ОИ) данного высказывания.

Если в высказывании (I) переменной a придать какое-либо значение a_i из ОДЗ, то (I) станет предложением с одной переменной: $P(x)$ (II), которое имеет свою ОДЗ и ОИ.

Таким образом, для любого a_i из ОДЗ можно рассматривать предложение с переменной $P(x)$ и находить его ОИ. В этом случае предложение $P(x; a)$ называется предложением с одной переменной (x) и параметром (a).

Замечания.

- 1) В качестве предложений с переменной и параметром в школьном курсе чаще всего рассматриваются уравнения, неравенства и их системы.
- 2) Такой алгебраический подход позволяет определить уравнения (неравенства) не только с одним, но и с любым конечным числом параметров.
- 3) В некоторых школьных учебниках и пособиях для абитуриентов уравнение (неравенство) с параметром определяется более примитивно: «Это уравнение (неравенство), в запись которого, кроме неизвестных, входят числа, обозначенные буквами».
- 4) В школьном курсе математики чаще всего решаются задачи с одним параметром (реже с двумя или тремя).
- 5) В задачах с параметром переменные обозначаются, как правило, x, y, z, t , а параметры a, b, c, p, n, k, m . Однако при решении ряда задач бывает целесообразно придать параметру статус переменной, а переменной – статус параметра. Такой подход называется решением относительно параметра. В самом деле, предложение $P(x; a)$ можно считать как предложением с переменной (x) и параметром (a), так и предложением с переменной (a) и параметром (x).

В отношении уравнений (неравенств) с параметром чаще всего встречаются *две постановки задачи*.

- 1) Для каждого значения параметра найти все решения заданного уравнения (неравенства).
- 2) Найти все значения параметра, при каждом из которых решения уравнения (неравенства) удовлетворяют заданным требованиям.

Основной принцип решения уравнений (неравенств) с параметром состоит в следующем: нужно разбить область допустимых значений параметра на такие участки, в каждом из которых уравнение (неравенство) решается одним и тем же способом. Отдельно для каждого такого участка находятся решения, зависящие от значений параметра. Ответ к уравнению (неравенству) состоит из списка участков изменения параметра с указанием для каждого из них всех решений этого уравнения (неравенства).

Замечания.

- 1) Указанный подход к решению задач с параметром часто называется методом ветвления.
- 2) Для осуществления такого плана нужно знать “граничные” или “контрольные” значения параметра, которые разбивают ОДЗ на указанные участки. Поиск этих значений тесно связан со спецификой параметра и его двойственной природой (“число” – “неизвестная”).

Специфика уравнений (неравенств) с параметром состоит в том, что изменение значений параметра влечет за собой изменение не только коэффициентов, но и ряда других характеристик.

- 1) *Степень уравнения* (Например, уравнение $ax^2 - 3x + 6 = 0$ при $a = 0$ является линейным, а при $a \neq 0$ – квадратным).
- 2) *Характер монотонности функции* (Например, функция $y = \log_a x$ при $a > 1$ является возрастающей, а при $0 < a < 1$ – убывающей).
- 3) *ОДЗ переменной* (Например, в неравенстве $\sqrt{ax} > x + 1$ область допустимых значений переменной также зависит от a : при $a = 0$ ОДЗ: $x \in R$, при $a > 0$: ОДЗ: $x \geq 0$, при $a < 0$ ОДЗ: $x \leq 0$).

§1. Линейные уравнения и неравенства, содержащие параметр

ПРИМЕР 1. Для каждого значения параметра a выясните, какое из чисел больше: $3a$ или $2a + 1$.

♦ Найдем разность данных чисел: $3a - 2a - 1 = a - 1$.

При $a = 1$ разность равна нулю, следовательно, числа равны.

При $a > 1$ разность положительна, следовательно, первое число больше.

При $a < 1$ разность отрицательна, следовательно, первое число меньше.

Ответ: при $a = 1$ числа равны, при $a > 1$ первое число больше, при $a < 1$ второе число больше.

ПРИМЕР 2. Решите уравнение $a^2(x - 1) + 6x = (5x - 2)a$.

♦ После преобразований данное уравнение примет вид:

$$(a - 2)(a - 3)x = a(a - 2).$$

Для того, чтобы выразить x нужно будет поделить $a(a - 2)$ на $(a - 2)(a - 3)$. Но выполнение этой операции возможно не всегда (делить на нуль нельзя). Все вышесказанное определяет дальнейший ход рассуждений: исследовать случаи, когда коэффициент при x равен нулю и когда – отличен от нуля.

Если $a = 2$, то уравнение примет вид $0x = 0$. Решением полученного уравнения является любое действительное число.

Если $a = 3$, то уравнение примет вид $0x = 3$. Решений нет.

$$\text{Если } a \neq 2 \text{ и } a \neq 3, \text{ то } x = \frac{a(a - 2)}{(a - 2)(a - 3)} = \frac{a}{a - 3}.$$

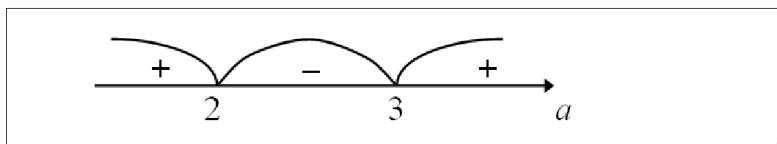
Ответ: при $a = 2$ $x \in R$; при $a = 3$ решений нет;

$$\text{при } a \neq 2 \text{ и } a \neq 3 \quad x = \frac{a}{a - 3}.$$

ПРИМЕР 3. Решите неравенство $(a - 2)(a - 3)x \geq a(a - 2)$.

♦ Ход рассуждений при решении этого неравенства частично схож с рассуждениями в предыдущем примере. Принципиальное же отличие состоит в том, что отдельно

нужно рассмотреть случаи, когда коэффициент при x равен нулю, положительный и отрицательный. Это связано с тем, что деление обеих частей неравенства на положительное число не меняет знак неравенства, в то время как деление обеих частей неравенства на отрицательное число приводит к замене знака неравенства ему противоположным. Следующий рисунок показывает, при каких значениях параметра a число $(a-2)(a-3)$ равно нулю, при каких – положительно, а при каких – отрицательно.



Если $a = 2$, то неравенство примет вид $0x \geq 0$. Решением полученного неравенства является любое действительное число.

Если $a = 3$, то неравенство примет вид $0x \geq 3$. Решений нет.

Если $a \in (2; 3)$, то $x \leq \frac{a}{a-3}$.

Если $a \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$, то $x \geq \frac{a}{a-3}$.

Ответ: при $a = 2$ $x \in R$; при $a = 3$ решений нет;

$$\text{при } a \in (2; 3) \quad x \leq \frac{a}{a-3}; \quad \text{при } a \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty) \quad x \geq \frac{a}{a-3}.$$

ПРИМЕР 4. Решите уравнение с параметром $\left(\frac{25}{a} - a\right)x = a - \frac{5}{a} - 4$.

♦ При $a = 0$ данное уравнение теряет смысл, а значит, и не имеет корней.

При $a \neq 0$ исходное уравнение приводится к уравнению следующего вида:

$$(5-a)(5+a)x = (a-5)(a+1).$$

Если $a = 5$, то решением является любое действительное число.

Если $a = -5$, то уравнение решений не имеет.

Если $a \neq 5$ и $a \neq -5$, то $x = -\frac{a+1}{a+5}$.

Ответ: при $a = 0$ и $a = -5$ решений нет; при $a = 5$ $x \in R$,

$$\text{при } a \neq -5, a \neq 0 \text{ и } a \neq 5 \quad x = -\frac{a+1}{a+5}.$$

ПРИМЕР 5. Решите неравенство $ax < b$.

♦ Пример 3 уже предопределяет ход рассуждений при решении этого неравенства: нужно рассмотреть случаи $a = 0$, $a > 0$, $a < 0$. Заметим, что значения параметра b являются существенными только в первом случае, когда $a = 0$.

Если $a = 0$ и $b > 0$, то решением неравенства является любое действительное число.

Если $a = 0$ и $b \leq 0$, то неравенство не имеет решений.

Если $a > 0$, то $x < \frac{b}{a}$.

Если $a < 0$, то $x > \frac{b}{a}$.

Ответ: при $a = 0$ и $b > 0$ $x \in R$; при $a = 0$ и $b \leq 0$ решений нет;

при $a > 0$ $x < \frac{b}{a}$; при $a < 0$ $x > \frac{b}{a}$.

ПРИМЕР 6. Для каждого значения параметра a укажите количество

решений $(x; y)$ системы уравнений
$$\begin{cases} 3y - (a - 2)x = 5, \\ 3ay + (3a - 6)x = 10. \end{cases}$$

♦ При $a = 0$ система принимает вид
$$\begin{cases} 3y + 2x = 5, \\ -6x = 10 \end{cases}$$
 и, очевидно, имеет одно

решение. При $a \neq 0$ получаем систему
$$\begin{cases} y = \frac{a-2}{3}x + \frac{5}{3}, \\ y = \frac{2-a}{a}x + \frac{10}{3a}. \end{cases}$$

Эта система может а) не иметь решений; б) иметь бесконечно много решений; в) иметь единственное решение.

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{a-2}{3} = \frac{2-a}{a}, \\ \frac{5}{3} \neq \frac{10}{3a} \end{cases} \Leftrightarrow a = -3. \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{a-2}{3} = \frac{2-a}{a}, \\ \frac{5}{3} = \frac{10}{3a} \end{cases} \Leftrightarrow a = 2.$$

в) $\frac{a-2}{3} \neq \frac{2-a}{a}$. Решением этого неравенства будут все a , кроме -3 ; 0 ; 2 .

Ответ: при $a = -3$ решений нет; при $a = 2$ бесконечно много решений;

при $a \neq -3$ и $a \neq 2$ одно решение.

ПРИМЕР 7. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a|x-1|=x+2$ имеет ровно один корень. Укажите этот корень для каждого такого значения a .

♦ Для того чтобы перейти от данного уравнения к уравнению, не содержащему модуль, нужно рассмотреть два случая: $x \geq 1$ и $x < 1$. После раскрытия модуля исходное уравнение примет вид линейного. Однако нужно помнить, что значение x , найденное, например, в первом случае, должно удовлетворять условию $x \geq 1$. В противном случае корень будет посторонним. Аналогично для второго случая. Таким образом, получим:

1 случай. Если $x \geq 1$, то данное уравнение примет вид $a(x-1) = x+2$.

После преобразований получим $(a-1)x = a+2$. При $a=1$ корней нет.

При $a \neq 1$ $x = \frac{a+2}{a-1}$. Найденное значение x является корнем исходного урав-

нения при выполнении условия $x \geq 1$. Решим неравенство $\frac{a+2}{a-1} \geq 1$.

После преобразований получим равносильное ему неравенство $\frac{3}{a-1} \geq 0$, решением которого будут все $a \in (1; +\infty)$. Таким образом, только при

$a \in (1; +\infty)$ $x = \frac{a+2}{a-1}$ является корнем исходного уравнения.

2 случай. Если $x < 1$, то данное уравнение примет вид $a(1-x) = x+2$.

После преобразований получим $(a+1)x = a-2$. При $a=-1$ корней нет.

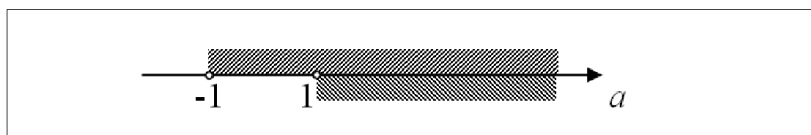
При $a \neq -1$ $x = \frac{a-2}{a+1}$. Найденное значение x является корнем исходного

уравнения при выполнении условия $x < 1$. Решим неравенство $\frac{a-2}{a+1} < 1$.

После преобразований получим равносильное ему неравенство $\frac{-3}{a+1} < 0$, решением которого будут все $a \in (-1; +\infty)$. Таким образом, только при

$a \in (-1; +\infty)$ $x = \frac{a-2}{a+1}$ является корнем исходного уравнения.

Отметим на числовой оси значения параметра a , при которых исходное уравнение имеет найденные корни.



Видим, что при $a \in (-1; 1]$ (на рисунке одна штриховка) уравнение имеет ровно один корень. Этот корень $x = \frac{a-2}{a+1}$.

Ответ: $a \in (-1; 1]$; $x = \frac{a-2}{a+1}$.

УПРАЖНЕНИЯ

№ 1. Для каждого значения параметра a сравните числа

а) a и $-a$;

б) a и a^2 .

№ 2. Для каждого значения параметра a решите уравнение

а) $(a-7)(a-3)x = (a+1)(a-7)$;

б) $a^2(x-1) = 4x + 3a + 2$;

в) $ax = 5x - 1$;

г) $\left(\frac{4}{a} - a\right)x = 1 - a + \frac{2}{a}$;

д) $\frac{ax-1}{a+2} = 3$;

е) $|x+1| = a-3$;

ж) $a^3(x-a) = 9(ax-9)$;

з) $\|x| - a| = 2$.

№ 3. Для каждого значения параметра a решите неравенство

а) $(a+5)(a-1)x > a(a-1)$;

б) $ax \leq x + 3$;

в) $a^2(x-1) < 9x - 5a + 6$;

г) $\left(1 - \frac{3}{a}\right)x \leq 1 + \frac{2}{a}$;

д) $|x+1| \leq a-3$;

е) $|x-2a| < |x|$;

ж) $a^3(x-a) \leq 9ax - 81$;

з) $16 - 4ax > a^4 - a^3x$.

№ 4. Решите уравнение (неравенство) с параметрами a и b

а) $(a^2 - 1)x = b$;

б) $ax = \frac{1}{b}$;

в) $(a+1)x \geq b-1$;

г) $(a^2 + b^2)x = b^4 - a^4$.

№ 5. Для каждого значения параметра a решите систему уравнений

а)
$$\begin{cases} ax + 2y = 6, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} -4x - ay = 4, \\ ax + y = 2. \end{cases}$$

№ 6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a|x+4|=x+2$ имеет ровно два корня. Укажите эти корни.

№ 7. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a|x-5|=x+1$ имеет ровно один корень.

№ 8. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $a|x+4|>x+2$ выполняется для любого действительного x ;

№ 9. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $a|x+3|\geq 5-x$ не имеет решений.

№ 10. Для каждого значения параметра a решите уравнение $|x-a|+|x|=a$.

§2. Квадратные уравнения и неравенства, содержащие параметр

ПРИМЕР 1. Решите уравнение с параметром $x^2 - 2x + a = 0$.

♦ Ясно, что количество корней квадратного уравнения зависит от значения дискриминанта. Поэтому решение задачи будет связано с анализом значений дискриминанта данного уравнения $D_1 = 1 - a$.

Если $a > 1$, то $D_1 < 0$. В этом случае уравнение не имеет корней.

Если $a = 1$, то $D_1 = 0$. В этом случае получим один¹ корень $x = 1$.

Если $a < 1$, то $D_1 > 0$, следовательно, уравнение имеет два различных действительных корня $x = 1 \pm \sqrt{1-a}$.

Ответ: при $a > 1$ решений нет;

при $a = 1$ $x = 1$;

при $a < 1$ $x = 1 \pm \sqrt{1-a}$.

¹ Часто говорят, что в этом случае уравнение имеет два равных корня.

ПРИМЕР 2. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $ax^2 - 2x + a = 0$ имеет ровно один корень. Для каждого такого a укажите этот корень.

♦ Было бы неверно сразу найти дискриминант и приравнять его к нулю. Дело в том, что данное уравнение не при всех значениях параметра a является квадратным. Поэтому сначала нужно исследовать случай, когда уравнение будет линейным и только потом переходить к рассмотрению дискриминанта квадратного уравнения.

Если $a=0$, то уравнение примет вид $-2x = 0$. Его корень $x = 0$.

Если $a \neq 0$, то уравнение является квадратным. $D_1 = 1 - a^2$. $D_1 = 0$ при $a = -1$ или $a = 1$, причем, если $a = -1$, то $x = -1$; если $a = 1$, то $x = 1$.

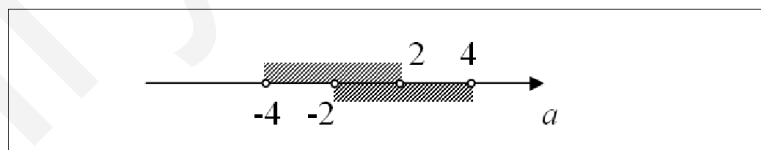
Ответ: при $a = 0$ $x = 0$, при $a = -1$ $x = -1$, при $a = 1$ $x = 1$.

ПРИМЕР 3. Найдите все значения a , при каждом из которых ровно один корень уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ принадлежит интервалу $(-3; 3)$.

♦ Корнями данного квадратного уравнения являются $x = a - 1$ и $x = a + 1$.

Заметим, что при любом значении параметра a корни различны, так как $a-1 < a+1$.

Найдем все a , при которых первый корень принадлежит интервалу $(-3; 3)$: $-3 < a - 1 < 3$, откуда $-2 < a < 4$. Далее аналогично определяем, что при $-4 < a < 2$ второй корень принадлежит интервалу $(-3; 3)$.

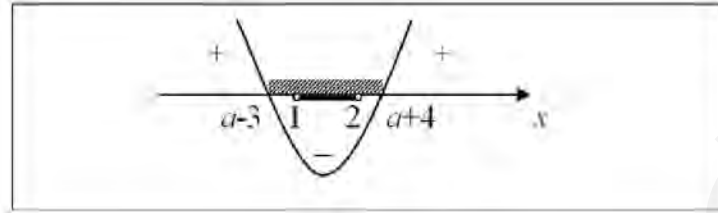


Приведенный рисунок наглядно показывает, что при $a \in (-4; -2] \cup [2; 4)$ (на этих участках одна штриховка) ровно один корень уравнения принадлежит интервалу $(-3; 3)$.

Ответ: $a \in (-4; -2] \cup [2; 4)$.

ПРИМЕР 4. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство $x^2 - (2a+1)x + a^2 + a - 12 \leq 0$ выполняется при любом $x \in (1; 2)$.

♦ Корнями квадратичной функции $y = x^2 - (2a+1)x + a^2 + a - 12$ являются $x = a - 3$ и $x = a + 4$, причем $a - 3 < a + 4$ для любого значения параметра a . Решением неравенства будет отрезок $[a - 3; a + 4]$. Очевидно, что требование задачи будет выполнено, если интервал $(1; 2)$ целиком содержится в отрезке $[a - 3; a + 4]$.



