

АЛГЕБРА

И НАЧАЛА
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
АНАЛИЗА

ДИДАКТИЧЕСКИЕ
МАТЕРИАЛЫ


ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

10

АЛГЕБРА

И НАЧАЛА
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
АНАЛИЗА

ДИДАКТИЧЕСКИЕ
МАТЕРИАЛЫ

10
класс

Углубленный уровень

4-е издание

Москва

• Просвещение •

2012

УДК 372.8:[512+517]

ББК 74.262.21

А45

Авторы: М. И. Шабунин, М. В. Ткачёва,
Н. Е. Фёдорова, О. Н. Доброва

Алгебра и начала математического анализа.
А45 Дидактические материалы. 10 класс : углубл. уровень / [М. И. Шабунин, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова, О. Н. Доброва]. — 4-е изд. — М. : Просвещение, 2012. — 142 с. : ил. — ISBN 978-5-09-029513-0.

Книга содержит материалы к каждой теме курса алгебры и начал математического анализа для 10 класса углублённого уровня и дополняет систему упражнений учебника и дидактические материалы тех же авторов, предназначенные для базового уровня. Каждая глава содержит примеры и задачи с подробными решениями, задания для самостоятельной работы, контрольные работы и ответы к заданиям.

УДК 372.8:[512+517]

ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-029513-0

© Издательство «Просвещение», 2008

© Художественное оформление.

Издательство «Просвещение», 2008

Все права защищены

Предисловие

Современные стандарты школьного образования выделяют в содержании математического образования старших классов два уровня знаний — *базовый* и *углублённый*. Учебник авторов Ю. М. Колягина и др. «Алгебра и начала математического анализа» для 10 класса под редакцией А. Б. Жижченко (М.: Просвещение, 2008) создан для обучения в старшей школе на обоих уровнях.

Дидактические материалы дополняют систему упражнений учебника на продвинутом базовом и на углублённом уровнях. Дополнительные упражнения для базового уровня и продвинутого базового можно найти в пособии «Дидактические материалы по алгебре и началам математического анализа» для 10 класса общеобразовательных учреждений авторов М. И. Шабунина, М. В. Ткачёвой, Н. Е. Фёдоровой, Р. Г. Газаряна (М.: Просвещение, 2010).

Обе книги составляют единый комплект. Они объединены идеей широкого использования при дифференциации обучения — каждое задание снабжено условной балловой оценкой (от 1 до 10 очков), характеризующей его сложность. Используя балловую оценку заданий, учитель может:

— организовать «плавную» дифференциацию обучения математике: в зависимости от качества усвоения темы каждому учащемуся предлагать конкретный балловый диапазон выполняемых заданий, помогая постепенно поднимать уровень своих математических умений;

— предлагать учащимся разнообразные виды самостоятельных и проверочных работ, ориентируя их на соответствие набираемых баллов одной из положительных оценок («3», «4» или «5»).

В обоих пособиях задания продвинутого базового уровня в основном оценены баллами от 5 до 7, а углублённого — от 8 до 10 баллов.

Каждая глава пособия содержит:

1) дидактические материалы к каждому параграфу учебника Ю. М. Колягина и др.;

2) контрольную работу по тематике главы в двух вариантах.

Каждый параграф пособия включает:

1) примеры типовых задач с подробными решениями;

2) разноуровневые задания для самостоятельной работы (в двух вариантах), снабженные ответами в конце книги.

Несмотря на то что содержание и структура данной книги соответствуют учебнику «Алгебра и начала математического анализа» авторов Ю. М. Колягина и др., ее можно с успехом использовать при работе с другими учебниками.

§ 1. Понятие делимости. Делимость суммы и произведения

Примеры с решениями

1. Доказать, что число a делится на m , если:

1) $a = 6^{18} + 36^8$, $m = 37$; 2) $a = 3^{24} - 9^{11} + 27^7$, $m = 25$.

Решение. 1) $a = 6^{18} + 6^{16} = 6^{16}(6^2 + 1) = 6^{16} \cdot 37$;

2) $a = 3^{24} - 3^{22} + 3^{21} = 3^{21}(27 - 3 + 1) = 3^{21} \cdot 25$.

2. Доказать, что число $a = 47^4 + 70^3 + 93^4 + 20$ делится на 23.

Решение. Для доказательства запишем число a в виде

$$a = (47^4 - 1) + (70^3 - 1) + (93^4 - 1) + 23$$

и воспользуемся формулой $x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$ при $x = 47$ и $x = 93$, а также формулой $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ при $x = 70$.

Так как числа 46, 69 и 92 делятся на 23, то и число a делится на 23.

3. Доказать, что число $a = 10^8 + 10$ делится на 11.

Решение. Запишем число a в виде $a = 10^8 - 1 + 11$ и воспользуемся тем, что $b = 10^8 - 1$ — восьмизначное число, все цифры которого — девятки. Такое число делится на 99, а значит, и на 11. Следовательно, $a = b + 11$ делится на 11.

4. Пусть a и b — такие целые числа, что число $c = 3a + 2b$ делится на 17. Доказать, что и число $d = 10a + b$ делится на 17.

Решение. Воспользуемся равенством $3(10a + b) = 10(3a + 2b) - 17b$, откуда $3d = 10c - 17b$.

Так как правая часть этого равенства, т. е. $10c - 17b$, делится на 17, а 3 не делится на 17, то число d должно делиться на 17.

Задания для самостоятельной работы

1. [4] Доказать, что число a делится на m , если:

1) $a = 18^4 + 52^3 + 86^4 + 14$, $m = 17$;

2) $a = 20^3 + 58^4 + 77^2 + 16$, $m = 19$.

2. [4] Доказать, что при любых натуральных m и n число a делится на p , если:
- 1) $a = (5m + 7n + 3)^6 (3m + 9n + 2)^5$, $p = 32$;
 - 2) $a = (3m + 5n + 1)^7 (5m + 9n + 2)^6$, $p = 64$.
3. [5] Пусть a, b — целые числа. Доказать, что если число c делится на m , то и число d делится на m , если:
- 1) $c = 5a + 3b$, $m = 7$, $d = 9a + 4b$;
 - 2) $c = 5a + 3b$, $d = 7a + 2b$, $m = 11$.
4. [6] Доказать, что ни при каких $n \in \mathbb{N}$ число a не является квадратом натурального числа, если:
- 1) $a = n^2 + 3n + 2$;
 - 2) $a = n^2 + 5n + 4$.

§ 2. Деление с остатком

Примеры с решениями

1. При делении числа 1270 на некоторое натуральное число m частное оказалось равным 74. Найти m и r , где r — остаток от деления.

Решение. По определению деления справедливо равенство $1270 = 74m + r$, которое можно рассматривать как запись результата деления числа 1270 на 74.

Разделив уголком 1270 на 74, получим частное $m = 17$ и остаток $r = 12$.

2. Найти все целые числа, которые при делении на 9 дают остаток 5, а при делении на 15 дают остаток 4.

Решение. Пусть x — искомое целое число, тогда $x = 9m + 5$, $x = 15n + 4$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, откуда $9m + 5 = 15n + 4$, т. е. $15n - 9m = 1$. Полученное равенство не является верным ни при каких целых n и m , так как его левая часть делится на 3, а правая нет.

3. Доказать, что при любом $n \in \mathbb{N}$ число $p = n^3 + 20n + 10^5 + 2$ делится на 3.

Решение. Число $a = 10^5 - 1 + 3$ делится на 3 (можно воспользоваться также тем, что сумма цифр числа $10^5 + 2$, равная трем, делится на 3).

При $n = 1$ число $b = n^3 + 20n$ делится на 3. Покажем, что при любом $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, число b делится на 3, представив его в виде $b = n^3 - n + 21n$. Так как $c = n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$ — произведение трех последовательных натуральных чисел, из которых одно делится на 3, то c делится на 3, откуда $b = c + 21n$ делится на 3, тогда и число $p = a + b$ делится на 3.

4. Доказать, что при любом $n \in \mathbf{N}$ число $a = 6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n$ делится на 30.

Решение. Нужно доказать, что a делится на 2, 3 и 5.

а) Если n — четное число, то a делится на 2, а если n — нечетное число, то a также делится на 2, так как $15n^4 - n$ делится на 2 (сумма двух нечетных чисел).

б) Так как $6n^5 + 15n^4 + 9n^3 = b$ делится на 3, $a = b + n^3 - n$, где $n^3 - n = c$ — число, делящееся на 3 (пример 3), то $a = b + c$ делится на 3.

в) Заметим, что число $5n^5 + 15n^4 + 10n^3$ делится на 5. Поэтому a делится на 5 тогда и только тогда, когда число $d = n^5 - n$ делится на 5.

Если n делится на 5, то и d делится на 5. Пусть n не делится на 5. Тогда $n = 5p \pm 1$ или $n = 5q \pm 2$, где $p \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{N}$. Так как $d = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$, то при $n = 5p \pm 1$ число $n^2 - 1$ делится на 5, а при $n = 5q \pm 2$ число $n^2 + 1$ делится на 5. Следовательно, d делится на 5 при любом $n \in \mathbf{N}$.

5. Найти остаток от деления числа $a = 2^{187} + 3^{74} + 7^{257}$ на 10.

Решение. Задачу можно сформулировать так: найти последнюю цифру числа a .

В главе II учебника (§ 2, задача 5) было установлено, что последние цифры чисел 2^k , 3^k , 7^k повторяются через 4. Это означает, что если $k = 4p + r$, $p \in \mathbf{N}$, r — остаток от деления k на 4 ($r = 1, 2, 3$), то последние цифры чисел 2^k , 3^k , 7^k такие же, как у чисел 2^r , 3^r , 7^r , а если $r = 0$ (k делится на 4), то последние цифры чисел 2^k , 3^k , 7^k такие же, как у чисел 2^4 , 3^4 , 7^4 .

Так как остатки от деления на 4 чисел 187, 74 и 257 равны соответственно 3, 2 и 1, то последние цифры чисел 2^{187} , 3^{74} и 7^{257} равны последним цифрам чисел 2^3 , 3^2 и 7^1 , т. е. это цифры 8, 9 и 7, а последняя цифра числа a — последняя цифра суммы $8 + 9 + 7$, т. е. это цифра 4. Следовательно, остаток от деления числа a на 10 равен 4.

6. Найти все значения $n \in \mathbf{Z}$, при которых является целым число $a = \frac{n^5 + 3}{n^2 + 1}$.

Решение. Преобразуем a , используя равенство $n^5 + 3 = n^5 + n^3 - (n^3 + n) + n + 3$. Получим $a = n^3 - n + \frac{n+3}{n^2+1}$, откуда следует, что a — целое число тогда и только тогда, когда дробь $b = \frac{n+3}{n^2+1}$ — целое число. Этому условию удовлетворяют значения n , равные $-3, -1, 0, 1, 2$.

Задания для самостоятельной работы

1. [4] Найти все целые числа, которые при делении на m и n дают остатки, соответственно равные r_1 и r_2 , если:
- 1) $m = 12$, $n = 33$, $r_1 = 7$, $r_2 = 8$;
 - 2) $m = 15$, $n = 24$, $r_1 = 8$, $r_2 = 9$.
2. [5] Доказать, что при любом $n \in \mathbf{Z}$ число a делится на 3, если:
- 1) $a = 4n^3 + 17n + 10^5 + 5$;
 - 2) $a = 7n^3 + 32n + 10^4 + 8$.
3. [4] Найти все значения $n \in \mathbf{Z}$, при которых число a является целым, если:
- 1) $a = \frac{n^4 + 8}{n^2 + 2}$;
 - 2) $a = \frac{n^4 + 7}{n^2 + 2}$.
4. [4] Найти остаток от деления на 10 числа a , если:
- 1) $a = 2^{383} + 3^{427} + 7^{214}$;
 - 2) $a = 2^{479} + 3^{530} + 7^{374}$.
5. [4] Пусть целые числа x и y не делятся на 3. Доказать, что число a делится на 3, если:
- 1) $a = x^4 - y^4$;
 - 2) $a = x^4 + y^4 + 1$.
6. [4] Найти все такие целые числа x и y , чтобы при любом $n \in \mathbf{N}$ число a было целым, если:
- 1) $a = \frac{n^3 + nx + y}{n^2 + 1}$;
 - 2) $a = \frac{n^3 + n(x-1) + y}{n^2 + 1}$.
7. [6] Доказать, что при любом $n \in \mathbf{N}$ число a делится на 30, если:
- 1) $a = 6n^5 + 45n^4 + 10n^3 - n$;
 - 2) $a = 6n^5 + 15n^4 + 40n^3 - n$.

§ 3. Признаки делимости

Примеры с решениями

1. Доказать, что число $a = 10^{70} - 82^4$ делится на 9.

Решение. Запишем число a в виде $a = 10^{70} - 1 - (82^4 - 1)$. Так как число $10^{70} - 1$ состоит из одних девяток, а $82^4 - 1 = 81 \cdot m$, где $m \in \mathbf{N}$, то число a делится на 9.

2. Доказать, что число $a = 1476^{10} + 3825^9$ делится на 9.

Решение. Так как сумма цифр каждого из чисел 1476 и 3825 делится на 9, то и сами эти числа делятся на 9, поэтому число a делится на 9.

3. Выяснить, делится ли на 8 число $a = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20}$.

Решение. Числа 2^k , где $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$, делятся на 8, а сумма $2 + 2^2 = 6$ не делится на 8. Следовательно, число a не делится на 8.

4. Выяснить, делится ли на 11 число $a = 10^{70} + 9876547$.

Решение. Запишем число a в виде $a = 10^{70} - 1 + 9876548$. Так как число $10^{70} - 1$ состоит из четного числа девяток, то оно делится на 11. Число 9876548 также делится на 11, так как число $9 - 8 + 7 - 6 + 5 - 4 + 8 = 11$ делится на 11 (признак делимости на 11). Следовательно, a делится на 11.

Задания для самостоятельной работы

1. [3] Доказать, что число a делится на m , если:

1) $a = 1 + 2 + \dots + 97 + 98$, $m = 147$;

2) $a = 1 + 2 + \dots + 76 + 77$, $m = 273$.

2. [4] Доказать, что число a делится на 5, если:

1) $a = 4^9 + 1$;

2) $a = 4^7 + 26$.

3. [3] Выяснить, делится ли на 8 число a , если:

1) $a = 12345678$;

2) $a = 345678910$.

4. [4] Выяснить, делится ли на 37 число a , если:

1) $a = 333555^2 + 222444^3$;

2) $a = 777666^4 + 888333^5$.

5. [5] Выяснить, делится ли на 11 число a , если:

1) $a = 10^{16} + 964116$;

2) $a = 10^{18} + 9561001$.

§ 4. Сравнения

Примеры с решениями

1. Найти все целые числа x , такие, что $x \equiv 3 \pmod{7}$ и $x \in [-15; 20]$.

Решение. Искомые числа принадлежат множеству чисел вида $x = 3 + 7k$, $k \in \mathbb{Z}$. Из них отрезку $[-15; 20]$ принадлежат числа $-11, -4, 3, 10, 17$.

2. Доказать, что число a делится на m , если:

1) $a = 4 \cdot 35^{19} + 13 \cdot 52^{15}$, $m = 17$;

2) $a = 3 \cdot 5^{25} + 4^7 \cdot 9^6$, $m = 19$;

3) $a = 5 \cdot 7^{243} + 16^{132} + 3^{430}$, $m = 10$.

Решение. 1) Так как $35 \equiv 1 \pmod{17}$, $52 \equiv 1 \pmod{17}$, то $a \equiv 4 + 13 \pmod{17}$, т. е. a делится на 17.

2) Пользуясь тем, что $25 \equiv 6 \pmod{19}$, $4^7 \cdot 9^6 = 4 \cdot 6^{12}$, $5^{25} \equiv 5 \cdot 6^{12} \pmod{19}$, имеем $a \equiv 15 \cdot 6^{12} + 4 \cdot 6^{12} \equiv 0 \pmod{19}$, т. е. a делится на 19.

3) Так как $7^{243} \equiv 7^3 \equiv 3 \pmod{10}$, $16^{132} \equiv 6 \pmod{10}$, $3^{430} \equiv 3^2 \pmod{10}$, то $a \equiv 5 \cdot 3 + 6 + 9 \equiv 0 \pmod{10}$, т. е. a делится на 10.

3. Найти остаток от деления числа $a = 2^{425} + 50^{37}$ на 17.

Решение. Так как $2^{425} = 2 \cdot 16^{106}$, $16 \equiv -1 \pmod{17}$, $50 \equiv -1 \pmod{17}$, то $a \equiv 2 - 1 \pmod{17}$, т. е. остаток от деления числа a на 17 равен 1.

4. Найти остаток от деления числа 6^{192} на 17.

Решение. Так как $6^{192} = 36^{96}$, $36 \equiv 2 \pmod{17}$, то $6^{192} \equiv 2^{96} \pmod{17}$. Но $16 \equiv -1 \pmod{17}$, $2^{96} = 16^{24}$, $16^{24} \equiv (-1)^{24} \pmod{17}$, откуда следует, что $6^{192} \equiv 1 \pmod{17}$, т. е. остаток от деления числа 6^{192} на 17 равен 1.

Задания для самостоятельной работы

1. [4] Доказать, что число a делится на m , если:

1) $a = 5 \cdot 2^{51} + 21 \cdot 32^{45}$, $m = 31$;

2) $a = 4^{61} + 27 \cdot 32^{77}$, $m = 31$.

2. [5] Найти остаток от деления числа a на m , если:

1) $a = 3 \cdot 2^{73} + 9 \cdot 16^{29}$, $m = 17$;

2) $a = 5 \cdot 4^{31} + 7 \cdot 18^{37}$, $m = 17$.

3. [6] Найти остаток от деления числа a на m , если:

1) $a = 15^{254}$, $m = 17$; 2) $a = 12^{316}$, $m = 19$.

§ 5. Решение уравнений в целых числах

Примеры с решениями

1. Найти все целочисленные решения уравнения:

1) $10x + 21y = 1$; 2) $45x + 21y = 8$.

Решение. 1) Числа 10 и 21 взаимно просты, а пара чисел $(-2; 1)$ является решением этого уравнения. Тогда (глава II, § 5 учебника) все целочисленные решения этого уравнения задаются формулами

$$x = -2 + 21t, \quad y = 1 - 10t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

2) Так как коэффициенты 45, 21 и 8 уравнения не имеют общего делителя, отличного от единицы, а наибольший общий делитель чисел 45 и 21 равен 3 (эти числа не являются взаимно простыми), то данное уравнение не имеет целочисленных решений.

2. Найти целочисленные решения уравнения

$$x^2 = 12y + 5.$$

Решение. Если x делится на 3, то $x^2 - 12y$ делится на 3 при любом $y \in \mathbf{Z}$, а число 5 не делится на 3. Если x не делится на 3, то остаток от деления x^2 на 3 равен 1, а остаток от деления правой части уравнения на 3 равен 2.

Следовательно, уравнение не имеет целочисленных решений.

3. Доказать, что уравнение $x^2 - 2y^2 = 204$ не имеет целочисленных решений.

Решение. Если числа x и y делятся на 3, то левая часть уравнения делится на 9, а правая нет.

Если только одно из чисел делится на 3, то левая часть уравнения не делится на 3, а правая часть делится на 3.

Если оба числа x и y не делятся на 3, то левая часть не делится на 3, так как в этом случае остаток от деления x^2 и y^2 на 3 равен 1. И в этом случае нет целочисленных решений.

4. Найти целочисленные решения уравнения

$$3x^2 - 8xy - 16y^2 = 19.$$

Решение. Разложив левую часть уравнения на множители (способом группировки либо с помощью решения квадратного уравнения относительно x или y), запишем уравнение в виде $(3x + 4y)(x - 4y) = 19$.

Так как делителями числа 19 являются числа ± 1 , ± 19 , то искомое множество решений содержится в множестве всех целочисленных решений следующих систем уравнений:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} 3x + 4y = 19, \\ x - 4y = 1; \end{cases} & 2) \begin{cases} 3x + 4y = 1, \\ x - 4y = 19; \end{cases} \\ 3) \begin{cases} 3x + 4y = -19, \\ x - 4y = -1; \end{cases} & 4) \begin{cases} 3x + 4y = -1, \\ x - 4y = -19. \end{cases} \end{array}$$

Первая и третья из этих систем имеют целочисленные решения $(5; 1)$ и $(-5; -1)$, остальные не имеют целочисленных решений.

5. Найти целочисленные решения уравнения

$$2x^2y^2 + y^2 = 14x^2 + 25.$$

Решение. Выразив из уравнения y^2 через x^2 , запишем его в виде $y^2 = 7 + \frac{18}{2x^2 + 1}$.

Если $x=0$, то $y^2=25$, $y=\pm 5$. Если $x^2=1$, то $y^2=13$, а если $x^2=4$, то $y^2=9$, $y=\pm 3$. При других целых значениях x знаменатель дроби $\frac{18}{2x^2+1}$ больше числителя.

Итак, уравнение имеет шесть целочисленных решений:

$(0; 5)$, $(0; -5)$, $(2; 3)$, $(2; -3)$, $(-2; 3)$, $(-2; -3)$.

6. Найти все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе уравнений
$$\begin{cases} 17x^2 + 8xy + y^2 = 2, \\ (x-1)^2 + (y+4)^2 = 1. \end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения следует, что $(x-1)^2 \leq 1$, или $|x-1| \leq 1$. Этому условию удовлетворяют целые числа $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$.

Если $x=0$, то из второго уравнения находим $y=-4$. Пара чисел $(0; -4)$ не удовлетворяет первому уравнению системы.

Если $x=1$, то $|y+4|=1$, откуда находим $y_1=-5$, $y_2=-3$. Обе пары чисел $(1; -5)$ и $(1; -3)$ удовлетворяют первому уравнению системы.

Наконец, если $x=2$, то $y=-4$. Пара чисел $(2; -4)$ не удовлетворяет первому уравнению системы.

Итак, данная система имеет два целочисленных решения: $(1; -5)$ и $(1; -3)$.

Задания для самостоятельной работы

Найти все целочисленные решения уравнения (1—5).

1. $\boxed{3}$ 1) $5x - 3y = 13$;

2) $4x - 5y = 17$.

2. $\boxed{4}$ 1) $x^2 = 3y + 5$;

2) $x^2 = 9y + 8$.

3. $\boxed{5}$ 1) $2x^2y^2 + y^2 - 6x^2 - 10 = 0$;

2) $3x^2y^2 + 4y^2 = 24x^2 + 48$.

4. $\boxed{5}$ 1) $5x^2 + 8xy - 4y^2 = 17$;

2) $5y^2 + 8xy - 4x^2 = 17$.

5. $\boxed{6}$ 1) $x^2 - 2xy + 2y^2 = 4$;

2) $x^2 + 2xy + 2y^2 = 4$.

6. $\boxed{5}$ Найти все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие системе уравнений:

1)
$$\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 4, \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} x^2 + 8xy + 17y^2 = 2, \\ (x+4)^2 + (y-1)^2 = 1. \end{cases}$$

7. $\boxed{8}$ Доказать, что не имеет решений в целых числах уравнение:

1) $2001x^2 + 2002 = y^2$;

2) $2002x^2 + 2003 = y^2$.

Контрольная работа

1. Найти остаток от деления числа

$$a = 2^{227} + 3^{94} + 7^{57} \quad [a = 2^{307} + 3^{90} + 7^{97}] \text{ на } 10.$$

2. Выяснить, делится ли число

$$a = 10^{80} - 73^3 \quad [a = 10^{24} + 120] \text{ на } 9[11].$$

3. Найти остаток от деления числа a на m , если:

1) $a = 5 \cdot 2^{81} + 3 \cdot 16^{37}$, $m = 17$

$[a = 5 \cdot 2^{145} + 7 \cdot 29^{11}$, $m = 15]$;

2) $a = 7 \cdot 2^{161} + 5 \cdot 18^{75}$, $m = 17$

$[a = 7 \cdot 2^{361} + 5 \cdot 18^{97}$, $m = 17]$.

4. Найти все целочисленные решения уравнения:

1) $5x + 3y = 17$

$[7x - 9y = 23]$;

2) $16x^2 + 8xy - 3y^2 + 19 = 0$

$[5x^2 - 8xy - 4y^2 = 17]$.



§ 1. Многочлены от одной переменной

Примеры с решениями

1. Найти числа a , b и c из равенства

$$\begin{aligned}(x-2)(3x^3+ax^2-bx+1) &= \\ &= 3x^4-4x^3-9x^2+cx-2.\end{aligned}$$

Решение. Преобразуем левую часть равенства:

$$\begin{aligned}(x-2)(3x^3+ax^2-bx+1) &= \\ &= 3x^4+ax^3-bx^2+x-6x^3-2ax^2+2bx-2= \\ &= 3x^4+(a-6)x^3-(b+2a)x^2+(1+2b)x-2.\end{aligned}$$

Пользуясь определением равных многочленов, получаем

$$\begin{aligned}a-6 &= -4, \\ b+2a &= 9, \\ 1+2b &= c,\end{aligned}$$

откуда $a=2$, $b=5$, $c=11$.

2. Найти остаток от деления многочлена

$$5x^4-12x^3+3x^2-27x+4$$

на двучлен

$$x^2-3x.$$

Решение. Выполним деление уголком:

$$\begin{array}{r|l} 5x^4-12x^3+3x^2-27x+4 & x^2-3x \\ \underline{5x^4-15x^3} & \underline{5x^2+3x+12} \\ & 3x^3+3x^2 \\ & \underline{3x^3-9x^2} \\ & 12x^2-27x \\ & \underline{12x^2-36x} \\ & 9x+4 \end{array}$$

Ответ. $9x+4$.

Задания для самостоятельной работы

Найти частное и ответ проверить умножением (1—2).

1. [4] 1) $(x^2 - x - 56) : (x - 8)$; 2) $(x^2 - 3x - 54) : (x + 6)$;
3) $(2x^2 - 9x + 4) : (x - 4)$; 4) $(3x^2 - 11x + 6) : (x - 3)$.
2. [5] 1) $(2x^3 - 3x^2 + 3x - 1) : (2x - 1)$;
2) $(2x^3 + 3x^2 - 3x - 2) : (2x + 1)$;
3) $(6x^3 - 7x^2 - 6x - 1) : (3x + 1)$;
4) $(6x^3 + 4x^2 - 11x + 3) : (3x - 1)$.
3. [6] Найти частное и остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$, если:
1) $P(x) = 6x^5 - 15x^4 - 12x^3 + 44x^2 - 34x - 1$, $Q(x) = 2x^2 - 5x$;
2) $P(x) = 6x^5 - 8x^4 + 15x^3 - 41x^2 + 27x + 2$, $Q(x) = 3x^2 - 4x$;
3) $P(x) = 4x^7 - x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x$, $Q(x) = x^3 - x + 1$;
4) $P(x) = 3x^7 - 10x^5 + 4x^4 + 8x^3 - 5x^2 + x - 1$,
 $Q(x) = x^3 - 2x + 1$.
4. [6] Установить, при каком значении a многочлен $P(x)$ делится на многочлен $Q(x)$, если:
1) $P(x) = 6x^2 - 7x + a$, $Q(x) = 3x - 5$;
2) $P(x) = 12x^2 - 5x + a$, $Q(x) = 3x - 2$;
3) $P(x) = 8x^2 + ax - 7$, $Q(x) = 2x - 7$;
4) $P(x) = 9x^2 + ax - 5$, $Q(x) = 3x + 5$;
5) $P(x) = 9x^2 + ax - 10$, $Q(x) = 3x + 5$;
6) $P(x) = 8x^2 + ax - 15$, $Q(x) = 4x - 3$.
5. [7] Найти числа a , b и c из равенства:
1) $(x + 3)(2x^2 + ax + b) = 2x^3 + cx^2 - 14x + 3$;
2) $(x - 2)(4x^2 + ax + b) = 4x^3 - 5x^2 + cx + 4$;
3) $(x^2 + ax + 1)(bx^2 + x - 2) = 2x^4 - x^3 - x^2 + cx - 2$;
4) $(x^2 + ax + 2)(bx^2 - x + 4) = 2x^4 + cx^3 + 11x^2 - 14x + 8$.
6. [9] Не выполняя деления многочленов, найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$, если:
1) $P(x) = 5x^6 - 2x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x$, $Q(x) = x^2 - 1$;
2) $P(x) = 3x^6 - 2x^5 + x^4 + x^3 - 4x^2 + 4x + 1$, $Q(x) = x^2 - 1$;
3) $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 6x - 4$, $Q(x) = x^2 + x - 2$;
4) $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x - 3$, $Q(x) = x^2 - 2x - 3$.
7. [9] Установить, при каких натуральных значениях n является целым числом выражение:
1) $\frac{3n^2 - 8n + 7}{n - 2}$; 2) $\frac{2n^2 - 9n + 4}{n - 3}$.

§ 2. Схема Горнера

Пример с решением

Разделить многочлен $3x^3 + x^2 - 8x - 1$ на двучлен $x + 2$ по схеме Горнера.

Решение. Заполним таблицу, зная, что $a = -2$, $a_0 = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = -8$, $a_3 = -1$.

	3	1	-8	-1
-2	3	$1 + (-2) \cdot 3 = -5$	$-8 + (-2)(-5) = 2$	$-1 + (-2) \cdot 2 = -5$

Таким образом, $3x^3 + x^2 - 8x - 1 = (x + 2)(3x^2 - 5x + 2) - 5$.

Задания для самостоятельной работы

1. [5] По схеме Горнера найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $Q(x)$, если:

1) $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 3$, $Q(x) = x + 3$;

2) $P(x) = 3x^3 + 11x^2 - 2x + 5$, $Q(x) = x + 4$;

3) $P(x) = 3x^4 - 11x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, $Q(x) = x - 4$;

4) $P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 10x^2 - 4x + 7$, $Q(x) = x - 3$.

2. [6] По схеме Горнера найти частное и остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $Q(x)$, если:

1) $P(x) = 5x^3 - 13x^2 + 5x + 5$, $Q(x) = x - 2$;

2) $P(x) = 6x^3 - 11x^2 + 3x + 6$, $Q(x) = x - 1$;

3) $P(x) = 2x^4 + 11x^3 - 3x^2 + 17x - 13$, $Q(x) = x + 6$;

4) $P(x) = 3x^4 + 14x^3 - 7x^2 - 9x - 1$, $Q(x) = x + 5$.

§ 3. Многочлен $P(x)$ и его корень.

Теорема Безу

Примеры с решениями

1. Найти такое число m , чтобы многочлен $P(x) = x^5 + 3x^4 - mx^2 - 2x - m$ делился на двучлен $x + 2$.

Решение. Если многочлен делится на двучлен $x + 2$, то остаток от деления равен нулю, а по теореме Безу остаток равен значению этого многочлена при $x = -2$, следовательно, $P(-2) = 0$. Составим уравнение относительно m : $(-2)^5 + 3(-2)^4 - m(-2)^2 - 2(-2) - m = 0$, откуда $m = 4$.

2. Найти все корни многочлена

$$P(x) = 2x^4 - x^3 - mx^2 - px + k,$$

если один из его корней равен 3, а остаток от деления $P(x)$ на $x^2 - 2$ равен $-7x - 14$.

Решение. $P(3) = 0$ по определению корня многочлена, откуда $-9m - 3n + k + 135 = 0$. Выполним деление многочлена $P(x)$ (уголком) на $x^2 - 2$. Найдем остаток $-(n+2)x + k - 2m + 8$, откуда $-(n+2) = -7$, $k - 2m + 8 = -14$. Получили систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} -(n+2) = -7, \\ k - 2m + 8 = -14, \\ -9m - 3n + k + 135 = 0. \end{cases}$$

Решив систему уравнений, получим $n = 5$, $m = 14$, $k = 6$, т. е. многочлен можно записать в виде $P(x) = 2x^4 - x^3 - 14x^2 - 5x + 6$. Для нахождения корней попробуем разложить многочлен на множители. Так как один из корней равен 3, то многочлен должен делиться на двучлен $x - 3$. Выполнив деление уголком, получим многочлен $2x^3 + 5x^2 + x - 2$. Представим $5x^2$ в виде суммы $4x^2 + x^2$ и разложим на множители:

$$\begin{aligned} 2x^3 + 4x^2 + x^2 + x - 2 &= 2x^2(x+2) + (x^2 + x - 2) = \\ &= 2x^2(x+2) + (x+2)(x-1) = (x+2)(2x^2 + x - 1) = \\ &= 2(x+2)(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, нашли еще три корня многочлена: -2 , -1 , $\frac{1}{2}$.

Ответ: -2 , -1 , $\frac{1}{2}$, 3 .

Задания для самостоятельной работы

Найти корни многочлена $P(x)$ (1—3).

1. $\boxed{3}$ 1) $P(x) = 6x^2 + 13x + 6$; 2) $P(x) = -15x^2 + 13x - 20$.

2. $\boxed{3}$ 1) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x$; 2) $P(x) = 3x^3 + 8x^2 - 3x$.

3. $\boxed{4}$ 1) $P(x) = 6x^3 + 11x^2 - x + 2$; 2) $P(x) = 6x^3 - 17x^2 - 4x + 3$.

Не выполняя деления, выяснить, делится ли многочлен $P(x)$ на двучлен $x - a$ (4—5).

4. $\boxed{4}$ 1) $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$, $a = -2$;

2) $P(x) = 3x^3 - 14x^2 + 5x + 12$, $a = 4$.

5. $\boxed{4}$ 1) $P(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 - x + 1$, $a = -3$;

2) $P(x) = 2x^4 - x^3 + 5x^2 + x - 6$, $a = 1$.

Не выполняя деления, найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x - a$ (6—8).

6.4) 1) $P(x) = x^4 + 3x^3 - x + 2$, $a = -1$;

2) $P(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 7$, $a = 3$.

7.5) 1) $P(x) = 2x^3 - x^2 + 7x - 9$, $a = 4$;

2) $P(x) = 3x^4 + 2x^3 - x - 3$, $a = -2$.

8.8) 1) $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 2$, $a = \frac{1}{2}$;

2) $P(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 2x + 7$, $a = \frac{2}{3}$.

Найти такое целое число n , чтобы многочлен $P(x)$ делился на двучлен $x - a$ (9—10).

9.6) 1) $P(x) = x^3 + nx^2 - 2nx - 5$, $a = 5$;

2) $P(x) = x^3 + nx^2 - 25x + 3n$, $a = 3$.

10.7) 1) $P(x) = nx^4 + 4nx^3 + x^2 + 3x - 2n$, $a = 4$;

2) $P(x) = nx^4 + 8x^3 - nx^2 + 7x + 7n$, $a = -3$.

11.8) Найти такие значения a , b и c , при которых многочлен $P(x)$ делится на двучлен $x - a$, а остаток от деления $P(x)$ на многочлен $Q(x)$ равен двучлену $bx + d$:

1) $P(x) = ax^4 + bx^3 - cx - 2$, $b = 1$, $d = 1$;

$Q(x) = x^2 + 2$; $-10x + 2$;

2) $P(x) = ax^4 + bx^3 - 3x^2 + cx - 5$, $b = 1$, $d = 5$;

$Q(x) = x^2 - 3$; $-18x + 4$.

§ 4. Алгебраическое уравнение.

Следствия из теоремы Безу

Задания для самостоятельной работы

Не решая уравнения, назвать хотя бы один его корень (1—3).

1.4) 1) $2x^4 - 5x^3 + x^2 - 9x = 0$;

2) $7x^5 + 5x^3 - 8x^2 - x = 0$.

2.4) 1) $x^5 - 2x^4 + 3x - 2 = 0$;

2) $x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 1 = 0$.

3.4) 1) $x^3 + 3x^2 + x - 2 = 0$;

2) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3x - 2 = 0$.

Решить уравнение, если известен один из его корней (4—5).

4.5) 1) $2x^4 - x^3 - 5x^2 + 2x + 2 = 0$, $x_1 = -\frac{1}{2}$;

2) $3x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x - 3 = 0$, $x_1 = -\frac{1}{3}$.

5. $\boxed{7}$ 1) $2x^5 + 3x^4 - 16x^3 - 9x^2 + 32x - 12 = 0$, $x_1 = -3$;
 2) $3x^5 - 2x^4 - 22x^3 - 4x^2 + 19x + 6 = 0$, $x_1 = -2$.

Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x - a$, если при делении этого многочлена на многочлен $Q(x)$ получается остаток $R(x)$ (6—8).

6. $\boxed{6}$ 1) $a = 2$, $Q(x) = x^2 - 2x$, $R(x) = 5 - x$;
 2) $a = -2$, $Q(x) = 4 - x^2$, $R(x) = x + 1$.
7. $\boxed{6}$ 1) $a = 1$, $Q(x) = x^3 - 1$, $R(x) = x^2 - x + 4$;
 2) $a = -1$, $Q(x) = x^3 + x^2$, $R(x) = 5 + x^2$.
8. $\boxed{6}$ 1) $a = -2$, $Q(x) = x^4 + 2x^3$, $R(x) = x^3 - 8$;
 2) $a = -2$, $Q(x) = x^4 - 4x^2$, $R(x) = x^3 + 8$.

Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $(x - a)Q(x)$, если при делении многочлена $P(x)$ на двучлен $x - a$ остаток равен b , а при делении $P(x)$ на многочлен $Q(x)$ остаток равен $R(x)$ (9—10).

9. $\boxed{7}$ 1) $a = -3$, $b = 1$, $Q(x) = x^2 - 1$, $R(x) = 2x + 1$;
 2) $a = 2$, $b = 5$, $Q(x) = x^2 - 1$, $R(x) = x$.
10. $\boxed{7}$ 1) $a = 2$, $b = 19$, $Q(x) = x^2 + x$, $R(x) = 3x + 1$;
 2) $a = 2$, $b = -18$, $Q(x) = x - x^2$, $R(x) = 2 - 3x$.

Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $(x - c)(x^2 - 1)$, если многочлен $P(x)$ делится на двучлен $x - c$, а остаток при делении $P(x)$ на $x^2 - 1$ равен $kx + b$ (11—12).

11. $\boxed{8}$ 1) $c = -2$, $k = 3$, $b = 6$;
 2) $c = 3$, $k = 5$, $b = 1$.
12. $\boxed{8}$ 1) $c = 4$, $k = 2$, $b = 7$;
 2) $c = -4$, $k = 2$, $b = 3$.
13. $\boxed{8}$ Не выполняя деления многочленов, найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$, если:
 1) $P(x) = x^5 - 3x^3 + x - 5$, $Q(x) = (x - 1)(x + 2)$;
 2) $P(x) = x^6 - 4x^4 + x^2 + 2$, $Q(x) = (x + 1)(x - 2)$.
14. $\boxed{8}$ Многочлен третьей степени $M(x)$ делится на многочлен $P(x)$, а при делении на многочлен $Q(x)$ дает в остатке многочлен $R(x)$. Найти многочлен $M(x)$, если:
 1) $P(x) = x^2 - 3$, $Q(x) = x^2 - 1$, $R(x) = -2x$;
 2) $P(x) = x^2 - 12$, $Q(x) = x^2 + x$, $R(x) = -5, 5x$.

§ 5. Решение алгебраических уравнений разложением на множители

Примеры с решениями

1. Решить разложением на множители уравнение
$$x^5 - x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x + 6 = 0.$$

Решение. Пропорциональность коэффициентов многочлена дает возможность сгруппировать слагаемые в левой части уравнения:

$$(x^5 - x^4 - 3x^3) - (2x^2 - 2x - 6) = 0,$$

$x^3(x^2 - x - 3) - 2(x^2 - x - 3) = 0$, $(x^3 - 2)(x^2 - x - 3) = 0$. Получаем совокупность двух уравнений $x^3 - 2 = 0$, $x^2 - x - 3 = 0$. Таким образом, корнями уравнения являются действительные числа: $x_1 = \sqrt[3]{2}$, $x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

2. Решить уравнение

$$x^4 + x^3 - 4x^2 - x + 3 = 0.$$

Решение. Многочлен $P(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - x + 3$ имеет целые коэффициенты, а его свободный член не равен нулю. Поэтому целый корень многочлена, если он есть, содержится среди целых делителей свободного члена: ± 1 , ± 3 .

Так как $P(1) = 0$, то многочлен, стоящий в левой части уравнения, делится на двучлен $x - 1$ и число 1 является одним из корней уравнения. Выполнив деление многочлена $P(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - x + 3$ на $x - 1$, получим многочлен $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 3$. Число -1 — корень многочлена $Q(x)$, а значит, и многочлена $P(x)$. Выполнив деление многочлена $Q(x)$ на $x + 1$ столбиком, в частном получим трехчлен $x^2 + x - 3$, корни которого равны $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$. Таким образом, найдено четыре корня исходного уравнения: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

3. Решить уравнение

$$(x^2 - x - 2)^2 + (x^2 - x - 2)(x + 3) = 20(x + 3)^2.$$

Решение. Общих множителей у левой и правой частей уравнения нет, и $x = -3$ не является корнем уравнения. Разделив обе части уравнения на $(x + 3)^2$, получим

$$\frac{(x^2 - x - 2)^2}{(x + 3)^2} + \frac{x^2 - x - 2}{x + 3} = 20.$$

Обозначив $t = \frac{x^2 - x - 2}{x + 3}$, получим уравнение $t^2 + t - 20 = 0$.

Корни этого уравнения $t_1 = 4$, $t_2 = -5$.

Если $t = 4$, то $\frac{x^2 - x - 2}{x + 3} = 4$, $x^2 - x - 2 = 4(x + 3)$,
 $x^2 - 5x - 14 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 7$.

Если $t = -5$, то $\frac{x^2 - x - 2}{x + 3} = -5$, $x^2 - x - 2 = -5(x + 3)$,
 $x^2 + 4x + 13 = 0$. Уравнение $x^2 + 4x + 13 = 0$ не имеет действительных корней.

Ответ. $x_1 = -2$, $x_2 = 7$.

4. Решить уравнение $(x^2 - 5x + 4)(x - 2)(x - 5) = 20$.

Решение. Сведем уравнение к квадратному введением нового неизвестного.

Так как $x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1)$, то уравнение примет вид $(x - 4)(x - 1)(x - 2)(x - 5) = 20$. Перемножив те двучлены, которые дадут одинаковые первые и вторые коэффициенты в полученных трехчленах (т. е. перемножив первый и третий, второй и четвертый двучлены), получим $(x^2 - 6x + 8)(x^2 - 6x + 5) = 20$. Пусть $t = x^2 - 6x + 5$, тогда $t^2 + 3t - 20 = 0$, откуда $t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{89}}{2}$. Исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$x^2 - 6x + \frac{13 - \sqrt{89}}{2} = 0, \quad x^2 - 6x + \frac{13 + \sqrt{89}}{2} = 0.$$

Второе уравнение не имеет действительных корней, а корни первого уравнения равны $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - \frac{13 - \sqrt{89}}{2}} = 3 \pm \sqrt{\frac{5 + \sqrt{89}}{2}}$.

Ответ. $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{\frac{5 + \sqrt{89}}{2}}$.

5. Решить уравнение $2x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 4x + 8 = 0$.

Решение. Данное уравнение является возвратным: отношение крайних коэффициентов равно 4 (так как $8 : 2 = 4$), а отношение коэффициентов членов, равноудаленных от крайних членов, равно -2 (так как $4 : (-2) = -2$), т. е. первое отношение является квадратом второго. Так как $x = 0$ не является корнем уравнения, то, разделив это уравнение на x^2 , получим

$$2x^2 - 2x - 11 + \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2} = 0,$$
$$2\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 2\left(x - \frac{2}{x}\right) - 11 = 0.$$

Пусть $x - \frac{2}{x} = t$, тогда $x^2 + \frac{4}{x^2} = t^2 + 4$. Исходное уравнение запишем в виде $2(t^2 + 4) - 2t - 11 = 0$, $2t^2 - 2t - 3 = 0$, откуда $t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$.

Следовательно, уравнение равносильно совокупности уравнений

$$x - \frac{2}{x} = \frac{1 + \sqrt{7}}{2}, \quad x - \frac{2}{x} = \frac{1 - \sqrt{7}}{2}.$$

Корни первого уравнения равны $x_{1,2} = \frac{1 + \sqrt{7} \pm \sqrt{40 + 2\sqrt{7}}}{4}$,

а корни второго равны $x_{3,4} = \frac{1 - \sqrt{7} \pm \sqrt{40 - 2\sqrt{7}}}{4}$.

Ответ. $x_{1,2} = \frac{1 + \sqrt{7} \pm \sqrt{40 + 2\sqrt{7}}}{4}$, $x_{3,4} = \frac{1 - \sqrt{7} \pm \sqrt{40 - 2\sqrt{7}}}{4}$.

6. Решить уравнение $(x^2 + 5x + 6)(x^2 + 10x + 6) + 6x^2 = 0$.

Решение. Заметим, что первые коэффициенты и свободные члены в каждом из трехчленов равны и $x = 0$ не является корнем уравнения. Разделив уравнение на x^2 , получим

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{x} \cdot \frac{x^2 + 10x + 6}{x} + 6 = 0,$$

$$\left(x + \frac{6}{x} + 5\right)\left(x + \frac{6}{x} + 10\right) + 6 = 0.$$

Пусть $x + \frac{6}{x} + 5 = t$. Тогда $x + \frac{6}{x} + 10 = t + 5$, $t(t + 5) + 6 = 0$, $t^2 + 5t + 6 = 0$, откуда $t_1 = -2$, $t_2 = -3$.

Задача сводится к решению совокупности двух уравнений

$$x + \frac{6}{x} + 5 = -2, \quad x + \frac{6}{x} + 5 = -3.$$

Корни первого уравнения $x_1 = -1$, $x_2 = -6$, корни второго $x_{3,4} = -4 \pm \sqrt{10}$.

Ответ. $x_1 = -1$, $x_2 = -6$, $x_{3,4} = -4 \pm \sqrt{10}$.

Задания для самостоятельной работы

Найти корни многочлена (1—2).

1. 4 1) $x^3 - 6x^2 + 3x + 10$;

2) $x^3 + 4x^2 - 7x - 10$.

2. 5 1) $x^5 + x^4 - 6x^3 - x^2 - x + 6$;

2) $x^5 + x^4 - 6x^3 + x^2 - x - 6$.

Решить уравнение (3—4).

3.5 1) $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$;

2) $x^3 + 3x^2 - 2 = 0$.

4.6 1) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 8x + 4 = 0$;

2) $x^4 + x^3 - 5x^2 - 3x + 6 = 0$.

Решить уравнение (5—8).

5.7 1) $(x^2 + x + 4)(x^2 + 2x + 4) = 30x^2$;

2) $(x^2 - x - 2)(x^2 - 3x - 18) = 16x^2$.

6.7 1) $(x - 1)(x + 2)(x^2 + 4x - 32) = 52x^2$;

2) $(x - 6)(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) + 6x^2 = 0$.

7.7 1) $(x^3 + 7x^2 + 12x)(x - 1) = 21$;

2) $(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)(x - 4) = 25$.

8.7 1) $6x^5 - 11x^4 - 11x + 6 = 0$; 2) $78x^6 - 133x^5 + 133x - 78 = 0$.

При каких значениях a уравнение имеет ровно три корня (9—10)?

9.8 1) $(a^3 + 8)x^4 + (a^2 - 1)x^2 + a + \sqrt{a^2} = 0$;

2) $(4 - a^2)x^4 + (a^2 + 3a + 2)x^2 - a - \sqrt{a^2} = 0$.

10.8 1) $(a^2 - 9)x^4 + (a^3 - 8)x^2 + a + \sqrt{a^2 + 2a + 1} + 1 = 0$;

2) $\left(a - \frac{1}{a}\right)x^4 + \frac{a+1}{a-3}x^2 + a + \sqrt{a^2 - 4a + 4} - 2 = 0$.

Найти значения a , при которых уравнение имеет единственный корень (11—12).

11.9 1) $(1 - a^2)x^4 + (a - 3)x + a + 2 - \sqrt{a^2 + 4a + 4} = 0$;

2) $(8a^3 + 1)x + (a^2 - a - 2)x^2 + a - 3 + \sqrt{a^2 - 6a + 9} = 0$.

12.9 1) $\frac{a-1}{a+2}x^4 + (a^2 - 2a - 3)x^2 + 2 - a - \sqrt{4 - 4a + a^2} = 0$;

2) $(a^2 - 2a)x^4 + \left(a - \frac{1}{a}\right)x^2 + a + 1 - \sqrt{a^2 + 2a + 1} = 0$.

§ 6. Делимость двучленов $x^m \pm a^m$ на $x \pm a$

Примеры с решениями

1. Доказать равенство

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}). \quad (1)$$

Решение. Рассмотрим сумму n первых членов геометрической прогрессии, в которой первый член равен 1, а знаменатель равен t , т. е. сумму $S_n = 1 + t + \dots + t^{n-1}$, где $t \neq 0$, $t \neq 1$.

Тогда $S_n = \frac{1-t^n}{1-t}$, откуда

$$1-t^n = (1-t)(1+t+\dots+t^{n-1}). \quad (2)$$

Чтобы воспользоваться формулой (2), преобразуем левую часть равенства (1):

$$x^n - a^n = x^n \left(1 - \left(\frac{a}{x}\right)^n\right). \quad (3)$$

Полагая $\frac{a}{x} = t$, из равенств (3) и (2) находим

$$\begin{aligned} x^n - a^n &= x \left(1 - \frac{a}{x}\right) x^{n-1} \left(1 + \frac{a}{x} + \left(\frac{a}{x}\right)^2 + \dots + \left(\frac{a}{x}\right)^{n-2} + \left(\frac{a}{x}\right)^{n-1}\right) = \\ &= (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}). \end{aligned}$$

Формула (1) доказана.

2. Доказать, что при любых $n \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}$ многочлен $P(x) = x^{m+n} - x^n - x^m + 1$ делится на $(x-1)^2$.

Решение. Так как $P(x) = x^{m+n} - x^n - (x^m - 1) = x^n(x^m - 1) - (x^m - 1) = (x^m - 1)(x^n - 1)$, многочлены $x^m - 1$ и $x^n - 1$ делятся на $x - 1$, то многочлен $P(x)$ делится на $(x-1)^2$.

Задания для самостоятельной работы

1. [7] Используя результат примера 1, доказать формулы $a^{2n+1} - b^{2n+1} = (a-b)(a^{2n} + a^{2n-1}b + \dots + ab^{2n-1} + b^{2n})$, $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$.
2. [7] Доказать, что при любом $n \in \mathbb{N}$ многочлен $P(x) = x^{n+2} - 2x^{n+1} + x^n - x^2 + 2x - 1$ делится на $(x-1)^3$.
3. [8] Доказать, что при любых $m \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ многочлен $P(x) = x^{2m+n+1} + x^n - x^{2m+1} - 1$ делится на $x^2 - 1$.
4. [9] Доказать, что при любых $n \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}$ многочлен $P(x) = x^{m+n+1} - x^{m+n} - x^{m+1} - x^{n+1} + x^n + x^m + x - 1$ делится на $(x-1)^3$.

§ 7. Симметрические многочлены

Примеры с решениями

1. Пусть $x+y=u$, $xy=v$, $S_n = x^n + y^n$. Докажем рекуррентную формулу

$$S_n = uS_{n-1} - vS_{n-2}, \quad (1)$$

позволяющую последовательно выразить через элементарные симметрические многочлены $x+y$ и xy суммы S_3 , S_4 , S_5 , S_6 и т. д.

Решение. Воспользуемся равенством

$$(x+y)(x^{n-1}+y^{n-1})=x^n+y^n+xy(x^{n-2}+y^{n-2}). \quad (2)$$

Так как $x+y=u$, $xy=v$, $S_k=x^k+y^k$, то из равенства (2) получаем $uS_{n-1}=S_n+vS_{n-2}$, откуда следует формула (1).

2. Решить симметрическую систему уравнений

$$\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=91, \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases}$$

Решение. Так как $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v$, где $u=x+y$, $v=xy$, то

$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(u^2-2v)^2-2v^2=u^4-4u^2v+2v^2$$

и данная система преобразуется к виду

$$\begin{cases} u^4-4u^2v+3v^2=91, \\ u^2=7+3v. \end{cases}$$

Исключая из этой системы u^2 , получаем $(7+3v)^2-4(7+3v)v+3v^2=91$, откуда $14v=42$, $v=3$, $u^2=16$. Следовательно, данная система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x+y=4, \\ xy=3; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-4, \\ xy=3 \end{cases}$$

и имеет 4 решения: (1; 3), (3; 1), (-1; -3), (-3; -1).

3. Пусть $x+y+z=u$, $xy+yz+zx=v$, $xyz=w$, выразим симметрический многочлен $x^3+y^3+z^3$ через элементарные симметрические многочлены u , v , w .

Решение. Используя равенство $(x+y+z)^3=$
 $=((x+y)+z)^3=(x+y)^3+3(x+y)^2z+3(x+y)z^2+z^3=x^3+y^3+$
 $+z^3+3x^2y+3xy^2+3x^2z+6xyz+3y^2z+3xz^2+3yz^2=x^3+y^3+$
 $+z^3+3xy(x+y+z)+3xz(x+y+z)+3yz(x+y+z)-3xyz=x^3+$
 $+y^3+z^3+3(x+y+z)(xy+xz+yz)-3xyz$, получаем

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+xz+yz)+3xyz, \quad (3)$$

т. е. $x^3+y^3+z^3=u^3-3uv+3w$.

Задания для самостоятельной работы

1. [6] Выразить симметрический многочлен P через симметрические многочлены $u=x+y$, $v=xy$, если:

1) $P=x^5+y^5$;

2) $P=x^6+y^6$.