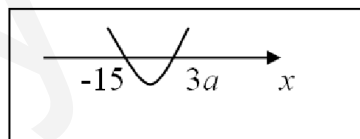
Решая систему $\begin{cases} a-3 \leq 1, \\ a+4 \geq 2, \end{cases}$ находим $-2 \leq a \leq 4$.

Ответ: $-2 \leq a \leq 4$.

ПРИМЕР 5. Для каждого a решите неравенство $(x+15)(x-3a) < 0$.

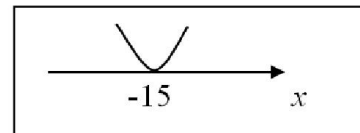
♦ Корнями квадратичной функции $f(x) = (x+15)(x-3a)$ являются $x = -15$ и $x = 3a$. Так как однозначно указать, какое из этих чисел больше, а какое — меньше, нельзя, то рассмотрим все возможные случаи:

1) $-15 < 3a \Leftrightarrow a > -5$.



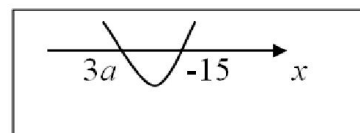
$15 < x < 3a$.

2) $-15 = 3a \Leftrightarrow a = -5$.



Решений нет.

3) $-15 > 3a \Leftrightarrow a < -5$.



$3a < x < -15$.

Ответ: при $a > -5$

$x \in (-15; 3a)$;

при $a = -5$ решений нет;

при $a < -5$ $x \in (3a; -15)$.

ПРИМЕР 6. Для каждого значения параметра a решите неравенство $ax^2 - (2a+1)x + 2 > 0$.

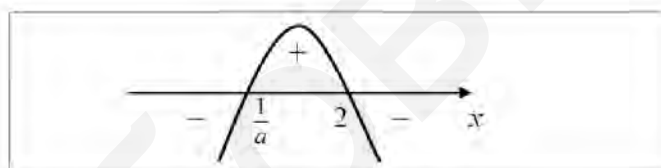
♦ Сразу заметим, что при $a=0$ неравенство будет линейным, а при $a \neq 0$ – квадратным. В случае квадратного неравенства важен знак числа a , потому что именно он будет определять, куда направлены ветви параболы – графика квадратичной функции $y = ax^2 - (2a+1)x + 2$, ($a \neq 0$).

Если $a = 0$, то исходное неравенство примет вид $-x + 2 > 0$, откуда $x < 2$.

Если $a \neq 0$, то данное неравенство является квадратным. Корни квадратичной функции $y = ax^2 - (2a+1)x + 2$: $x = 2$ или $x = \frac{1}{a}$.

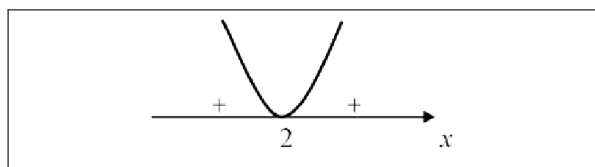
При $a < 0$ ветви параболы направлены вниз. Кроме того, при $a < 0$ $2 > \frac{1}{a}$.

В этом случае решением неравенства будут все $x \in \left(\frac{1}{a}; 2\right)$.

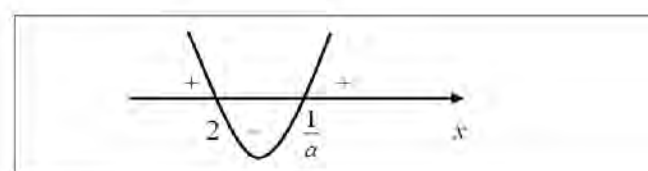


При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, однако нельзя однозначно указать, какой корень квадратичной функции больше, а какой меньше. Необходимо рассмотреть все возможные варианты.

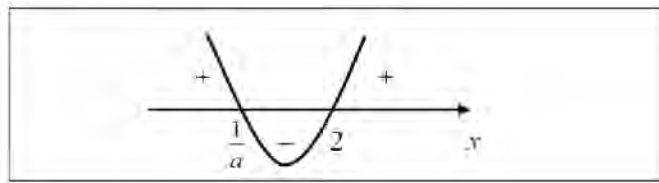
При $a = 0,5$ корни квадратичной функции совпадают, и решением неравенства являются все $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.



При $0 < a < 0,5$ $2 < \frac{1}{a}$. В этом случае решения: $x \in (-\infty; 2) \cup \left(\frac{1}{a}; +\infty\right)$.



При $a > 0,5$ $2 > \frac{1}{a}$. Решением неравенства будут все $x \in \left(-\infty; \frac{1}{a}\right) \cup (2; +\infty)$.



Ответ: при $a < 0$ $x \in \left(\frac{1}{a}; 2\right)$, при $a = 0$ $x \in (-\infty; 2)$,

при $0 < a < 0,5$ $x \in (-\infty; 2) \cup \left(\frac{1}{a}; +\infty\right)$,

при $a = 0,5$ $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$, при $a > 0,5$ $x \in \left(-\infty; \frac{1}{a}\right) \cup (2; +\infty)$.

УПРАЖНЕНИЯ

№ 1. Для каждого значения параметра a решите уравнение

а) $x^2 + 6x + a = 0$; б) $x^2 - 2ax + 5a - 6 = 0$; в) $2x^2 - 3ax - 2a^2 + 2 = 0$;

г) $x^2 - 3ax + 4 = 0$; д) $(a + 4)x^2 - 6x + a - 4 = 0$; е) $ax^2 + 2x + 1 = 0$.

№ 2. Для каждого значения параметра a определите, сколько различных действительных корней имеет уравнение

а) $(a - 1)x^2 + 2(a + 1)x + a - 2 = 0$; б) $(a + 10)x^2 - 2(a - 2)x + 2 = 0$.

№ 3. Для каждого значения параметра a решите неравенство

а) $x^2 - (2a + 1)x + a^2 + a \leq 0$; б) $x^2 - 4x + 8a - a^2 - 12 > 0$;

в) $x^2 + ax + 1 > 0$; г) $ax^2 + x + 1 < 0$;

д) $(1 + a)x^2 - 2ax + a - 3 \leq 0$; е) $\frac{x^2}{a} - 2x - \frac{x}{a} + a + 1 > 0$.

№ 4. Найдите все значения параметра a , при которых для уравнения (неравенства) выполняется следующее условие:

а) оба корня уравнения $x^2 - (3a + 3)x + 2a^2 + 6a = 0$ меньше двух;

б) ровно один корень уравнения $5x^2 + (5 - 6a)x + a^2 - a = 0$ принадлежит интервалу $(0; 2)$;

в) один из корней уравнения $x^2 + ax + a^2 - 3a - 4 = 0$ равен 1, а другой – отрицательный;

г) неравенство $ax^2 + (a-1)x + a - 3 < 0$ верно при любом значении x ;

д) неравенство $x^2 - (2a+1)x + a^2 + a - 2 \geq 0$ выполняется для любого $x \in (1; +\infty)$.

№5. Для каждого значения a решите уравнение $x^2 - 2a \cdot |x| + a^2 - 4 = 0$.

§3. Дробно-рациональные уравнения и неравенства, содержащие параметр

ПРИМЕР 1. Решите уравнение с параметром $\frac{a-1}{x} = \frac{a}{x+1}$.

♦ План решения этого уравнения состоит в следующем: после преобразований получить линейное уравнение, найти его корень и выяснить, при каких значениях параметра он является посторонним (обращает знаменатель дроби в нуль).

Область допустимых значений переменной (ОДЗ): $x \neq 0$ и $x \neq -1$. На ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению $(a-1)(x+1) = ax$, откуда находим $x = a-1$. Теперь выясним, при каких значениях параметра a найденное значение x является посторонним корнем для исходного уравнения: $a-1=0$ при $a=1$; $a-1=-1$ при $a=0$.

Ответ: при $a=1$ и $a=0$ корней нет, при $a \neq 1$ и $a \neq 0$ $x = a-1$.

ПРИМЕР 2. Решите уравнение с параметром $\frac{x+2}{a+1} = \frac{2x-a-1}{x-2}$.

♦ Сразу заметим, что при $a = -1$ уравнение теряет смысл, а следовательно, не имеет корней. Далее рассматриваем только случай $a \neq -1$.

ОДЗ: $x \neq 2$. На ОДЗ исходное уравнение равносильно уравнению $(x+2)(x-2) = (2x-a-1)(a+1)$. После преобразований получим уравнение $x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a - 3 = 0$, корни которого $x = a-1$ и $x = a+3$.

Первый корень принимает "запретное" значение при $a = 3$; второй корень в этом случае равен 6. Таким образом, при $a = 3$ уравнение имеет один корень $x = 6$.

Второй корень принимает "запретное" значение при $a = -1$. Однако случай $a = -1$ уже был рассмотрен (при $a = -1$ исходное уравнение теряет смысл).

Ответ: при $a = -1$ корней нет, при $a = 3$ единственный корень $x = 6$, при $a \neq -1$ и $a \neq 3$ уравнение имеет два корня $x = a - 1$ и $x = a + 3$.

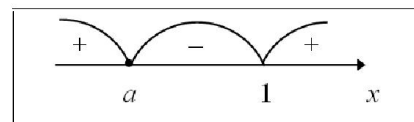
ПРИМЕР 3. Решите неравенство с параметром $\frac{x-a}{x-1} \geq 0$.

♦ Решим данное неравенство методом интервалов. Рассмотрим функцию

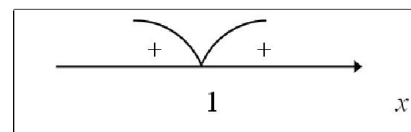
$f(x) = \frac{x-a}{x-1}$: $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; $f(x) = 0$ при $x = a$. Точки 1 и a раз-

бивают числовую прямую на интервалы, в каждом из которых функция сохраняет знак. Так как определить порядок расположения этих точек на числовой прямой однозначно нельзя, то необходимо рассмотреть все возможные случаи: $a < 1$, $a = 1$ и $a > 1$.

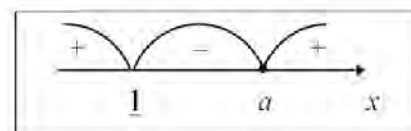
Если $a < 1$, то $x \in (-\infty; a] \cup (1; +\infty)$.



Если $a = 1$, то $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.



Если $a > 1$, то $x \in (-\infty; 1) \cup [a; +\infty)$.



Ответ: при $a < 1$ $x \in (-\infty; a] \cup (1; +\infty)$,

при $a = 1$ $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$,

при $a > 1$ $x \in (-\infty; 1) \cup [a; +\infty)$.

УПРАЖНЕНИЯ

№ 1. Для каждого значения параметра a сравните числа

а) a и $\frac{1}{a}$;

б) $\frac{3}{a-1}$ и $\frac{2}{a+1}$.

№ 2. Для каждого значения параметра a решите уравнение

a) $\frac{x+a}{ax} + \frac{2a-1}{x^2-ax} = \frac{2a-1}{ax-a^2};$

$$6) \frac{2x+a-1}{x-1} = 1;$$

B) $\frac{x-1}{x-a} = 0$;

$$\Gamma) \frac{ax}{a-x} = 1;$$

$$\text{Д) } \frac{x}{a^2 - 1} = \frac{a}{ax - 1};$$

$$\text{e) } \frac{2x^2 - (3a+2)x + a^2 + a}{x-3} = 0;$$

$$\text{ж) } \frac{x^2 - (3-a)x + 3a - 2a^2}{x^2 - 9} = 0;$$

$$3) \frac{x^2 - (3a-3)x + 2a^2 - 6a}{25 - x^2} = 0.$$

№ 3. Для каждого значения параметра a решите неравенство

a) $\frac{x+a}{2x} \geq 1;$

$$\text{б) } \frac{a-1}{x+a} < \frac{-1}{x};$$

$$\text{B) } \frac{(x-a)^2}{x^2-1} \leq 0;$$

$$\Gamma) \frac{1}{x} \leq a;$$

$$\text{д) } \frac{x+8}{2a-x} \geq 0;$$

$$\text{e) } \frac{12-x}{(x-3a)x} \leq 0.$$

§4. Теорема Виета

ПРИМЕР 1. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых сумма квадратов корней уравнения $x^2 + ax + 4 = 0$ равна 1.

♦ $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$. По теореме Виета $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a, \\ x_1 \cdot x_2 = 4. \end{cases}$ Из уравнения

$a^2 - 8 = 1$ находим $a = -3$ или $a = 3$. Однако полученный результат нельзя считать ответом. Легко проверить, что при $a = -3$ и $a = 3$ квадратное уравнение не имеет действительных корней. Поэтому, используя теорему Виета, мы не должны забывать о существовании действительных корней уравнения.

Итак, задача сводится к решению системы $\begin{cases} a^2 - 16 \geq 0, \\ a^2 - 8 = 1. \end{cases}$ Эта система

решений не имеет.

Ответ: таких значений параметра a нет.

Заметим, что условие $a^2 - 16 \geq 0$ предполагает, что при $D = 0$ квадратное уравнение имеет также два корня (одинаковых). Если бы в условии задачи говорилось о различных корнях квадратного уравнения, то первое неравенство системы должно быть строгим: $a^2 - 16 > 0$.

ПРИМЕР 2. Найдите все значения параметра a , при которых сумма кубов различных действительных корней уравнения $x^2 - 3x + 4a = 0$ меньше 18.

$D = 9 - 16a$. Если данное квадратное уравнение имеет действительные корни x_1 и x_2 , то по теореме Виета $x_1 + x_2 = 3$, а $x_1 \cdot x_2 = 4a$.
 $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) = 3(9 - 12a) = 27 - 36a$.

Таким образом, искомые значения параметра находим из системы $\begin{cases} 9 - 16a > 0, \\ 27 - 36a < 18. \end{cases}$ Ее решением будет промежуток $\left(\frac{1}{4}; \frac{9}{16}\right)$.

Ответ: $\frac{1}{4} < a < \frac{9}{16}$.

ПРИМЕР 3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $3x^2 - 2(a + 3)x - a^2 - 2a = 0$ имеет корни разных знаков.

♦ Необходимым и достаточным условием того, что квадратное уравнение имеет корни разных знаков (x_1 и x_2), является неравенство $x_1 \cdot x_2 < 0$. По

теореме Виета имеем: $\frac{-a^2 - 2a}{3} < 0$, откуда $\begin{cases} a < -2, \\ a > 0. \end{cases}$

Ответ: $a < -2$ или $a > 0$.

Обратите внимание на то, что в нашем случае при выполнении неравенства $x_1 \cdot x_2 < 0$ дискриминант автоматически положителен.

ПРИМЕР 4. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $x^4 - 2x^2 - a + 3 = 0$ имеет четыре различных действительных корня.

♦ Пусть $y = x^2$, тогда исходное уравнение примет вид $y^2 - 2y - a + 3 = 0$ (1).

Исходное уравнение имеет четыре различных корня, если квадратное уравнение (1) имеет два различных положительных корня. Это возможно

$$\text{при выполнении системы } \begin{cases} D > 0, \\ y_1 + y_2 > 0, \\ y_1 \cdot y_2 > 0. \end{cases} \quad \text{По теореме Виета} \quad \begin{cases} a > 2, \\ 2 > 0, \\ 3 - a > 0, \end{cases}$$

откуда находим $2 < a < 3$.

Ответ: $2 < a < 3$.

ПРИМЕР 5. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $x^2 - (a - 2) \cdot |x| + a^2 - 9 = 0$ имеет ровно три различных действительных корня.

♦ Пусть $y = |x|$, тогда исходное уравнение примет следующий вид:

$y^2 - (a - 2)y + a^2 - 9 = 0$. Исходное уравнение имеет ровно три различных корня, если один из корней полученного квадратного уравнения равен нулю, а другой корень – положительный. По теореме Виета последнее требо-

вание достигается при выполнении системы $\begin{cases} a^2 - 9 = 0, \\ a - 2 > 0, \end{cases}$ решением кото-

рой является $a = 3$.

Ответ: $a = 3$.

ПРИМЕР 6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 - ax + a - 3 = 0$ имеет корни разных знаков, причем положительный корень по модулю больше.

♦ Корни данного квадратного уравнения удовлетворяют условию тогда и только тогда, когда их произведение будет отрицательно, а сумма положи-

тельна. По теореме Виета получим систему $\begin{cases} a - 3 < 0, \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < 3$.

Ответ: $0 < a < 3$.

ПРИМЕР 7.* Найдите все значения a , при каждом из которых попарно различные корни уравнения $x^4 + (a-5)x^2 + (a+2)^2 = 0$ являются четырьмя последовательными членами арифметической прогрессии.

♦ $x^4 + (a-5)x^2 + (a+2)^2 = 0$ (1). Пусть $y = x^2$ ($y \geq 0$). Тогда уравнение (1) примет вид $y^2 + (a-5)y + (a+2)^2 = 0$ (2).

Требование задачи выполняется лишь тогда, когда уравнение (1) имеет четыре различных действительных корня. Это возможно в том случае, если квадратное уравнение (2) имеет два различных положительных корня.

Если квадратное уравнение (2) имеет два различных положительных корня y_1 и y_2 ($y_1 < y_2$), то корни уравнения (1) – числа $\pm\sqrt{y_1}$ и $\pm\sqrt{y_2}$. Они будут являться четырьмя последовательными членами арифметической прогрессии, если будут расположены в порядке возрастания или убывания: $-\sqrt{y_2}; -\sqrt{y_1}; \sqrt{y_1}; \sqrt{y_2}$ или $\sqrt{y_2}; \sqrt{y_1}; -\sqrt{y_1}; -\sqrt{y_2}$. В каждом из этих случаев выполняется соотношение $3\sqrt{y_1} = \sqrt{y_2}$ (*), откуда $y_2 = 9y_1$.

Рассмотрим систему уравнений, составленную на основе теоремы Виета для уравнения (2): $\begin{cases} y_1 + (9y_1) = 5 - a, \\ y_1 \cdot (9y_1) = (a+2)^2. \end{cases}$ Ее решением будут $a = -5$ или $a = -\frac{5}{13}$.

Далее проверкой убеждаемся, что при этих значениях, во-первых, дискриминант квадратного уравнения (2) положителен, а во-вторых, оба корня квадратного уравнения (2) больше нуля.