2. [7] Решить симметрическую систему уравнений:

$$1) \begin{cases} 2(x+y) = 5xy, \\ 8(x^3+y^3) = 65; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{1}{xy} - \frac{1}{x+y} = \frac{1}{2}, \\ x^2y + xy^2 = 2. \end{cases}$$

3. [7] Разложить на множители симметрический многочлен P , если:

$$1) P = x^2 + xy^2 + x^2y + y^2 + x + y + 2xy;$$

$$2) P = x^2y + xy^2 + x^2 + x + y^2 + y + 3xy.$$

§ 8. Многочлены от нескольких переменных

Примеры с решениями

1. Разложить на множители однородный многочлен $P = 8x^2 + 2xy - 3y^2$.

Решение. Преобразуем многочлен $P = 8x^2 + 6xy - 4xy - 3y^2 = 2x(4x + 3y) - y(4x + 3y)$. Отсюда

$$P = (4x + 3y)(2x - y).$$

2. Разложить на множители многочлен $P = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ и доказать, что для всех неотрицательных u, v, w справедливо неравенство

$$\frac{u+v+w}{3} \geq \sqrt[3]{uvw},$$

связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое трех неотрицательных чисел.

Решение. В §7 (пример 3, формула (3)) было получено равенство, которое можно записать в виде

$$P = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)^3 - 3(x+y+z)(xy+xz+yz),$$

откуда следует, что $P = (x+y+z)((x+y+z)^2 - 3(xy+xz+yz))$, где $(x+y+z)^2 - 3(xy+xz+yz) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = \frac{1}{2}((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2)$.

Следовательно,

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2).$$

Если $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, то $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$. Полагая $x^3 = u, y^3 = v, z^3 = w$, получаем $\frac{u+v+w}{3} \geq \sqrt[3]{uvw}$.

Задания для самостоятельной работы

1. [5] Разложить на множители многочлен P , если:
1) $P = 3x^2 - 2xy - 8y^2$; 2) $P = 10x^2 - 13xy - 3y^2$.

Разложить на множители многочлен (2—3).

2. [5] 1) $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 2xyz$;
2) $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 3xyz$.
3. [6] 1) $x^3 + xy(x + y) + y^3 + yz(y + z) + z^3 + zx(z + x)$;
2) $x^3y^2 + y^3z^2 + z^3x^2 - x^2y^3 - y^2z^3 - z^2x^3$.

§ 9. Формулы сокращенного умножения для старших степеней. Бином Ньютона

Примеры с решениями

1. Записать разложение бинома $\left(2a - \frac{1}{2a}\right)^5$.

Решение. $\left(2a - \frac{1}{2a}\right)^5 = C_5^0(2a)^5 + C_5^1(2a)^4\left(-\frac{1}{2a}\right) + C_5^2(2a)^3\left(-\frac{1}{2a}\right)^2 + C_5^3(2a)^2\left(-\frac{1}{2a}\right)^3 + C_5^4(2a)\left(-\frac{1}{2a}\right)^4 + C_5^5\left(-\frac{1}{2a}\right)^5 =$
 $= 1 \cdot 32a^5 + 5 \cdot 16a^4\left(-\frac{1}{2a}\right) + 10 \cdot 8a^3 \cdot \frac{1}{4a^2} + 10 \cdot 4a^2 \cdot \left(-\frac{1}{8a^3}\right) +$
 $+ 5 \cdot 2a \cdot \frac{1}{16a^4} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{32a^5}\right) = 32a^5 - 40a^3 + 20a - \frac{5}{a} + \frac{5}{8a^3} - \frac{1}{32a^5}$.

2. Найти четвертый член разложения $(2 - \sqrt{x})^{11}$.

Решение. Полагая в формуле (1) $x = 2$, $a = -\sqrt{x}$, $m = 11$, $n + 1 = 4$ (откуда $n = 3$) и пользуясь формулой общего члена разложения (2), находим

$$T_4 = T_{3+1} = C_{11}^3 \cdot 2^{11-3} (-\sqrt{x})^3 = \frac{11!}{(11-3)!3!} \cdot 2^8 (-x\sqrt{x}) =$$
$$= \frac{9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 256 (-x\sqrt{x}) = -165 \cdot 256x\sqrt{x} = -42\,240x\sqrt{x}.$$

3. Найти член разложения бинома $(\sqrt{x} - x)^{10}$, содержащий x^7 .

Решение. Пусть x^7 содержится в члене T_{n+1} . Пользуясь формулой (2) при $m = 10$, найдем номер n искомого члена разложения из равенства $(\sqrt{x})^{10-n} \cdot x^n = x^7$, где $0 \leq n \leq 10$. Преобразовав левую часть этого равенства, получим $x^{5 + \frac{n}{2}} = x^7$, откуда $5 + \frac{n}{2} = 7$, $n = 4$. Таким образом, искомый член $T_{4+1} = T_5 = C_{10}^4 x^7 = 210x^7$.

4. Найти коэффициент при x^8 многочлена

$$P(x) = (1 + x^2 - x^3)^9.$$

Решение. Обозначим $x^2 - x^3 = t$, тогда

$$t^3 = x^6(1-x)^3 = x^6 - 3x^7 + 3x^8 + \dots, \quad t^4 = x^8(1-x)^4 = x^8 + \dots$$

Так как t, t^2 — многочлены степени не выше семи, а t^5, t^6, \dots, t^9 — многочлены степени не ниже десяти, то x^8 содержат лишь четвертый и пятый члены разложения бинома $(1+t)^9$.

Пусть a — коэффициент при x^8 многочлена $P(x)$. Тогда $a = 3C_9^3 + C_9^4$.

Задания для самостоятельной работы

Записать разложение бинома (1—2).

1. [4] 1) $(1 + 3a)^4$; 2) $(3b + 1)^4$;

3) $(2a - b)^5$; 4) $(x - 2y)^5$.

2. [5] 1) $\left(\frac{1}{2} - \sqrt{2}\right)^6$; 2) $\left(\sqrt{3} - \frac{1}{3}\right)^6$;

3) $\left(x - \frac{1}{2x}\right)^7$; 4) $\left(\frac{1}{2y} - y\right)^8$.

3. [6] Найти шестой член разложения:

1) $(a - \sqrt{a})^{11}$; 2) $\left(\sqrt{a} - \frac{1}{a}\right)^{10}$.

4. [6] Найти седьмой член разложения:

1) $\left(\frac{x^2}{2} + \sqrt{x}\right)^{12}$; 2) $\left(y^2 + \frac{\sqrt{y}}{2}\right)^{11}$.

5. [8] Найти член разложения бинома:

1) $(\sqrt{a} + \sqrt[3]{a})^8$, содержащий a^3 ;

2) $(\sqrt[3]{b} + \sqrt{b})^{12}$, содержащий b^7 ;

3) $\left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{15}$, не содержащий x ;

4) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{18}$, содержащий x^{-1} .

6. [9] 1) Найти четвертый член разложения бинома $\left(\frac{\sqrt{a}}{b} + \frac{\sqrt{b}}{a}\right)^m$, если коэффициент третьего члена равен 78.

2) Найти пятый член разложения бинома $\left(\frac{\sqrt{x}}{y} + \frac{y}{\sqrt{x}}\right)^m$, если коэффициент третьего члена равен 91.

7. [8] Найти члены, не содержащие иррациональности, в разложении бинома S , если:

1) $S = (\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^5$;

2) $S = (\sqrt[5]{3} + \sqrt[7]{2})^{24}$.

8. [9] Найти коэффициент при x^3 многочлена $P(x)$, если:

1) $P(x) = (1 - x + x^2)^3$;

2) $P(x) = (1 + 2x - 3x^2)^4$.

§ 10. Системы уравнений

Примеры с решениями

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 2y - 1 = 0, \\ y^2 - 2x + 6y + 14 = 0. \end{cases}$$

Решение. Сложив уравнения системы, получим $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 0$, откуда $x=3$, $y=-2$. Пара чисел $x=3$ и $y=-2$, как показывает проверка, образует решение системы.

Ответ. (3; -2).

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^3}{y} - 2xy = 16, \\ \frac{y^3}{2x} + 3xy = 25. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} \frac{x^3}{y} = 16 + 2xy, & (1) \\ \frac{y^3}{x} = 50 - 6xy. & (2) \end{cases}$$

Перемножив почленно уравнения этой системы, получим уравнение

$$13(xy)^2 - 4xy - 800 = 0, \quad (3)$$

которое вместе с одним из уравнений системы (1)—(2) образует систему, равносильную системе (1)—(2).

Из уравнения (3) находим $xy = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 10400}}{13} = \frac{2 \pm 102}{13}$, откуда $xy = 8$ или $xy = -\frac{100}{13}$.

Если $xy=8$, то из уравнения (1) следует, что $x^4=2^8$, откуда $x_1=4$, $x_2=-4$, и тогда $y_1=2$, $y_2=-2$.

Если $xy=-\frac{100}{13}$, то $x^4=-\frac{1800}{169}$. Это уравнение не имеет действительных корней.

Ответ. (4; 2), (-4; -2).

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy + \frac{y^4}{x} = \frac{x^2}{y} + y^2, \\ \frac{1}{y} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{4}{x^2} = 0. \end{cases}$$

Решение. Так как $xy \neq 0$, то систему можно записать в виде

$$\begin{cases} y^2(x^2 + y^3) = x(x^2 + y^3), \\ x^2 + y^3 = -4y. \end{cases}$$

Если $x^2 + y^3 = 0$, то из второго уравнения следует, что $y=0$, что невозможно.

Если $y^2 = x$, то из второго уравнения системы следует, что $y^3 + y^2 + 4 = 0$ или $(y+2)(y^2 - y + 2) = 0$, откуда $y = -2$ (уравнение $y^2 - y + 2 = 0$ не имеет действительных корней). Итак, $y = -2$, $x = y^2 = 4$.

Ответ. (4; -2).

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^5 + 4x^4 + 5y^2 = 0, \\ x^3 - \frac{y^3}{x^2} = xy - y^2. \end{cases}$$

Решение. Второе уравнение исходной системы равносильно каждому из уравнений

$$x^2 \left(x + \frac{y^2}{x^2} \right) = y \left(x + \frac{y^2}{x^2} \right), \quad (x^2 - y) \left(x + \frac{y^2}{x^2} \right) = 0.$$

а) Если $x^2 = y$, то из первого уравнения исходной системы получаем $xy^2 + 4y^2 + 5y^2 = 0$, откуда следует, что либо $y=0$, либо $x=-9$. Но если $y=0$, то $x=0$, а при $x=0$ второе уравнение теряет смысл. Итак, $x=-9$, $y=x^2=81$.

б) Если $x + \frac{y^2}{x^2} = 0$, то $x^3 + y^2 = 0$. Из первого уравнения системы находим $x^5 + 4x^4 - 5x^3 = 0$, $x^2 + 4x - 5 = 0$ ($x \neq 0$), откуда $x_1 = -5$, $x_2 = 1$.

Пусть $x = -5$, тогда $y^2 = 125$, откуда $y = \pm 5\sqrt{5}$.

Пусть $x = 1$, тогда $y^2 = -1$. Это уравнение не имеет действительных корней.

Таким образом, система имеет три действительных решения: $(-9; 81)$, $(-5; 5\sqrt{5})$, $(-5; -5\sqrt{5})$.

Ответ. $(-9; 81)$, $(-5; 5\sqrt{5})$, $(-5; -5\sqrt{5})$.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 + 8x + 10y + 12 = 0, \\ x^2 + 3xy + 2y^2 - x + y - 6 = 0. \end{cases}$$

Решение. Решим каждое из уравнений системы как квадратное относительно x или y . Тогда исходная система преобразуется к виду

$$\begin{cases} (x + 2y + 2)(x - y + 6) = 0, \\ (x + 2y - 3)(x + y + 2) = 0 \end{cases}$$

и равносильна совокупности четырех систем линейных уравнений.

Ответ. $(-2; 0)$, $(-3; 3)$, $(-4; 2)$.

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (2x - y)^2 = 4 + z^2, \\ (z - y)^2 = 2 + 4x^2, \\ (z + 2x)^2 = 3 + y^2. \end{cases}$$

Решение. Обозначим $2x = u$, $-y = v$ и запишем исходную систему в следующем виде:

$$\begin{cases} u + v - z = \frac{4}{u + v + z}, \\ v + z - u = \frac{2}{u + v + z}, \\ z + u - v = \frac{3}{u + v + z}. \end{cases} \quad (1)$$

Сложив уравнения системы (1) и обозначив $u + v + z = t$, получим уравнение $t = \frac{9}{t}$, откуда $t_1 = 3$, $t_2 = -3$. Подставив найденные значения суммы $u + v + z$ в систему (1), найдем искомые значения u , v и z .

Если $t = u + v + z = 3$, то

$$\begin{aligned} z = \frac{1}{2} \left(t - \frac{4}{t} \right) = \frac{5}{6}, \quad u = \frac{1}{2} \left(t - \frac{2}{t} \right) = \frac{7}{6}, \quad v = \frac{1}{2} \left(t - \frac{3}{t} \right) = 1, \\ x = \frac{u}{2} = \frac{7}{12}, \quad y = -v = -1. \end{aligned}$$

Аналогично если $t = -3$, то $x = -\frac{7}{12}$, $y = 1$, $z = -\frac{5}{6}$.

Ответ. $\left(\frac{7}{12}; -1; \frac{5}{6} \right)$, $\left(-\frac{7}{12}; 1; -\frac{5}{6} \right)$.

7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - z^3 - xyz + 11 = 0, \\ x^3 - y^3 + z^3 - xyz - 21 = 0, \\ y^3 + z^3 - x^3 - xyz - 3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Сложив уравнения попарно, получим систему

$$\begin{cases} x^3 = xyz + 5, \\ y^3 = xyz - 4, \\ z^3 = xyz + 12, \end{cases}$$

равносильную исходной системе. Перемножим уравнения этой системы и обозначим $t = xyz$, тогда

$$t^3 = t^3 + 13t^2 - 8t - 240,$$

$$13t^2 - 8t - 240 = 0, \text{ откуда } t_1 = -4, t_2 = \frac{60}{13}.$$

Если $t = -4$, то $x^3 = 1$, $y^3 = -8$, $z^3 = 8$, откуда $x_1 = 1$, $y_1 = -2$, $z_1 = 2$. Если $t = \frac{60}{13}$, то $x^3 = \frac{125}{13}$, $y^3 = \frac{8}{13}$, $z^3 = \frac{216}{13}$, откуда $x_2 = \frac{5}{\sqrt[3]{13}}$, $y_2 = \frac{2}{\sqrt[3]{13}}$, $z_2 = \frac{6}{\sqrt[3]{13}}$.

Ответ. $(1; -2; 2)$, $\left(\frac{5}{\sqrt[3]{13}}; \frac{2}{\sqrt[3]{13}}; \frac{6}{\sqrt[3]{13}}\right)$.

8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x - 6y + 4z + xy = 0, \\ 3x - 5y + z - y^2 = 0, \\ x - 4y - 2z - yz = 0. \end{cases}$$

Решение. Вычитая из второго уравнения, умноженного на 2, сумму первого и третьего, получаем

$$y(z - x - 2y) = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) вместе с первыми двумя уравнениями данной системы образует систему, равносильную данной. Из уравнения (1) следует, что либо $y = 0$, либо

$$z = x + 2y. \quad (2)$$

Если $y = 0$, то $x = 0$, $z = 0$ и $(0; 0; 0)$ — решение исходной системы.

Если справедливо равенство (2), то из первых двух уравнений исходной системы получаем

$$\begin{cases} 9x + 2y + xy = 0, & (3) \\ 4x - 3y - y^2 = 0. & (4) \end{cases}$$

Вычитая из уравнения (3), умноженного на 4, уравнение (4), умноженное на 9, находим

$$35y + 4xy + 9y^2 = y(4x + 9y + 35) = 0,$$

откуда

$$4x = -9y - 35. \quad (5)$$

Из уравнений (4) и (5) следует, что $y^2 + 12y + 35 = 0$, откуда $y_1 = -5$, $y_2 = -7$.

Если $y = -5$, то из уравнений (5) и (2) находим $x = \frac{5}{2}$, $z = -\frac{15}{2}$, а если $y = -7$, то $x = 7$, $z = -7$.

Ответ. $(0; 0; 0)$, $(\frac{5}{2}; -5; -\frac{15}{2})$, $(7; -7; -7)$.

9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2xy^2 + 8zx^2 - 4yz^2 = 6xyz, \\ 8xz^2 - 4yx^2 + 2zy^2 = 6xyz, \\ 2xy - 4xz + 2yz = 3. \end{cases}$$

Решение. Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$y^2 + 4x^2z - 2yz^2 - 4xz^2 + 2x^2y - y^2z = 0.$$

Разложим на множители левую часть уравнения:

$$\begin{aligned} y^2(x-z) + 4xz(x-z) + 2y(x^2-z^2) &= 0, \\ (x-z)(y(y+2z) + 2x(y+2z)) &= 0, \\ (x-z)(y+2z)(y+2x) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Заметим, что исходная система, равносильная системе, состоящей из ее первого и третьего уравнений и уравнения (1), равносильна также совокупности трех систем, получаемых присоединением к первому и третьему уравнениям соответственно уравнений

$$x = z, \quad (2)$$

$$y = -2z, \quad (3)$$

$$y = -2x. \quad (4)$$

1) Подставляя из уравнения (2) $x = z$ в первое и третье уравнения исходной системы, получаем

$$\begin{aligned} x(y^2 - 5xy + 4x^2) = x(y-x)(y-4x) &= 0, \\ 4xy - 4x^2 = 4x(y-x) &= 3. \end{aligned} \quad (5)$$

Если $x = 0$ или $y = x$, то из (5) следует, что $0 = 3$. Если $y = 4x$, то из (5) находим $x^2 = \frac{1}{4}$, $x = \pm \frac{1}{2}$. В этом случае система имеет два решения: $(\frac{1}{2}; 2; \frac{1}{2})$ и $(-\frac{1}{2}; -2; -\frac{1}{2})$.

2) Подставляя $y = -2z$ (см. (3)) в первое и третье уравнения исходной системы, получаем

$$\begin{aligned} z(2z^2 + 5xz + 2x^2) = z(z + 2x)(x + 2z) = 0, \\ -4z(z + 2x) = 3. \end{aligned} \quad (6)$$

Если $z = 0$ или $z + 2x = 0$, то из уравнения (6) следует, что $0 = 3$. Если $x = -2z$, то из уравнения (6) находим $z^2 = \frac{1}{4}$, $z = \pm \frac{1}{2}$. В этом случае система имеет решения

$$\left(-1; -1; \frac{1}{2}\right) \text{ и } \left(1; 1; -\frac{1}{2}\right).$$

3) Подставляя $y = -2x$ (см. (4)) в первое и третье уравнения исходной системы, получаем

$$\begin{aligned} x(2x^2 + 5xz + 2z^2) = x(x + 2z)(z + 2x) = 0, \\ -4x(x + 2z) = 3. \end{aligned} \quad (7)$$

Если $x = 0$ или $x + 2z = 0$, то из уравнения (7) следует, что $0 = 3$. Если $z = -2x$, то из уравнения (7) находим $x^2 = \frac{1}{4}$, $x = \pm \frac{1}{2}$. В этом случае система имеет два решения:

$$\left(\frac{1}{2}; -1; -1\right) \text{ и } \left(-\frac{1}{2}; 1; 1\right).$$

$$\begin{aligned} \text{Ответ. } & \left(\frac{1}{2}; -1; -1\right), \left(-\frac{1}{2}; 1; 1\right), \left(\frac{1}{2}; 2; \frac{1}{2}\right), \\ & \left(-\frac{1}{2}; -2; -\frac{1}{2}\right), \left(1; 1; -\frac{1}{2}\right), \left(-1; -1; \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Задания для самостоятельной работы

Решить систему уравнений (1—15).

$$1. \boxed{4} \quad 1) \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4, \\ x + xy + y = 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 + xy = 7. \end{cases}$$

$$2. \boxed{5} \quad 1) \begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17, \\ xy + x + y = 5; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = \frac{9}{2}, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

$$3. \boxed{4} \quad 1) \begin{cases} 2y^2 - 4xy + 3x^2 = 17, \\ y^2 - x^2 = 16; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 3, \\ x^2 + 2xy - 5y^2 = -5. \end{cases}$$

$$4.4) \quad 1) \begin{cases} x^2 = 3x + 4y, \\ y^2 = 4x + 3y; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 = 5x + 3y, \\ y^2 = 3x + 5y. \end{cases}$$

$$5.4) \quad 1) \begin{cases} x^2 - 4x + 4y + 27 = 0, \\ y^2 + 2x + 8y + 10 = 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 - 6x - 3y + 1 = 0, \\ y^2 + 2x + 9y + 14 = 0. \end{cases}$$

$$6.5) \quad 1) \begin{cases} \frac{x^3}{2y} + 3xy = 25, \\ \frac{y^3}{x} - 2xy = 16; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{x^4}{y^2} + xy = 72, \\ \frac{y^4}{x^2} + xy = 9. \end{cases}$$

$$7.7) \quad 1) \begin{cases} 8x^2 - 2xy - y^2 - 30x - 9y - 8 = 0, \\ 8x^2 + 6xy + y^2 - 2y - 8 = 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 - 10x - 8y - 12 = 0, \\ 2x^2 + 3xy + y^2 + x - y - 6 = 0. \end{cases}$$

$$8.6) \quad 1) \begin{cases} 2x^2y - x^4 = 3, \\ 2y^3 - x^2y^2 = 4; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^4 + 4x^2y = -3, \\ x^2y^2 + 4y^3 = -1. \end{cases}$$

$$9.6) \quad 1) \begin{cases} \frac{x}{y} + x^4y = \frac{1}{xy^2} + x^2, \\ \frac{1}{x} + x^2y^2 + 4y^2 = 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + \frac{1}{x^3y^3} + x^3y = \frac{1}{xy^2}, \\ \frac{1}{x} + x^3y^3 + 10y^2 = 0. \end{cases}$$

$$10.7) \quad 1) \begin{cases} \frac{x^2}{y^2} (1 - 2y) = 4x + 2y, \\ 2x^2 + xy = x + y^2; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{y^2}{x^2} (3 + 2x) = 3y - x, \\ y^2 + 2xy = 3x^2 - 2y. \end{cases}$$

$$11. \boxed{5} \quad 1) \begin{cases} 2yz + \frac{3}{x} + 3 = 0, \\ xy + \frac{4}{z} - 2 = 0, \\ xz + \frac{2}{y} + 2 = 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2xy + \frac{3}{z} + 3 = 0, \\ xz + \frac{4}{y} - 2 = 0, \\ yz + \frac{2}{x} + 2 = 0. \end{cases}$$

$$12. \boxed{6} \quad 1) \begin{cases} (3y - x)^2 = 2 + z^2, \\ (3y + z)^2 = 3 + x^2, \\ (z - x)^2 = 4 + 9y^2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} (x + y)^2 = 3 + 4z^2, \\ (2z - y)^2 = 4 + x^2, \\ (2z - x)^2 = 2 + y^2. \end{cases}$$

$$13. \boxed{7} \quad 1) \begin{cases} 2x^3 - y^3 - 2z^3 + xyz + 5 = 0, \\ y^3 + 2z^3 - x^3 - 2xyz - 2 = 0, \\ x^3 - y^3 - z^3 + xyz + 4 = 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^3 + 2y^3 + z^3 + 2xyz + 22 = 0, \\ 2x^3 - 2y^3 - z^3 + xyz + 2 = 0, \\ y^3 - x^3 - z^3 + xyz - 13 = 0. \end{cases}$$

$$14. \boxed{8} \quad 1) \begin{cases} 3x - y - 5z - 2yz = 0, \\ x - 5y - z - 2z^2 = 0, \\ x + 9y - 3z + 2xz = 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x + y + 2z - x^2 = 0, \\ 10x - 3y - 3z + xz = 0, \\ 16x - y + z - xy = 0. \end{cases}$$

$$15. \boxed{9} \quad 1) \begin{cases} 4zx^2 - yz^2 + 2xy^2 = 3xyz, \\ zy^2 + 2xz^2 - 4yx^2 = 3xyz, \\ 2xy - 2xz + yz = 3; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 8zx^2 - 2xy^2 + 4yz^2 = 6xyz, \\ 4yx^2 + 2zy^2 - 8xz^2 = 6xyz, \\ 2xy + 4xz - 2yz = 3. \end{cases}$$

Контрольная работа

1. Найти частное

$$(2x^3 - x^2 - 7x + 2) : (x - 2) \quad [(2x^3 - 7x^2 + 4x - 3) : (x - 3)].$$

2. Найти корни многочлена

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3 \quad [x^4 + x^3 - x^2 + x - 2].$$

3. Записать разложение биннома

$$(1 - 2a)^6 \quad [(3b - 1)^5].$$

4. Найти числа a , b и c из равенства

$$\begin{aligned} (3x^2 + ax - b)(x + 2) &= 3x^3 + cx^2 + 3x - 2 \\ [(4x^2 - ax + b)(x - 1) &= 4x^3 - 5x^2 + cx - 3]. \end{aligned}$$

5. С помощью схемы Горнера найти частное и остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $Q(x)$, если

$$\begin{aligned} P(x) &= 4x^4 - 18x^3 - 9x^2 + 2x - 13, \quad Q(x) = x + 5 \\ [P(x) &= 5x^4 + 21x^3 + 2x^2 - 10x - 5, \quad Q(x) = x + 4]. \end{aligned}$$

6. Найти член разложения биннома $\left(\sqrt{x} - \frac{5}{\sqrt{x}}\right)^{10} \left[\left(\frac{4}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x}\right)^9\right]$, содержащий $\frac{1}{x^3} \left[\frac{1}{x}\right]$.

Глава **IV** Степень с действительным показателем

§ 1. Действительные числа

Пример с решением

Доказать, что число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ является числом иррациональным.

Решение. Предположим, что число $\sqrt{2} + \sqrt{3} = r$ — число рациональное и, очевидно, не равное нулю. Тогда верно равенство $\sqrt{3} = r - \sqrt{2}$, при возведении которого в квадрат получим $3 = r^2 - 2r\sqrt{2} + 2$, отсюда $\sqrt{2} = \frac{r^2 - 1}{2r}$. Число, стоящее в правой части равенства, — рациональное, следовательно, рациональным является и число $\sqrt{2}$, что неверно. Полученное противоречие и доказывает утверждение задачи.

Задания для самостоятельной работы

- 1.3 Привести пример рационального числа, заключенного между числами:
1) $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{5}$ и $\sqrt{7}$.
- 2.4 Привести пример иррационального числа, расположенного между числами:
1) 0,5 и 0,6; 2) 0,7 и 0,8.
- 3.4 Привести пример рационального числа, расположенного между числами:
1) π и 3,14; 2) $\sqrt{3}$ и 1,71.
- 4.5 Доказать, что число a — иррациональное, если:
1) $a = \sqrt{3}$; 2) $a = \sqrt{5}$.
- 5.6 Доказать, что иррациональным является число:
1) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$; 2) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$.
- 6.6 Выяснить, может ли быть числом рациональным:
1) сумма рационального и иррационального чисел;
2) сумма двух иррациональных чисел.
- 7.6 Привести пример двух иррациональных чисел, таких, что сумма этих чисел:
1) число иррациональное; 2) число рациональное.

8. [6] Привести пример двух иррациональных чисел, таких, что произведение этих чисел:

1) число рациональное; 2) число иррациональное.