Заметим, что при $a = -5$ арифметическую прогрессию составят числа $-3; -1; 1; 3$. При $a = -\frac{5}{13}$ этими числами будут $-\sqrt{\frac{63}{13}}; -\sqrt{\frac{7}{13}}; \sqrt{\frac{7}{13}}; \sqrt{\frac{63}{13}}$.

Ответ: $a = -5$ или $a = -\frac{5}{13}$.

УПРАЖНЕНИЯ

- № 1.** Найдите все значения a , при каждом из которых квадрат разности различных действительных корней трехчлена $ax^2 - 4x + 3a + 1$ меньше 8.
- № 2.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 - (9 + a)x + 9 = 0$ имеет два различных действительных корня x_1 и x_2 , удовлетворяющих неравенству $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 2$.
- № 3.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых сумма квадратов корней трехчлена $x^2 - 4ax + 5a - 1$ равна 2.
- № 4.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 + (a - 2) \cdot |x| + 5 - 6a + a^2 = 0$ имеет ровно два различных корня.
- № 5.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 + (3 + a)x + a - 5 = 0$ имеет корни разных знаков, причем положительный корень по модулю меньше отрицательного.
- № 6.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых квадратное уравнение $ax^2 + 2ax + 9 = 0$ имеет корни одного знака.
- № 7.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^4 - (a - 2)x^2 + a^2 - 9 = 0$ имеет ровно три различных корня.
- № 8.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^4 - (a - 3)x^2 + a^2 - 16 = 0$ имеет ровно один корень.
- № 9.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 - 2(a + 1)x + a^2 - 9 = 0$ имеет только положительные корни.
- № 10.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^4 - 2(a + 1)x^2 + a^2 - 9 = 0$ не имеет действительных корней.
- № 11.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых сумма квадратов различных действительных корней квадратного трехчлена $x^2 - (a + 2)x + 4$ не превосходит 17.

№ 12. Найдите все значения a , при каждом из которых квадрат разности действительных корней уравнения $x^2 + (2a - 2)x + a + 5 = 0$ меньше 24.

№ 13. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $ax^2 + x + a - 1 = 0$ имеет два различных действительных корня x_1 и x_2 , удовлетворяющих неравенству $\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| > 1$.

№ 14. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых корни уравнения $x^4 + (a - 3)x^2 + (a + 10)^2 = 0$ являются четырьмя последовательными членами арифметической прогрессии.

№ 15. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^4 + ax^2 + (a + 2)^2 = 0$ имеет четыре корня, причем величины, обратные корням, образуют арифметическую прогрессию.

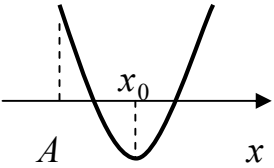
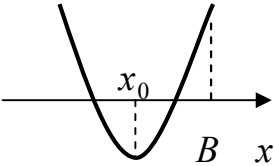
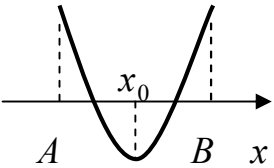
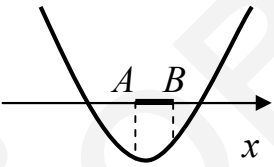
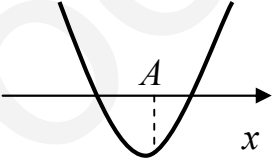
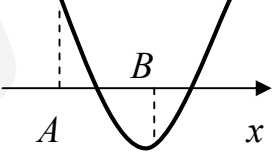
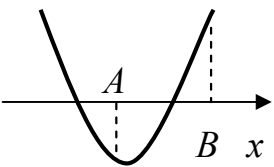
§5. Расположение корней квадратичной функции

Существует довольно большой класс задач с параметром, в которых необходимо делать ограничения на корни квадратичной функции $f(x) = x^2 + px + q$ (оба корня больше 5, только один корень принадлежит отрезку $[-1; 1]$ и т.д.). В таких случаях целесообразно придерживаться следующего плана.

Если дискриминант квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ является полным квадратом, то лучше найти корни уравнения и дальше работать с этими корнями (составить соответствующие неравенства).

Если дискриминант квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ не является полным квадратом, то корни уравнения лучше не находить, а нужные ограничения составить на основе следующих теорем (приведем их в виде следующей таблицы).

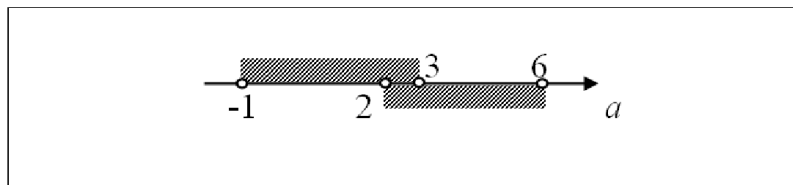
Здесь и далее x_0 — абсцисса вершины параболы.

ОГРАНИЧЕНИЕ НА РАСПОЛОЖЕНИЕ КОРНЕЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ $f(x) = x^2 + px + q$	ЭСКИЗ ГРАФИКА КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ $f(x) = x^2 + px + q$	НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ДЛЯ ПРИВЕДЕННОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ГРАФИКА
1. Оба корня больше заданного числа A		$\begin{cases} D \geq 0, \\ f(A) > 0, \\ x_0 > A. \end{cases}$
2. Оба корня меньше заданного числа B		$\begin{cases} D \geq 0, \\ f(B) > 0, \\ x_0 < B. \end{cases}$
3. Оба корня лежат в интервале $(A; B)$		$\begin{cases} D \geq 0, \\ f(A) > 0, \\ f(B) > 0, \\ A < x_0 < B. \end{cases}$
4. Отрезок $[A; B]$ лежит между корнями		$\begin{cases} f(A) < 0, \\ f(B) < 0. \end{cases}$
5. Заданное число A лежит между корнями		$f(A) < 0.$
6. Только меньший корень входит в интервал $(A; B)$		$\begin{cases} f(A) > 0, \\ f(B) < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(A) > 0, \\ f(B) = 0, \\ x_0 < B. \end{cases}$
7. Только больший корень входит в интервал $(A; B)$		$\begin{cases} f(A) < 0, \\ f(B) > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(B) > 0, \\ f(A) = 0, \\ x_0 > A. \end{cases}$

Если в теоремах (1) и (2) в качестве чисел A и B рассматривать 0, то мы приходим к условию, идентичному тому, которое получается на основе теоремы Виета.

ПРИМЕР 1. Найдите все значения a , при каждом из которых ровно один корень уравнения $x^2 - (2a+1)x + a^2 + a - 2 = 0$ принадлежит интервалу $(1; 5)$.

♦ Дискриминант уравнения равен 9. Корни уравнения: $x = a - 1$ и $x = a + 2$.
 $1 < a - 1 < 5$ при $2 < a < 6$; $1 < a + 2 < 5$ при $-1 < a < 3$.



Видим, что ровно один корень уравнения принадлежит интервалу $(1; 5)$ при $-1 < a \leq 2$ или $3 \leq a < 6$.

Ответ: $-1 < a \leq 2$ или $3 \leq a < 6$.

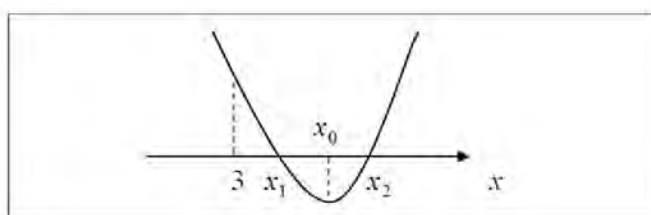
ПРИМЕР 2. Найдите все значения a , при каждом из которых корни уравнения $x^2 - 6ax + 9a^2 - 2a + 2 = 0$ больше числа 3.

♦ 1 способ. $D_1 = 2a - 2$; $x_1 = 3a - \sqrt{2a - 2}$, $x_2 = 3a + \sqrt{2a - 2}$. Для того, чтобы найденные корни были больше 3 ($3 < x_1 \leq x_2$), достаточно решить только одно неравенство: $3a - \sqrt{2a - 2} > 3$. Уединив радикал, получим неравенство $\sqrt{2a - 2} < 3a - 3$, которое будет равносильно следующей системе

$$\begin{cases} 3a - 3 > 0, \\ 2a - 2 \geq 0, \\ 2a - 2 < (3a - 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ a \geq 1, \\ 9a^2 - 20a + 11 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > \frac{11}{9}.$$

♦ 2 способ. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 2ax + 9a^2 - 2a + 2$. Ее корни

больше 3 при выполнении системы $\begin{cases} D \geq 0, \\ f(3) > 0, \\ x_0 > 3 \end{cases}$ (теорема 1).



$$\begin{cases} 2a - 2 \geq 0, \\ 9a^2 - 20a + 11 > 0, \\ 3a > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 1, \\ a \in (-\infty; 1) \cup \left(\frac{11}{9}; +\infty\right), \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow a > \frac{11}{9}.$$

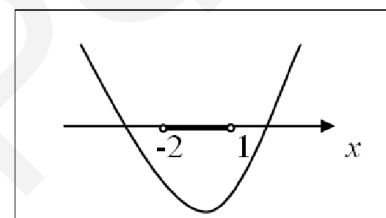
Ответ: $a > \frac{11}{9}$.

ПРИМЕР 3. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство $x^2 + ax + a - 3 < 0$ выполняется для любого $-2 < x < 1$.

♦ Требование задачи выполняется, если интервал $(-2; 1)$ расположен между корнями квадратичной функции $f(x) = x^2 + ax + a - 3$.

Воспользуемся теоремой 4: $\begin{cases} f(-2) \leq 0, \\ f(1) \leq 0. \end{cases}$

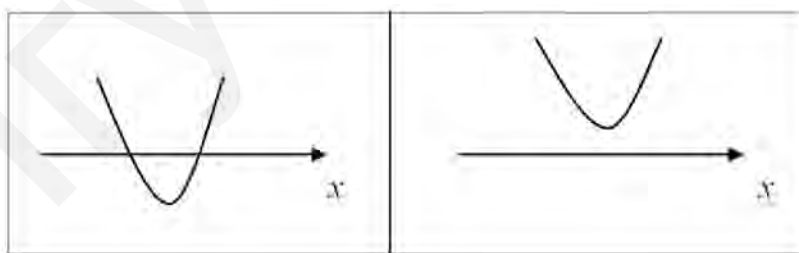
$$\begin{cases} 4 - 2a + a - 3 \leq 0, \\ 1 + a + a - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 1, \\ a \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1.$$



Ответ: $a = 1$.

ПРИМЕР 4. Найдите все значения параметра a , при которых функция $y = \sqrt{x^2 - 2ax + a + 2}$ определена для любого действительного значения x .

♦ Данная функция определена для любого x , если для любого x выполняется неравенство $x^2 - 2ax + a + 2 \geq 0$.



Последнее возможно тогда и только тогда, когда график квадратичной функции $f(x) = x^2 - 2ax + a + 2$ расположен выше оси абсцисс или касается ее. Это выполняется, если уравнение $x^2 - 2ax + a + 2 = 0$ не имеет корней или имеет один корень.

$D_1 = a^2 - a - 2$. Из неравенства $a^2 - a - 2 \leq 0$, находим $-1 \leq a \leq 2$.

Ответ: $-1 \leq a \leq 2$.

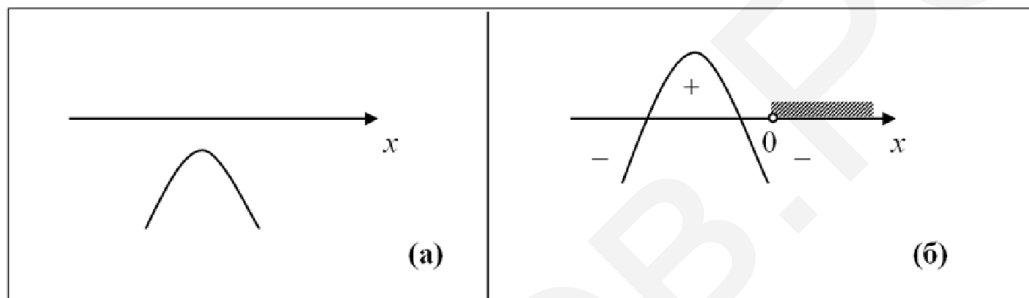
ПРИМЕР 5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $ax^2 + ax + a + 3 > 0$ не имеет положительных решений.

♦ При $a = 0$ неравенство примет вид $3 > 0$, что верно при любом x .

При $a \neq 0$ рассмотрим квадратичную функцию $f(x) = ax^2 + ax + a + 3$. Легко заметить, что при $a > 0$ (ветви параболы направлены вверх) неравенство имеет положительные решения. При $a < 0$ (ветви параболы направлены вниз) данное неравенство не имеет положительных решений в двух случаях:

а) квадратичная функция $f(x) = ax^2 + ax + a + 3$ не имеет корней;

б) корни квадратичной функции не превосходят 0.



а) $D < 0$: $-3a^2 - 12a < 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$. С учетом того, что $a < 0$ получим $a \in (-\infty; -4)$.

б) Решим систему $\begin{cases} D \geq 0, \\ f(0) \leq 0, \text{ с учетом того, что } a < 0: \\ x_0 \leq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} -3a^2 - 12a \geq 0, \\ a + 3 \leq 0, \\ -\frac{a}{2a} \leq 0, \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in [-4; 0], \\ a \leq -3, \\ a \neq 0, \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in [-4; -3].$$

Объединяя решения для случаев (а) и (б), получим $a \in (-\infty; -3]$.

Ответ: $a \in (-\infty; -3]$.

УПРАЖНЕНИЯ

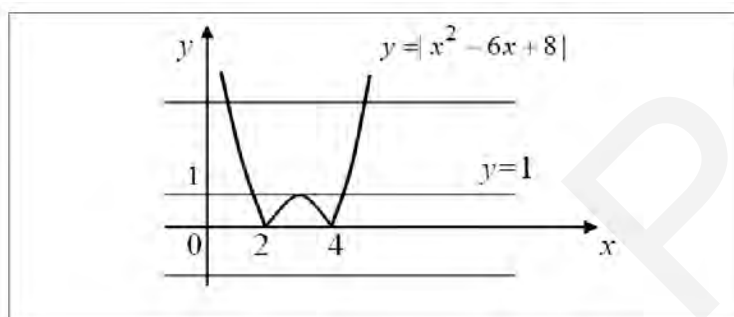
№ 1. Найдите все значения a , при каждом из которых корни уравнения $x^2 + ax + a = 0$ меньше 1.

- № 2.** Найдите все значения a , при каждом из которых оба корня уравнения $2x^2 - (6 - a)x + 3a - a^2 = 0$ принадлежат промежутку $(0; 2]$.
- № 3.** Найдите все значения a , при каждом из которых корни уравнения $x^2 + x + a = 0$ больше числа a .
- № 4.** Найдите все значения a , при каждом из которых корни уравнения $x^2 - (2a + 1)x + 4 - a = 0$ лежат по разные стороны от числа 3.
- № 5.** Найдите все значения a , при каждом из которых ровно один корень уравнения $5x^2 - 10ax + 4a^2 - 1 = 0$ принадлежит отрезку $[-1; 1]$.
- № 6.** Найдите все значения a , при каждом из которых корни уравнения $(a + 1)x^2 - 3ax + 4a = 0$ лежат в интервале $(2; 5)$.
- № 7.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $x^2 - ax - a + 3 \leq 0$ имеет хотя бы одно положительное решение.
- № 8.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $x^2 + 6x + a \geq 0$ выполняется для любого значения x .
- № 9.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $ax^2 + 4x + 3a - 1 > 0$ верно для любого $x > 0$.
- № 10.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых функция $y = \sqrt{ax^2 + 2x + a}$ определена ровно в одной точке.
- № 11.** Найдите все значения a , при каждом из которых корни трехчлена $x^2 + (a - 12)x + 25$ принадлежат интервалу $(4; 8)$.
- № 12.** Найдите все значения a , при каждом из которых ровно один корень уравнения $x^2 + x - a^2 - a = 0$ входит в промежуток $(-2; 3)$.
- № 13.** Найдите все значения a , при каждом из которых оба корня уравнения $x^2 - ax - a = 0$ меньше 2.
- № 14.** Найдите все значения a , при каждом из которых оба корня уравнения $x^2 - ax + a = 0$ больше -2 .
- № 15.** Найдите все значения a , при каждом из которых ни один из корней уравнения $x^2 - (2a + 1)x + a^2 + a - 2 = 0$ не входит в промежуток $(1; 5)$.

§6. Графический способ решения уравнений и неравенств, содержащих параметр

ПРИМЕР 1. Для каждого значения параметра a определите количество корней уравнения $|x^2 - 6x + 8| = a$.

♦ Для решения этой задачи эффективен графический способ: построить график функции $y = |x^2 - 6x + 8|$, и для каждого значения a определить количество общих точек этого графика с прямой $y = a$.

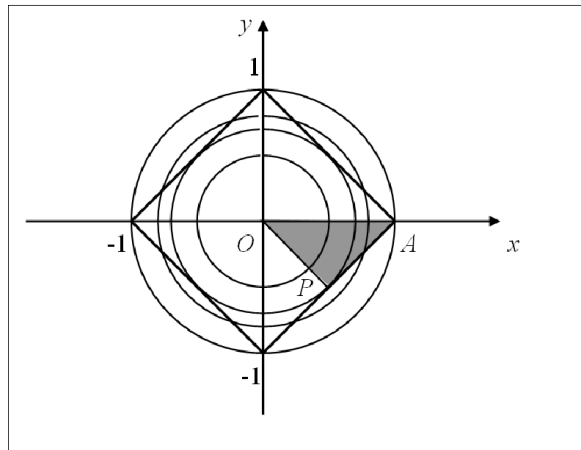


По графику видим, что при $a < 0$ корней нет; при $a = 0$ и $a > 1$ два корня; при $a = 1$ три корня; при $0 < a < 1$ четыре корня.
Ответ: при $a < 0$ корней нет; при $a = 0$ и $a > 1$ два корня;
при $a = 1$ три корня; при $0 < a < 1$ четыре корня.

ПРИМЕР 2. Для каждого значения параметра a определите число решений системы уравнений
$$\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$

♦ Первое уравнение системы на координатной плоскости Oxy задает квадрат, а второе уравнение – семейство концентрических окружностей с центром в начале координат и радиусом $r = |a|$. Из прямоугольного равнобедренного треугольника OPA находим $OP = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

По графику видим, что система не имеет решений, если $r < \frac{\sqrt{2}}{2}$ или $r > 1$;
при $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ или $r = 1$ – четыре решения; при $\frac{\sqrt{2}}{2} < r < 1$ – восемь решений.