9. [8] С помощью определения предела последовательности доказать, что число 1 является пределом последовательности, заданной формулой общего члена:

1) $b_n = 1 + \frac{1}{n}$; 2) $x_n = \frac{1}{n^2} + 1$.

§ 2. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Пример с решением

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ такова, что сумма ее членов, стоящих на нечетных местах, равна 36, а сумма ее членов, стоящих на четных местах, равна 12. Найти первый член и знаменатель геометрической прогрессии.

Решение. Пусть q — знаменатель прогрессии $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$. Тогда знаменатель прогрессии b_2, b_4, b_6, \dots , как и знаменатель прогрессии b_1, b_3, b_5, \dots , равен q^2 . Следовательно, сумма членов, стоящих на нечетных местах, равна $\frac{b_1}{1-q^2} = 36$, а сумма членов, стоящих на четных местах, равна $\frac{b_2}{1-q^2} = 12$, откуда получим систему

$$\text{уравнений } \begin{cases} \frac{b_1}{1-q^2} = 36, \\ \frac{b_2}{1-q^2} = 12. \end{cases}$$

Выразим b_1 из первого уравнения $b_1 = 36(1-q^2)$ и подставим во второе уравнение, учитывая, что $b_2 = b_1q$. Так как по условию $q \neq 1$, придем к уравнению $36q = 12$, откуда $q = \frac{1}{3}$, т. е. $b_1 = 36\left(1 - \frac{1}{9}\right) = 32$.

Задания для самостоятельной работы

Выяснить, является ли геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ бесконечно убывающей (1—3).

1. [5] 1) $b_2 = 2\sqrt{5}$, $b_7 = 3\sqrt{2}$; 2) $b_7 = 7$, $b_{10} = 5\sqrt{2}$.

2. [6] 1) $b_{12} = 1 + \sqrt{3}$, $b_{15} = 2\sqrt{2}$; 2) $b_{10} = \sqrt{6}$, $b_{14} = 1 + \sqrt{2}$.

3. [6] 1) $b_{11} = \frac{5}{1-\sqrt{2}}$, $b_{16} = \sqrt{29}$; 2) $b_6 = \frac{1}{\sqrt{3}-2}$, $b_9 = \sqrt{14}$.

Выполнить действия, предварительно обратив бесконечные периодические десятичные дроби в обыкновенные (4—5).

4. [7] 1) $\left((0,(6))^3 - \sqrt{0,(4)}\right)^{-1}$;

2) $\left(\sqrt{0,(4)} + 0,08(3)\right) \cdot 0,1(3)$.

5. [7] 1) $\sqrt{0,1(6) \cdot 2,1(6) + 2,(3) \cdot 0,(428571)} - 0,1(6)$;

2) $\sqrt{0,(63) \cdot 2,(63) + 0,(27) \cdot 3,(6)} - 1,(63)$.

6. [6] Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

1) $2, \sqrt{3}, \dots$;

2) $-\sqrt{3}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, \dots$.

7. [7] Найти сумму, все слагаемые которой, начиная с первого, являются последовательными членами геометрической прогрессии:

1) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} - 1 + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} - \dots$;

2) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - 1 + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \dots$.

8. [7] Найти первые два члена бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если:

1) $S = \frac{4}{7}, S_6 = 0,5$;

2) $S = \frac{3}{13}, S_8 = \frac{5}{27}$.

9. [8] Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна S , а сумма квадратов ее членов равна $S^{(2)}$. Найти сумму четвертых степеней членов этой прогрессии $S^{(4)}$, если:

1) $S = 2, S^{(2)} = \frac{4}{3}$;

2) $S = 3, S^{(2)} = 1,8$;

3) $S = 1 + \sqrt{2}, S^{(2)} = 1$;

4) $S = 3 + \sqrt{3}, S^{(2)} = 6$.

10. [7] В правильный треугольник со стороной, равной 4 см, вписан треугольник, стороны которого являются средними линиями данного, в полученный треугольник таким же способом вписан следующий и т. д. до бесконечности. Найти сумму:

1) периметров всех треугольников;

2) площадей всех треугольников.

§ 3. Арифметический корень натуральной степени

Пример с решением

Доказать, что при $x > |y|$ справедливо равенство

$$y\sqrt{2} \cdot \frac{2x + \sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x + \sqrt{x^2 - y^2}}} = \sqrt{(x+y)^3} - \sqrt{(x-y)^3}.$$

Решение. Преобразуем левую часть равенства. Для преобразования знаменателя воспользуемся формулой

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}},$$

получим

$$\begin{aligned} & \sqrt{x + \sqrt{x^2 - y^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - (x^2 - y^2)}}{2}} + \sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 - (x^2 - y^2)}}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{x + \sqrt{y^2}}{2}} + \sqrt{\frac{x - \sqrt{y^2}}{2}} = \sqrt{\frac{x + |y|}{2}} + \sqrt{\frac{x - |y|}{2}}. \end{aligned}$$

Выражение, стоящее в левой части, примет вид

$$y\sqrt{2} \cdot \frac{2x + \sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{\frac{x + |y|}{2}} + \sqrt{\frac{x - |y|}{2}}} = 2y \cdot \frac{2x + \sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x + |y|} + \sqrt{x - |y|}}.$$

Домножив числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное со знаменателем (избавимся от иррациональности в знаменателе), получим

$$\begin{aligned} & 2y \cdot \frac{(2x + \sqrt{x^2 - y^2})(\sqrt{x + |y|} - \sqrt{x - |y|})}{(x + |y|) - (x - |y|)} = \\ &= \frac{y}{|y|} (x + |y| + \sqrt{(x + |y|)(x - |y|)} + x - |y|)(\sqrt{x + |y|} - \sqrt{x - |y|}) = \\ &= \frac{y}{|y|} \cdot ((\sqrt{x + |y|})^3 - (\sqrt{x - |y|})^3). \end{aligned}$$

Так как по условию $|y| < x$, то все рассуждения справедливы и полученное выражение равно правой части равенства. Действительно, при $0 < y < x$ имеем $|y| = y$ и $\frac{y}{|y|} = 1$. Если $y < 0$, то $|y| = -y$ и тогда верно равенство

$$-((\sqrt{x - y})^3 - (\sqrt{x + y})^3) = (\sqrt{x + y})^3 - (\sqrt{x - y})^3.$$

Исходное равенство доказано.

Задания для самостоятельной работы

Вычислить (1—2).

1. [5] 1) $(5\sqrt[3]{4} + 0,5\sqrt[3]{108} - \sqrt[3]{500})\sqrt[3]{2}$;

2) $(5\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250})\sqrt[3]{0,5}$.

2. [5] 1) $(4\sqrt[3]{9} + 3\sqrt[3]{72} - 13\sqrt[3]{2\frac{2}{3}})\sqrt[3]{3}$;

2) $\sqrt[3]{9^{-1}}(\sqrt[3]{9} - 7\sqrt[3]{72} + 6\sqrt[3]{1125})$.

Выяснить, при каких значениях x выражение имеет смысл (3—5).

3. [7] 1) $\sqrt[4]{x^3\sqrt{x-1}}$;

2) $\sqrt[6]{x^5\sqrt{x+1}}$.

4. [7] 1) $\sqrt[8]{x^3\sqrt{1-x^2}}$;

2) $\sqrt[6]{x^5\sqrt{x^2-1}}$.

5. [7] 1) $\sqrt[8]{(x+1)^7\sqrt{x-7}}$;

2) $\sqrt[8]{(8-x)^5\sqrt{5-x}}$.

Вынести множитель из-под знака корня (6—7).

6. [6] 1) $\sqrt{18(x-2)^5}$; 2) $\sqrt{1,25(x-3)^3}$.

7. [6] 1) $\sqrt[3]{8x(x-2)^4}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}(x-3)^4}$.

Внести множитель под знак корня (8—10).

8. [6] 1) $(x-y)\sqrt{\frac{3}{y^2-x^2}}$;

2) $\frac{1}{x+y}\sqrt{5x^2-5y^2}$.

9. [7] 1) $\frac{x-y}{x+y}\sqrt{\frac{x^2+xy}{x^2-2xy+y^2}}$;

2) $\frac{x+y}{x-y}\sqrt[3]{\frac{x^2-2xy+y^2}{(x+y)^2}}$.

10. [7] 1) $5a^n\sqrt[3]{\frac{bc^n}{25a^{3n-2}}}$;

2) $3x^{m+1}\sqrt[4]{\frac{yz^5}{27x^{4m+5}}}$.

Упростить выражение (11—13).

11. [7] 1) $\sqrt[4]{(1-\sqrt[3]{2})^4(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})}$;

2) $\sqrt[6]{(1-\sqrt[3]{6})^6(1+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{36})}$.

12. [7] 1) $\sqrt{(\sqrt[3]{7}-2)^2(4+\sqrt[3]{56}+\sqrt[3]{49})}$;

2) $\sqrt[4]{(3\sqrt[3]{2}-4)^4(16+6\sqrt[3]{16}+9\sqrt[3]{4})}$.

13. [8] 1) $\sqrt[6]{(1-\sqrt[3]{6})^2}\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{48}+\sqrt[3]{36}}$;

2) $\sqrt[18]{(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3})^6}\sqrt[3]{2-2\sqrt[6]{72}+\sqrt[3]{9}}$.

14. [8] Выяснить, верно ли равенство:

1) $\sqrt{21}-\sqrt{22-2\sqrt{21}}=\sqrt{7}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}$;

2) $(\sqrt{7}+1)\sqrt{8-2\sqrt{7}}+1=(\sqrt{8}-1)\sqrt{9+4\sqrt{2}}$.

Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби (15—17).

15. [6] 1) $\frac{m+n}{1+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}$.

16. [6] 1) $\frac{a-1}{\sqrt{a-1}-\sqrt{a+2}}$; 2) $\frac{3a(b+0,5)}{\sqrt{b+2}+\sqrt{1-b}}$.

17. [6] 1) $\frac{(x-y)z}{\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}}$; 2) $\frac{x+y}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{xy}}$.

Проверить, является ли число a корнем данного уравнения (18—20).

18. [8] 1) $x^4=4$, $a=\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}$;

2) $x^6=8$, $a=\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}}$.

$$19. \boxed{8} \quad 1) x^6 = 36, a = \sqrt[3]{1 - \sqrt{7}} \sqrt[6]{8 + 2\sqrt{7}};$$

$$2) x^6 = 49, a = \sqrt[3]{1 - \sqrt{8}} \sqrt[6]{9 + 4\sqrt{2}}.$$

$$20. \boxed{8} \quad 1) x^4 + 4x^2 - 8 = 0, a = \sqrt[4]{5 - 2\sqrt{6}} - \sqrt[4]{5 + 2\sqrt{6}};$$

$$2) x^4 + 4x^2 - 12 = 0, a = \sqrt[4]{7 - 4\sqrt{3}} - \sqrt[4]{7 + 4\sqrt{3}}.$$

§ 4. Степень с рациональным и действительным показателями

Пример с решением

Упростить выражение $A = -(x + 2\sqrt{x-1})^{-\frac{1}{2}} - (x - 2\sqrt{x-1})^{-\frac{1}{2}}$ при $x \geq 1, x \neq 2$.

Решение. Так как в степень с дробным отрицательным показателем можно возводить только положительные числа, проверим, будет ли каждое из оснований степеней числом положительным. Так как $x \geq 1$, то основание степени первого слагаемого положительно, а знак основания степени второго слагаемого будет совпадать со знаком произведения:

$$(x + 2\sqrt{x-1})(x - 2\sqrt{x-1}) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 > 0$$

(по условию $x \neq 2$). Кроме того, $A < 0$. По определению степени с дробным отрицательным показателем $A = -\frac{1}{\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}} - \frac{1}{\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}}$. Чтобы избавиться от иррациональности, возведем A в квадрат, получим

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{1}{x + 2\sqrt{x-1}} + \frac{2}{\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}} + \frac{1}{x - 2\sqrt{x-1}} = \\ &= \frac{2x}{x^2 - 4x + 4} + \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} = \frac{2x}{(x-2)^2} + \frac{2}{\sqrt{(x-2)^2}} = \frac{2x}{(x-2)^2} + \frac{2}{|x-2|}. \end{aligned}$$

Рассмотрим два случая: 1) $1 \leq x < 2$; 2) $x > 2$.

$$1) A^2 = \frac{2x}{(x-2)^2} - \frac{2}{x-2} = \frac{4}{(x-2)^2};$$

$$2) A^2 = \frac{2x}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} = \frac{4x-4}{(x-2)^2}.$$

Найдем выражения для A в каждом из этих случаев:

$$1) \text{ Так как } |A| = \frac{2}{|x-2|}, A < 0 \text{ и } x-2 < 0, \text{ то } A = \frac{2}{x-2}.$$

2) Так как $|A| = \frac{2\sqrt{x-1}}{|x-2|}$, где $x > 2$ и $A < 0$, то $|x-2| = x-2$ и $A = -\frac{2\sqrt{x-1}}{x-2}$.

Ответ. $A = \frac{2}{x-2}$, если $1 \leq x < 2$; $A = -\frac{2\sqrt{x-1}}{x-2}$, если $x > 2$.

Задания для самостоятельной работы

Представить в виде степени с рациональным показателем, считая, что $a > 0$ (1—3).

1. [5] 1) $\sqrt[5]{a^3 \sqrt{a^{-1} \sqrt{a}}}$;

2) $\sqrt{a^2 \sqrt[3]{a^{-1} \sqrt{a^{-1}}}}$.

2. [5] 1) $\sqrt[3]{a \sqrt{a}} \sqrt[4]{a^{-3} \sqrt{a^{-1}}}$;

2) $\sqrt[3]{a^2 \sqrt[6]{a^{-5}}} \sqrt{a \sqrt{a}}$.

3. [5] 1) $\sqrt{a^3 \sqrt[3]{a^{-2}}} : a \sqrt[3]{a^5 \sqrt[5]{a^{-2}}}$;

2) $a : \sqrt[7]{a^3 \sqrt[5]{a^{-3} \sqrt{a}}}$.

Выполнить действия ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$) (4—5).

4. [6] 1) $\sqrt[3]{\frac{a^{-0,25} \sqrt[4]{b^{-6}}}{3^{-3} a (\sqrt{ab})^{-2,5}}}$;

2) $\sqrt{\frac{a^{-0,(6)} \sqrt{c^{-0,5}}}{(-2)^{-6} \sqrt[3]{a^{-2} c^{-0,75}}}}$.

5. [7] 1) $(a^{0,7} + a^{0,3}) : (a^{1,1} + a^{0,7}) : (\sqrt[5]{a \sqrt{a}})$;

2) $(a^{0,6} b^{1,4} + a^{0,7} b^{0,8}) : (a^{1,5} + a^{1,4} b^{0,6})$.

Вычислить (6—7).

6. [8] 1) $\left(\frac{\sqrt[4]{3^{1-n} \cdot 75^{0,5}}}{(3^n \cdot 5^{-2,5})^{-0,25}} \right)^{2,(6)}$, $n \in \mathbf{Z}$;

2) $\left(\frac{\sqrt[4]{(\sqrt{5})^{1-2n} (0,25 \sqrt{5})^{0,5}}}{(5^n \cdot 0,5^{-2,5})^{-0,25}} \right)^{2,(6)}$, $n \in \mathbf{Z}$;

$$7. \boxed{8} \quad 1) (0,2^{0,2} + 3^{0,3}) : \left(5 \cdot 3^{-0,7} + \frac{1}{3} \cdot 0,2^{-0,8} \right);$$

$$2) (7^{0,25} - 0,25^{0,25}) : \left(\frac{7^{-0,75}}{4} - \frac{0,25^{1,25}}{7} \right).$$

Сократить дробь ($a > 0$, $x > 0$) (8—9).

$$8. \boxed{7} \quad 1) \frac{(0,2 + a^{0,2})^3 + (0,2 - a^{0,2})^3 + 0,032}{(0,2 + a^{0,2})^3 - (0,2 - a^{0,2})^3 + 4a^{0,6}};$$

$$2) \frac{(x^{0,3} + a^{-0,3})^3 + (x^{0,3} - a^{-0,3})^3 + 4x^{0,9}}{(x^{0,3} + a^{-0,3})^3 - (x^{0,3} - a^{-0,3})^3 + 4a^{-0,9}}.$$

$$9. \boxed{7} \quad 1) \frac{(x^{0,7} + \sqrt{7})^3 + (x^{0,7} - \sqrt{7})^3}{x^{2,1} + 21x^{0,7}};$$

$$2) \frac{(x^{1,2} + \sqrt{2})^3 + (x^{1,2} - \sqrt{2})^3}{x^{2,4} + 6}.$$

Упростить выражение и найти его числовое значение (10—11).

$$10. \boxed{8} \quad 1) \left(a - 3b + \frac{4b^2}{a+b} \right) \cdot ((a^{-0,5} + b^{-0,5})^{-2} + (a^{-0,5} - b^{-0,5})^{-2})$$

$$\text{при } a = \sqrt[3]{12}, b = \sqrt[3]{18};$$

$$2) ((a\sqrt{a} + b\sqrt{b})(a^{0,5} + b^{0,5})^{-1} + 3(ab)^{0,5})^{0,5} - \sqrt{a}$$

$$\text{при } a = 0,7, b = 2, (7).$$

$$11. \boxed{8} \quad 1) \frac{a^{\frac{4}{3}} + 8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}} - 2\sqrt[3]{ab} + 4b^{\frac{2}{3}}} - 2(ab)^{\frac{1}{3}} \text{ при } a = \sqrt{0,125}, b = \sqrt[5]{5};$$

$$2) \frac{\left(a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}} \right) a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{5}{3}}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} + a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{4}{3}} \text{ при } a = \sqrt{3}, b = \sqrt{48}.$$

12. $\boxed{9}$ Найти значение выражения:

$$1) \frac{\sqrt{a+3} + (a-3)^{0,5}}{\sqrt{a+3} - (a-3)^{0,5}}, \text{ если } a = 1,5(c + c^{-1});$$

$$2) \frac{(x^2+9)^{-0,5} + (x^2-9)^{-0,5}}{(x^2+9)^{-0,5} - (x^2-9)^{-0,5}}, \text{ если } x = 3 \left(\frac{a^2 + b^2}{2ab} \right)^{0,5}.$$

13. $\boxed{9}$ Упростить выражение:

$$1) (a + \sqrt{2a-1})^{\frac{1}{2}} + (a - \sqrt{2a-1})^{\frac{1}{2}};$$

$$2) (a + 2b\sqrt{a-b^2})^{\frac{1}{2}} + (a - 2b\sqrt{a-b^2})^{\frac{1}{2}}.$$

Контрольная работа

1. Вычислить:

$$\begin{aligned} 1) & 3^{-3} \cdot 81^{\frac{1}{2}} - 81^{\frac{1}{4}} : 3^{-2} \\ & \left[27^{\frac{1}{3}} : 3^{-1} - 2^{-4} \cdot 64^{\frac{1}{3}} \right]; \\ 2) & \sqrt[3]{7 + \sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7 - \sqrt{22}} \\ & \left[\sqrt[3]{9 + \sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{9 - \sqrt{17}} \right]. \end{aligned}$$

2. Упростить выражение

$$\begin{aligned} & \sqrt[4]{(a-b)^4} - 2\sqrt[6]{(a+b)^6}, \quad 0 < a < b \\ & \left[\sqrt[6]{(a-3)^6} - 3\sqrt[4]{(a+3)^4}, \quad 0 < a < 3 \right]. \end{aligned}$$

3. Представить в виде степени с основанием b выражение

$$\left(\frac{b}{b^{\sqrt{3}-1}} \right)^{1+\sqrt{3}} : b^{\sqrt{3}} \quad \left[\left(\frac{b^{\sqrt{2}+1}}{b^2} \right)^{\sqrt{2}-1} \cdot b^{2\sqrt{2}} \right].$$

4. Сократить дробь

$$\frac{\sqrt{a^3} - a}{\frac{1}{a - 2a^2 + 1}} \quad \left[\frac{a + 4\sqrt{a} + 4}{\frac{3}{a^2 + 2a}} \right].$$

5. Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{7}} \quad \left[\frac{1}{\sqrt{7} - 3\sqrt{2} - 5} \right].$$

6. Упростить выражение ($a > 0$, $b > 0$)

$$\begin{aligned} & \frac{(\sqrt[4]{ab} - \sqrt{b})(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})}{5(a-b)} \cdot \left(\frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right)^{-1} \\ & \left[\left(\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^3 + 2a^{\frac{3}{2}} + b\sqrt{b}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{ab} - 3b}{a-b} \right)^{-2} \right]. \end{aligned}$$

§ 1. Степенная функция, ее свойства
и графикПример с решением

Построить график функции

$$y = \begin{cases} (\sqrt{4-4x+x^2}-1)^{-2}, & \text{если } x \geq 2, \\ \sqrt[3]{3-x}, & \text{если } x < 2, \end{cases}$$

и перечислить ее свойства.

Решение. Если $x \geq 2$, то $y = (|2-x|-1)^{-2}$, т. е. $y = (x-3)^{-2}$. График функции

$$y = \begin{cases} (x-3)^{-2}, & \text{если } x \geq 2, \\ \sqrt[3]{3-x}, & \text{если } x < 2, \end{cases}$$

изображен на рисунке 1. Область определения — множество \mathbf{R} , кроме $x=3$; множество значений — промежуток $(0; +\infty)$; функция не является ни четной, ни нечетной; функция является убывающей на промежутках $x \leq 2$, $x > 3$ и возрастающей на промежутке $2 \leq x < 3$; функция ограничена снизу ($y > 0$); функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.

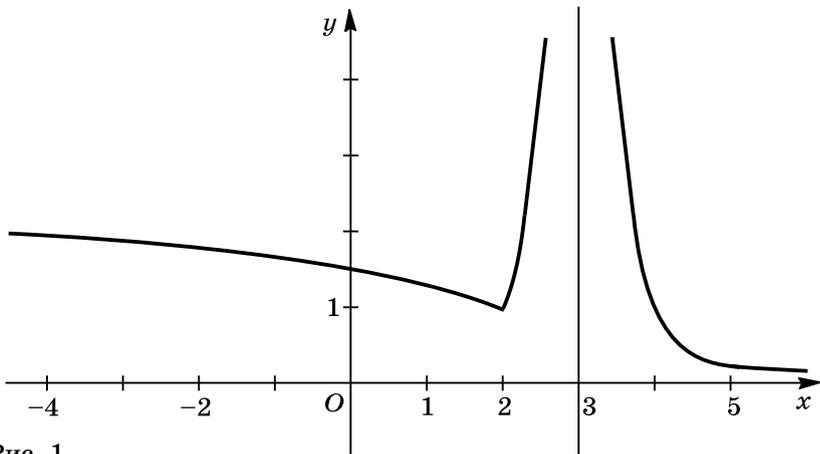


Рис. 1

Задания для самостоятельной работы

Изобразить схематически график функции и перечислить ее свойства (1—3).

1. [6] 1) $y = x^{\sqrt{5}} - 2$; 2) $y = x^{\pi} + 3$;
3) $y = x^{\frac{2}{\pi}} + 1$; 4) $y = x^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 2$;
5) $y = x^{\sqrt{0,2}} - 1$; 6) $y = x^{\sqrt{6}} + 1$;
7) $y = (x - 2)^{\sqrt{7}} + 2$; 8) $y = (x + 2)^{\sqrt{0,8}} - 2$.

2. [6] 1) $y = \begin{cases} \sqrt[4]{x-2}, & \text{если } x \geq 2, \\ \frac{1}{(x-2)^3}, & \text{если } x < 2; \end{cases}$
2) $y = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1}, & \text{если } x \leq -1, \\ \frac{1}{(x+1)^4}, & \text{если } x > -1; \end{cases}$
3) $y = \begin{cases} \sqrt[3]{x+3}, & \text{если } x \leq -2, \\ (x+2)^{-2}, & \text{если } x > -2; \end{cases}$
4) $y = \begin{cases} \sqrt[4]{x-3}, & \text{если } x \geq 4, \\ (x-4)^{-3}, & \text{если } x < 4. \end{cases}$

3. [7] 1) $y = |x|^3 - 1$; 2) $y = |x|^5 + 1$;
3) $y = |x^5 + 1|$; 4) $y = |x^3 - 1|$;
5) $y = 2 - |x|^5$; 6) $y = 3 - |x|^3$;
7) $y = |\sqrt[3]{x-2}| + 1$; 8) $y = |\sqrt[5]{x+1}| - 2$.

§ 2. Взаимно обратные функции. Сложная функция

Примеры с решениями

1. Записать формулу сложной функции $z = f(\varphi(x))$, если $\varphi(x) = x^2 - 5x + 6$, $f(y) = y^{-\frac{1}{2}}$. Найти область определения функции $f(\varphi(x))$.

Решение. Внутренняя функция $y = \varphi(x)$, внешняя функция $z = f(y)$. Суперпозиция заданных функций име-

ет вид $z = (x^2 - 5x + 6)^{-\frac{1}{2}}$. Область определения этой функции находится из неравенства $x^2 - 5x + 6 > 0$.

Ответ. Функция $z = (x^2 - 5x + 6)^{-\frac{1}{2}}$ определена на промежутках $x < 2$ и $x > 3$.

2. Записать внутреннюю $\varphi(x)$ и внешнюю $f(\varphi)$ функции, задающие сложную функцию $f(\varphi(x)) = -\frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + 5}}$.

Ответ. $\varphi(x) = x^2 + 5$ — внутренняя функция, $f(\varphi) = -\frac{1}{\sqrt[3]{\varphi}}$ — внешняя функция.

Задания для самостоятельной работы

1. [5] (Устно.) Выяснить, является ли обратимой функция:

1) $y = 2x^4$;

2) $y = -3x^6$;

3) $y = -5x^2$ при $x \leq 0$;

4) $y = \frac{x^2}{2}$ при $x \geq 0$;

5) $y = \sqrt{x-1}$;

6) $y = \sqrt[3]{x+2}$;

7) $y = -\sqrt[3]{x+4}$;

8) $y = -\sqrt{x-3}$.

2. [6] Найти функцию, обратную к данной; указать ее область определения и множество значений:

1) $y = \frac{1}{x^3}$;

2) $y = \frac{1}{x^5}$;

3) $y = -\frac{1}{x^4}$, $x < 0$;

4) $y = -\frac{1}{x^6}$, $x < 0$;

5) $y = -x^{\frac{2}{3}}$;

6) $y = -x^{\frac{3}{2}}$;

7) $y = x^{-\frac{5}{2}}$;

8) $y = x^{-\frac{4}{3}}$.

3. [8] Найти промежутки монотонности функции:

1) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$;

2) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$;

3) $y = \sqrt{-x^2 + 3x - 2}$;

4) $y = \sqrt{-x^2 + 5x - 6}$;

5) $y = \sqrt[3]{2x^2 + 3x - 2}$;

6) $y = \sqrt[3]{2x^2 - 5x - 3}$.

4. [9] Построить график функции:

1) $y = \sqrt{2x^2 - 5x}$;

2) $y = \sqrt{4x^2 - 9}$;

3) $y = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$;

4) $y = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$.

§ 3. Дробно-линейная функция

Пример с решением

Найти горизонтальную и вертикальную асимптоты графика функции $y = \frac{3x-13}{x-5}$.

Решение. Выделим целую часть дроби $\frac{3x-13}{x-5}$, разделив уголком числитель на знаменатель или выполнив преобразования:

$$y = \frac{3(x-5)+2}{x-5} = 3 + \frac{2}{x-5}.$$

Заданную функцию можно записать в виде $y = 3 + \frac{2}{x-5}$. График этой функции может быть получен из графика функции $y = \frac{2}{x}$ (гиперболы) сдвигом на 5 единиц вправо вдоль оси Ox и на 3 единицы вверх вдоль оси Oy . Прямые $x=5$ и $y=3$ являются соответственно вертикальной и горизонтальной асимптотами графика заданной функции.

Задания для самостоятельной работы

1. [5] Найти горизонтальную и вертикальную асимптоты графика функции без его построения:

1) $y = \frac{2x-1}{x+3}$; 2) $y = \frac{3x-2}{x+4}$;

3) $y = \frac{3x+2}{4-x}$; 4) $y = \frac{2x+5}{3-x}$.

2. [6] Построить график функции:

1) $y = \frac{5-x}{x-2}$; 2) $y = \frac{10-2x}{x-3}$;

3) $y = \frac{-3x-7}{x+3}$; 4) $y = \frac{-5x-7}{x+2}$;

5) $y = \frac{4x-1}{2x-1}$; 6) $y = \frac{1-6x}{2x+1}$.

3. [7] Найти множество значений функции $y = f(x)$; задать формулой функцию, обратную к функции $y = f(x)$, если:

1) $y = 3 - \frac{10}{3x+1}$ при $x \geq 0$;

2) $y = 2 - \frac{7}{4x+1}$ при $x \geq 0$;

3) $y = -1 + \frac{6}{2x-3}$ при $x < 1,5$;

4) $y = -2 + \frac{8}{3x-4}$ при $x < 1\frac{1}{3}$.

§ 4. Равносильные уравнения и неравенства

Примеры с решениями

1. Выяснить, равносильны ли системы уравнений

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ y^2 + xy - 2x^2 = 4 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x + y = 1, \\ 3x^2 - y = 0. \end{cases}$$

Решение. Решая первую систему способом подстановки, находим ее решения:

$$x_1 = -1, y_1 = 3; x_2 = 0, y_2 = 2.$$

Решая вторую систему способом сложения, получаем

$$x_1 = -1, y_1 = 3; x_2 = \frac{1}{3}, y_2 = \frac{1}{3}.$$

Множества решений систем не совпадают, значит, эти системы не равносильны.

2. Решить уравнение

$$|2x + 1| + |x - 2| = 6.$$

Решение. $2x + 1 = 0$ при $x = -\frac{1}{2}$; $x - 2 = 0$ при $x = 2$.
Знаки подмодульных выражений на интервалах показаны в таблице:

x	$(-\infty; -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}; 2)$	$(2; +\infty)$
$2x + 1$	-	+	+
$x - 2$	-	-	+

Исходное уравнение равносильно совокупности трех систем:

$$\begin{cases} x < -\frac{1}{2}, \\ -2x - 1 - x + 2 = 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x < 2, \\ 2x + 1 - x + 2 = 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ 2x + 1 + x - 2 = 6. \end{cases}$$

После равносильных преобразований полученных систем заданное уравнение заменим совокупностью следующих систем:

$$\begin{cases} x < -\frac{1}{2}, \\ x = -1\frac{2}{3}; \end{cases} \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x < 2, \\ x = 3; \end{cases} \begin{cases} x \geq 2, \\ x = 2\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Решение имеют первая и третья системы.

Ответ. $x_1 = -1\frac{2}{3}$, $x_2 = 2\frac{1}{3}$.

Решение задачи можно оформить иначе. Из определения модуля следует, что

$$|2x+1| = \begin{cases} -2x-1, & \text{если } x < -\frac{1}{2}, \\ 2x+1, & \text{если } x \geq -\frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$|x-2| = \begin{cases} 2-x, & \text{если } x < 2, \\ x-2, & \text{если } x \geq 2. \end{cases}$$

Пусть $y = |2x+1| + |x-2|$.

Тогда получаем:

1) $y = -2x - 1 + 2 - x = -3x + 1$ при $x < -\frac{1}{2}$;

2) $y = 2x + 1 + 2 - x = x + 3$ при $-\frac{1}{2} \leq x < 2$;

3) $y = 2x + 1 + x - 2 = 3x - 1$ при $x \geq 2$.

В первом случае имеем уравнение

$$-3x + 1 = 6,$$

откуда находим $x = -\frac{5}{3}$ — корень исходного уравнения,

так как $-\frac{5}{3} < -\frac{1}{2}$.

Во втором случае $x + 3 = 6$; $x = 3$ не является корнем, так как $3 > 2$.

В третьем случае $3x - 1 = 6$; $x = \frac{7}{3}$ — корень исходного уравнения, так как $\frac{7}{3} \geq 2$.

Ответ. $x_1 = -1\frac{2}{3}$, $x_2 = 2\frac{1}{3}$.

Замечание. Условие $x = -\frac{1}{2}$ можно было включить в неравенство первой системы, а условие $x = 2$ — в неравенство второй (что не повлияло бы на результат решения).

Задания для самостоятельной работы

1. [6] Установить, какое из двух уравнений является следствием другого:

1) $\sqrt{(x-1)^2} = x-1$, $|1-x| = x-1$;

2) $\sqrt{(2-x)^2} = x-2$, $|x-2| = x-2$;

3) $(2x+1)^5 = 1$, $2x = 0$;

4) $(5x+1)^7 = 1$, $5x = 0$;

5) $\frac{x-1}{x} = \frac{x+1}{x+2}$, $(x-1)(x+2) = x(x+1)$;

6) $\frac{3-x}{2-x} = \frac{1-x}{x}$, $(3-x)x = (1-x)(2-x)$;

7) $x^2 - x - 20 = 0$, $\frac{x^2 - x - 20}{x-5} = 0$;

8) $\frac{x^2 - 3x - 18}{x+3} = 0$, $x^2 - 3x - 18 = 0$.

Решить уравнение (2—3).

2. [5] 1) $\frac{1-x}{5x-6-x^2} + 1 = \frac{1}{2-x}$; 2) $\frac{1}{x-3} + \frac{4}{x+1} = \frac{4}{x^2-2x-3}$.

3. [6] 1) $\sqrt{x+1} = x-1$; 2) $\sqrt{x+3} = x-3$;
3) $\sqrt{2x^2-2x-15} = x$; 4) $\sqrt{2x^2+x-20} = x$.

4. [5] Решить неравенство:

1) $\frac{5}{x-2} > \frac{3}{x+1}$; 2) $\frac{6}{x+3} < \frac{5}{x-4}$;

3) $x^5 < x^2$; 4) $x^7 > x^3$.

5. [7] Выяснить, равносильны ли системы уравнений, не решая их:

1) $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0, \\ 3y - 2x - 4 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0, \\ y - 2 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 5y + x = 7, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 3x + 4y = 10; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ x + y = 3, \end{cases}$ $\begin{cases} 4x - y = 8, \\ 2x - 3y = 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x + y = 3, \\ 2x - 3y = 2, \end{cases}$ $\begin{cases} 6x - 2y = 5, \\ 2x + 4y = 1. \end{cases}$

6. [7] Решить уравнение:

1) $|2x - 3| = x + 6$;

2) $|3x - 1| = 2x + 3$;

3) $|x - 5| - |2x + 3| = 4$;

4) $|2x - 1| - |x + 4| = 3$;

5) $|x + 3| - |x - 5| = x + 1$;

6) $|x - 6| - |x + 1| = x - 1$.

7. [10] Для каждого значения параметра a решить уравнение:

1) $|x + 2| + a|x - 4| = 6$;

2) $|x + 1| + a|x - 2| = 3$.

§ 5. Иррациональные уравнения

Примеры с решениями

1. Решить уравнение $(x^2 - 9)\sqrt{x + 2} = 0$.

Решение. Левая часть уравнения определена при $x \geq -2$, а число $x = -2$ — корень этого уравнения. Далее задача сводится к нахождению корней уравнения $x^2 - 9 = 0$, таких, что $x \geq -2$. Этому условию удовлетворяет $x = 3$.

Ответ. $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.

2. Решить уравнение $3\sqrt{x + 4} = 5 - 2|x + 2|$.

Решение. Левая часть уравнения определена при $x \geq -4$, а правая — при всех $x \in \mathbf{R}$,

причем $|x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{при } x \geq -2, \\ -x - 2 & \text{при } x < -2. \end{cases}$

1) Если $-4 \leq x < -2$, то уравнение можно записать в виде $3\sqrt{x + 4} = 9 + 2x$ и заменить следующим равносильным уравнением:

$$9(x + 4) = 81 + 36x + 4x^2, \text{ или } 4x^2 + 27x + 45 = 0,$$

откуда $x = \frac{-27 \pm 3}{8}$; $x_1 = -\frac{15}{4}$, $x_2 = -3$.

Оба корня принадлежат промежутку $-4 \leq x < -2$ и являются корнями исходного уравнения.

2) Если $x \geq -2$, то уравнение примет вид $3\sqrt{x + 4} = 1 - 2x$. При $x > \frac{1}{2}$ это уравнение не имеет корней, а при

$-2 \leq x \leq \frac{1}{2}$ равносильно уравнению $9(x + 4) = 1 - 4x + 4x^2$,

или $4x^2 - 13x - 35 = 0$, откуда $x = \frac{13 \pm 27}{8}$; $x_1 = -\frac{7}{4}$, $x_2 = 5$,

причем $x = -\frac{7}{4}$ принадлежит отрезку $[-2; \frac{1}{2}]$, а $x = 5$ нет.

Ответ. $x_1 = -3\frac{3}{4}$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1\frac{3}{4}$.

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнение (1—7).

1. [6] 1) $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = \sqrt{x-2}$;

2) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-2} = 2\sqrt{x+1}$.

2. [7] 1) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}} + \sqrt{x-\sqrt{x+11}} = 4$;

2) $\sqrt{x-\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+\sqrt{x-2}} = 3$.

3. [7] 1) $x^2 + 5x + 4 - 5\sqrt{x^2 + 5x + 28} = 0$;

2) $4x^2 - 6x + 7 + \sqrt{4x^2 - 6x + 5} = 14$;

3) $x^2 - x + \sqrt{x^2 - x - 2} = 8$;

4) $x^2 + 16 - 3\sqrt{x^2 - 5x + 20} = 5x$.

4. [7] 1) $\sqrt{3x^2 + 5x + 1} + \sqrt{3x^2 + 5x + 8} = 7$;

2) $\sqrt{3x^2 + 5x + 8} - \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 1$.

5. [10] 1) $\sqrt{x+8} - 2\sqrt{x+7} + \sqrt{x+11} - 4\sqrt{x+7} = 1$;

2) $\sqrt{x-3} - 2\sqrt{x-4} - \sqrt{x+5} - 6\sqrt{x-4} = 2$.

6. [10] 1) $5\sqrt{1+|x^2-1|} = 3+|5x+3|$;

2) $\sqrt{25+|16x^2-25|} = 4+4|x+1|$.

7. [10] 1) $\sqrt{x-3} + \sqrt[3]{5+x} = 2$;

2) $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$;

3) $2\sqrt{2x+1} + \sqrt[3]{8x+5} = 1$;

4) $\sqrt{2x+7} - \sqrt[3]{x+7} = 1$.

8. [10] Найти все значения параметра a , при которых имеет решение уравнение:

1) $\sqrt{x+a} + \sqrt{x-1} = 3$;

2) $\sqrt{x-3} + a = \sqrt{x+6}$.

9. [10] Решить уравнение:

1) $\sqrt{x^2-1} + x = a$;

2) $x + \sqrt{x^2-x} = a$;

3) $\sqrt{x-2a} - \sqrt{x-a} = 2$;

4) $\sqrt{a-x} + \sqrt{x} = 2$.

10. [6] Решить систему уравнений:

- 1)
$$\begin{cases} \sqrt{x+7} + \sqrt{y+1} = 5, \\ \sqrt{x+7} - \sqrt{y+1} = 1; \end{cases}$$
- 2)
$$\begin{cases} \sqrt{x+6} + \sqrt{y+12} = 7, \\ \sqrt{x+6} - \sqrt{y+12} = -1; \end{cases}$$
- 3)
$$\begin{cases} \sqrt{17-2x} + 2\sqrt{y+2} = 9, \\ 2\sqrt{17-2x} - \sqrt{y+2} = 8; \end{cases}$$
- 4)
$$\begin{cases} 3\sqrt{2x-1} - \sqrt{3-y} = 7, \\ \sqrt{2x-1} + 3\sqrt{3-y} = 9. \end{cases}$$

§ 6. Иррациональные неравенства

Примеры с решениями

1. Решить неравенство

$$(2x + \sqrt{x-5} - 13)(\sqrt{x+16} - \sqrt{x-5}) \geq 21.$$

Решение. Левая часть неравенства определена при $x \geq 5$. Умножив обе части неравенства на положительное при всех $x \geq 5$ число $\sqrt{x+16} + \sqrt{x-5}$, получим равносильное ему неравенство

$$(2x + \sqrt{x-5} - 13) \cdot 21 \geq 21(\sqrt{x+16} + \sqrt{x-5}),$$

откуда $2x - 13 \geq \sqrt{x+16}$.

Это неравенство при $5 \leq x \leq 6,5$ не имеет решений (левая часть неположительна, а правая положительна). При $x > 6,5$ оно равносильно неравенству

$$4x^2 - 52x + 169 \geq x + 16, \text{ или } 4x^2 - 53x + 153 \geq 0,$$

откуда $x \leq 4,25$ и $x \geq 9$. Учитывая условие $x > 6,5$, получаем $x \geq 9$.

Ответ. $x \geq 9$.

2. Решить неравенство $\sqrt{x-a} < a$.

Решение. При $a \leq 0$ неравенство не имеет решений. При $a > 0$ исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x - a \geq 0, \\ x - a < a^2, \end{cases}$$

откуда имеем $a \leq x < a^2 + a$.

Ответ. Если $a \leq 0$, то решений нет; если $a > 0$, то $a \leq x < a^2 + a$.

Задания для самостоятельной работы

Решить неравенство (1—5).

1. [8] 1) $(2x + \sqrt{x} - 7)(\sqrt{x+4} - \sqrt{x}) < 4$;
2) $(3x + \sqrt{2x} - 4)(\sqrt{2x+19} - \sqrt{2x}) \leq 19$.

2. [7] 1) $(x^2 - 9)\sqrt{x+5} \geq 0$;
2) $(4 - x^2)\sqrt{3-x} \leq 0$;
3) $\frac{x-1}{\sqrt{-x^2+x+6}} \geq 0$;
4) $\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{3-x} \leq 0$.

3. [7] 1) $\sqrt{x^2-3x-10} < x+4$;
2) $\sqrt{x^2+2x-8} > x-4$;
3) $\sqrt{8+2x-x^2} > 6-3x$;
4) $\sqrt{5x-x^2-6} < 3+2x$;
5) $\sqrt{2x^2-3x-2} \leq 2-x$;
6) $\sqrt{2x^2-x-3} \leq x+1$;
7) $\sqrt{2x^2-6x-8} \geq x+1$;
8) $\sqrt{2x^2+2x-12} \geq 2-x$.

4. [8] 1) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} \leq 3$;
2) $\sqrt{x-2} + \sqrt{3x-2} \geq 6$;
3) $\sqrt{x^2-9} + \sqrt{4-x} \geq -1$;
4) $\sqrt{x-8} + 2\sqrt{81-x^2} \geq -1$.

5. [9] 1) $\sqrt{1-x} + \sqrt{7-x} \leq \frac{12}{\sqrt{7-x}}$;
2) $\sqrt{4-x} - \frac{12}{\sqrt{4-x}} \geq -\sqrt{-x-2}$.

6. [10] В зависимости от значений параметра a решить неравенство:

1) $a\sqrt{x+1} \leq 1$;
2) $a\sqrt{2-x} \geq 1$;
3) $a\sqrt{x+a} < 1$;
4) $a\sqrt{x-a} < 5$.

Контрольная работа

1. Найти область определения функции

$$y = (x+5)^{-\frac{1}{4}} + \sqrt[6]{x^2+3x-10} \quad \left[y = (x-6)^{-\frac{1}{3}} + \sqrt[5]{x^2+5x-6} \right].$$

2. Исследовать функцию и построить ее график

$$y = \sqrt{x+3} - 1 \quad [y = (x-2)^3 + 8].$$

3. Решить уравнение

$$3x + 1 + \sqrt{7-9x} = 0 \quad [1 + 2x + \sqrt{7-6x} = 0].$$

4. Решить неравенство

$$(3x+4)\sqrt{4-x^2} \geq 0 \quad [(2x-7)\sqrt{x^2-9} \leq 0].$$

5. Решить уравнение

$$x^2 - x + \sqrt{x^2 - x + 4} = 2 \quad [x^2 - x + \sqrt{x^2 - x - 2} = 8].$$

6. Решить неравенство

$$2\sqrt{x-2} - \sqrt{x+3} \leq 1 \quad [2\sqrt{x-3} - \sqrt{x+2} \geq 1].$$

§ 1. Показательная функция, ее свойства и график

Пример с решением

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{|x|}$ на отрезке $[-2; 1]$.

Решение. При $x \geq 0$ функция имеет вид $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ и

является убывающей, при $x < 0$ функция принимает вид $y = 4^x$ и является возрастающей. График функции $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{|x|}$ изображен на

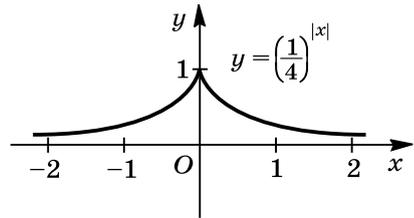


Рис. 2

рисунке 2 (он симметричен относительно оси ординат). На отрезке $[-2; 1]$ наибольшее значение функции равно $y(0) = 1$, наименьшее ее значение равно $y(-2) = \frac{1}{16}$.

Задания для самостоятельной работы

1. [7] Функция $f(x)$ определена на множестве действительных чисел и обладает свойством

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2).$$

Задать эту функцию формулой, если:

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| 1) $f(1) = 2$; | 2) $f(1) = 3$; |
| 3) $f(1) = \frac{2}{3}$; | 4) $f(1) = \frac{3}{2}$; |
| 5) $f(-1) = 2$; | 6) $f(-1) = 0,5$. |

2. [7] Решить графически уравнение:

- | | |
|-------------------------------|----------------------------------|
| 1) $2^x = 1 + \frac{7}{3}x$; | 2) $0,5^x = 1 - \frac{7}{3}x$; |
| 3) $0,1^{x+1} = 2 - x^2$; | 4) $9 \cdot 3^{x-2} = 4 - x^2$; |
| 5) $3^x - 1 = 2x^{-2}$; | 6) $2^{-x} = 1 + x^{-2}$. |

3.7 Решить графически неравенство:

- 1) $2^x \geq \frac{8}{x}$; 2) $0,5^x \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{x}$;
3) $3^x \leq \sqrt{5+2x}$; 4) $2^x \geq \sqrt{1+3x}$.

4.6 Сравнить числа a и b , если:

- 1) $a = 0,2^{-6,1}$, $b = 5^{5,6}$;
2) $a = 0,5^{4,1}$, $b = 2^{-3,9}$;
3) $a = (\sqrt{3}-1)^{3\sqrt{2}}$, $b = (\sqrt{3}-1)^{2\sqrt{3}}$;
4) $a = (2-\sqrt{3})^{5\sqrt{2}}$, $b = (2-\sqrt{3})^7$;
5) $a = \sqrt{0,2}$, $b = 0,2^{\sqrt{0,2}}$;
6) $a = \sqrt{1,1}$, $b = 1,1^{\sqrt{0,2}}$;
7) $a = 1$, $b = (3-2\sqrt{2})^{2\sqrt{2}-3}$;
8) $a = (2\sqrt{5}-3)^{5\sqrt{2}-7}$, $b = 1$.

5.6 Расположить в порядке возрастания числа:

- 1) $3^{2,5}$; $3^{\sqrt{6}}$; $3^{1+\sqrt{2}}$;
2) $0,3^{2-\sqrt{3}}$; 1 ; $0,3^{\sqrt{0,1}}$;
3) $(\sqrt{3})^{-3,1}$; $3^{-1,6}$; $\frac{1}{3\sqrt{3}}$;
4) $\sqrt[3]{0,1}$; $0,1^{0,3}$; $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

6.6 Установить, какие значения может принимать число a , чтобы выполнялось неравенство:

- 1) $a < a^{\frac{2}{3}}$; 2) $a^{0,3} > 1$;
3) $a^{-\frac{5}{6}} > a^{-\frac{6}{7}}$; 4) $a^{-\frac{3}{4}} < a^{-\frac{4}{5}}$.

7.7 Найти область определения и множество значений функции:

- 1) $y = 1,2^{\sqrt{7-x}}$; 2) $y = 0,7^{\sqrt{x+7}}$;
3) $y = 0,5^{\sqrt{x^2-5}}$; 4) $y = 3^{\sqrt{4-x^2}}$;
5) $y = \frac{1}{3^{\sqrt{2x-x^2}}}$; 6) $y = \frac{1}{10^{\sqrt{x^2-5x}}}$.

8.7 Построить схематически график функции:

- 1) $y = 4^{|x|} - 1$; 2) $y = 0,2^{|x|} + 1$;
3) $y = 0,3^{|x+2|}$; 4) $y = 3^{|x-2|}$;
5) $y = |2^x - 3|$; 6) $y = |0,5^x - 2|$;
7) $y = |3^{|x|+1} - 2|$; 8) $y = |2^{|x|-1} - 3|$.

§ 2. Показательные уравнения

Пример с решением

Решить уравнение

$$(2\sqrt{2}-\sqrt{7})^x + (2\sqrt{2}+\sqrt{7})^x = 4\sqrt{2}.$$

Решение. Пользуясь тем, что $(2\sqrt{2}-\sqrt{7})(2\sqrt{2}+\sqrt{7})=1$, и введя обозначение $y=(2\sqrt{2}-\sqrt{7})^x$, запишем заданное уравнение в виде $y + \frac{1}{y} = 4\sqrt{2}$, откуда $y^2 - 4\sqrt{2}y + 1 = 0$. Решив это квадратное уравнение, получим $y_{1,2} = 2\sqrt{2} \pm \sqrt{7}$.

Корни уравнений $(2\sqrt{2}-\sqrt{7})^x = 2\sqrt{2} \pm \sqrt{7}$, т. е. числа $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$, являются и корнями исходного уравнения.

Ответ. $x = \pm 1$.

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнение (1—8).

1. [6] 1) $2^{x^2} \cdot 0,25^x = 8$;

2) $16 \cdot 8^x = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x^2}$;

3) $7^{\frac{2x+5}{x-1}} = 1$;

4) $\frac{0,1^{\frac{x+7}{3x+4}}}{0,1^{x+7}} = 1$.

2. [6] 1) $5^{3-x} = 20 + 5^x$;

2) $6^{x+2} - 6^x - 35 = 0$;

3) $5^{5-2x} - 20 \cdot 0,2^{3-2x} - 5 = 0$;

4) $4^{1-x} - 0,5^{1-2x} = 1$.

3. [6] 1) $2 \cdot 9^x - 6^x = 4^x$;

2) $9^x + 4^x = 2 \cdot 6^x$;

3) $(2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 4$;

4) $(\sqrt{5}-2)^x + (\sqrt{5}+2)^x = 18$.

4. [7] 1) $16^x \cdot 64^{\sqrt{x+0,5}} = 4$;

2) $27^{1-\frac{x}{3}} \cdot 3^{\sqrt{2x+2}} = 1$;

3) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$;

4) $0,16^{x-1-\sqrt{3x-2}} - 3,75 \cdot 0,4^{x-\sqrt{3x-2}} = 2,5$.

5. [8] 1) $\sqrt{9^x - 3^{x+1} + 16} - 3^{2x-1} = 4 - 3^x$;

2) $3 \cdot \sqrt{9^{-x} + 3^{-x} - 1} + 3^{-x} + 3^{-2x} = 5$;

3) $\sqrt{4^x - 3 \cdot 2^x + 2} = 2 - 2^x$;

4) $\sqrt{0,25^x - 3 \cdot 0,5^x + 2} = 2 - 0,5^x$.

6. [9] 1) $4^{x^2-x} - 10 \cdot 2^{x^2} + 2^{2x+4} = 0$;

2) $16^{x^2-\frac{x}{2}} - 15 \cdot 4^{x^2} - 4^{2+x} = 0$.

7.10) 1) $|x - 3|^{3x^2 - 10x + 3} = 1$;

2) $|x - 2|^{10x^2 - 3x - 1} = 1$.

8.10) 1) $3 \cdot 6^{2x^2 - 6} + 6^{x^2 + x} - 4 \cdot 6^{2x + 6} = 0$;

2) $5^{2x^2 - 1} - 3 \cdot 5^{x^2 + 3x + 2} - 2 \cdot 5^{6(x + 1)} = 0$.

9.8) Для каждого значения a найти число корней уравнения:

1) $5^x = a$; 2) $0,7^x = a$;

3) $|0,5^x - 1| = a$; 4) $|2^x - 2| = a$.

10.10) 1) Найти значения параметра a , при которых уравнение

$$(a - 1) \cdot 3^{2x} - (2a - 1) \cdot 3^x - 1 = 0$$

имеет два различных корня.

2) Найти значения параметра k , при которых уравнение

$$(10 - k) \cdot 5^{2x + 1} - 2 \cdot 5^{x + 1} + 6 - k = 0$$

не имеет корней.

§ 3. Показательные неравенства

Примеры с решениями

1. Решить неравенство $x^2 \cdot 2^x - x \cdot 2^{x+1} > 0$.

Решение. Разделив обе части неравенства на $2^x > 0$, получим $x^2 - 2x > 0$, откуда $x < 0$ и $x > 2$.

Ответ. $x < 0$, $x > 2$.

2. Решить неравенство $\sqrt{9^x - 3^{x+1} + 6} < 3 - 3^x$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 9^x - 3 \cdot 3^x + 6 \geq 0, \\ 3 - 3^x > 0, \\ 9^x - 3 \cdot 3^x + 6 < (3 - 3^x)^2. \end{cases}$$

Первое неравенство системы является квадратным относительно 3^x и верно для любых x , так как его дискриминант отрицателен при положительном старшем коэффициенте; $x < 0$ — решение третьего неравенства, а $x < 1$ — решение второго, откуда $x < 0$ — решение системы (т. е. исходного неравенства).

Ответ. $x < 0$.

Задания для самостоятельной работы

Решить неравенство (1—2).

1. $\boxed{5}$ 1) $x^2 \cdot 4^x - 4^{1+x} > 0$; 2) $3^{x+2} - x^2 \cdot 3^x < 0$;
3) $x^2 \cdot 0,5^x - 0,5^{x-2} < 0$; 4) $0,7^x - 0,7^{x-2} \cdot x^2 > 0$.