С учетом того, что $r = |a|$, получим:

система не имеет решений, если $a \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup (1; +\infty)$;

четыре решения, если $a \in \left\{\pm 1; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$;

восемь решений, если $a \in \left(-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$.

Ответ: при $a \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup (1; +\infty)$ решений нет,

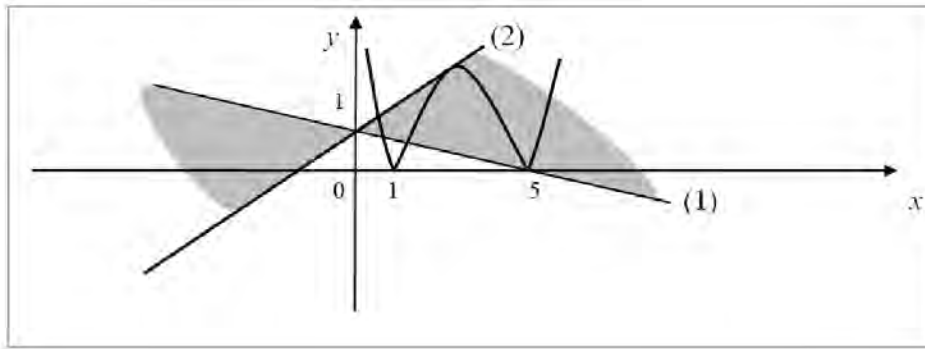
при $a \in \left\{\pm 1; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ четыре решения,

при $a \in \left(-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$ восемь решений.

ПРИМЕР 3. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $|x^2 - 6x + 5| = ax + 1$ имеет ровно 4 корня.

♦ Переформулируем задачу на графическом языке: нужно найти все значения параметра a , при которых прямая $y = ax + 1$ (проходящая через точку $(0; 1)$) имеет четыре общих точки с графиком функции $y = |x^2 - 6x + 5|$.

По графику видим, что условию задачи удовлетворяют все прямые, расположенные внутри заштрихованной области. Найдем граничные значения параметра, соответствующие прямым (1) и (2).



1) Прямая $y=ax+1$ проходит через точку $(5; 0)$: $0=5a+1$, $a=-0,2$.

2) Прямая $y=ax+1$ касается параболы $y=-(x^2-6x+5)$. Следовательно, уравнение $-x^2+6x-5=ax+1$ должно иметь ровно один корень.

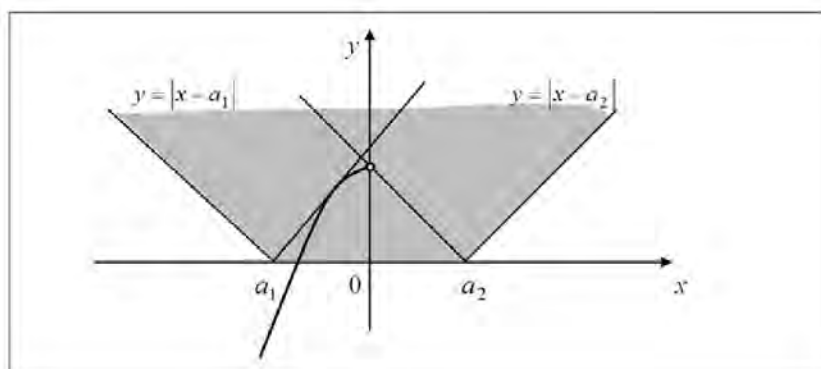
$x^2+(a-6)x+6=0$. $D=(a-6)^2-24$. Решая уравнение $(a-6)^2-24=0$, находим $a=6\pm 2\sqrt{6}$. Очевидно, что прямой (2) соответствует угловой коэффициент $a=6-2\sqrt{6}$.

Ответ: $-0,2 < a < 6-2\sqrt{6}$.

Заметим, что значение $a=6+2\sqrt{6}$ получено не случайно. Оно также соответствует касанию прямой $y=ax+1$ и параболы $y=-x^2+6x-5$. Точка касания будет находиться в III четверти.

ПРИМЕР 4. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство $3-x^2 > |x-a|$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.

♦ Переформулируем задачу на графическом языке: нужно найти все значения параметра a , при которых существует хотя бы одна точка графика функции $y=3-x^2$ с отрицательной абсциссой, лежащая выше точки графика функции $y=|x-a|$ с той же абсциссой.

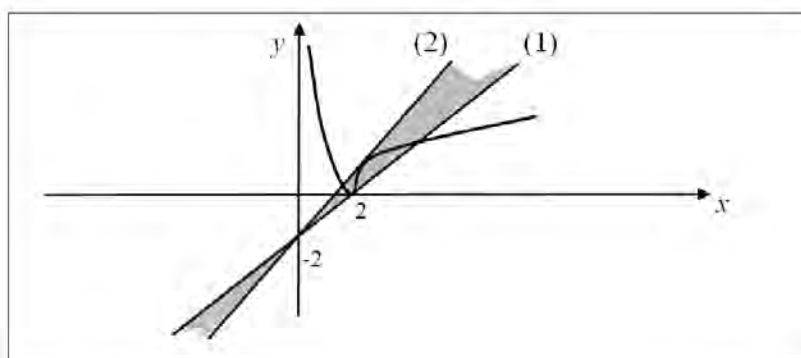


Из графических соображений ясно, что искомые значения $a \in (a_1; a_2)$. Значение a_2 соответствует тому, что левый луч уголка проходит через точку $(0; 3)$. Подставляя координаты этой точки в уравнение $y = a_2 - x$, получим $a_2 = 3$. Значение a_1 соответствует тому, что правый луч уголка касается параболы, т.е. уравнение $3 - x^2 = x - a_1$ имеет ровно один корень. Дискриминант этого уравнения равен $13 + 4a_1$ и обращается в нуль при $a_1 = -\frac{13}{4}$. Таким образом, $a \in \left(-\frac{13}{4}; 3\right)$.

Ответ: $a \in \left(-\frac{13}{4}; 3\right)$.

ПРИМЕР 5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\left|\frac{6}{x} - 3\right| = ax - 2$ на промежутке $(0; +\infty)$ имеет ровно три корня.

♦ Найдём все значения параметра a , при которых прямая $y = ax - 2$ имеет ровно три общие точки с той частью графика функции $y = \left|\frac{6}{x} - 3\right|$, которая расположена в правой полуплоскости ($x > 0$). Последний график представляет собой правую ветку гиперболы $y = \frac{6}{x}$, которую а) сместили на 3 единицы вниз, б) ту часть графика, которая расположена ниже оси Ox зеркально отразили относительно оси абсцисс в верхнюю полуплоскость. Заметим также, что прямая $y = ax - 2$ проходит через точку $(0; -2)$ при любом значении параметра a , который является угловым коэффициентом.



Видим, что условию задачи отвечают все прямые, расположенные внутри заштрихованной области.

Значение параметра, соответствующее границе (1), находим из уравнения $0 = 2a - 2$, $a = 1$.

Значение параметра, соответствующее границе (2), находим из условия касания прямой $y = ax - 2$ и графика функции $y = -\left(\frac{6}{x} - 3\right)$ (отраженной части гиперболы).

Уравнение $-\frac{6}{x} + 3 = ax - 2$ должно иметь ровно один корень. После преобразований получаем квадратное уравнение $ax^2 - 5x + 6 = 0$ (очевидно, что $a > 0$), дискриминант которого приравняем к нулю: $25 - 24a = 0$, $a = \frac{25}{24}$. Условию удовлетворяют все $a \in \left(1; \frac{25}{24}\right)$.

Ответ: $1 < a < \frac{25}{24}$.

ПРИМЕР 6. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} a^2 - x^2 + 2x - 2a \leq 0, \\ x^2 = 4x - a \end{cases} \text{ имеет ровно одно решение.}$$

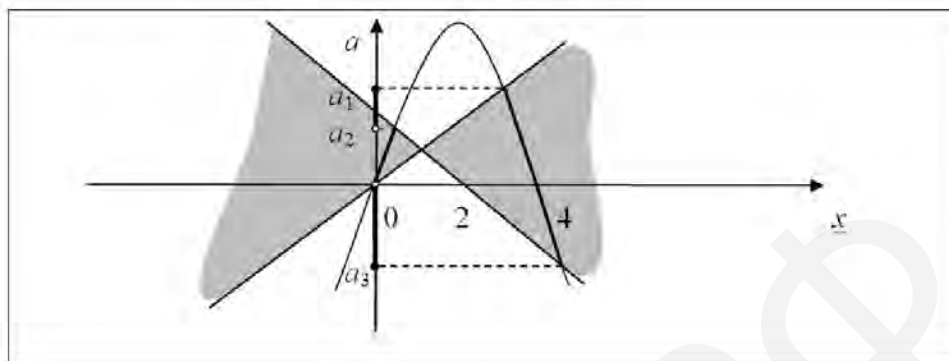
♦ Особенностью этой системы является отсутствие в ней переменной y . Чтобы использовать графический метод решения, придадим параметру a статус ординаты и рассмотрим координатную плоскость Oxa . После очевидных преобразований система примет вид

$$\begin{cases} (a - x)(a + x - 2) \leq 0, \\ a = 4x - x^2. \end{cases}$$

Неравенство системы на координатной плоскости Oxa задает пару закрашенных вертикальных углов, ограниченных прямыми $a = x$ и $a = 2 - x$. Уравнение задает параболу $a = 4x - x^2$. Решение системы на графике представляет собой те участки параболы, которые попали в закрашенную область. По графику видим, что условию задачи удовлетворяют все значения параметра $a \in [a_3; 0) \cup (a_2; a_1]$.

Значение a_1 находим из системы $\begin{cases} a = x, \\ a = 4x - x^2, \end{cases} \quad a_1 = 3.$

(Другое решение системы $a=0$ соответствует второй точке пересечения прямой и параболы.)



Из системы $\begin{cases} a = 2 - x, \\ a = 4x - x^2 \end{cases}$ находим a_2 и a_3 : $a_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$, $a_3 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$.

Таким образом, искомые значения $a \in \left[\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}; 0 \right) \cup \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; 3 \right]$.

Ответ: $\left[\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}; 0 \right) \cup \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; 3 \right]$.

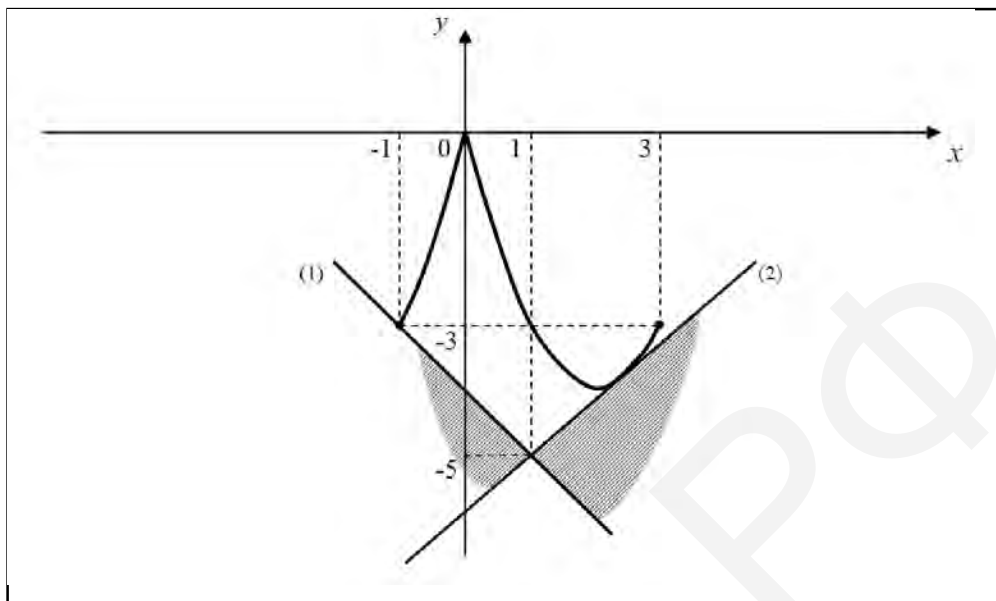
ПРИМЕР 7. Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = x^2 - 4|x| - ax + a$ на отрезке $[-1; 3]$ не меньше, чем -5 .

♦ Так как наименьшее значение функции на отрезке $[-1; 3]$, не меньше, чем -5 , то значения функции во всех точках отрезка также не меньше, чем -5 . Следовательно, неравенство $x^2 - 4|x| - ax + a \geq -5$ должно выполняться для любого $x \in [-1; 3]$. Последнее неравенство перепишем в следующем виде $x^2 - 4|x| \geq a(x-1) - 5$.

Выясним, при каких значениях параметра a прямая $y = a(x-1) - 5$ будет располагаться *не выше* графика функции $y = x^2 - 4|x|$, построенного на отрезке $[-1; 3]$.

Заметим, что прямая $y = a(x-1) - 5$ проходит через точку $(1; -5)$. При изменении параметра a будет меняться угловой коэффициент (а значит, и угол наклона) этой прямой.

Условию задачи удовлетворяют все прямые, расположенные внутри закрашенной пары вертикальных углов, включая границы. Найдем значения a , соответствующие этим границам.



1) Значение a находим из условия, что прямая $y = a(x-1) - 5$ проходит через точку $(-1; -3)$: $-3 = -2a - 5$, $a = -1$.

2) Значение a находим из условия, что прямая $y = a(x-1) - 5$ касается параболы $y = x^2 - 4x$. То есть уравнение $x^2 - 4x = a(x-1) - 5$ должно иметь ровно один корень. Приведя уравнение к виду $x^2 - (4+a)x + a+5 = 0$, потребуем, чтобы его дискриминант равнялся нулю.

$D = (4+a)^2 - 4a - 20 = a^2 + 4a - 4$. Решая уравнение $a^2 + 4a - 4 = 0$, находим $a = -2 - 2\sqrt{2}$ или $a = -2 + 2\sqrt{2}$. Легко понять, что нашему случаю удовлетворяет лишь одно значение $a = -2 + 2\sqrt{2}$.

Таким образом, искомые значения $a \in [-1; -2 + 2\sqrt{2}]$.

Ответ: $[-1; -2 + 2\sqrt{2}]$.

УПРАЖНЕНИЯ

№ 1. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $||x| - 3| = a - 3$ имеет ровно 4 корня.

№ 2. Для каждого значения a определите количество решений уравнения

а) $|1 - x^2| = 1 - a$;

б) $||x| - a| = 2$.

№ 3. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $a|x+4|=x-3$ имеет ровно один корень.

№ 4. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} 2|x|+3|y|=6, \\ x^2+y^2=a \end{cases}$$
 имеет ровно 6 решений.

№ 5. Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система
$$\begin{cases} (|x|-4)^2+(y-3)^2=4, \\ (x-1)^2+(y+1)^2=a^2 \end{cases}$$
 имеет ровно одно решение.

№ 6. Найдите все значения a , при каждом из которых система неравенств
$$\begin{cases} x^2+y^2-a^2 \leq 6x-4y-13, \\ x^2+y^2-4a^2 \leq 8y-10x+4a-40 \end{cases}$$
 имеет ровно одно решение.

№ 7. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $|x^2-2x-8|=a(x+5)+2$ не имеет корней.

№ 8. Найдите все значения a , при каждом из которых график функции $f(x)=\left|\frac{6}{x}-5\right|-ax+1$ имеет более двух общих точек с осью абсцисс на промежутке $(0;+\infty)$.

№ 9. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\frac{3}{x+1}=a|x-5|$ на промежутке $(0;+\infty)$ имеет ровно три корня.

№ 10. Найдите все значения параметра a , при каждом уравнение $(a+1-|x-1|)(a+x^2-4x)=0$ имеет четыре различных корня.

№ 11. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система
$$\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ y=|x|+a \end{cases}$$
 имеет ровно два решения.

№ 12. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система
$$\begin{cases} a^2+ax-2x-4a+4 \leq 0, \\ xa=-4 \end{cases}$$
 имеет хотя бы одно решение.

№ 13. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система
$$\begin{cases} (y-a-2)^2+(x-a)^2=3a+5, \\ y \geq |x|. \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

№ 14. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система
$$\begin{cases} \sqrt{y^2+x^2-2ax+4ay+5a^2}=\sqrt{5}, \\ y=|x| \end{cases}$$
 имеет ровно одно решение.

№ 15. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2 + xy - 7x - 14y + 49 = 0, \\ y = ax + 1, \\ x \geq 3 \end{cases} \quad \text{имеет единственное решение.}$$

№ 16. Найдите все значения a , при каждом из которых графики функции $f(x) = (x-4)|x| + a$ и $g(x) = |x-a| - a$ имеют ровно две общих точки.

№ 17. Найдите все значения a , при каждом из которых функция $f(x) = |x-2| \cdot (x+2) - |x-a| + 2a$ принимает значение, равное a , ровно в трех различных точках.

№ 18. Найдите все значения a , при каждом из которых графики функций $f(x) = 2 + |x + \sqrt{x^2 - 8x + 16}|$ и $g(x) = ax + 4a$ имеют максимально возможное количество общих точек.

№ 19. Найдите все значения a , при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = a(x-1) - |x^2 + 4x + 3|$ меньше (-3) .

№ 20. Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = |x^2 - 6x + 5| - ax - 3a$ меньше 2.

§7. Тригонометрические уравнения и неравенства, содержащие параметр

ПРИМЕР 1. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $4 \cos^2 x + 5a \sin x - a^2 - 4 = 0$ имеет решения. Найдите эти решения.

♦ Данное уравнение сводится к уравнению $4 \sin^2 x - 5a \sin x + a^2 = 0$,

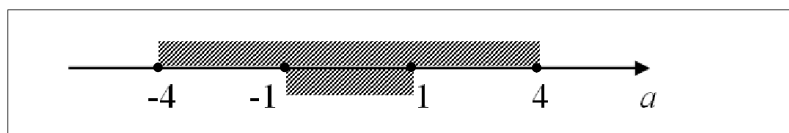
которое равносильно совокупности
$$\begin{cases} \sin x = a, \\ \sin x = \frac{a}{4}. \end{cases}$$

Первое уравнение совокупности имеет решения, если $-1 \leq a \leq 1$.

В этом случае $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Второе уравнение совокупности имеет решения, если $-4 \leq a \leq 4$.

В этом случае $x = (-1)^k \arcsin \frac{a}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.



Видим, что исходное уравнение имеет решения при всех $-4 \leq a \leq 4$, причем, если $a \in [-1; 1]$, то решения имеют оба уравнения совокупности (на рисунке две штриховки); если $a \in [-4; -1) \cup (1; 4]$ (одна штриховка), то лишь второе уравнение совокупности имеет решения.

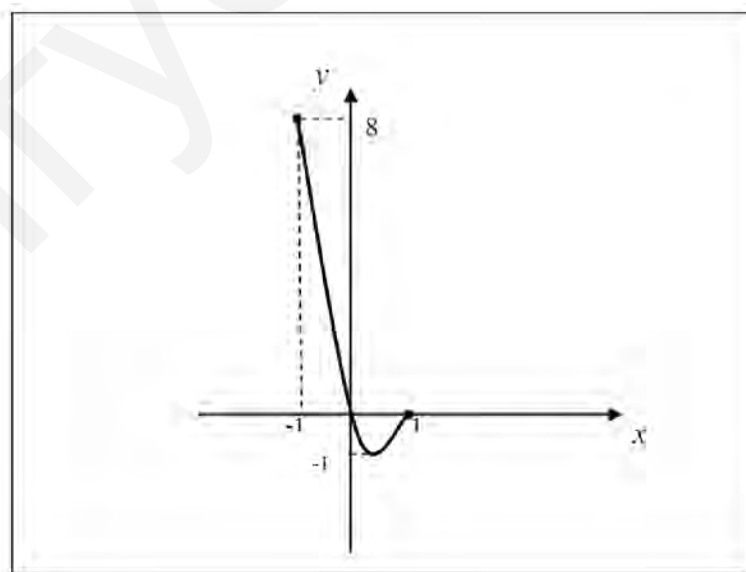
Ответ: уравнение имеет решения при всех $-4 \leq a \leq 4$.

При $a \in [-1; 1]$ $x = (-1)^n \arcsin \frac{a}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $x = (-1)^k \arcsin \frac{a}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$,

при $a \in [-4; -1) \cup (1; 4]$ $x = (-1)^k \arcsin \frac{a}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

ПРИМЕР 2. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $2 \cos 2x - 4 \cos x - a + 2 = 0$ не имеет корней.

♦ После преобразований получим уравнение $4 \cos^2 x - 4 \cos x = a$. Пусть $\cos x = t$, $t \in [-1; 1]$. Тогда необходимо выяснить, при каких значениях параметра a уравнение $4t^2 - 4t = a$ не имеет корней на отрезке $[-1; 1]$. Для этого изобразим на указанном отрезке график функции $y = 4t^2 - 4t$.



По графику видим, что уравнение не имеет корней, если $a < -1$ или $a > 8$.

Ответ: $a < -1$ или $a > 8$.

ПРИМЕР 3. Решите неравенство $\sin ax < \frac{1}{2}$.

$$\blacklozenge \sin ax < \frac{1}{2}; \quad -\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < ax < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Если $a = 0$, то исходное неравенство примет вид $\sin 0x < \frac{1}{2}$. Решением является любое действительное x .

$$\text{Если } a > 0, \text{ то } \frac{1}{a} \left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \right) < x < \frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Если } a < 0, \text{ то } \frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n \right) < x < \frac{1}{a} \left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: при } a = 0 \quad x \in \mathbb{R}, \text{ при } a > 0 \quad \frac{1}{a} \left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \right) < x < \frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\text{при } a < 0 \quad \frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n \right) < x < \frac{1}{a} \left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

ПРИМЕР 4. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\cos(x+a) - \sin(x-a) = 0$.

$\blacklozenge$ Используя формулу приведения, преобразуем данное уравнение к виду $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x - a\right) - \sin(x-a) = 0$. Разложим левую часть уравнения на множители:

$$\text{ли: } 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = 0.$$

Если $\cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = 0$, то решением будет любое действительное x . Если

$$\text{ли } \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right) \neq 0, \text{ то } \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0, \text{ откуда } x = \frac{\pi}{4} - \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

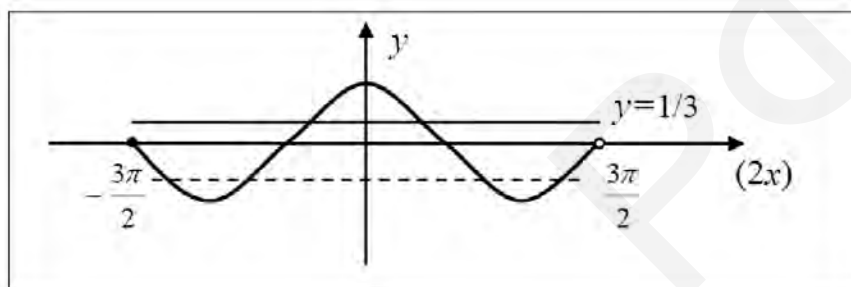
Осталось выяснить, при каких значениях параметра a $\cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = 0$.

$$\text{Имеем } a - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ откуда находим } a = \frac{3\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: при } a = \frac{3\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad x \in \mathbb{R}, \text{ при } a \neq \frac{3\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{\pi}{4} - \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

ПРИМЕР 5. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $3 \cos^2 2x - (3a - 2) \cos 2x + a - 1 = 0$ имеет ровно шесть корней на промежутке $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

♦ Пусть $y = \cos 2x$, тогда уравнение примет вид $3y^2 - (3a - 2)y + a - 1 = 0$. Его корни: $y = \frac{1}{3}$ и $y = a - 1$. Дальнейшие рассуждения проведем графическим способом.



Из условия следует, что $2x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. На этом промежутке прямая $y = \frac{1}{3}$ пересекает график функции $y = \cos 2x$ в двух точках.

Искомыми являются те значения a , при которых прямая $y = a - 1$ пересекает этот же график на промежутке $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ ровно в четырех точках.

Это возможно в случае, когда $-1 < a - 1 < 0$, т.е. при $0 < a < 1$.

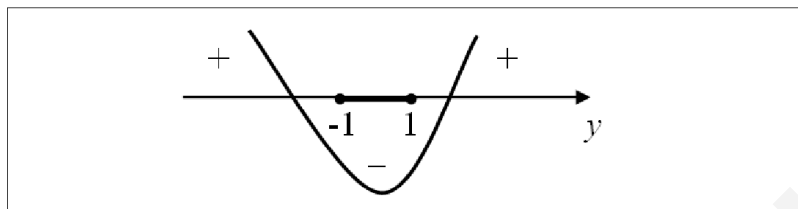
Ответ: $0 < a < 1$.

ПРИМЕР 6. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство $\sin^2 7x + (2a + 1) \sin 7x + a - 5 < 0$ выполняется для любого действительного значения x .

♦ $\sin^2 7x + (2a + 1) \sin 7x + a - 5 < 0$. (1)

Пусть $y = \sin 7x$, причем $E(y) = [-1; 1]$. Тогда неравенство (1) примет вид $y^2 + (2a + 1)y + a - 5 < 0$. (2)

Неравенство (1) будет выполняться для любого x , если для любого $y \in [-1; 1]$ будет выполняться неравенство (2). Это возможно только тогда, когда отрезок $[-1; 1]$ будет расположен между корнями квадратичной функции $f(y) = y^2 + (2a + 1)y + a - 5$.



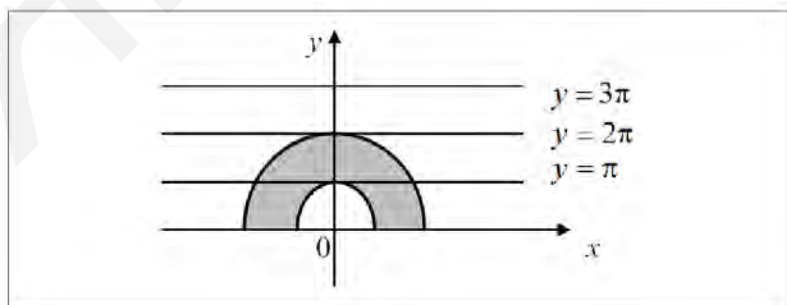
Приведенное расположение параболы задается системой
$$\begin{cases} f(-1) < 0, \\ f(1) < 0. \end{cases}$$

Имеем
$$\begin{cases} 1 - 2a - 1 + a - 5 < 0, \\ 1 + 2a + 1 + a - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -5, \\ a < 1,5. \end{cases}$$

Ответ: $-5 < a < 1,5$.

ПРИМЕР 7. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\operatorname{tg} \sqrt{a - x^2} = 0$ имеет ровно четыре корня.

♦ $\operatorname{tg} \sqrt{a - x^2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a - x^2} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$. На координатной плоскости $(x; y)$ графиком функции $y = \sqrt{a - x^2} = 0$ является полуокружность радиуса $r = \sqrt{a}$, $(a > 0)$, расположенная выше оси Ox (включая точки на оси); уравнение $y = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ задает семейство прямых, параллельных оси Ox .



По графику видим, что эти прямые имеют с полуокружностью ровно четыре общих точки, если $\pi < r < 2\pi$, откуда находим $\pi^2 < a < 4\pi^2$.

Ответ: $\pi^2 < a < 4\pi^2$.

УПРАЖНЕНИЯ

№ 1. Для каждого значения параметра a решите уравнение

а) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2a$;

б) $\sin x + a|\sin x| = 2$;

в) $2 \sin^2 x - 5a \cos x + 3a^2 - 2 = 0$; г) $4 \sin^2 x - 4 \sin x - a^2 - 8 = 0$.

№ 2. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\cos(\sqrt{a^2 - x^2}) = 1$ имеет ровно восемь корней.

№ 3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sin^2 x - (2a - 1) \sin x + a^2 - a - 2 = 0$ не имеет корней.

№ 4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\cos^2 x - (a - 2) \cos x + 4a + 1 = 0$ не имеет корней.

№ 5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\cos^2 x - (2a + 3) \cos x + a^2 + 3a \leq 0$ не имеет решений.

№ 6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ \sin(\pi y + \pi x) = 0 \end{cases}$$
 имеет ровно четыре решения.

№ 7. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $2 \sin^2 x - (2a + 1) \sin x = a + 1$ имеет ровно 9 корней на отрезке $\left[-2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

№ 8. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $5 \cos^2 2x - 10a \cos 2x + 4a^2 = 1$ имеет ровно три корня на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

№ 9. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\cos^2 x + (a^2 - 1) \cos x - 5a + 6 = 0$ имеет два корня на отрезке $[-\pi; 3\pi]$.

№ 10. Для каждого значения параметра a решите неравенство:

а) $\cos ax > -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\sin \frac{x}{a} \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

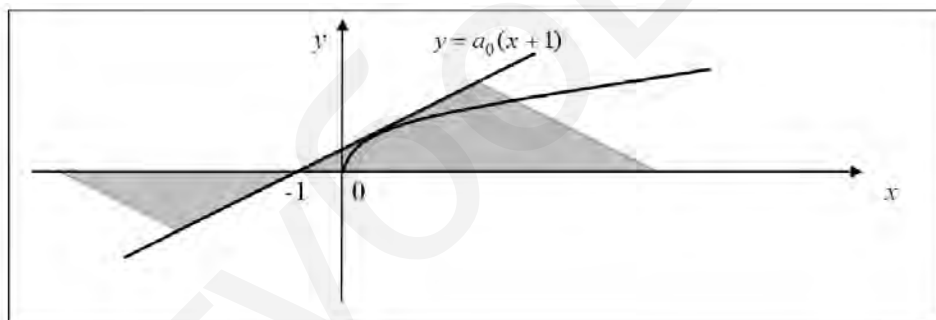
в) $\operatorname{tg}(ax - x) \geq 1$.

§8. Иррациональные уравнения и неравенства, содержащие параметр

ПРИМЕР 1. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a(x+1) = \sqrt{x}$ имеет хотя бы один корень.

♦ Применим графический метод: найдем все значения a , при которых прямая $y = a(x+1)$ имеет хотя бы одну общую точку с графиком функции $y = \sqrt{x}$. Заметим, что для прямой $y = a(x+1)$ параметр a является угловым коэффициентом (при изменении a одна прямая будет переходить в другую с помощью поворота около точки $(-1; 0)$, так как для любого a $y(-1) = 0$).

По графику видим, что искомыми являются прямые, лежащие внутри заштрихованной пары вертикальных углов, включая границы. Им соответствуют значения $a \in [0; a_0]$, где a_0 отвечает моменту касания прямой $y = a(x+1)$ графика функции $y = \sqrt{x}$. (Заметим, что $a_0 > 0$).

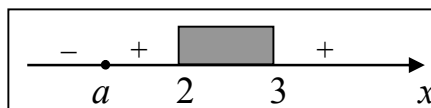


Значение a_0 находим из условия, что уравнение $a_0(x+1) = \sqrt{x}$ имеет ровно один корень. После преобразований получим квадратное уравнение $a_0^2 x^2 + (2a_0^2 - 1)x + a_0^2 = 0$. Дискриминант $D = 1 - 4a_0^2$ обращается в нуль при $a_0 = -0,5$ или $a_0 = 0,5$. Так как $a_0 > 0$, то искомое значение $a_0 = 0,5$.
Ответ: $a \in [0; 0,5]$.

ПРИМЕР 2. Решите неравенство $(x-a)\sqrt{x^2 - 5x + 6} \leq 0$.

♦ Решим это неравенство методом интервалов. Область определения функции $f(x) = (x-a)\sqrt{x^2 - 5x + 6}$ $D(f) = (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$. Нули функции – числа 2; 3 и a , если $a \in D(f)$.

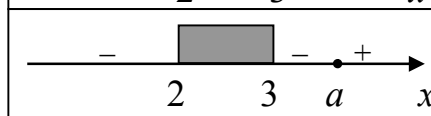
1) Если $a < 2$, то $x \in (-\infty; a] \cup \{2; 3\}$.



2) Если $2 \leq a \leq 3$, то $x \in (-\infty; 2] \cup \{3\}$.



3) Если $a > 3$, то $x \in (-\infty; 2] \cup [3; a]$.



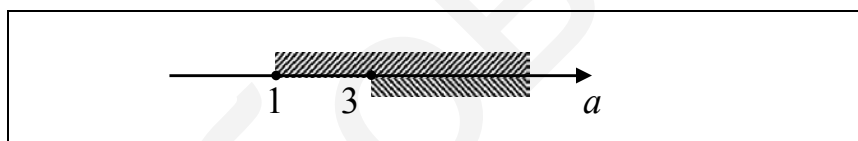
Ответ: при $a < 2$ $x \in (-\infty; a] \cup \{2; 3\}$; при $2 \leq a \leq 3$ $x \in (-\infty; 2] \cup \{3\}$;
при $a > 3$ $x \in (-\infty; 2] \cup [3; a]$.

ПРИМЕР 3. Для каждого a решите уравнение $\sqrt{2x(a-2)+5-a^2} = x-2$.

♦ Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ 2x(a-2)+5-a^2 = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ \begin{cases} x = a-1, \\ x = a+1. \end{cases} \end{cases}$$

$a-1 \geq 2$ при $a \geq 3$; $a+1 \geq 2$ при $a \geq 1$.



Таким образом, видим, что при $a < 1$ корней нет; при $1 \leq a < 3$ уравнение имеет один корень $x = a + 1$; при $a \geq 3$ уравнение имеет два корня $x = a - 1$ и $x = a + 1$.

Ответ: при $a < 1$ корней нет; при $1 \leq a < 3$ $x = a + 1$; при $a \geq 3$ $x = a \pm 1$.

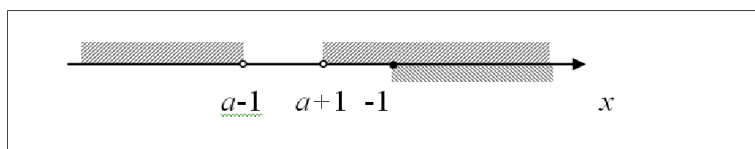
ПРИМЕР 4. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$\sqrt{x+1} < \sqrt{x^2 - 2ax + x + a^2}$ выполняется для любого допустимого x .

♦ Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ x^2 - 2ax + a^2 - 1 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ x \in (-\infty; a-1) \cup (a+1; +\infty). \end{cases}$$

Решением системы будет любое допустимое x ($x \geq -1$) тогда и только тогда, когда $[-1; +\infty) \subset (-\infty; a-1) \cup (a+1; +\infty)$. Выполнение этого условия возможно только при $a+1 < -1$, откуда находим $a < -2$.



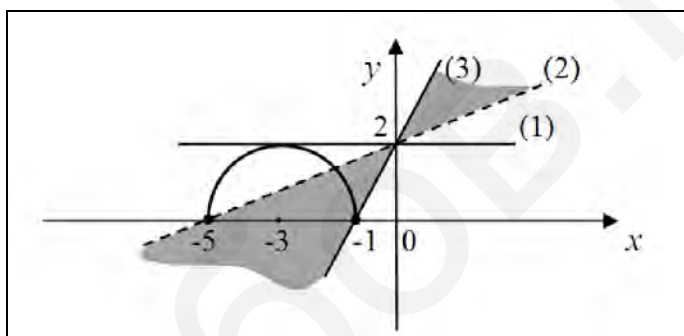
Ответ: $a < -2$.

ПРИМЕР 5. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{-x^2 - 6x - 5} = ax + 2$ имеет ровно один корень.

♦ Данное уравнение приводится к виду $\sqrt{4 - (x + 3)^2} = ax + 2$. Выясним, при каких значениях параметра a прямая $y = ax + 2$ имеет ровно одну общую точку с графиком функции $y = \sqrt{4 - (x + 3)^2}$. Последнее равенство равносильно

системе $\begin{cases} y \geq 0, \\ (x + 3)^2 + y^2 = 4. \end{cases}$ Эта система на координатной плоскости задает

полуокружность (так как $y \geq 0$) с центром в точке $(-3; 0)$ и радиусом 2.



- 1) Приведенное положение прямой, очевидно, соответствует $a=0$.
- 2) Подставив в уравнение прямой $y=ax+2$ точку $(-5; 0)$, находим $a=0,4$.
- 3) Подставив в уравнение прямой $y=ax+2$ точку $(-1; 0)$, находим $a=2$.

По графику видим, что прямая и полуокружность имеют единственную общую точку при $a=0$ или $0,4 < a \leq 2$.