2. $\boxed{6}$ 1) $9^x + 3^{2x-3} - \frac{28}{81} \leq 0$; 2) $0,6^{2x-1} - 0,36^x - 0,4 \geq 0$;
3) $3^{x-1} - 4 \cdot 3^{0,5x-1} + 1 > 0$; 4) $2^{2x+3} - 3 \cdot 2^{x+1} + 1 < 0$.

3. $\boxed{7}$ Найти область определения функции:

1) $y = 2^{\sqrt{1+x}} - 2\sqrt{1-2^x}$; 2) $y = \sqrt{10-0,1^x} + 3^{\sqrt{3-x}}$;
3) $y = \sqrt{4^x - 6^x} - \sqrt{x^4 - x^6}$; 4) $y = x\sqrt{x^5 - x^3} + 2\sqrt{0,2^x - 0,3^x}$;
5) $y = x\sqrt{1-2^x - 2^{2x+1}}$; 6) $y = \sqrt{x(1-2^x - 2^{2x+1})}$;
7) $y = \sqrt{\frac{2^x - 1}{x - 1}}$; 8) $y = \sqrt{\frac{5^x - 0,04}{5 - x^2}}$;
9) $y = \sqrt{\frac{9^x + 8 \cdot 3^{x-1} - 1}{x^2 - 3x}}$; 10) $y = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{4^x + 7 \cdot 2^{x-1} - 2}}$.

Решить неравенство (4—8).

4. $\boxed{6}$ 1) $4^x \leq 8^{\sqrt{x+1}}$; 2) $27^{\sqrt{x+1}} \geq 9^x$.

5. $\boxed{7}$ 1) $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} \leq 1$; 2) $3^{2(1-\sqrt{x})} + 3^{\sqrt{x}} \leq 10$.

6. $\boxed{8}$ 1) $\sqrt{2^x - 3} \geq 3 - 2^{0,5x}$; 2) $2^{-\frac{x}{2}} + \sqrt{2^{-x} - 15} \geq 5$.

7. $\boxed{8}$ 1) $\sqrt{4^x - 3 \cdot 2^x + 2} > 2 - 2^x$;
2) $\sqrt{0,25^x - 3 \cdot 0,5^x + 2} > 2 - 0,5^x$.

8. $\boxed{9}$ 1) $0,6^x - 4 \cdot 0,3^x + 0,5^{x-2} \geq 1$;
2) $0,5^x - 2 \cdot 0,5^{x+1} + 8 \cdot 10^{x+1} \leq 8$.

9. $\boxed{9}$ Установить, при каких значениях a неравенство верно для всех значений x :

1) $0,6^x > a$; 2) $4^x > a$; 3) $-3^{|x|} \leq a$; 4) $-\left(\frac{1}{7}\right)^{|x|} \leq a$.

10. $\boxed{10}$ 1) Найти все значения m , при которых неравенство

$$m \cdot 4^x - 4 \cdot 2^x + 3m + 1 > 0$$

справедливо для любого x .

2) Найти все значения n , при которых неравенство

$$4^x - n \cdot 2^x - n + 3 \leq 0$$

имеет хотя бы одно решение.

§ 4. Системы показательных уравнений и неравенств

Пример с решением

$$\text{Решить систему } \begin{cases} 2^{x+1} = y^2 + 4, \\ 2^{x-1} \leq y. \end{cases}$$

Решение. Уравнение данной системы запишем в виде $2^{x-1} = \frac{1}{4}(y^2 + 4)$. Учитывая неравенство системы, имеем $\frac{1}{4}(y^2 + 4) \leq y$, откуда $(y-2)^2 \leq 0$, т. е. $y = 2$. Из уравнения системы при $y = 2$ находим $x = 2$.

Ответ. $x = 2, y = 2$.

Задания для самостоятельной работы

1. [7] Решить систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} 5^x \cdot 6^y = 150, \\ 6^x \cdot 5^y = 180; \end{cases} & 2) \begin{cases} 4^x \cdot 7^y = 196, \\ 7^x \cdot 4^y = 112; \end{cases} \\ 3) \begin{cases} 3^x \cdot 4^y = 192, \\ 2^x \cdot 9^y = 1458; \end{cases} & 4) \begin{cases} 5^x \cdot 4^y = 400, \\ 2^x \cdot 25^y = 2500; \end{cases} \\ 5) \begin{cases} 4^x - 5^{2y} = 231, \\ 4^{\frac{x}{2}} - 5^y = 11; \end{cases} & 6) \begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77, \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^y = 7; \end{cases} \\ 7) \begin{cases} 3 \cdot 2^x + y = 13, \\ 2^{2x+1} + 3y = 35; \end{cases} & 8) \begin{cases} 2 \cdot 3^x + y = 20, \\ 3^{2x+1} + 14y = 271. \end{cases} \end{array}$$

2. [8] Найти все положительные числа x и y , удовлетворяющие системе уравнений:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} xy^{4x} = y^{5\left(\frac{y-x}{3}\right)}, \\ x^3 = y^{-1}; \end{cases} & 2) \begin{cases} (xy)^x \cdot x^{-y} = y^{\frac{28x-7y}{2}}, \\ y^{\frac{1}{2}} = x^{-1}; \end{cases} \\ 3) \begin{cases} (xy)^y \cdot x^{6x} = y^x, \\ x^2y = 1; \end{cases} & 4) \begin{cases} x^{\frac{x-3y}{2}} = y^{62x-4y}, \\ y^3 = \frac{1}{xy}. \end{cases} \end{array}$$

3. [8] Решить систему уравнений:

$$1) \begin{cases} 3^{-x-y}(x-y) = 1, \\ (x-y)^{x+y} = 3; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2^{y-x}(x+y) = 1, \\ (x+y)^{x-y} = 2. \end{cases}$$

4.9 Решить систему:

$$1) \begin{cases} 2^{x+1} = y^2 + 4, \\ 4^{x-1} \leq y^2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2 \cdot 3^{x-1} = y^2 + 9, \\ 9^{x-2} \leq y^2. \end{cases}$$

Контрольная работа

1. Сравнить числа a и b , если

$$a = (\sqrt{2} - 1)^{\sqrt{3}+1}, \quad b = (\sqrt{2} - 1)^{\sqrt{5}} \quad [a = (\sqrt{5} - 1)^{2\sqrt{3}}, \quad b = (\sqrt{5} - 1)^{3\sqrt{2}}].$$

2. Изобразить схематически график функции

$$y = |0,6^x - 1| \quad [y = 4^{|x|} + 1].$$

3. Решить уравнение:

$$1) 6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$$

$$[3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 12^x + 12^{x+1}];$$

$$2) 4 \cdot 3^{2x} - 2^{2x-1} - 3^{2x+1} - 2^{2x} = 0$$

$$[5 \cdot 7^{2x-1} + 4 \cdot 3^{2x} + 3^{2x+1} - 2 \cdot 7^{2x} = 0].$$

4. Решить неравенство

$$1) \left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{6-x}} > \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad [\pi^{\sqrt{2-x}} > \pi^x];$$

$$2) 4 \cdot 4^x - 7 \cdot 2^x - 2 < 0 \quad [3 \cdot 9^x - 8 \cdot 3^x - 3 < 0].$$

5. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 7^{2x} - 4^{2y} - 45 = 0, \\ 7^x - 4^y - 9 = 0 \end{cases} \quad \left[\begin{cases} 9^x - 5^{2y} + 16 = 0, \\ 9^{\frac{x}{2}} - 5^y + 2 = 0 \end{cases} \right].$$

§ 1. Логарифмы

Примеры с решениями

1. Вычислить:

1) $\log_{0,5} \sqrt[3]{10 + \log_{10} 0,01}$; 2) $\log_8 \sin \frac{\pi}{4}$.

Решение.

1) $\log_{0,5} \sqrt[3]{10 + \log_{10} 0,01} = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{10 - 2} = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$;

2) $\log_8 \sin \frac{\pi}{6} = \log_8 \frac{1}{2} = -3$.

2. Установить, при каких значениях x имеет смысл выражение $\log_3 \sqrt{x^2 - 4} + \log_2 |x + 3|$.Решение. Данное выражение имеет смысл, когда имеет смысл каждое его слагаемое, т. е. при x , являющихся решениями системы неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 4} > 0, \\ |x + 3| > 0. \end{cases}$$

Первое неравенство справедливо при $x < -2$ и при $x > 2$, а второе неравенство верно при $x \neq -3$.Ответ. $x < -3$, $-3 < x < -2$, $x > 2$.Задания для самостоятельной работы

Вычислить (1—3).

1. 4) 1) $\log_{\frac{1}{3}} \log_2 512$; 2) $\log_{0,5} \log_3 81$;

3) $\log_2 (-\log_{0,1} \sqrt{10})$; 4) $\log_{\frac{2}{3}} (-\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27})$.

2. 5) 1) $\log_{0,25} \cos \frac{\pi}{4}$; 2) $\log_4 \sin \frac{\pi}{6}$;

3) $\log_3 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$; 4) $\log_9 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$;

5) $\log_{\frac{1}{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$; 6) $\log_9 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$.

3. 4) 1) $8^{\frac{\log_2 9}{\log_2 4}}$; 2) $0,2^{\frac{\log_5 4}{\log_5 5}}$.

4.5] Найти $\log_5 x$, если:

$$1) x = \frac{5^3 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{5^3} \cdot \sqrt[8]{5^7}}{\sqrt[8]{5}}; \quad 2) x = \frac{5^2 \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{5^5} \cdot \sqrt[12]{5^7}}{\sqrt[12]{5}}.$$

5.6] Установить, при каких значениях x имеет смысл выражение:

- 1) $\log_{0,5} |x| - \log_{0,5} (4 - x^2)$;
- 2) $\log_3 |x| + \log_3 (9 - x^2)$;
- 3) $\log_3 \sqrt{x^2 - 25} + \log_2 |x - 6|$;
- 4) $\log_4 |x + 5| - \log_3 \sqrt{x^2 - 16}$.

Решить уравнение (6—7).

6.6] 1) $3^{x+1} + 18 \cdot 3^{-x} = 29$; 2) $5^{5-x} - 2 \cdot 5^{x-3} = 5$.

7.6] 1) $x + 2 = \log_6 (35 + 6^{-x})$; 2) $\log_3 (4 \cdot 3^x - 1) = 2x + 1$.

§ 2. Свойства логарифмов

Примеры с решениями

1. Вычислить $\frac{16^{\log_4 \sqrt{3}} \cdot \log_3 4 + \log_3 0,5}{\log_3 7 - \log_3 14}$.

Решение. $\frac{16^{\log_4 \sqrt{3}} \cdot \log_3 4 + \log_3 0,5}{\log_3 7 - \log_3 14} =$
 $= \frac{4^{2 \log_4 \sqrt{3}} \cdot \log_3 4 + \log_3 0,5}{\log_3 \frac{7}{14}} = \frac{(\sqrt{3})^2 \log_3 4 + \log_3 0,5}{\log_3 0,5} = \frac{\log_3 4^3 + \log_3 0,5}{\log_3 0,5} =$
 $= \frac{\log_3 (64 \cdot 0,5)}{\log_3 0,5} = \frac{\log_3 32}{\log_3 \frac{1}{2}} = \frac{\log_3 2^5}{\log_3 2^{-1}} = \frac{5 \log_3 2}{-1 \cdot \log_3 2} = -5.$

2. Вычислить $\frac{\log_9 125}{6 \log_3 5}$.

Решение.

$$\frac{\log_9 125}{6 \log_3 5} = \frac{\log_{3^2} 125}{6 \log_3 5} = \frac{\frac{1}{2} \log_3 5^3}{6 \log_3 5} = \frac{\frac{3}{2} \log_3 5}{6 \log_3 5} = \frac{3}{2 \cdot 6} = \frac{1}{4}.$$

3. Решить уравнение $\log_{\sqrt{x}} 5 + \log_{x^2} 9 = 2$.

Решение. При $x > 0$, $x \neq 1$ имеем

$$\log_{\sqrt{x}} 5 = 2 \log_x 5 = \log_x 25, \quad \log_{x^2} 9 = \frac{1}{2} \log_x 9 = \log_x 3.$$

Уравнение можно записать в виде $\log_x 25 + \log_x 3 = 2$, или $\log_x (25 \cdot 3) = 2$, откуда $x^2 = 75$. Учитывая, что $x > 0$, получим $x = 5\sqrt{3}$.

Задания для самостоятельной работы

1. [5] Найти x , если логарифмы данных буквенных выражений существуют:

1) $\log_2 x = 2 \log_2 a + 0,5 \log_2 b - \log_2 (a + b) - \log_2 (a - b)$;

2) $\log_3 x = 1,5 (\log_3 a + \log_3 b) - 2 \log_3 (a + b)$.

2. [5] Найти логарифм выражения по произвольно выбранному основанию:

1) $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$; 2) $Q = cm(t_2 - t_1)$;

3) $t = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$; 4) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

3. [5] Вычислить:

1) $\frac{10^{-\log_{10} 0,5} \cdot \log_5 4 + \log_5 0,5}{\log_5 6 - \log_5 12}$;

2) $\frac{\log_{0,5} 3 - \log_{0,5} 21}{\log_{0,5} 1,4 + 10^{2 \log_{10} 0,5} \cdot \log_{0,5} 625}$;

3) $\frac{\log_4 \log_4 81}{1 + \log_4 \log_4 3}$; 4) $\frac{\log_3 \log_3 125}{1 + \log_3 \log_3 5}$.

4. [4] Выразить данный логарифм через логарифм по основанию 3:

1) $\log_{\frac{1}{3}} 5$; 2) $\log_9 7$; 3) $\log_{\sqrt{3}} 4$; 4) $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} 2$.

5. [5] Найти x , если:

1) $\log_5 x = 1 - \frac{2}{5} \log_5 32 - \frac{1}{3} \log_{0,2} 64$;

2) $\log_4 x = \frac{1}{2} \log_4 9 + \frac{2}{3} \log_{0,25} 27 - 1$.

Вычислить (6—7).

6. [5] 1) $\frac{4 \log_{\frac{1}{3}} 25}{\log_3 5}$; 2) $\frac{\log_{0,25} 3}{3 \log_2 27}$;

3) $\frac{2 \log_{0,5} 27}{\log_4 9}$; 4) $\frac{\log_1 4}{2 \log_{27} 8}$;

5) $\log_{0,2} 16 - 5 \log_{25} 8$; 6) $4 \log_8 27 - \log_{0,5} 81$.

$$7. \boxed{6} \quad 1) 8^{\frac{\log_{10} 2 - \log_{0,1} 5}{1 - \log_{10} 5}}; \quad 2) 0,2^{\frac{\log_{10} 2 - \log_{0,1} 5}{1 - \log_{10} 2}}; \\ 3) 0,1^{\frac{(\log_{10} 7)(1 + \log_2 \log_2 7)}{\log_2 \log_2 49}}; \quad 4) 0,01^{\frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2 + (\log_3 \log_3 243) \log_{10} 3}}.$$

8. $\boxed{5}$ Известно, что $\log_a b = 3$. Найти:

$$1) \log_{a^5}(a^{10}b^5); \quad 2) \log_{a^6}(a^6b^{12}).$$

9. $\boxed{6}$ Известно, что $\log_{10} 2 \approx 0,301$. Найти с точностью до тысячных:

$$1) \log_{10} 800; \quad 2) \log_{10} 400; \quad 3) \log_{10} 0,16; \quad 4) \log_{10} 0,08.$$

10. $\boxed{7}$ Решить уравнение:

$$1) \log_x 2 + \log_{x^2} 4 = 4; \quad 2) \log_{x^2} 9 + \log_x 3 = 4; \\ 3) \log_{x^3} 9 + \log_{\sqrt{x}} 3 = 7 \frac{1}{3}; \quad 4) \log_{\sqrt{x}} 5 + \log_{x^3} 25 = 5 \frac{1}{3}.$$

§ 3. Десятичные и натуральные логарифмы. Формула перехода

Примеры с решениями

1. Найти $\log_6 2$, если $\log_{12} 3 = a$.

Решение. Так как $12 = 2^2 \cdot 3$, а $6 = 2 \cdot 3$, то, полагая $\log_2 3 = n$, выразим через n все заданные логарифмы:

$$\log_6 2 = \frac{1}{\log_2 6} = \frac{1}{1+n}, \quad \log_{12} 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 12} = \frac{n}{2+n}.$$

По условию $\log_{12} 3 = a$, т. е. $\frac{n}{2+n} = a$, откуда $n = \frac{2a}{1-a}$.

$$\text{Тогда } \log_6 2 = \frac{1}{1+n} = \frac{1}{1 + \frac{2a}{1-a}} = \frac{1-a}{1+a}.$$

Ответ. $\frac{1-a}{1+a}$.

2. Доказать, что если $a^2 + b^2 = 7ab$ (где $a > 0$ и $b > 0$), то

$$\lg \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2} (\lg a + \lg b).$$

Доказательство. Данное равенство запишем в виде $a^2 + b^2 + 2ab = 7ab + 2ab$, откуда $(a+b)^2 = 9ab$, $\frac{(a+b)^2}{9} = ab$. Если равны положительные числа, то равны и их логарифмы по одному основанию, т. е. $\lg \frac{(a+b)^2}{3^2} = \lg(ab)$, откуда $2 \lg \frac{a+b}{3} = \lg a + \lg b$, $\lg \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2} (\lg a + \lg b)$, что и требовалось доказать.

Задания для самостоятельной работы

1. [5] Решить уравнение:

1) $\log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x + \log_3 x = 6;$

2) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7.$

2. [6] Найти $\log_3 6$, если:

1) $\lg 3 = a, \lg 2 = b;$

2) $\log_2 3 = a, \log_2 10 = b.$

3. [8] Найти:

1) $\log_6 16$, если $\log_{12} 27 = a;$

2) $\log_{12} 8$, если $\log_6 9 = a.$

4. [6] Найти $\lg x$, если:

1) $x = \sqrt{\frac{ab^3 \sqrt{b} \sqrt{a}}{\sqrt[3]{b^2 \sqrt{ab}}}}$;

2) $x = \sqrt{\frac{ab \sqrt{a} \sqrt{b}}{\sqrt[3]{b^2 \sqrt{a}}}}$;

3) $x = \sqrt{\frac{24 \sqrt{2} \sqrt{3}}{\sqrt[3]{4 \sqrt{6}}}}$;

4) $x = \sqrt{\frac{15 \sqrt{3} \sqrt{5}}{\sqrt[3]{25 \sqrt{3}}}}$.

5. [6] Найти $\ln x$, если:

1) $x = \frac{\sqrt{e^3 \sqrt{10}}}{\sqrt[4]{10^5 \sqrt{e^5}}}$;

2) $x = \frac{\sqrt{5e^5 \sqrt[3]{5^2}}}{\sqrt{e^3 \sqrt[4]{5^3}}}$.

§ 4. Логарифмическая функция, ее свойства и график

Примеры с решениями

1. Найти область определения функции

$$y = \log_3 \sqrt{x^2 - 0,25} + \log_x |x - 3|.$$

Решение. Область определения заданной функции совпадает с решением системы

$$\begin{cases} x^2 - 0,25 > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ x - 3 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0,5, \\ x \neq 1, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Ответ. $0,5 < x < 1, 1 < x < 3, x > 3.$

2. Изобразить схематически график функции

$$y = 10^{\lg x^2} + 5^{\log_5(4-2x)} - 7.$$

Решение. Область определения функции совпадает с решением системы

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ 4 - 2x > 0. \end{cases} \quad (1)$$

На этой области функция задается формулой

$$y = x^2 + 4 - 2x - 7,$$

т. е.

$$y = x^2 - 2x - 3. \quad (2)$$

Таким образом, график исходной функции (рис. 3) совпадает с графиком квадратичной функции (2) при $x < 2$, $x \neq 0$.

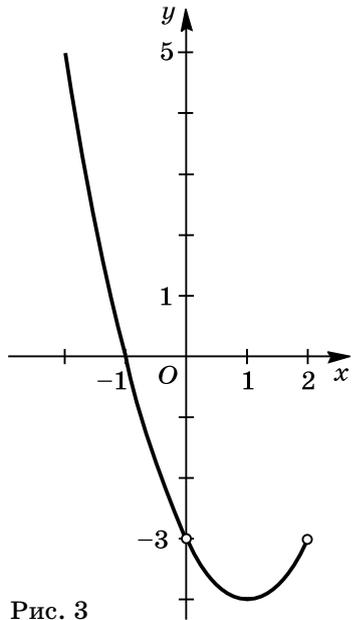


Рис. 3

Задания для самостоятельной работы

Найти область определения функции (1—3).

1. [5] 1) $y = \log_{0,3}(4^{2x-1} - 2^{3x})$; 2) $y = \log_7(3^{3x+1} - 9^x)$.

2. [5] 1) $y = \log_2|x| + \lg(x^2 + 3x + 2)$;

2) $y = \lg|x| + \log_{0,5}(4 - x^2)$;

3) $y = \lg|3 - x| - \lg(x^3 - 8)$;

4) $y = \log_3|x + 3| + 2 \log_3(1 - x^3)$;

5) $y = \ln \sqrt{x + 1} + \ln(1 - 8x^3)$;

6) $y = \lg(8x^3 + 1) - \log_2 \sqrt{3 - x}$.

3. [6] 1) $y = \frac{\log_x(x-2)}{\ln(x^2-8)}$; 2) $y = \frac{\log_x(x-3)}{\lg(x^2-12)}$;

3) $y = \frac{\lg(25-x^2)}{\log_x(x+1)}$; 4) $y = \frac{\ln(36-x^2)}{\log_x(x+2)}$.

4. [7] Построить график функции:

1) $y = 2^{\log_2(x-1) + \log_2(x+2)}$; 2) $y = 0,3^{\log_{0,3}(x-2) + \log_{0,3}(x+2)}$;

3) $y = 3^{\log_3(2-x-x^2)}$; 4) $y = 2^{\log_2(x^2+x-2)}$;

5) $y = 2^{\log_2(x+3)} - 3^{\log_3(x-2)}$; 6) $y = 0,5^{\log_{0,5}(3-x)} + 2^{\log_2(x+1)}$.

Решить графически уравнение (5—8).

5. [6] 1) $\lg x^2 = 1 - x^2$; 2) $\lg x^3 = 1 - x^2$;
3) $\log_2(4 - x) = x - 3$; 4) $\log_2(x - 1) = 4 - x$.
6. [7] 1) $\log_2|x| = 1 - x^2$; 2) $\log_{0,2}|x| = x^2 - 26$.
7. [7] 1) $|\log_2 x| = 3 - x$; 2) $|\log_2(x + 1)| = 2 - x$.
8. [8] 1) $\log_2 x = \sqrt{5 - x^2}$; 2) $\log_{0,5} x = -\sqrt{5 - x^2}$.
9. [8] Доказать, что функция:
1) $y = |\lg(x - 3)|$ ограничена снизу;
2) $y = -|\ln(x + 2)|$ ограничена сверху.

§ 5. Логарифмические уравнения

Примеры с решениями

1. Решить уравнение $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$.

Решение. Запишем исходное уравнение в виде

$$(3^{\log_3 x})^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162,$$

откуда $x^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162$, т. е. $x^{\log_3 x} = 81$. Логарифмируя обе части последнего равенства по основанию 3, получим $\log_3^2 x = 4$, откуда $\log_3 x = \pm 2$.

Ответ. $x_1 = 9$, $x_2 = \frac{1}{9}$.

2. Решить уравнение

$$\log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2 + 23x + 21) = 4.$$

Решение. Перепишем уравнение, разложив на множители выражения, стоящие под знаками логарифмов:

$$\log_{3x+7}(2x + 3)^2 + \log_{2x+3}((3x + 7)(2x + 3)) = 4.$$

Полученное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3x + 7 > 0, \\ 3x + 7 \neq 1, \\ 2x + 3 > 0, \\ 2x + 3 \neq 1, \\ 2\log_{3x+7}(2x + 3) + \log_{2x+3}(3x + 7) + 1 = 4. \end{cases}$$

Первые четыре соотношения выполняются при $x > -1,5$ и $x \neq -1$. В последнем уравнении системы обозначим $t = \log_{3x+7}(2x + 3)$ и запишем его в виде $2t + \frac{1}{t} = 3$ ($t \neq 0$, так как $2x + 3 \neq 1$), откуда $2t^2 - 3t + 1 = 0$ и $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{2}$.

Возвращаясь к исходному обозначению, имеем:

1) $\log_{3x+7}(2x+3) = 1$, откуда $3x+7 = 2x+3$, $x = -4$;

2) $\log_{3x+7}(2x+3) = \frac{1}{2}$, откуда $(3x+7)^{\frac{1}{2}} = 2x+3$, $3x+7 = (2x+3)^2$, $3x+7 = 4x^2 + 12x + 9$, $4x^2 + 9x + 2 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{1}{4}$.

Среди чисел -4 , -2 , $\frac{1}{4}$ условиям $x > -1,5$ и $x \neq -1$ удовлетворяет только $x = \frac{1}{4}$.

Ответ. $x = \frac{1}{4}$.

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнение (1—13).

1. [5] 1) $\log_{\frac{1}{3}}(1 + \log_3(2^x - 7)) = -1$;

2) $\log_{0,5}^3(3 + \log_2(3^x - 7)) = -2$.

2. [6] 1) $\lg \frac{x^2+4}{x-3} = \lg x$;

2) $\log_{0,1} \frac{x^2-4}{x+3} = \log_{0,1} x$.

3. [6] 1) $\log_3(5-x) + 2 \log_3 \sqrt{3-x} = 1$;

2) $\log_2(2-x) + 2 \log_2 \sqrt{1-x} = 2 + \log_2 3$.

4. [6] 1) $\lg(35-x^3) = 3 \lg(5-x)$;

2) $3 \lg(x-3) = \lg(x^3-63)$.

5. [7] 1) $\lg \lg(x-1) = \lg \lg(2x+1) - \lg 2$;

2) $\lg \lg(x+1) - \lg 2 = \lg \lg(x-1)$.

6. [6] 1) $x^{\log_3 x} = 81$;

2) $x^{\log_2 x} = 16$;

3) $x^{1-\lg x} = 0,01$;

4) $x^{\log_3 x - 2} = 27$.

7. [7] 1) $(\sqrt{x})^{\log_5 x - 1} = 5$;

2) $(\sqrt[3]{x})^{\lg x} = 10^{6+\lg x}$.

8. [7] 1) $\frac{3 \lg x - 7}{\lg x + 5} = \frac{\lg x - 3}{\lg x + 2}$; 2) $\frac{3 \lg x - 10}{\lg x + 4} = \frac{\lg x - 4}{\lg x + 1}$.

9. [7] 1) $\lg \lg x + \lg(\lg x^3 - 2) = 0$;

2) $\log_5 \lg x + \log_5(\lg x^5 - 4) = 0$.

10. [7] 1) $\log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x} + \frac{1}{2}$;

2) $\log_5 x - \log_x 5 = \log_5 \sqrt{x} + \log_{\sqrt{x}} 5 - 0,5$.