Ответ: $a=0$ или $0,4 < a \leq 2$.

ПРИМЕР 6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{2x^2 + ax + 2a + 10} = x - 1$ не имеет корней.

♦ 1-й способ. Данное уравнение (обозначим его (1)) равносильно системе

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ 2x^2 + ax + 2a + 10 = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x^2 + (a + 2)x + 2a + 9 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

$$(3)$$

Уравнение (1) не имеет корней тогда и только тогда, когда не имеет решений полученная система. Это возможно в двух случаях:

- а) квадратное уравнение (3) не имеет корней;
- б) корни уравнения (3) не удовлетворяют условию (2).

Найдем все значения a , при которых выполним хотя бы один случай:

а) уравнение $x^2 + (a+2)x + 2a+9 = 0$ не имеет корней, если $D < 0$:

$$a^2 - 4a - 32 < 0, \quad a \in (-4; 8);$$

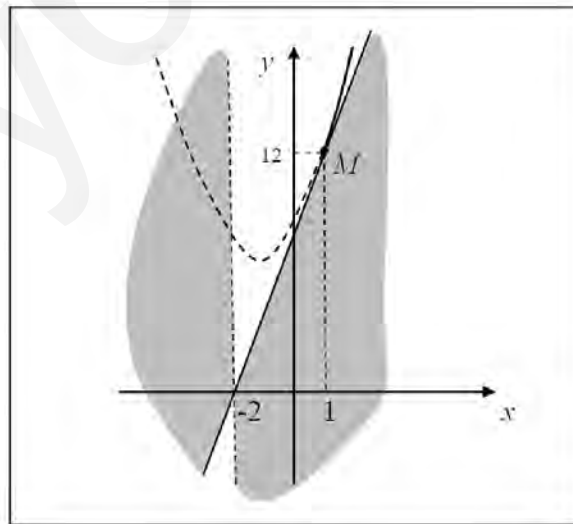
б) корни уравнения $x^2 + (a+2)x + 2a+9 = 0$ меньше 1, если его больший корень меньше 1:

$$\frac{-a-2+\sqrt{a^2-4a-32}}{2} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2-4a-32} < a+4 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-4a-32 \geq 0, \\ a+4 > 0, \\ a^2-4a-32 < (a+4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow a \in [8; +\infty).$$

Объединяя множества значений параметра a , найденные для случаев (а) и (б), получим ответ: $a \in (-4; +\infty)$.

♦ 2-й способ. Рассмотрим графический подход к решению этой задачи.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ 2x^2 + ax + 2a + 10 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x^2 + 2x + 9 = -a(x+2). \end{cases}$$



Найдем все значения a , при которых прямая $y = -a(x+2)$, не имеет общих точек с параболой $y = x^2 + 2x + 9$ на промежутке $[1; +\infty)$. (На рисунке таким прямым соответствует закрашенная часть плоскости).

Для прямой $y = -a(x + 2)$ угловой коэффициент равен $-a$. При $a \leq a_0$ прямая и парабола имеют общие точки на промежутке $[1; +\infty)$. При $a > a_0$ общих точек нет. Значение a_0 найдем из условия, что прямая $y = -a_0(x + 2)$ проходит через точку $M(1; 12)$. Имеем $a_0 = -4$.

Ответ: $a > -4$.

УПРАЖНЕНИЯ

№ 1. Для каждого значения параметра a решите уравнение (неравенство)

- а) $\sqrt{x} = a$; б) $\sqrt{x} > a$; в) $\sqrt{x} \leq a$;
 г) $(x - a)\sqrt{x} = 0$; д) $\sqrt{x} \geq \sqrt{x - a}$; е) $x\sqrt{x - a} = 0$.

№ 2. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{19x^2 - (9a + 2)x + a^2 + 1} = x - 1$ не имеет корней.

№ 3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{a - 2(a + 1)x} = x - 1$ имеет ровно один корень.

№ 4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^4 - 7x^2 - 2(a - 5)x + 2a + 6} = x^2 - 4$ имеет хотя бы один корень.

№ 5. Найдите все значения a , при каждом из которых графики функций $f(x) = \sqrt{15 + 2x - x^2} - 5a$ и $g(x) = ax + 3$ имеют ровно одну общую точку.

№ 6. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{a^2 + a + 3 - 3\cos^2 x - (3a + 2)\sin x} = -\sin x$ не имеет корней.

№ 7. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство $\sqrt{2a \sin x + 1} > \sqrt{\sin^2 x + a^2}$ не имеет решений.

№ 8. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{x + a} = x$ имеет ровно два корня.

№ 9. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{(a + 4)x + a - 8} = x - 1$ имеет два различных корня.

№ 10. Для каждого значения a решите неравенство $(a + x)\sqrt{9 - x^2} \geq 0$.

§9. Показательные уравнения и неравенства, содержащие параметр

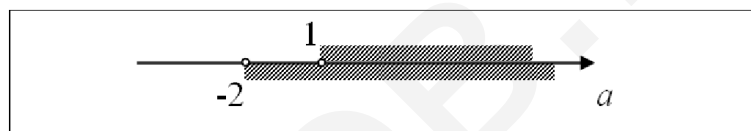
ПРИМЕР 1. Для каждого значения параметра a решите уравнение $25^x - (2a+1) \cdot 5^x + a^2 + a - 2 = 0$.

♦ После замены $y = 5^x$ ($y > 0$) данное уравнение сводится к квадратному

$y^2 - (2a+1) \cdot y + a^2 + a - 2 = 0$, которое равносильно совокупности $\begin{cases} y = a-1, \\ y = a+2. \end{cases}$

Таким образом, имеем $\begin{cases} 5^x = a-1, \\ 5^x = a+2. \end{cases}$ Первое уравнение совокупности имеет

решение при $a > 1$. Его корень $x = \log_5(a-1)$. Второе уравнение совокупности имеет решение при $a > -2$. Его корень $x = \log_5(a+2)$.



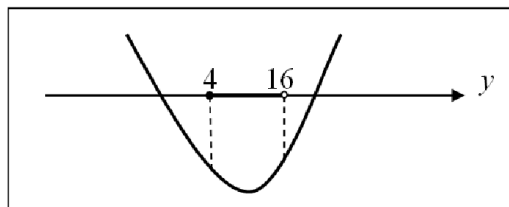
Ответ: при $a \leq -2$ корней нет; при $-2 < a \leq 1$ $x = \log_5(a+2)$;

при $a > 1$ $x = \log_5(a-1)$ и $x = \log_5(a+2)$.

ПРИМЕР 2. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $4^{\sqrt{3x+1}} + (8a-22) \cdot 2^{\sqrt{3x+1}} - 40a + 8 < 0$ выполняется для любого значения x из промежутка $[1; 5)$.

♦ Пусть $y = 2^{\sqrt{3x+1}}$, тогда исходное неравенство (обозначим его (1)) примет вид $y^2 + (8a-22)y - 40a + 8 < 0$ (2). Из условия $1 \leq x < 5$, получим: $4 \leq 3x+1 < 16$, $2 \leq \sqrt{3x+1} < 4$, $4 \leq 2^{\sqrt{3x+1}} < 16$.

Таким образом, исходное неравенство выполняется для любого значения x из промежутка $[1; 5)$, когда для любого значения y из промежутка $[4; 16)$ выполняется квадратное неравенство (2). Последнее требование имеет место лишь в том случае, если меньший корень квадратичной функции $f(y) = y^2 + (8a-22)y - 40a + 8$ меньше 4, а больший корень не меньше 16.



Искомые значения параметра находим из системы $\begin{cases} f(4) < 0, \\ f(16) \leq 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} 16 + 32a - 88 - 40a + 8 < 0, \\ 256 + 128a - 352 - 40a + 8 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -8, \\ a \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -8 < a \leq 1.$$

Ответ: $(-8; 1]$.

ПРИМЕР 3. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство $9^{\cos x} - 2a \cdot 3^{\cos x} + a^2 - 9 \geq 0$ выполняется для любого допустимого значения x .

♦ $9^{\cos x} - 2a \cdot 3^{\cos x} + a^2 - 9 \geq 0$ (1). Пусть $y = 3^{\cos x}$, причем $E(y) = \left[\frac{1}{3}; 3\right]$.

Неравенство (1) примет вид $y^2 - 2ay + a^2 - 9 \geq 0$ (2).

Исходное неравенство выполняется для любого x тогда и только тогда, когда неравенство (2) выполняется для любого $y \in \left[\frac{1}{3}; 3\right]$. Решением квадратного неравенства (2) будут $y \in (-\infty; a-3] \cup [a+3; +\infty)$.

Таким образом, необходимо, чтобы промежуток $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$ целиком содержался во множестве решений неравенства (2). Это достигается, если

$$3 \leq a-3 \text{ или } a+3 \leq \frac{1}{3}, \text{ откуда } a \geq 6 \text{ или } a \leq -\frac{8}{3}.$$

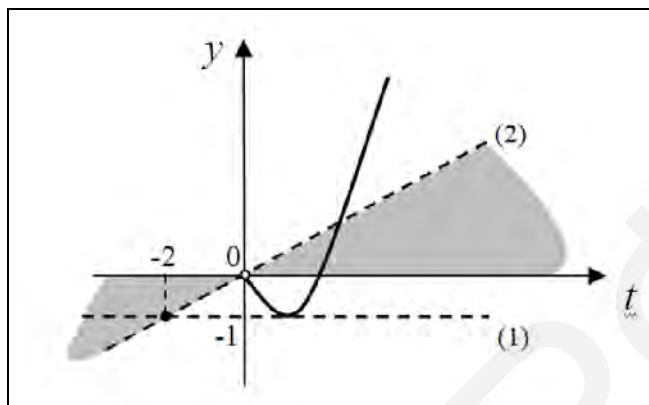
Ответ: $a \leq -\frac{8}{3}$ или $a \geq 6$.

ПРИМЕР 4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $4^x - 2^{x+1} - a \cdot 2^x = 2a - 1$ имеет два различных корня.

♦ Перепишем исходное уравнение в виде $4^x - 2 \cdot 2^x = a \cdot (2^x + 2) - 1$ (1).

Пусть $2^x = t$, $t > 0$. Тогда уравнение примет вид $t^2 - 2t = a(t+2) - 1$ (2).

Уравнение (1) имеет два различных решения, если уравнение (2) имеет два различных положительных корня. Найдем значения параметра a , при каждом из которых прямая $y = a(t + 2) - 1$ имеет ровно две общие точки с частью параболы $y = t^2 - 2t$, где $t > 0$ (закрашенная область).



Положение прямой (1) достигается при $a=0$. Положение прямой (2) определяется ее прохождением через начало координат. В этом случае $0 = a(0 + 2) - 1$, $a=0,5$.

Ответ: $0 < a < 0,5$.

УПРАЖНЕНИЯ

№ 1. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $16^x - 12 \cdot 4^x = a^2 - 2a - 35$ имеет ровно один корень. Укажите этот корень.

№ 2. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $121^x - 3a \cdot 11^x + a^2 - 4 = 0$ имеет ровно два корня.

№ 3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $16^x - 2a \cdot 4^x - a + 20 = 0$ не имеет корней.

№ 4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $4^{|x-1|} + (a-1) \cdot 2^{|x-1|} - 2a - 1 = 0$ не имеет корней.

№ 5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $9^{4x-x^2-3} - 2a \cdot 3^{4x-x^2-3} + a^2 - 1 = 0$ имеет хотя бы один корень.

№ 6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{(4a+1) \cdot 9^x - 2(a+2) \cdot 3^x + 3a - 2} = 2 - 3^x$ имеет ровно два корня.

№ 7. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $25^{|\sin x|} - 2a \cdot 5^{|\sin x|} + a^2 - 4 > 0$ имеет хотя бы одно решение.

№ 8. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $4^{|x-1|} + (a-1) \cdot 2^{|x-1|} - 2a - 1 > 0$ выполняется для всех x , удовлетворяющих условию $|x-1| \geq 2$.

№ 9. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $a \cdot 9^x + 4(a+1) \cdot 3^x + a+1 > 0$ верно при любом значении x .

№ 10. Для каждого значения параметра a решите неравенство $4^x - (2a+1) \cdot 2^x + a^2 + a < 0$.

§10. Логарифмические уравнения и неравенства, содержащие параметр

ПРИМЕР 1. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\log_8(x^2 - 1) = \log_8(2ax - a^2)$.

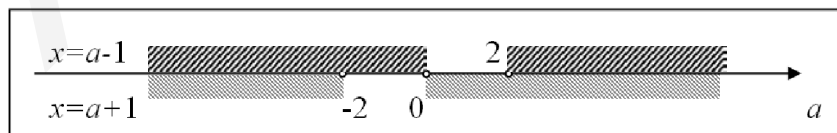
♦ Данное уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 2ax - a^2, \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0, \\ x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a-1, \\ x = a+1, \\ x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty). \end{cases}$$

$x = a - 1$ удовлетворяет условию $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, если

$a \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$; $x = a + 1$ удовлетворяет условию

$x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, если $a \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$.



Итак, видим, что при $a < -2$ и $a > 2$ уравнение имеет два корня: $x = a - 1$, $x = a + 1$; при $-2 \leq a < 0$ уравнение имеет один корень $x = a - 1$; при $a = 0$ корней нет; при $0 < a \leq 2$ уравнение имеет один корень $x = a + 1$.

Ответ: при $a < -2$ и $a > 2$ $x = a - 1$ или $x = a + 1$;

при $-2 \leq a < 0$ $x = a - 1$; при $0 < a \leq 2$ $x = a + 1$; при $a = 0$ корней нет.

ПРИМЕР 2. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых

система уравнений $\begin{cases} \log_3(x + |x|) = \log_3 y, \\ x^2 - ay + 6a - 8 = 0 \end{cases}$ имеет два различных решения.

♦ Из условия существования логарифма следует: что $x + |x| > 0$, что выполнимо только при $x > 0$. Тогда, имеем:

$$\begin{cases} x > 0, \\ \log_3 2x = \log_3 y, \\ x^2 - ay + 6a - 8 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ 2x = y, \\ x^2 - ay + 6a - 8 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ 2x = y, \\ x^2 - 2ax + 6a - 8 = 0. \end{cases}$$

Исходная система имеет два решения, если квадратное уравнение $x^2 - 2ax + 6a - 8 = 0$ имеет два различных положительных корня.

Пусть x_1 и x_2 – различные корни этого уравнения, причем $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$;

По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = 6a - 8$; $x_1 + x_2 = 2a$. Кроме того, $D_1 = a^2 - (6a - 8)$.

Условие задачи выполняется, если

$$\begin{cases} D_1 > 0, \\ x_1 \cdot x_2 > 0, \\ x_1 + x_2 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 - 6a + 8 > 0, \\ 6a - 8 > 0, \\ 2a > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty), \\ a \in \left(\frac{4}{3}; +\infty\right), \\ a \in (0; +\infty); \end{cases} \quad a \in \left(\frac{4}{3}; 2\right) \cup (4; +\infty).$$

Ответ: $a \in \left(\frac{4}{3}; 2\right) \cup (4; +\infty)$.

ПРИМЕР 3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\lg(12x - x^2 - 32) = \lg(ax - 7)$ имеет ровно один корень.

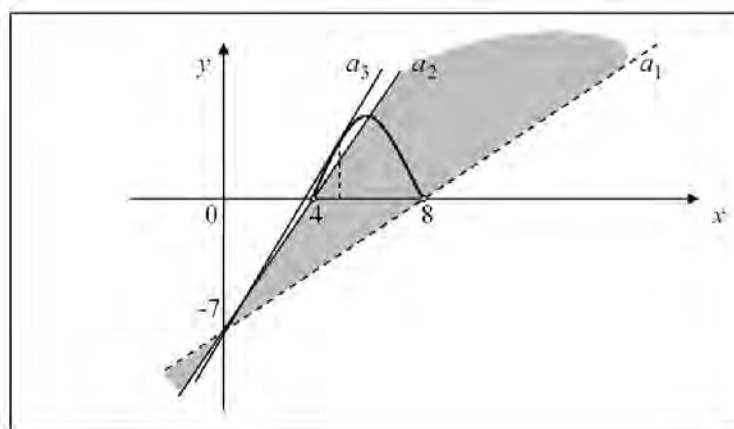
♦ Уравнение $\lg(12x - x^2 - 32) = \lg(ax - 7)$ равносильно системе

$$\begin{cases} 12x - x^2 - 32 > 0, \\ 12x - x^2 - 32 = ax - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 < x < 8, \\ 12x - x^2 - 32 = ax - 7. \end{cases}$$

Дальше решение проведем графическим способом: найдем все значения параметра a , при которых прямая $y = ax - 7$ имеет ровно одну общую точку с графиком функции $y = -x^2 + 12x - 32$ на интервале $(4; 8)$.

Видим, что искомые значения параметра $a \in (a_1; a_2] \cup \{a_3\}$.

Значение a_1 находим из уравнения $0 = 8a_1 - 7$; $a_1 = \frac{7}{8}$.



Значение a_2 находим из уравнения $0 = 4a_2 - 7$; $a_2 = \frac{7}{4}$.

Значение a_3 соответствует моменту касания прямой $y = ax - 7$ графика функции $y = -x^2 + 12x - 32$. Для нахождения a_3 необходимо потребовать, чтобы уравнение $-x^2 + 12x - 32 = a_3 \cdot x - 7$ имело ровно один корень.

Имеем $x^2 - (a_3 - 12)x + 25 = 0$; $D = 0$ при $a_3 = 2$ или $a_3 = 22$.

Если $a_3 = 22$, то $x = -5$, что не удовлетворяет условию $4 < x < 8$.

Если $a_3 = 2$, то $x = 5$. Это значение удовлетворяет условию $4 < x < 8$.

Ответ: $a \in \left(\frac{7}{8}; \frac{7}{4}\right] \cup \{2\}$.

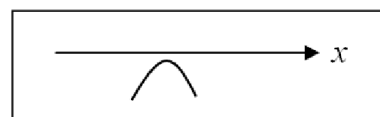
ПРИМЕР 4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\lg(ax^2 + 4x + a) \geq \lg(5x^2 + 5)$ не имеет решений.

♦ Исходное неравенство равносильно неравенству $ax^2 + 4x + a \geq 5x^2 + 5$, откуда $(a - 5)x^2 + 4x + a - 5 \geq 0$.

Если $a = 5$, то решением неравенства является любое $x \geq 0$.