11. [8] 1) $\log_x(125x) \cdot \log_{\frac{25}{x}} x = 1$;

2) $\log_3^2 x \cdot \log_x \frac{27}{x} = -4$.

12. [8] 1) $3 \log_{x^2} 16 + \log_{\sqrt[3]{x}} 5 = 3$;

2) $\log_{x^2} 81 + \log_{\sqrt{x}} 4 = 2$.

13. [9] 1) $\log_{2-2x^2} (2 - x^2 - x^4) = 2 - \frac{1}{\log_4 (2 - 2x^2)}$;

2) $\log_{3-4x^2} (9 - 16x^4) = 2 + \frac{1}{\log_2 (3 - 4x^2)}$.

14. [10] В зависимости от значений параметра a решить уравнение:

1) $\log_a (x - 2) - \log_a x = 1$;

2) $\log_a x + 1 = \log_a (x + 6)$;

3) $\log_a x + \log_a (4 - x) = 1$;

4) $\log_a (6 - x) = 2 - \log_a x$.

15. [10] Решить относительно x уравнение:

1) $a^2 \cdot 4^x - (a - 1) \cdot 2^{2x+1} = 1 + 3a$;

2) $a \cdot 3^{2x+1} - (a + 1) \cdot 9^x = a^2$.

16. [9] Решить систему уравнений:

$$1) \begin{cases} 1 + \log_3 (x + y) \log_2 3 = 2 \log_4 7 - \log_2 x, \\ \log_2 (xy + 1) = 2 \log_4 y + \log_{\frac{1}{8}} (x - 2y)^3; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \log_4 x \cdot \log_3 4 = \log_3 5 + \log_{\frac{1}{3}} (2y + 4x), \\ \log_3 (x - y) = \log_{\frac{1}{3}} y - 3 \log_{27} (2 + xy). \end{cases}$$

§ 6. Логарифмические неравенства

Примеры с решениями

1. Решить неравенство $\frac{1 - \log_4 x}{1 + \log_2 x} \leq \frac{1}{2}$.

Решение. При $t = \log_2 x$ исходное неравенство принимает вид $\frac{2-t}{2(1+t)} \leq \frac{1}{2}$, откуда

$$\frac{-2t+1}{1+t} \leq 0, \text{ т. е. } \frac{2t-1}{t+1} \geq 0.$$

Последнее неравенство выполняется при $t < -1$ и $t \geq \frac{1}{2}$.

Возвращаясь к переменной x , имеем $\log_2 x < -1$ и $\log_2 x \geq \frac{1}{2}$, откуда $x < \frac{1}{2}$ и $x \geq \sqrt{2}$.

2. В зависимости от значений параметра a решить неравенство

$$\log_a x - \log_a(6-x) > 1.$$

Решение. При $a \leq 0$ и $a = 1$ неравенство не имеет решений. Для остальных значений a запишем исходное неравенство в виде

$$\log_a x > \log_a(a(6-x)). \quad (*)$$

Функция $y = \log_a t$ определена при $t > 0$ и может быть как возрастающей, так и убывающей. Рассмотрим оба случая, заменяя неравенство (*) равносильными системами.

$$1) \begin{cases} a > 1, \\ x > a(6-x) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a > 1, \\ x(1+a) > 6a, \\ a(6-x) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a > 1, \\ x > \frac{6a}{1+a}, \\ x < 6, \end{cases}$$

так как $1+a > 0$ и $a > 0$. Последняя система имеет решения $\frac{6a}{1+a} < x < 6$, если $\frac{6a}{1+a} < 6$. А последнее соотношение (т. е. $6a < 6 + 6a$) верно при любом $a > 1$.

Итак, если $a > 1$, то $\frac{6a}{1+a} < x < 6$.

$$2) \begin{cases} 0 < a < 1, \\ 0 < x < a(6-x); \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < a < 1, \\ x > 0, \\ x(1+a) < 6a; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < a < 1, \\ x > 0, \\ x < \frac{6a}{1+a}. \end{cases}$$

Последняя система имеет решение $0 < x < \frac{6a}{1+a}$, если $\frac{6a}{1+a} > 0$, а это верно при всех $0 < a < 1$. Итак, если $0 < a < 1$, то $0 < x < \frac{6a}{1+a}$.

Ответ. Если $a \leq 0$, $a = 1$, то решений нет; если $0 < a < 1$, то $0 < x < \frac{6a}{1+a}$; если $a > 1$, то $\frac{6a}{1+a} < x < 6$.

Задания для самостоятельной работы

Решить неравенство (1—9).

$$1. \boxed{5} \quad 1) \log_{0,1} \frac{2x+3}{2x^2+3} > 0; \quad 2) \lg \frac{2x-5}{-2x^2-5} < 0.$$

$$2. \boxed{6} \quad 1) \frac{\log_{0,2} \left(2x^2 - \frac{1}{2} \right)}{\log_7 (2x^2 + 2)} \geq 0; \quad 2) \frac{\lg \left(3x^2 - \frac{1}{3} \right)}{\log_{0,1} (1+x^2)} \geq 0;$$

$$3) \frac{\log_{\sqrt{2}} \left(12x^2 - \frac{1}{3} \right)}{\log_2 (1+2x^2)} \leq 0; \quad 4) \frac{\log_{0,1} (1,1+x^2)}{\log_3 \left(3x^2 - \frac{1}{12} \right)} \leq 0.$$

3. [6] 1) $\log_2(x^2 - 7x + 6) \leq 1 + \log_2 7$;
 2) $\log_{0,5}(-x^2 + 9x - 14) \geq \log_{0,5} 3 - 1$.
4. [6] 1) $\log_{0,5}(x + 2) + \log_{0,5}(x + 3) \geq \log_{0,5} 3 - 1$;
 2) $\log_6(5x + 8) + \log_6(x + 1) \leq 1 - \log_6 3$;
 3) $2 + \log_3(x + 2) \leq \log_3(x^2 + 8)$;
 4) $-1 + \log_{0,5}(4 - x) \geq \log_{0,5}(x^2 + 5)$.
5. [7] 1) $2 \log_5 x - \log_x 5 \geq 1$; 2) $\log_{0,5} x + 2 \log_x 2 \leq 1$.

6. [7] 1) $\frac{1}{1 + \lg x} + \frac{1}{1 - \lg x} \geq 2$;
 2) $\frac{1}{2 - \lg x} + \frac{1}{2 + \lg x} \leq 1$.

7. [7] 1) $\log_3^2(x - 1)^2 \leq 16$; 2) $\log_{0,5}^2(x + 1)^2 \geq 4$.

8. [8] 1) $\log_{x^2+1}(9 - x^2) \leq 1$; 2) $\log_{x^2+2}(4 - x^2) \leq 1$;
 3) $\log_{\frac{1}{x^2+1}}(9 - x^2) \geq -1$; 4) $\log_{\frac{1}{x^2+2}}(4x^2 - 1) \geq -1$;
 5) $\log_{\frac{1}{x^2+1}}(x^2 - x) \geq -1$; 6) $\log_{\frac{1}{x^2+2}}(x^2 + x) \geq -1$.

9. [9] 1) $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1$; 2) $\log_{x+3}(x^2 - x) < 1$;
 3) $\log_x \log_3(9^x - 6) \geq 1$; 4) $\log_x \log_2(4^x - 6) \leq 1$.

10. [6] Найти область определения функции:

- 1) $y = \sqrt{\lg(x^2 - 6x + 6)}$;
 2) $y = \sqrt{\log_3(6x^2 + x - 1)}$;
 3) $y = \sqrt{\lg x + \lg(x + 1,5)}$;
 4) $y = \sqrt{\lg(x - 2) + \lg(x + 2)}$;
 5) $y = \sqrt{\log_{0,5}(x^2 - 5x + 6)} + 1$;
 6) $y = \sqrt{1 - \log_8(x^2 - 4x + 3)}$.

11. [10] Для каждого значения параметра a решить неравенство:

- 1) $\log_a(x - 3) - \log_a(x - 1) > 1$;
 2) $\log_a(1 - x) + 1 < \log_a(7 - x)$;
 3) $\log_{\frac{a}{a-1}}(x^2 + 3) > 1$;
 4) $\log_{\frac{3-a}{3}}(x^2 + 0,25) < 2$;
 5) $2^{2x+1} \cdot (a - 2) + 4^x \cdot (1 - a) < a - 2$;
 6) $(a - 1) \cdot 4^x + 2^{2x+1} \cdot (3 - a) > 1 - a$.

Контрольная работа

1. Вычислить

$$5^{\frac{\lg 5 - \log_{0,1} 2}{\log_9 25}} \left[3^{\frac{\lg 5 - \log_{0,1} 2}{\log_4 9}} \right].$$

2. Сравнить числа a и b , если:

$$a = \log_{0,2} 0,3, \quad b = \log_{11} \sin \frac{\pi}{2} \quad \left[a = \log_{\frac{2}{3}} 2, \quad b = \log_2 \sin \frac{\pi}{6} \right].$$

3. Решить уравнение:

1) $\log_2(2 + \log_3(3 + x)) = 0$ $[\lg(3 + 2 \log_2(1 + x)) = 0]$;

2) $3 \log_3 x + 3 \log_x 3 = 10$ $[3 \log_7 x - 2 \log_x 7 = 1]$.

4. Решить неравенство

$$2 \log_2(2x + 7) \geq 5 + \log_2(x + 2) \\ [2 \log_2(x + 5) \leq 3 + \log_2(11 + x)].$$

5. Построить график функции

$$y = \log_{0,5} |x + 1| \quad [y = |\log_3(x - 1)|].$$

6. Решить уравнение

$$(\sqrt[3]{x})^{\log_7 x - 2} = 7 \quad [(\sqrt{x})^{\lg x} = 10^{4 + \lg x}].$$

7. Решить неравенство

$$\log_x(1 - 2x) < 1 \quad [\log_{3-2x} x < 2].$$

§ 1. Радианная мера угла

Задания для самостоятельной работы

Выразить углы в радианной мере (1—3).

1. $\boxed{4}$ 1) $22^\circ 30'$; 2) $42^\circ 48'$.

2. $\boxed{4}$ 1) $10^\circ 15'$; 2) $12^\circ 25'$.

3. $\boxed{4}$ 1) $15^\circ 16'$; 2) $21^\circ 22'$.

Выразить углы в градусной мере (4—6).

4. $\boxed{4}$ 1) $0,1\pi$; 2) $0,01\pi$.

5. $\boxed{4}$ 1) $\frac{17\pi}{5}$; 2) $\frac{24\pi}{5}$.

6. $\boxed{5}$ 1) 0,02 (с точностью до 0,01);
2) 0,05 (с точностью до 0,01).

Решить задачи (7—8).

7. $\boxed{6}$ 1) Прямоугольный треугольник ABC (где $\angle C = 90^\circ$) вписан в окружность, радиус которой равен 3 см. Найти длину дуги AC , если $\angle A = 18^\circ$.

2) Прямоугольный треугольник ABC (где $\angle C = 90^\circ$) вписан в окружность, радиус которой равен 5 см. Найти длину дуги BC , если $\angle B = 36^\circ$.

8. $\boxed{7}$ 1) Треугольник ABC вписан в окружность с центром O и радиусом 9 см. Точки A' , B' и C' соответственно симметричны вершинам A , B и C относительно центра окружности. Найти: а) длину дуги $C'B$, если $\angle A = 56^\circ$, $\angle B = 64^\circ$; б) площадь сектора BOA' .

2) Треугольник DCE вписан в окружность с центром O и радиусом 4 см. Точки D' , C' и E' соответственно симметричны вершинам треугольника DCE относительно центра окружности. Найти: а) длину дуги $C'E$, если $\angle D = 48^\circ$, $\angle E = 68^\circ$; б) площадь сектора $D'OE$.

9. $\boxed{5}$ 1) С помощью таблиц или калькулятора выразить в радианной мере углы:

1) $21^\circ 18'$, $78^\circ 15'$, $198^\circ 17'$; 2) $27^\circ 42'$, $82^\circ 32'$, $201^\circ 9'$.

10.5 С помощью таблиц или калькулятора выразить в градусной мере углы:

- 1) 0,144; 1,3; 2; 2) 0,47; 1,5; 2,2.

§ 2. Поворот точки вокруг начала координат

Пример с решением

Изобразить на единичной окружности точки, полученные поворотом точки $P(1; 0)$ на углы $\alpha = \pm 0,3\pi + 2\pi k$ и $\beta = \pm 0,7\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Записать одной формулой все углы, поворотом на которые точка $P(1; 0)$ переходит в точки, изображенные на окружности.

Решение. Точка A получена поворотом точки $P(1; 0)$ на углы $\alpha = 0,3\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Точка A_1 получена поворотом точки $P(1; 0)$ на углы $\alpha = -0,3\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Точки B и B_1 получены поворотом точки $P(1; 0)$ на углы $\beta = 0,7\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, и $\beta_1 = -0,7\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, соответственно. Точки A , B_1 , A_1 , B получены поворотом точки $P(1; 0)$ на углы $\gamma = \pm 0,3\pi + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ (рис. 4).

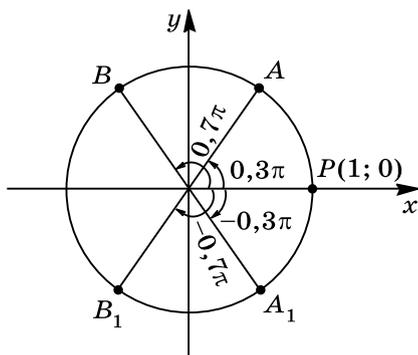


Рис. 4

Задания для самостоятельной работы

Изобразить на единичной окружности точки, полученные поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α (1—4).

- 1.4 1) $\alpha = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; 2) $\alpha = \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.
 2.4 1) $\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; 2) $\alpha = -\frac{\pi}{8} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.
 3.4 1) $\alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$; 2) $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.
 4.4 1) $\alpha = -\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$; 2) $\alpha = -\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Отметить на единичной окружности точки, приблизительно соответствующие точкам, полученным поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α (5—7).

- 5.5 1) $\alpha = 1$; 2) $\alpha = 2$.

6.5) 1) $\alpha = 4$; 2) $\alpha = 3$.

7.5) 1) $\alpha = 5$; 2) $\alpha = 6$.

Установить четверть, в которой расположена точка P_α , полученная поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α (8—10).

8.6) 1) $10 < \alpha < 12$; 2) $12 < \alpha < 13$.

9.6) 1) $\frac{15\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{17\pi}{4}$; 2) $\frac{23\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{25\pi}{3}$.

10.6) 1) $1892^\circ \leq \alpha \leq 1992^\circ$;

2) $2238^\circ \leq \alpha \leq 2338^\circ$.

Изобразить на единичной окружности точки, полученные поворотом точки $P(1; 0)$ на углы α и β . Записать одной формулой все углы, поворотом на которые точка $P(1; 0)$ переходит в точки, изображенные на этой окружности (11—13).

11.6) 1) $\alpha = \pi k$, $\beta = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;

2) $\alpha = \pi k$, $\beta = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

12.6) 1) $\alpha = 0, 4\pi + 2\pi k$, $\beta = 1, 4\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;

2) $\alpha = 0, 2\pi + 2\pi k$, $\beta = 1, 2\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

13.6) 1) $\alpha = \pm 0, 1\pi + 2\pi k$, $\beta = \pm 0, 9\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;

2) $\alpha = \pm 0, 6\pi + 2\pi k$, $\beta = \pm 0, 4\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

14.6) 1) Зубчатое колесо, имеющее 56 зубцов, повернулось по часовой стрелке на 21 зубец. Выразить в радианах угол поворота.

2) Зубчатое колесо, имеющее 56 зубцов, повернулось против часовой стрелки на 32 зубца. Выразить в радианах угол поворота.

Выразить углы в радианах (15—16).

15.6) 1) 3,5 румба;

2) 7,5 румба.

16.6) 1) 12,5 больших делений угломера;

2) 6,5 больших делений угломера.

17.6) Колесо вращается с угловой скоростью ω . За сколько секунд оно сделает полный оборот, если:

1) $\omega = 0,3\pi$ рад/с; 2) $\omega = 0,1\pi$ рад/с?

18.6) Угловая скорость якоря генератора ω рад/с. Сколько оборотов в минуту делает якорь генератора, если:

1) $\omega = 92\pi$ рад/с;

2) $\omega = 120\pi$ рад/с?

§ 3. Определение синуса, косинуса и тангенса угла

Примеры с решениями

1. Изобразить на единичной окружности точку $A(\cos \alpha; \sin \alpha)$, если $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ и $\cos \alpha > 0$. Найти значение $\cos \alpha$.

Решение. Рассмотрим треугольник AOC (рис. 5).

Так как $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, то $AC = \frac{1}{2}$, $AO = 1$, следовательно,

$$OC = \sqrt{AO^2 - AC^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(что соответствует абсциссе точки A), значит, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Найти значения x из промежутка $[-\pi; 3\pi]$, для которых верно равенство $\sin \alpha = -1$.

Решение. Ординату, равную -1 , имеет одна точка окружности $(0; -1)$ (рис. 6), которая получается при повороте точки $P(1; 0)$ на углы $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Среди чисел из промежутка $[-\pi; 3\pi]$ такой вид имеют

числа $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$, которые получены при $k=0$, $k=1$.

При других значениях k получаем числа, не принадлежащие данному промежутку.

3. Решить уравнение $2 \cos 3x + 2 = 0$.

Решение. Выполнив равносильные преобразования, получим $\cos 3x = -1$. Точка с абсциссой, равной -1 , получается в результате поворота точки $P(1; 0)$ на углы $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, т. е.

$$3x = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z},$$

откуда

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

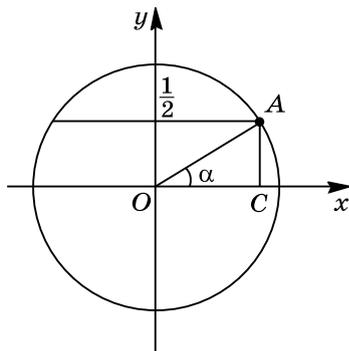


Рис. 5

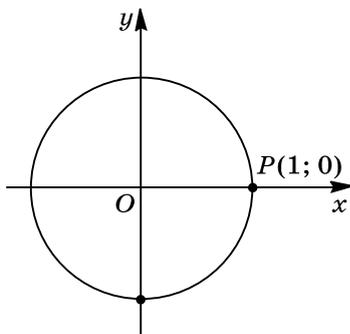


Рис. 6

Задания для самостоятельной работы

Изобразить на единичной окружности точку, полученную поворотом точки $P(1; 0)$ на угол α , и с помощью свойств окружности и прямоугольного треугольника вычислить синус и косинус угла α (1—5).

1.4 1) $\alpha = \frac{\pi}{3}$; 2) $\alpha = 30^\circ$.

2.4 1) $\alpha = 135^\circ$; 2) $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

3.5 1) $\alpha = -\frac{\pi}{2}$; 2) $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$.

4.5 1) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$; 2) $\alpha = \frac{5\pi}{2}$.

5.5 1) $\alpha = -\frac{8\pi}{3}$; 2) $\alpha = -\frac{9\pi}{4}$.

6.6 Найти значения x из заданного промежутка, для которых выполняется равенство $\sin x = a$:

1) $a = 0$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$;

2) $a = 1$, $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right]$.

7.6 Найти значения x из заданного промежутка, для которых выполняется равенство $\cos x = a$, если:

1) $a = -1$, $x \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$;

2) $a = 0$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Сравнить числа с помощью единичной окружности (8—9).

8.5 1) $\sin \frac{2\pi}{3}$ и $\sin \frac{5\pi}{6}$; 2) $\sin \frac{3\pi}{4}$ и $\sin \frac{5\pi}{8}$.

9.5 1) $\cos \frac{2\pi}{3}$ и $\cos \frac{5\pi}{6}$; 2) $\cos \frac{3\pi}{4}$ и $\cos \frac{5\pi}{8}$.

Назвать два положительных и два отрицательных числа α , удовлетворяющие данному равенству (10—11).

10.5 1) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$; 2) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

11.5 1) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

Найти наибольшее и наименьшее значения выражения (12—13).

12.4 1) $2 + \sin \alpha$; 2) $\sin \alpha + \frac{1}{2}$.

13.5 1) $-2 \cos \alpha$; 2) $-3 \sin \alpha$.

Решить уравнение с помощью единичной окружности (14–16).

14. [4] 1) $\sin 3x = 0$; 2) $\cos 2x = 0$.

15. [5] 1) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$; 2) $\sin\left(\frac{x+\pi}{3}\right) = 1$.

16. [5] 1) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$; 2) $\cos\left(\frac{x-\pi}{4}\right) = -1$.

17. [6] 1) Точка $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ симметрична точке B относительно оси Oy и точке C относительно начала координат. Найти: а) координаты точки B ; б) синус, косинус и тангенс угла α , на который нужно повернуть точку $P(1; 0)$, чтобы получить точку C .

2) Точка $D\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ симметрична точке E относительно оси Ox и точке K относительно начала координат. Найти: а) координаты точки K ; б) синус, косинус и тангенс угла β , на который нужно повернуть точку $P(1; 0)$, чтобы получить точку E .

§ 4. Знаки синуса, косинуса и тангенса

Примеры с решениями

1. Определить знак выражения $\sin 3 \cos 5 + \operatorname{tg} 2$.

Решение. Так как $\sin 3 > 0$ ($3 \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$), $\cos 5 < 0$ ($5 \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$), то $\sin 3 \cos 5 < 0$, $\operatorname{tg} 2 < 0$ ($2 \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$), следовательно, сумма двух отрицательных выражений принимает отрицательное значение.

2. Определите знак $\sin \alpha$, если известно, что

$$\frac{31\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{33\pi}{2} \text{ и } \sin \alpha \cos \alpha < 0.$$

Решение. Выясним, какой четверти принадлежит угол α . Выделим целую часть π в числах, являющихся концами промежутка $\left[\frac{31\pi}{2}; \frac{33\pi}{2}\right]$, получим $\frac{31\pi}{2} = 16\pi - \frac{\pi}{2}$, $\frac{33\pi}{2} = 16\pi + \frac{\pi}{2}$. Значит, угол α лежит в первой или четвертой четверти. Так как по условию $\sin \alpha \cos \alpha < 0$, то знаки значений синуса и косинуса должны быть разными, следовательно, α лежит в четвертой четверти и $\sin \alpha < 0$.

Задания для самостоятельной работы

Определить знаки $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ (1—3).

1. [4] 1) $\frac{21\pi}{2} < \alpha < \frac{23\pi}{2}$; 2) $\frac{19\pi}{2} < \alpha < \frac{21\pi}{2}$.
2. [4] 1) $13\pi < \alpha < 14\pi$; 2) $32\pi < \alpha < 33\pi$.
3. [5] 1) $-\frac{41\pi}{2} < \alpha < -\frac{39\pi}{2}$; 2) $-\frac{19\pi}{2} < \alpha < -\frac{17\pi}{2}$.

Сравнить числа (4—6).

4. [5] 1) $\sin \frac{\pi}{13}$ и $\sin \frac{25\pi}{13}$; 2) $\cos \frac{7\pi}{18}$ и $\cos \frac{11\pi}{18}$.
5. [5] 1) $\sin(-1,3)$ и $\sin(-3,2)$;
2) $\cos(-2,5)$ и $\cos(-5,5)$.
6. [5] 1) $\operatorname{tg} 585^\circ$ и $\cos 585^\circ$; 2) $\operatorname{ctg} 485^\circ$ и $\sin 485^\circ$.

Определить знак выражения (7—8).

7. [6] 1) $\sin 2,8 \cdot \cos 2,8 - \operatorname{tg} 3,31$;
2) $\sin 5,1 \cdot \cos 5,1 + \operatorname{ctg} 5,1$.
8. [6] 1) $\operatorname{tg} 6 \sin 5 - \cos 4$; 2) $\operatorname{ctg} 4 \cdot \cos 3 - \sin 2$.
9. [6] Определить знак $\sin \alpha$, если:
1) $\frac{13\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{15\pi}{2}$ и $\sin \alpha \cos \alpha > 0$;
2) $\frac{17\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{19\pi}{2}$ и $\operatorname{tg} \alpha < 0$.
10. [6] Определить знак $\cos \alpha$, если:
1) $8\pi \leq \alpha \leq 9\pi$ и $\operatorname{ctg} \alpha > 0$; 2) $23\pi \leq \alpha \leq 24\pi$ и $\sin \alpha \cos \alpha < 0$.
11. [5] Может ли быть число A положительным, если:
1) $A = \operatorname{tg} \alpha$ и $\sin \alpha \cos \alpha < 0$;
2) $A = \operatorname{ctg} \alpha$ и $\sin \alpha \cos \alpha > 0$?

§ 5. Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла

Примеры с решениями

1. Вычислить $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\operatorname{cosec} \alpha = -\sqrt{5}$ и $13\pi < \alpha < 13,5\pi$.

Замечание. $\operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ (читается «секанс α »); $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$, $\alpha \neq \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ (читается «косеканс α »).

Решение. Так как $\operatorname{cosec} \alpha = -\sqrt{5}$, то $\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{1}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ (угол α лежит в третьей четверти).

Следовательно, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{ctg} \alpha = 2$.

2. Дано: $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 3$. Вычислить:

1) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$; 2) $\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha$.

Решение. 1) По условию $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 3$, значит, $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 = 9$, $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + 2 = 9$, т. е. $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 7$.

2) $\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha = (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)(\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha) = (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)(\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1)$.

По условию $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 3$, из решения предыдущей задачи $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 7$, следовательно, $\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha = 18$.

3. Вычислить $\sin^5 \alpha + \cos^5 \alpha$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = a$.

Решение. Разложим $\sin^5 \alpha + \cos^5 \alpha$ на множители путем деления $\sin^5 \alpha + \cos^5 \alpha$ на $\sin \alpha + \cos \alpha$ столбиком. Получим $\sin^5 \alpha + \cos^5 \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha) \cdot (\sin^4 \alpha - \sin^3 \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin \alpha \cos^3 \alpha + \cos^4 \alpha) = a (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) = a (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)$.

Выразим каждое слагаемое алгебраической суммы в скобках через a :

$$a^2 = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\text{значит, } \sin \alpha \cos \alpha = \frac{a^2 - 1}{2}, \quad \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{(a^2 - 1)^2}{4}.$$

$$(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 = \sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha, \quad \text{значит,}$$

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{(a^2 - 1)^2}{2}.$$

$$\begin{aligned} \sin^5 \alpha + \cos^5 \alpha &= a \left(1 - \frac{(a^2 - 1)^2}{2} - \frac{a^2 - 1}{2} + \frac{(a^2 - 1)^2}{4} \right) = \\ &= a \left(1 - \frac{a^2 - 1}{2} \left(a^2 - 1 + 1 - \frac{a^2 - 1}{2} \right) \right) = a \left(1 - \frac{a^2 - 1}{2} \cdot \frac{a^2 + 1}{2} \right) = \\ &= a \cdot \frac{4 - a^4 + 1}{4} = \frac{5a - a^5}{4}. \end{aligned}$$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить (1—2).