Если $a \neq 5$, то последнее неравенство не имеет решений тогда и только

тогда, когда выполняется система $\begin{cases} a - 5 < 0, \\ D < 0. \end{cases}$



$D_1 = 4 - (a - 5)^2 = -(a - 7)(a - 3)$. Таким образом, получим систему

$$\begin{cases} a - 5 < 0, \\ -(a - 7)(a - 3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 5, \\ a \in (-\infty; 3) \cup (7; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow a < 3.$$

Ответ: $a < 3$.

ПРИМЕР 5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\log_7(21a + 59 - a^2 + \sin 2x + \sqrt{\sin^2 2x}) = \log_7(3a + 5) + 1$ имеет ровно три корня на промежутке $\left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{13\pi}{12}\right]$.

$$\diamond \log_7(21a + 59 - a^2 + \sin 2x + \sqrt{\sin^2 2x}) = \log_7(3a + 5) + 1 \Leftrightarrow$$

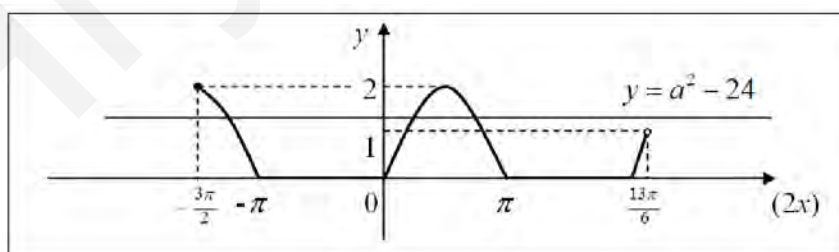
$$\Leftrightarrow \log_7(21a + 59 - a^2 + \sin 2x + \sqrt{\sin^2 2x}) = \log_7(21a + 35) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 21a + 35 > 0, \\ 21a + 59 - a^2 + \sin 2x + \sqrt{\sin^2 2x} = 21a + 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -\frac{5}{3}, \\ \sin 2x + |\sin 2x| = a^2 - 24. \end{cases}$$

Дальше определим графически, при каких значениях параметра a прямая $y = a^2 - 24$ $\left(a > -\frac{5}{3}\right)$ имеет ровно три общих точки с графиком функции $y = \sin 2x + |\sin 2x|$ на промежутке $\left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{13\pi}{12}\right]$.

Для построения графика функции $y = \sin 2x + |\sin 2x|$ раскроем модуль: $y = \begin{cases} 2 \sin 2x, & \text{если } \sin 2x \geq 0; \\ 0, & \text{если } \sin 2x < 0. \end{cases}$

Построим график этой функции в системе координат $(2x; y)$. В этом случае $(2x) \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{13\pi}{6}\right]$.



Видим, что искомые значения параметра удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a > -\frac{5}{3}, \\ 1 \leq a^2 - 24 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -\frac{5}{3}, \\ a \in (-\sqrt{26}; -5] \cup [5; \sqrt{26}) \end{cases} \Leftrightarrow a \in [5; \sqrt{26}).$$

Ответ: $a \in [5; \sqrt{26})$.

УПРАЖНЕНИЯ

- № 1.** Для каждого значения a решите неравенство $\log_{3-a}(x+a) \geq 0$.
- № 2.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\log_{2a+1}(4 \sin x + 5 + 4a) = 2$ имеет 5 корней на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 4\pi\right]$.
- № 3.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\lg(4x^2 - 6ax - x - 8a^2 + 12) = \lg(x+4) + \lg(3-x)$ имеет ровно 2 корня.
- № 4.** Найдите все значения параметра a , для которых при каждом x из промежутка $[3; 9)$ значение выражения $\log_3^2 x - 7$ не равно значению выражения $(a-4) \cdot \log_3 x$.
- № 5.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\lg(3x - x^2) = \lg(3x - 2ax + a^2 - 1)$ имеет ровно один корень.
- № 6.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \log_2\left(3 - \frac{|x|}{x}\right), \\ y - |x| = a \end{cases}$$
 имеет ровно одно решение.
- № 7.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} \log_4\left(-\frac{x}{|x|}\right) = y - 2x, \\ x^2 - ay - 7a - 12 = 0 \end{cases}$$
 имеет два различных решения.
- № 8.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\lg(3x - x^2) \leq \lg(3x - 2ax + a^2 - 4)$ имеет хотя бы одно решение.
- № 9.** Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\log_{0,5}(4x - x^2) \geq \log_{0,5}(4x + ax + 3a)$ не имеет решений.
- № 10.** Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\log_x(4^x - 6 \cdot 2^x - a) = 0$ имеет ровно один корень, удовлетворяющий неравенству $|x-1| \leq 1$.

§11. Свойства функций в задачах с параметром

ПРИМЕР 1. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $3^{x^2+x} + \sqrt[3]{x^2+x} = 3^{a-x} + \sqrt[3]{a-x}$ имеет ровно один корень.

♦ Рассмотрим функцию $f(t) = 3^t + \sqrt[3]{t}$. Эта функция возрастает на $\mathbb{R}$ (как сумма двух возрастающих функций). Исходное уравнение имеет вид $f(x^2+x) = f(a-x)$. Оно будет равносильно уравнению $x^2+x = a-x$.

Ясно, что требование задачи выполняется, когда дискриминант квадратного уравнения $x^2+2x-a=0$ равен нулю. $D_1 = 1+a$; $D_1 = 0$ при $a=-1$.
Ответ: -1 .

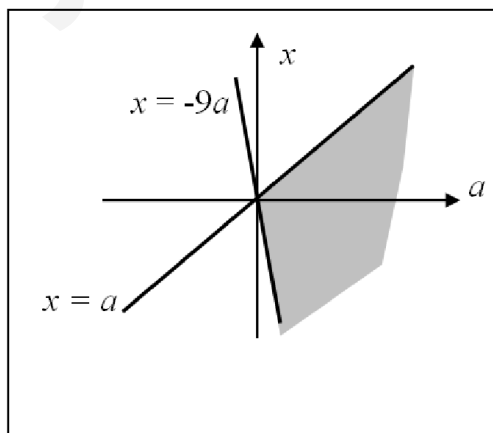
ПРИМЕР 2. Решите неравенство $\sqrt{x+9a} - \sqrt{10a} \leq a-x$.

♦ Перепишем неравенство в виде $\sqrt{x+9a} + x \leq \sqrt{a+9a} + a$ (1).

Так как функция $f(t) = \sqrt{t+9a} + t$ возрастает на всей своей области определения $D(f) = [-9a; +\infty)$, то неравенство (1) равносильно системе

$$\begin{cases} x \leq a, \\ x \geq -9a \end{cases}$$
. Найдём решение полученной системы с помощью координат-

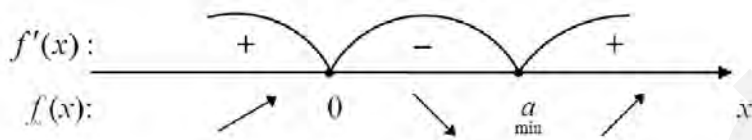
ной плоскости Oax . Все решения системы задают на координатной плоскости Oax один из четырёх углов, полученных при пересечении прямых $x = a$ и $x = -9a$.



Видим, что при $a < 0$ решений нет; при $a = 0$ $x = 0$; при $a > 0$ $x \in [-9a; a]$.
Ответ: при $a < 0$ решений нет; при $a = 0$ $x = 0$; при $a > 0$ $x \in [-9a; a]$.

ПРИМЕР 3. Найдите все положительные значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 5$ на отрезке $[1; 3]$ не меньше, чем -3 .

♦ I способ. (Аналитический). $f'(x) = 6x^2 - 6ax$. Из уравнения $6x^2 - 6ax = 0$ находим критические точки функции: $x=0$ или $x=a$. Во-первых, заметим, что $0 \notin [1; 3]$. Во-вторых, $x=a$ ($a > 0$) – точка минимума функции (рис.).



I. Если $a \in [1; 3]$, то наименьшее значение функция принимает в точке a . Следовательно, должно выполняться неравенство $f(a) \geq -3$: $2a^3 - 3a^3 + 5 \geq -3$, откуда $a \leq 2$. Таким образом, этому случаю удовлетворяют все $a \in [1; 2]$.

II. Если $a \notin [1; 3]$, т.е. $a \in (0; 1) \cup (3; +\infty)$, то наименьшее значение функция принимает либо в точке $x=1$, либо в точке $x=3$. Независимо от того, какая это точка, должна выполняться система неравенств
$$\begin{cases} f(1) \geq -3, \\ f(3) \geq -3. \end{cases}$$

Имеем
$$\begin{cases} 2 - 3a + 5 \geq -3, \\ 54 - 27a + 5 \geq -3; \end{cases} \quad \begin{cases} a \leq \frac{10}{3}, \\ a \leq \frac{62}{7}; \end{cases} \quad a \leq \frac{62}{7}. \quad \text{С учетом условия } a \in (0; 1).$$

Объединяя решения из пунктов (I) и (II), получим $a \in (0; 2]$.

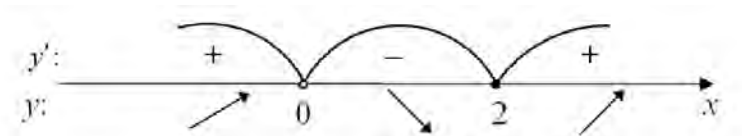
II способ. (Графический). Так как наименьшее значение функции на отрезке $[1; 3]$, не меньше, чем -3 , то значения функции во всех точках отрезка также не меньше, чем -3 . Следовательно, неравенство $2x^3 - 3ax^2 + 5 \geq -3$ должно выполняться для любого $x \in [1; 3]$. Полученное неравенство пере-

пишем в виде $2x^3 + 8 \geq 3ax^2$, откуда $\frac{2x}{3} + \frac{8}{3x^2} \geq a$.

Выясним, при каких значениях a прямая $y=a$ будет располагаться не выше графика функции $y = \frac{2x}{3} + \frac{8}{3x^2}$, построенного на отрезке $[1; 3]$.

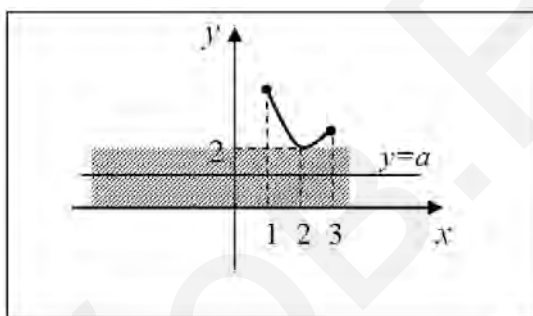
Проведем исследование функции $y = \frac{2x}{3} + \frac{8}{3x^2}$ с помощью производной:

$$y' = \frac{2}{3} - \frac{16}{3x^3} = \frac{2(x^3 - 8)}{3x^3}. \quad y' = 0 \text{ при } x=2. \quad y(1) = \frac{10}{3}, \quad y(2) = 2, \quad y(3) = \frac{62}{27}.$$



Далее изобразим график функции $y = \frac{2x}{3} + \frac{8}{3x^2}$ на отрезке $[1; 3]$.

По графику видим, что требованию удовлетворяет любая прямая $y=a$, для которой $a \in (0; 2]$.



Ответ: $a \in (0; 2]$.

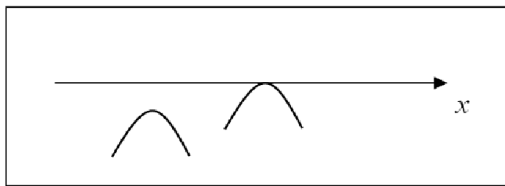
Замечания. 1) Любые другие графические интерпретации, такие как $2x^3 + 8 \geq 3ax^2$ или $x^3 \geq \frac{3a}{2}x^2 - 4$, были бы весьма неудачны. В них пришлось бы рассматривать взаимное расположение обычной параболы и кубической. Не намного лучше выглядит графическая интерпретация вида $2x^2 + \frac{8}{x} \geq 3ax$. В этом случае пришлось бы выяснять, при каком значении a прямая $y = 3ax$ является касательной к графику функции $y = 2x^2 + \frac{8}{x}$.

2) Сравнивая оба способа решения (аналитический и графический), можно констатировать, что в данной ситуации предпочтительнее выглядит первый.

ПРИМЕР 4. Найдите все значения a , при каждом из которых функция $f(x) = ax^3 - 30x^2 + 3ax - 1$ будет убывающей на всей области определения.

♦ $f'(x) = 3ax^2 - 60x + 3a$. Функция будет убывающей, если для любого x выполняется условие $f'(x) \leq 0$: $3ax^2 - 60x + 3a \leq 0$, $ax^2 - 20x + a \leq 0$.

Последнее неравенство будет верно при любом значении x , если $\begin{cases} a < 0, \\ D \leq 0. \end{cases}$



Имеем $\begin{cases} a < 0, \\ 100 - a^2 \leq 0, \end{cases} \quad a \leq -10.$

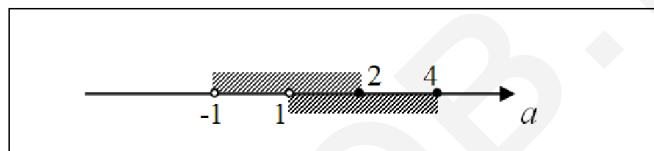
Ответ: $a \leq -10.$

ПРИМЕР 5. Найдите все значения a , при каждом из которых функция $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - 3x + 1$ имеет ровно один экстремум на промежутке $(0; 3]$.

♦ $f'(x) = 3x^2 - 6ax + 3a^2 - 3$. $f'(x) = 0$ при $x = a - 1$ или $x = a + 1$. Очевидно, что обе найденные точки будут являться точками экстремума данной функции.

Выясним, при каких значениях a только одна из них попадает в промежуток $(0; 3]$.

1) $0 < a - 1 \leq 3$, $1 < a \leq 4$. 2) $0 < a + 1 \leq 3$, $-1 < a \leq 2$.

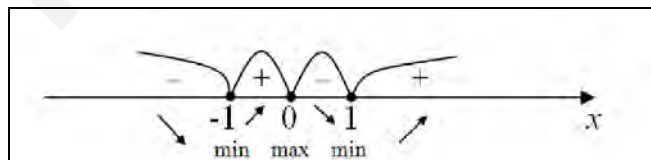


Видим, что искомые значения $-1 < a \leq 1$, $2 < a \leq 4$ (одна штриховка).

Ответ: $-1 < a \leq 1$, $2 < a \leq 4$.

ПРИМЕР 6. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $3x^4 - 6x^2 - a = 0$ имеет ровно один корень на промежутке $(-1; 2)$.

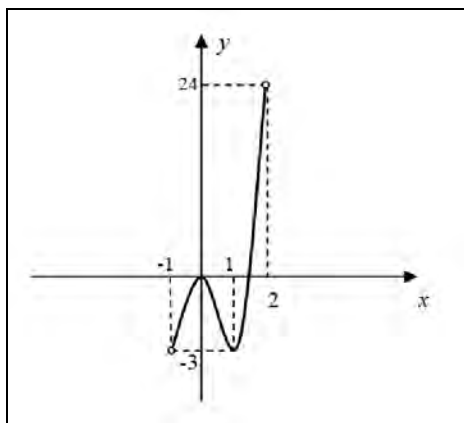
♦ Приведем уравнение к виду $3x^4 - 6x^2 = a$. Исследуем функцию $y = 3x^4 - 6x^2$. $y' = 12x^3 - 12x$; $y' = 0$ при $x = 0$ или $x = \pm 1$. При этом $y(0) = 0$, $y(-1) = -3$, $y(1) = -3$



На координатной плоскости изобразим график функции $y = 3x^4 - 6x^2$, где $x \in (-1; 2)$. Заметим, что $y(2) = 24$.

По графику видим, что уравнение $3x^4 - 6x^2 = a$ имеет ровно один корень при $a = -3$ или $0 < a < 24$.

Ответ: $a = -3$, $0 < a < 24$.



УПРАЖНЕНИЯ

№ 1. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(0,1)^{x^2-x} - \sqrt[5]{x^2-x} = 10^{2x-a} + \sqrt[5]{2x-a}$ не имеет корней.

№ 2. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\cos(x^2 + a) - \cos ax = ax - x^2 - a$ имеет единственный корень.

№ 3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $6\sin^3 x = a - 5\cos 2x$ не имеет корней.

№ 4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $2x^3 + 1 = 3x^2 + a$ имеет два различных действительных корня.

№ 5. Решите неравенство $\sqrt{x-5a} - \sqrt{-4a} \leq 4a - 4x$.

№ 6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = x^2 - 4ax + 5a^2$ на отрезке, заданном неравенством $|x| \leq 6$, больше 8.

№ 7. Найдите все значения a , при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = -x^2 + 2ax - a^2 + 2a$ на отрезке $[-3; 1]$ не превосходит -5 .

№ 8. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых функция $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3ax - 2$ будет возрастающей на всей области определения.

№ 9. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых функция $f(x) = x^3 - 12x - 2$ имеет ровно один экстремум на промежутке $(a-5; a]$.

№ 10. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых функция $f(x) = x^3 + ax^2 - ax$ не имеет экстремумов.

Ответы

§ 1

№1. б) при $a=0$ и $a=1$ числа равны; при $a<0$ и $a>1$ первое число меньше; при $0<a<1$ первое число больше.

№2. б) при $a=2$ решений нет; при $a=-2$ $x \in R$; при $a \neq \pm 2$ $x = \frac{a+1}{a-2}$;

г) при $a=-2$ и $a=0$ решений нет; при $a=2$ $x \in R$; при $a \neq \pm 2, a \neq 0$ $x = \frac{a+1}{a+2}$;

е) при $a<3$ решений нет; при $a=3$ $x=-1$; при $a>3$ $x=2-a$ или $x=a-4$;

з) при $a<-2$ решений нет; при $a=-2$ $x=0$; при $-2<a<2$ $x=\pm(a+2)$; при $a=2$ $x=\pm 4$ или $x=0$; при $a>2$ $x=\pm(a+2)$ или $x=\pm(a-2)$.

№3. б) при $a=1$ $x \in R$; при $a<1$ $x \geq \frac{3}{a-1}$; при $a>1$ $x \leq \frac{3}{a-1}$; г) при $a=0$

решений нет; при $a=3$ $x \in R$; при $0<a<3$ $x \geq \frac{a+2}{a-3}$; при $a<0$ и $a>3$ $x \leq \frac{a+2}{a-3}$;

е) при $a=0$ решений нет; при $a>0$ $x>a$; при $a<0$ $x<a$; з) при $a=\pm 2$ решений нет; при $a=0$ $x \in R$; при $a<-2$ и $0<a<2$ $x < \frac{a^2+4}{a}$; при $-2<a<0$ и $a>2$ $x > \frac{a^2+4}{a}$.

№4. в) при $a=-1, b \leq 1$ $x \in R$; при $a=-1, b>1$ решений нет; при $a<-1$ $x \leq \frac{b-1}{a+1}$;

при $a>-1$ $x \geq \frac{b-1}{a+1}$; г) при $a=b=0$ $x \in R$; при $a \neq 0$ или $b \neq 0$ $x=b^2-a^2$.

№5. б) при $a=2$ решений нет; при $a=-2$ бесконечно много решений вида $(t; 2+2t)$, где $t \in R$; при $a \neq -2$ и $a \neq 2$ одно решение $\left(\frac{2}{a-2}; \frac{4}{2-a}\right)$.

№6. При $a<-1$ $x = \frac{2-4a}{a-1}$, $x = -\frac{2+4a}{a+1}$. **№7.** $(-1; 1]$. **№8.** $a \geq 1$. **№9.** $a \leq -1$.

№10. При $a<0$ корней нет; при $a=0$ $x=0$; при $a>0$ $0 \leq x \leq a$.

§ 2

№1. б) при $a=2$ $x=2$; при $a=3$ $x=3$; при $2<a<3$ решений нет; при $a<2$

и $a>3$ $x = a \pm \sqrt{a^2-5a+6}$; г) при $a=\frac{4}{3}$ $x=2$; при $a=-\frac{4}{3}$ $x=-2$; при

$-\frac{4}{3}<a<\frac{4}{3}$ решений нет; при $a<-\frac{4}{3}$ и $a>\frac{4}{3}$ $x = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2-16}}{2}$;

е) при $a=0$ $x=-0,5$; при $a=1$ $x=-1$; при $a>1$ решений нет; при $a<0$ и $0<a<1$ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{a}$.

№2. а) при $a=1$ и $a=0,2$ один корень; при $a<0,2$ корней нет; при $0,2<a<1$ и $a>1$ два корня.

№3. б) при $a<4$ $x \in (-\infty; a-2) \cup (6-a; +\infty)$; при $a=4$ $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; при $a>4$ $x \in (-\infty; 6-a) \cup (a-2; +\infty)$;

г) при $a=0$ $x<-1$; при $0<a<\frac{1}{4}$ $x \in \left(\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a}; \frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a} \right)$; при $a<0$ $x \in \left(-\infty; \frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a} \right) \cup \left(\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a}; +\infty \right)$; при $a \geq \frac{1}{4}$ решений нет;

е) при $a=0$ решений нет; при $a>0$ $x \in (-\infty; a) \cup (a+1; +\infty)$; при $a<0$ $x \in (a; a+1)$.

№4. а) $a<-1$; б) $0<a \leq 1$, $a = \frac{5}{4}$, $3 \leq a < 10$; в) $a=3$; г) $a < \frac{5-2\sqrt{7}}{3}$; д) $a \leq -1$.

№5. при $a<-2$ решений нет; при $a=-2$ $x=0$; при $-2<a<2$ $x = \pm(a+2)$; при $a=2$ $x = \pm 4$ или $x=0$; при $a>2$ $x = \pm(a+2)$ или $x = \pm(a-2)$.

§ 3

№1. при $a=-5$ числа равны; при $a<-5$ и $-1<a<1$ первое число меньше; при $-5<a<-1$ и $a>1$ первое число больше.

№2. а) при $a=0$ и $a=1$ решений нет; при $a \neq 0$, $a \neq 1$ $x=a-1$; б) при $a=-1$ решений нет; при $a \neq -1$ $x=-a$; в) при $a=1$ решений нет; при $a \neq 1$ $x=a$;

г) при $a=-1$ и $a=0$ решений нет; при $a \neq -1$, $a \neq 0$ $x = \frac{a}{a+1}$; д) при

$a = \pm 1$ решений нет; при $a=0$ $x=0$; при $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; при $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; при $a \neq \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, $a \neq \pm 1$, $a \neq 0$ $x=a$, $x = \frac{1}{a} - a$; е) при $a=2$ $x=1$; при

$a=-2$ $x=-1$; при $a=6$ $x=7$; при $a \neq \pm 2$, $a \neq 6$ $x=a+1$, $x=\frac{a}{2}$; ж) при $a=3$ решений нет; при $a=1$ $x=1$; при $a=-3$ $x=9$; при $a=0$ $x=0$; при $a \notin \{\pm 3; 0; 1\}$ $x=a$, $x=3-2a$; з) при $a=-3$ $x=-6$; при $a=2,5$ $x=-0,5$; при $a=-2,5$ $x=-5,5$; при $a=8$ $x=16$; при $a=-2$ $x=-4$; при $a \notin \{\pm 2,5; -3; -2; 8\}$ $x=2a$, $x=a-3$.

№3. а) при $a=0$ решений нет; при $a>0$ $0 < x \leq a$; при $a<0$ $a \leq x < 0$;

б) при $a=0$ решений нет; при $a < 0$ $x \in (-1; 0) \cup (-a; +\infty)$; при $0 < a < 1$ $x \in (-\infty; -1) \cup (-a; 0)$; при $a \geq 1$ $x \in (-\infty; -a) \cup (-1; 0)$;

в) при $a < -1$ и $a > 1$ $x \in (-1; 1) \cup \{a\}$; при $-1 \leq a \leq 1$ $x \in (-1; 1)$.

г) при $a=0$ $x < 0$; при $a > 0$ $x \in (-\infty; 0) \cup [\frac{1}{a}; +\infty)$; при $a < 0$ $x \in [\frac{1}{a}; 0)$;

д) при $a=-4$ решений нет; при $a > -4$ $-8 \leq x < 2a$; при $a < -4$ $2a < x \leq -8$;

е) при $a < 0$ $3a < x < 0$, $x \geq 12$; при $a=0$ $x \geq 12$; при $0 < a < 4$ $0 < x < 3a$, $x \geq 12$; при $a=4$ $0 < x < 12$, $x > 12$; при $a > 4$ $0 < x \leq 12$, $x > 3a$.

§ 4

№1. $\left(-\frac{4}{3}; -1\right) \cup \left(\frac{4}{5}; 1\right)$. **№2.** $(-\infty; -15) \cup (-3; 9)$. **№3.** 0. **№4.** (1; 5).

№5. (-3; 5). **№6.** $a \geq 9$. **№7.** 3. **№8.** -4. **№9.** $a > 3$. **№10.** $a < -3$.

№11. $[-7; -6) \cup (2; 3]$. **№12.** $(-2; -1] \cup [4; 5)$. **№13.** $(0; 1) \cup (1; 1,2)$.

№14. -7; $-\frac{109}{7}$. **№15.** $-\frac{20}{7}$; $-\frac{20}{13}$.

§ 5

№1. $\left[-\frac{1}{2}; 0\right] \cup [4; +\infty)$. **№2.** [1; 3). **№3.** $a < -2$. **№4.** $a > \frac{10}{7}$.

№5. $\left[-2; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right]$. **№6.** $\left[-\frac{16}{7}; -2\right)$. **№7.** $a \geq 2$. **№8.** $a \geq 9$.

№9. $a \geq \frac{1}{3}$. **№10.** $a=-1$. **№11.** $\left(\frac{7}{4}; 2\right]$. **№12.** $(-4; -2] \cup \{-0,5\} \cup [1; 3)$.

№13. $(-\infty; -4] \cup [0; \frac{4}{3})$. **№14.** $(-\frac{4}{3}; 0] \cup [4; +\infty)$. **№15.** $(-\infty; -1] \cup [6; +\infty)$.

§6

№1. $(0; 3)$. **№2. а)** при $a > 1$ корней нет; при $a = 1$ и $a < 0$ два корня; при $a = 0$ три корня; при $0 < a < 1$ четыре корня; **б)** при $a < -2$ корней нет; при $a = -2$ один корень; при $-2 < a < 2$ два корня; при $a = 2$ три корня; при $a > 2$ четыре корня. **№3.** $[-1; 1)$. **№4.** $a=4$. **№5.** $a=3$ или $a=2+\sqrt{41}$. **№6.** $a=3$ или $a=-\frac{11}{3}$. **№7.** $-22 < a < -\frac{2}{3}$. **№8.** $\frac{5}{6} < a < \frac{3}{2}$. **№9.** $\left(\frac{1}{3}; \frac{3}{5}\right)$. **№10.** $(-1; 0) \cup \left(0; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; 4\right)$. **№11.** $a = -4\sqrt{2}$ или $-3 < a < 3$. **№12.** $[1-\sqrt{5}; 0) \cup [2; 1+\sqrt{5}]$. **№13.** $-1, 5$. **№14.** $a=1$ или $a=-\sqrt{10}$. **№15.** $(1; 2]$. **№16.** $a=0$ или $a=2, 25$. **№17.** $\left(-\frac{17}{8}; 1\right)$. **№18.** $(0, 75; 2)$. **№19.** $(1, 5; 6+2\sqrt{5})$. **№20.** $(-\infty; -12-2\sqrt{30}) \cup (-0, 5; +\infty)$.

§ 7

№1. б) при $a < 1$ корней нет; при $1 \leq a < 3$ $x = (-1)^n \arcsin \frac{2}{a+1} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
при $a \geq 3$ $x = (-1)^n \arcsin \frac{2}{a+1} + \pi n$, $x = (-1)^n \arcsin \frac{2}{1-a} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
г) при $a=0$ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, при $a \neq 0$ корней нет.
№2. $-8\pi < a < -6\pi$, $6\pi < a < 8\pi$. **№3.** $a < -2$, $0 < a < 1$, $a > 3$. **№4.** $a < -\frac{4}{3}$, $a > 0$.
№5. $a < -4$, $a > 1$. **№6.** $a=0, 5$. **№7.** $-1 \leq a < 0$. **№8.** $a=2$. **№9.** $a=2$, $a=3$.
№10. в) При $a > 1$ $\frac{1}{a-1} \left(\frac{\pi}{4} + \pi n \right) \leq x < \frac{1}{a-1} \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right)$, $n \in \mathbb{Z}$;
при $a < 1$ $\frac{1}{a-1} \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right) < x \leq \frac{1}{a-1} \left(\frac{\pi}{4} + \pi n \right)$, $n \in \mathbb{Z}$; при $a=1$ решений нет.

§ 8

№1. а) при $a < 0$ решений нет; при $a \geq 0$ $x = a^2$; **б)** при $a < 0$ $x \geq 0$;
при $a \geq 0$ $x > a^2$; **в)** при $a < 0$ решений нет; при $a \geq 0$ $x \in [0; a^2]$;

г) при $a > 0$ $x=a$, $x=0$; при $a \leq 0$ $x=0$; д) при $a < 0$ решений нет; при $a \geq 0$ $x \geq a$; е) при $a < 0$ $x=a$, $x=0$; при $a \geq 0$ $x=a$.

№2. $a < 3$. №3. $a < -2$, $a = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. №4. $a \leq \frac{13}{3}$, $a \geq 7$. №5. $a=0$, $-2 \leq a < -0,4$.

№6. $a < -2$, $a > 0$. №7. $a \leq -2$, $a \geq 2$. №8. $-0,25 < a \leq 0$. №9. $0 < a \leq 2$.

№10. При $a \geq 3$ $-3 \leq x \leq 3$; при $-3 < a < 3$ $x = -3$, $-a \leq x \leq 3$; при $a \leq -3$ $x = \pm 3$.

§ 9

№1. $a \leq -5$, $a = 1$, $a \geq 7$. При $a \leq -5$ $x = \log_4(7-a)$; при $a=1$ $x = \log_4 6$; при $a \geq 7$ $x = \log_4(5+a)$. №2. $a > 2$. №3. $a < 4$. №4. $-5 < a < -1$.

№5. $-1 < a \leq 4$. №6. $2 < a < \frac{24}{11}$. №7. $a < 3$, $a > 3$. №8. $a > -5,5$. №9. $a \geq 0$.

№10. При $a \leq -1$ решений нет; при $-1 < a \leq 0$ $x < \log_2(a+1)$; при $a > 0$ $\log_2 a < x < \log_2(a+1)$.

§ 10

№1. При $a \geq 3$ и $a=2$ $\emptyset$; при $a < 2$ $x \geq 1-a$; при $2 < a < 3$ $-a < x \leq 1-a$.

№2. $\left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (0; 1]$. №3. $(-2; 0) \cup (0; 1,5)$. №4. $(-\infty; -2) \cup [2,5; +\infty)$.

№5. $(-1; 1] \cup [2; 4)$. №6. $a = -2$, $1 \leq a < \sqrt{2}$. №7. $(-\infty; -4) \cup \left(-3; -\frac{12}{7}\right)$.

№8. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. №9. $\left(-\infty; -\frac{16}{7}\right]$. №10. $a = -10$, $-9 \leq a < -6$.

§ 11

№1. $a < -0,25$. №2. $a=0$, $a=4$. №3. $a < -11$, $a > 5$. №4. 0 ; 1 . №5. При $a < 0$

$5a \leq x \leq a$; при $a = 0$ $x=0$; при $a > 0$ решений нет. №6. $(-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; +\infty)$.

№7. $(-\infty; -2,5] \cup [2+2\sqrt{2}; +\infty)$. №8. $a \geq 1$. №9. $[-2; 2) \cup [3; 7)$. №10. $[-3; 0]$.

Приложение

- ◆ Приведем примерное тематическое планирование изучения раздела "Задачи с параметром" на факультативных занятиях (элективных курсах) в 11-м классе.

Тема занятия:	Часов:
§ 1. Линейные уравнения и неравенства, содержащие параметр.....	3
§ 2. Квадратные уравнения и неравенства, содержащие параметр.....	3
§ 3. Дробно-рациональные уравнения и неравенства, содержащие параметр.....	3
§ 4. Теорема Виета.....	3
§ 5. Расположение корней квадратичной функции.....	3
§ 6. Графический способ решения уравнений и неравенств, содержащих параметр.....	4
§ 7. Тригонометрические уравнения и неравенства, содержащие параметр.....	3
§ 8. Иррациональные уравнения и неравенства, содержащие параметр.....	3
§ 9. Показательные уравнения и неравенства, содержащие параметр.....	3
§ 10. Логарифмические уравнения и неравенства, содержащие параметр.....	3
§ 11. Свойства функций в задачах с параметром.....	3
Всего:	34

Примерные задания для зачета (итоговой контрольной работы)

Вариант – 1

№1. Для каждого значения a решите систему уравнений $\begin{cases} ax - 3y = 5, \\ 4x + y = 2. \end{cases}$

№2. Для каждого значения a решите неравенство $2ax + 5 > a + 10x$.

№3. Для каждого значения a решите уравнение $\frac{x^2 - (3a - 1)x + 2a^2 - 2}{x^2 - 3x - 4} = 0$.

№4. Найдите все значения a , при каждом из которых сумма квадратов корней трехчлена $x^2 - 2(a - 3)x + 2a - 6$ больше 48.

№5. Найдите все значения a , при каждом из которых корни уравнения $x^2 - (a - 2)x - a + 5 = 0$ больше 1.

№6. Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система $\begin{cases} (x + 3)^2 + (|y| - 7)^2 = 9, \\ (x - 9)^2 + (y - 2)^2 = a^2 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

№7. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\cos 2x + (a - 1)\sin x + 0,5a - 1 = 0$ имеет ровно семь корней на промежутке $\left[-\pi; \frac{13\pi}{6}\right)$.

№8. Для каждого a решите уравнение $3^{1+2|x-1|} + a^2 + 2a = (4a + 6) \cdot 3^{|x-1|}$.

№9. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\log_{1-x}(4ax - a - 7) = 2$ не имеет корней.

№10. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых функция $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - 75x + 5$ имеет ровно один экстремум на промежутке $(-5; 6]$.

Примерные задания для зачета (итоговой контрольной работы)

Вариант – 2

№1. Для каждого значения a решите систему уравнений $\begin{cases} ay + 5x = 7, \\ 3y - x = 1. \end{cases}$

№2. Для каждого значения a решите неравенство $2ax + 6 < 4x + 3a$.

№3. Для каждого значения a решите уравнение $\frac{x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 3a - 2}{x^2 - 6x + 5} = 0$.

№4. Найдите все значения a , при каждом из которых сумма квадратов корней трехчлена $x^2 - ax + 3 + a$ меньше 29.

№5. Найдите все значения a , при каждом из которых корни уравнения $x^2 - (a+1)x + a + 4$ меньше 2.

№6. Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система $\begin{cases} (x+4)^2 + (|y|-6)^2 = 16, \\ (x-8)^2 + (y+1)^2 = a^2 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

№7. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\cos 2x - (4a-1)\cos x - 2a + 1 = 0$ имеет ровно шесть корней на промежутке $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)$.

№8. Для каждого a решите уравнение $2^{1+2|x+1|} + a^2 - a = (3a-2) \cdot 2^{|x+1|}$.

№9. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\log_{x-1}(4ax + a - 9) = 2$ имеет ровно два корня.

№10. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых функция $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - 108x + 6$ имеет ровно один экстремум на промежутке $[-8; 7)$.

Содержание

Предисловие.....	3
Введение.....	4
§ 1. Линейные уравнения и неравенства, содержащие параметр.....	7
§ 2. Квадратные уравнения и неравенства, содержащие параметр.....	12
§ 3. Дробно-рациональные уравнения и неравенства, содержащие параметр.....	17
§ 4. Теорема Виета.....	19
§ 5. Расположение корней квадратичной функции.....	24
§ 6. Графический способ решения уравнений и неравенств, содержащих параметр.....	30
§ 7. Тригонометрические уравнения и неравенства, содержащие параметр.....	38
§ 8. Иррациональные уравнения и неравенства, содержащие параметр.....	44
§ 9. Показательные уравнения и неравенства, содержащие параметр	49
§ 10. Логарифмические уравнения и неравенства, содержащие параметр	52
§ 11. Свойства функций в задачах с параметром.....	57
Ответы.....	62
Приложение.....	67

Кожухов Сергей Константинович
Уравнения и неравенства с параметром
Учебно-методическое пособие для учителей математики,
студентов математических специальностей
педагогических вузов, абитуриентов