1. [5] 1) $\sin \alpha$ и $\sec \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{2}$, $4,5\pi < \alpha < 5\pi$;

2) $\cos \alpha$ и $\operatorname{cosec} \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = 2,4$, $19\pi < \alpha < 19,5\pi$.

2. [5] 1) $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sec \alpha = -3\frac{4}{7}$, $\frac{13\pi}{2} < \alpha < 7\pi$;

2) $\cos \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\operatorname{cosec} \alpha = \sqrt{3}$, $24\pi < \alpha < \frac{49\pi}{2}$.

Выяснить, при каких значениях x справедливо равенство (3—4).

3.6) 1) $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$;

2) $\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x}$.

4.6) 1) $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$;

2) $\operatorname{cosec}^2 x = \operatorname{ctg}^2 x + 1$.

5.6) Существует ли такой угол α , для которого верно равенство:

1) $\frac{3 \sin^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = 1$;

2) $\frac{\cos^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{2}{7}$?

6.6) Вычислить:

1) $\frac{6 \sin \alpha + \cos \alpha}{3 \cos \alpha - 4 \sin \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = a$;

2) $\frac{3 \sin \alpha + 7 \cos \alpha}{4 \cos \alpha - 3 \sin \alpha}$, если $\operatorname{ctg} \alpha = a$.

7.6) Найти значение выражения $\frac{5}{2 + 6 \sin \alpha \cos \alpha}$, если:

1) $\operatorname{ctg} \alpha = 10$;

2) $\operatorname{ctg} \alpha = 2$.

8.6) Найти значение выражения $\frac{3}{9 - 8 \sin^2 \alpha}$, если:

1) $\operatorname{tg} \alpha = 0,1$;

2) $\operatorname{tg} \alpha = 3$.

Найти значение выражения (9—10).

9.6) 1) $\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = -0,8$;

2) $\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha$, если $\cos \alpha - \sin \alpha = -0,2$.

10.6) 1) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 2$;

2) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = 3$.

11.7) Вычислить $\sin^5 \alpha + \cos^5 \alpha$ с точностью до 0,1, если:

1) $\sin \alpha + \cos \alpha = 1,2$;

2) $\sin \alpha + \cos \alpha = 1,3$.

12.8) Вычислить:

1) $\sin^5 \alpha - \cos^5 \alpha$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = a$;

2) $\cos^5 \alpha - \sin^5 \alpha$, если $\cos \alpha - \sin \alpha = b$.

§ 6. Тригонометрические тождества

Примеры с решениями

1. Доказать тождество

$$\sqrt{\sin^2 x (1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^2 x (1 + \operatorname{tg} x)} = -(\sin x + \cos x)$$

при $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Решение. Преобразуем выражение, стоящее под знаком корня, с целью выделения полного квадрата:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} + \cos^2 x + \cos^2 x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}} = \\ & = \sqrt{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x} = \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} = |\sin x + \\ & + \cos x| = -\sin x - \cos x \quad (\text{в III четверти } \sin x < 0, \cos x < 0). \end{aligned}$$

2. Выяснить, при каких значениях x справедливо равенство

$$\sqrt{\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\operatorname{tg} x + \sin x}} = \operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x.$$

Решение. По определению $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, поэтому

$$\sqrt{\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\operatorname{tg} x + \sin x}} = \sqrt{\frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\frac{\sin x}{\cos x} + \sin x}} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}.$$

Умножив числитель и знаменатель на $(1 - \cos x)$, получим

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{(1 - \cos x)^2}{1 - \cos^2 x}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos x)^2}{\sin^2 x}} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x} - 2 \operatorname{ctg} x \cdot \frac{1}{\sin x} + \operatorname{ctg}^2 x} = \\ & = \sqrt{(\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x)^2} = |\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x|. \end{aligned}$$

Если $\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x > 0$, то $|\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x| = \operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x$.

Выясним, при каких значениях x выполняется неравенство $\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x > 0$. Преобразуем разность, получим $\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} > 0$. Так как $1 - \cos x > 0$ при всех x , то $\sin x > 0$ при значениях x , расположенных в I и II четвертях, т. е. при $2\pi n < x < \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Но левая часть исходного равенства теряет смысл при всех x , где $\cos x = 0$, т. е. в нашем случае это $x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ или $x \neq \frac{(1+4n)\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. Следовательно,

$$2\pi n < x < \frac{(1+4n)\pi}{2}, \quad \frac{(1+4n)\pi}{2} < x < (1+2n)\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Задания для самостоятельной работы

1. [4] Доказать тождество:

1) $\operatorname{tg}^2 x + \sec^2 y = \operatorname{tg}^2 y + \sec^2 x$;

2) $\operatorname{cosec}^2 x + \operatorname{ctg}^2 y = \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{cosec}^2 y$.

Выяснить, при каких значениях x справедливо равенство (2—5).

2. [6] 1) $\sqrt{\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x} = \operatorname{tg} x \sin x$;

2) $\sqrt{\operatorname{ctg}^2 x - \cos^2 x} = \operatorname{ctg} x \cos x$.

3. [7] 1) $\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{cosec} x$;

2) $\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} = \operatorname{tg} x - \sec x$.

4. [7] 1) $\sqrt{\sin^2 x + \operatorname{cosec}^2 x} = -\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$;

2) $\sqrt{\frac{4}{\sin^2 x \cos^2 x}} = 2 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} x$.

5. [7] 1) $\sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} + \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} = -2 \sec x$;

2) $\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} + \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} = -2 \operatorname{cosec} x$.

Доказать тождество и найти допустимые значения входящих в него букв (углов) (6—8).

6. [6] 1) $\frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$;

2) $\frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$.

7. [6] 1) $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = \sin^2 x$;

2) $\frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = \cos^2 x$.

8. [6] 1) $\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\operatorname{ctg} x - \sin x \cos x} = 2 \operatorname{tg}^2 x$;

2) $\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\operatorname{tg} x - \sin x \cos x} = 2 \operatorname{ctg}^2 x$.

9. [7] Доказать тождество:

1) $\sin \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha) + \cos \alpha (1 + \operatorname{ctg} \alpha) = \sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha$;

2) $\sin^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha + \cos^2 \alpha \operatorname{ctg} \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$.

§ 7. Синус, косинус и тангенс углов α и $-\alpha$

Задания для самостоятельной работы

Сравнить числа (1—3).

1. [5] 1) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ и $-\cos\frac{2\pi}{3}$; 2) $\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$ и $\cos\frac{5\pi}{4}$.
2. [5] 1) $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{7}$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; 2) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ и $\operatorname{ctg}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.
3. [5] 1) $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$ и $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}$; 2) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$ и $\cos\left(-\frac{13\pi}{7}\right)$.
4. [6] Найти значение выражения:
 - 1) $\cos(-\alpha) - \sin(-\alpha)$, если $\cos(-\alpha) + \sin(-\alpha) = a$;
 - 2) $\sin\alpha - \cos(-\alpha)$, если $\cos(-\alpha) - \sin(-\alpha) = a$.
5. [7] Доказать неравенство:
 - 1) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}(-\alpha) \geq 2$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
 - 2) $\operatorname{tg}^2(-\alpha) + \operatorname{ctg}^2(-\alpha) \geq 2$.

§ 8. Формулы сложения

Задания для самостоятельной работы

Вычислить (1—2).

1. [5] 1) $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$, если $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\beta = 0,6$,
 $2,5\pi < \alpha < 3\pi$, $1,5\pi < \beta < 2\pi$;
2) $\sin(\alpha - \beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, если $\cos\alpha = -0,6$, $\sin\beta = \frac{5}{13}$,
 $0,5\pi < \alpha < \pi$, $-1,5\pi < \beta < -\pi$.
2. [5] 1) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha = 0,8$, $\cos\beta = \frac{5}{13}$,
 $\pi < \alpha < 1,5\pi$, $-0,5\pi < \beta < 0$;
2) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$, если $\sin\alpha = 0,6$, $\operatorname{ctg}\beta = 2$,
 $0,5\pi < \alpha < \pi$, $\pi < \beta < 1,5\pi$.

Доказать тождество (3—6).

3. [5] 1) $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \sin\beta}$; 2) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \sin\beta}$.
4. [7] 1) $\sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha \cos^3\beta - \cos\alpha \sin^3\beta = \sin\beta \cos\beta \cos(\alpha - \beta)$;
2) $\cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha \sin^3\beta - \cos\alpha \cos^3\beta = \sin\beta \cos\beta \sin(\alpha + \beta)$.
5. [7] 1) $\sin\alpha \sin(\beta + \gamma) - \sin\beta \sin(\gamma + \alpha) + \sin\gamma \sin(\alpha + \beta) =$
 $= 2 \sin\alpha \cos\beta \sin\gamma$;
2) $\cos\alpha \cos(\beta + \gamma) - \cos\beta \cos(\gamma + \alpha) + \cos\gamma \cos(\alpha - \beta) =$
 $= \cos(\alpha - \beta - \gamma)$.

$$6. \boxed{7} \quad 1) \quad 4 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 4 \cos^2 x - 3;$$

$$2) \quad 4 \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 3 - 4 \sin^2 x.$$

Доказать формулы сложения для трех аргументов (7—8).

$$7. \boxed{6} \quad 1) \quad \sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \\ + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma;$$

$$2) \quad \cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \\ - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma.$$

$$8. \boxed{6} \quad 1) \quad \operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}{1 - (\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha)};$$

$$2) \quad \operatorname{ctg}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma - (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma)}{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{ctg} \alpha - 1}.$$

9. $\boxed{7}$ Решить относительно x уравнение:

$$1) \quad \cos x \cos ax - \sin x \sin ax = 1;$$

$$2) \quad \sin ax \cos x + \cos ax \sin x = 0.$$

§ 9. Синус, косинус и тангенс двойного угла

Примеры с решениями

1. Упростить выражение $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x$.

Решение. Используем формулы понижения степени и сложения, получим

$$\frac{(3 \sin x - \sin 3x) \cos 3x}{4} + \frac{(3 \cos x + \cos 3x) \sin 3x}{4} = \\ = \frac{3(\sin x \cos 3x + \cos x \sin 3x)}{4} = \frac{3}{4} \sin(x + 3x) = \frac{3}{4} \sin 4x.$$

2. Упростить выражение $\frac{1 - \sin^4 x - \cos^4 x}{1 - \sin^6 x - \cos^6 x}$.

Решение. Выделив полный квадрат, получим

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x.$$

Воспользуемся формулой суммы кубов и результатом предыдущего преобразования.

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = \\ = (\sin^4 x + \cos^4 x) - \sin^2 x \cos^2 x = \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x\right) - \frac{1}{4} \sin^2 2x = \\ = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x.$$

Дробь примет вид

$$\frac{1 - \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x\right)}{1 - \left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x\right)} = \frac{\frac{1}{2} \sin^2 2x}{\frac{3}{4} \sin^2 2x} = \frac{2}{3}.$$

Данное преобразование верно, если $\sin 2x \neq 0$, т. е. при $x \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

3. Упростить произведение

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \dots \cos \frac{x}{2^n}.$$

Решение. Последовательно, начиная с последнего множителя, используем формулу синуса двойного аргумента:

$$\begin{aligned} & \frac{2^{n-1} \left(2 \sin \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2^n}\right) \cos \frac{x}{2^{n-1}} \dots \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2}}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \\ & = \frac{2^{n-2} \left(2 \sin \frac{x}{2^{n-1}} \cos \frac{x}{2^{n-1}}\right) \cos \frac{x}{2^{n-2}} \dots \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2}}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \\ & = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}. \end{aligned}$$

Данное преобразование верно, если $\sin \frac{x}{2^n} \neq 0$, т. е. при $x \neq 2^n \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Если $x = 2^n \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, то выражение равно $\cos \pi k = (-1)^k$.

4. Вычислить $\sin 18^\circ$.

Решение. Пусть $\sin 18^\circ = x$. Воспользуемся формулами двойного и тройного аргументов. Для этого рассмотрим аргументы 36° и 54° и соответственно учтем, что $\sin 36^\circ = \sin(90^\circ - 54^\circ) = \cos 54^\circ$. Из формул двойного и тройного аргументов следует, что $\sin 36^\circ = 2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ$, $\cos 54^\circ = 4 \cos^3 18^\circ - 3 \cos 18^\circ$. Получим

$$\begin{aligned} 2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ &= 4 \cos^3 18^\circ - 3 \cos 18^\circ, \\ 2 \sin 18^\circ &= 4(1 - \sin^2 18^\circ) - 3. \end{aligned}$$

Таким образом, $\sin 18^\circ$ — корень квадратного уравнения $4x^2 + 2x - 1 = 0$, т. е. $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$, откуда $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, так как $\sin 18^\circ > 0$.

Задания для самостоятельной работы

Вычислить (1—4).

1. [6] 1) $\sin 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;
2) $\cos 2\alpha$, $\operatorname{ctg} 2\alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = 0,75$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.
2. [7] 1) $\sin 4\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = -3$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$;
2) $\cos 4\alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = -0,75$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.
3. [6] 1) $\sin 3\alpha$, если $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$;
2) $\cos 3\alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.
4. [6] 1) $\operatorname{tg} \alpha$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -0,75$, $-\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < 0$;
2) $\sin \alpha$, если $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = 0,75$, $\pi < \frac{\alpha}{2} < \frac{5\pi}{4}$.

Существует ли такой угол α , для которого выполняется равенство (5—6)?

5. [7] 1) $\sin \alpha \cos \alpha = \sin 35^\circ$; 2) $\sin \alpha \cos \alpha = \cos 50^\circ$.
6. [7] 1) $\frac{\cos 2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{tg} 50^\circ$; 2) $\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1} = \operatorname{ctg} 40^\circ$.

Доказать тождество (7—9).

7. [7] 1) $\sin 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha = \cos 2\alpha \operatorname{tg} \alpha$;
2) $\operatorname{ctg} \alpha - \sin 2\alpha = \cos 2\alpha \operatorname{ctg} \alpha$.
8. [7] 1) $\operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{ctg} \alpha$; 2) $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1}{\sin 2\alpha}$.
9. [7] 1) $\frac{\sin^3 \alpha + \sin 3\alpha}{\cos^3 \alpha - \cos 3\alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$; 2) $\frac{\cos \alpha - \cos 3\alpha}{\sin \alpha + \sin 3\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$.

Доказать неравенство (10—11).

10. [7] 1) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 \leq 2$;
2) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 \leq 2$.
11. [7] 1) $\cos \alpha + \sin \alpha > 1$, если $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$;
2) $\sec^4 \alpha + \operatorname{cosec}^4 \alpha \geq 8$.

Вычислить (12—13).

12. [7] 1) $\cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ$;
2) $\frac{\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ}{\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ}$.
13. [8] 1) $\sin 36^\circ$; 2) $\sin 54^\circ$.

§ 10. Синус, косинус и тангенс половинного угла

Задания для самостоятельной работы

1. [6] Вычислить:

1) $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

2) $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 5$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

2. [6] Выразить через синус и косинус половинного аргумента выражение:

1) $3 \sin x + 2 \cos x + 2$; 2) $5 \cos x - \sin x + 5$.

Найти значение выражения (3—6).

3. [7] 1) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = 1,4$, $\frac{3\pi}{8} < \frac{\alpha}{2} < 0,5\pi$;

2) $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = -1,4$, $-\frac{\pi}{4} < \alpha < 0$.

4. [7] 1) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = 0,2$, $\pi < \alpha < 2\pi$;

2) $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = -0,2$, $\pi < \alpha < 2\pi$.

5. [7] 1) $\sin \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = 0,2$, $0 < \alpha < \pi$;

2) $\cos \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = 0,2$, $\pi < \alpha < 2\pi$.

6. [7] 1) $\sin \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = 1,4$, $\frac{\pi}{8} < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

2) $\cos \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = -1,4$, $-\frac{\pi}{4} < \alpha < 0$.

7. [8] Доказать равенство:

1) $\operatorname{ctg} 15^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ = 2\sqrt{3}$; 2) $\operatorname{ctg} 15^\circ + \operatorname{tg} 15^\circ = 4$.

§ 11. Формулы приведения

Примеры с решениями

1. Доказать равенство

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma = 1$$

при условии, что $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$.

Решение. По условию косинус каждого из углов не равен нулю. Выразим угол γ через два других угла:

$\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta$. По формулам приведения и котангенса суммы аргументов имеем

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta \right) = \operatorname{ctg} (\alpha + \beta) = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \operatorname{tg} \gamma = \\ & = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + (1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta) = 1. \end{aligned}$$

2. Вычислить без использования таблиц или калькулятора:

$$\sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} + \sin^4 \frac{7\pi}{16}.$$

Решение. Понизим четвертую степень выражения до первой, предварительно умножив каждое слагаемое на 4 и применив формулы понижения степени:

$$\begin{aligned} 4 \sin^4 x &= (2 \sin^2 x)^2 = (1 - \cos 2x)^2 = \\ &= 1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x = 1 - 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} = \\ &= \frac{3}{2} - 2 \cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x. \end{aligned}$$

Используя подобные преобразования и формулы приведения, получим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{2} - 2 \cos \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4} \right) + \left(\frac{3}{2} - 2 \cos \frac{3\pi}{8} + \frac{1}{2} \cos \frac{3\pi}{4} \right) + \\ & + \left(\frac{3}{2} - 2 \cos \frac{5\pi}{8} + \frac{1}{2} \cos \frac{5\pi}{4} \right) + \left(\frac{3}{2} - 2 \cos \frac{7\pi}{8} + \frac{1}{2} \cos \frac{7\pi}{4} \right) = \\ & = 6 - 2 \left(\cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{3\pi}{8} + \cos \frac{5\pi}{8} + \cos \frac{7\pi}{8} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{4} \right) = \\ & = 6 - 2 \left(\cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{3\pi}{8} + \cos \left(\pi - \frac{3\pi}{8} \right) + \cos \left(\pi - \frac{\pi}{8} \right) \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} + \cos \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(\pi + \frac{3\pi}{4} \right) \right) = \\ & = 6 - 2 \left(\cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{3\pi}{8} - \cos \frac{3\pi}{8} - \cos \frac{\pi}{8} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4} \right) = 6. \end{aligned}$$

Так как каждое слагаемое умножали на 4, то результат составляет

$$6 : 4 = \frac{3}{2} = 1,5.$$

3. Найти значение выражения $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$.

Решение. Домножив и разделив данное произведение на $8 \sin 20^\circ$ с целью дальнейшего использования формулы синуса двойного аргумента, получим

$$\begin{aligned} & \frac{4(2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ) \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{8 \sin 20^\circ} = \\ & = \frac{2(2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ) \cos 80^\circ}{8 \sin(180^\circ - 160^\circ)} = \\ & = \frac{2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ}{8 \sin 160^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{8 \sin 160^\circ} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Задания для самостоятельной работы

Сравнить числа (1—4).

1. [5] 1) $\sin 40^\circ$ и $\sin 160^\circ$; 2) $\cos 70^\circ$ и $\cos 280^\circ$.
 2. [6] 1) $\cos 6,4\pi$ и $0,5$; 2) $\sin 3,1\pi$ и $-0,5$.
 3. [6] 1) $\cos 0,9\pi$ и $\sin 252^\circ$; 2) $\cos 6,4\pi$ и $\sin(-252^\circ)$.
 4. [6] 1) $\operatorname{tg} 3,7\pi$ и $\operatorname{ctg} 3,8\pi$; 2) $\operatorname{tg} 765^\circ$ и $\cos 348^\circ$.

Упростить выражение (5—7).

5. [6] 1) $\frac{\operatorname{tg}(180^\circ + \beta) \cos(180^\circ - \beta)}{\operatorname{tg}(270^\circ + \beta) \cos(270^\circ + \beta)} + \operatorname{tg}(900^\circ - \beta)$;
 2) $\frac{\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) \sin(180^\circ - \alpha)}{\cos(270^\circ + \alpha) \sin(270^\circ + \alpha)} + \operatorname{ctg}(540^\circ - \alpha)$.
 6. [6] 1) $\frac{\cos(270^\circ + \beta)}{\cos(180^\circ - \beta) \operatorname{ctg}(90^\circ + \beta)} + \operatorname{tg} 315^\circ$;
 2) $\frac{\sin(270^\circ + \alpha)}{\sin(180^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)} + \operatorname{ctg} 315^\circ$.
 7. [6] 1) $\frac{\sin 1,2\pi}{\sin 1,3\pi \cdot \operatorname{tg} 1,8\pi}$; 2) $\frac{\cos 1,2\pi}{\cos 1,3\pi \cdot \operatorname{ctg} 1,8\pi}$.
 8. [6] Упростить выражение и найти его числовое значение:
 1) $\cos(-2x) - \frac{2 \sin(-2x)}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$ при $x = \frac{\pi}{8}$;
 2) $2 \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \frac{2 \sin(\pi - x)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \operatorname{tg} x \sin(-x)}$ при $x = -\frac{\pi}{12}$.
 9. [8] Вычислить без использования таблиц и калькулятора:
 1) $\sin^2 \frac{\pi}{8} + 3 \cos^2 \frac{3\pi}{8}$; 2) $\cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ$.

Вычислить (10—11).

10. [8] 1) $\operatorname{ctg} 10^\circ \operatorname{ctg} 50^\circ \operatorname{ctg} 70^\circ$;
2) $\operatorname{tg} 1^\circ \operatorname{tg} 2^\circ \operatorname{tg} 3^\circ \dots \operatorname{tg} 88^\circ \operatorname{tg} 89^\circ$.

11. [8] 1) $4 \sin \frac{\pi}{18} \sin \frac{5\pi}{18} \sin \frac{7\pi}{18}$;
2) $\frac{9 \cos \frac{\pi}{15} \cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{13\pi}{30}}{\sin \frac{4\pi}{15}}$.

§ 12. Сумма и разность синусов. Сумма и разность косинусов

Примеры с решениями

1. Доказать тождество

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma - 1 = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2},$$

если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Решение. Преобразуем левую часть, считая, что $\alpha + \beta = \pi - \gamma$, и применяя формулы половинного аргумента и замены суммы тригонометрических функций произведением:

$$\begin{aligned} & (\cos \alpha + \cos \beta) + (\cos \gamma - 1) = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} = \\ & = 2 \cos \frac{\pi - \gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} \right) \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} = \\ & = 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 2 \sin \frac{\gamma}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin \frac{\gamma}{2} \right) = \\ & = 2 \sin \frac{\gamma}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin \frac{\pi - (\alpha + \beta)}{2} \right) = 2 \sin \frac{\gamma}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \\ & = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

2. Доказать, что если $\alpha = \beta + \gamma$, то

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2(1 - \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma).$$

Решение. Понижим степень в левой части равенства и выделим число 2, которое имеется в правой части:

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 - \cos 2\beta}{2} + \frac{1 - \cos 2\gamma}{2} = \frac{3}{2} - \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma}{2} = \\ & = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma}{2} = 2 - \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + 1}{2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 - \frac{(\cos 2\beta + \cos 2\gamma) + (\cos 2\alpha + 1)}{2} = 2 - (\cos(\beta + \gamma) \cos(\beta - \gamma) + \cos^2 \alpha) = \\
&= 2 - (\cos \alpha \cos(\beta - \gamma) + \cos^2 \alpha) = 2 - \cos \alpha (\cos(\beta - \gamma) + \cos \alpha) = \\
&= 2 - \cos \alpha (\cos(\beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma)) = 2 - \cos \alpha (2 \cos \beta \cos \gamma) = \\
&= 2 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 2(1 - \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma).
\end{aligned}$$

Задания для самостоятельной работы

1. [6] Преобразовать сумму в произведение, если $0 < \alpha < 90^\circ$:

1) $\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha}$;

2) $\sqrt{1 + \cos \alpha} - \sqrt{1 - \cos \alpha}$.

2. [7] Доказать тождество:

1) $\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ = \cos 7^\circ$;

2) $\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ \cos 12^\circ = \frac{1}{2}$.

Доказать тождество, если α , β и γ — углы треугольника (3—4).

3. [7] 1) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$;

2) $\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$.

4. [7] 1) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$;

2) $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$.

5. [8] Доказать, что если $\alpha = \beta + \gamma$, то:

1) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + 1 = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$;

2) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 1 = 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$.

Преобразовать в произведение (6—7).

6. [7] 1) $\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \cos^2 \alpha + \sin 2\alpha$;

2) $3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha - 8 \cos^4 \alpha$.

7. [7] 1) $\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha - \beta)$;

2) $\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha - \beta) + \cos^2 \beta$.

8. [9] Доказать тождество:

1) $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{n\alpha}{2} \sin \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$;

2) $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos n\alpha = \frac{\sin \frac{n\alpha}{2} \cos \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$.

§ 13. Произведение синусов и косинусов

Примеры с решениями

1. Доказать тождество

$$\sin \alpha + \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + 2\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin \frac{3\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}.$$

Решение. Аргументы слагаемых левой части представляют собой арифметическую прогрессию, разность которой равна β . Умножим и разделим эту сумму на $2 \sin \frac{\beta}{2}$. (Сделать это можно, так как $2 \sin \frac{\beta}{2}$ не может быть равно 0: ведь если $\sin \frac{\beta}{2} = 0$, то $\beta = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, и слева стоит сумма трех равных величин.) Получим дробь, числитель которой равен

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{\beta}{2} \sin \alpha + 2 \sin \frac{\beta}{2} \sin(\alpha + \beta) + 2 \sin \frac{\beta}{2} \sin(\alpha + 2\beta) &= \\ &= \left(\cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \right) + \left(\cos\left(\alpha + \beta - \frac{\beta}{2}\right) - \right. \\ &\left. - \cos\left(\alpha + \beta + \frac{\beta}{2}\right) \right) + \left(\cos\left(\alpha + 2\beta - \frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\alpha + 2\beta + \frac{\beta}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

Мы использовали формулы замены произведения синусов суммой. Теперь хорошо видно, почему умножили именно на $2 \sin \frac{\beta}{2}$ (появились слагаемые, которые являются противоположными, и их сумма равна 0). После выполнения в числителе сложения и применения формул замены разности произведением получим дробь

$$\frac{\cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\alpha + 2\beta + \frac{\beta}{2}\right)}{2 \sin \frac{\beta}{2}} = \frac{2 \sin(\alpha + \beta) \sin \frac{3\beta}{2}}{2 \sin \frac{\beta}{2}}.$$

Замечание. Приведенный при решении задачи прием можно использовать для любого числа слагаемых. Важно, чтобы слагаемые представляли собой одноименные тригонометрические функции, а аргументы — арифметическую прогрессию.

2. Доказать тождество

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 2,$$

если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Решение. Из условия $\gamma = \pi - \alpha - \beta$. Заменяя произведение суммой и понизив степень первой пары слагаемых, получим $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \sin^2 \alpha +$

$$\begin{aligned}
& + \sin^2 \beta + \sin^2 (\pi - \alpha - \beta) - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos (\pi - \alpha - \beta) = \sin^2 \alpha + \\
& + \sin^2 \beta + \sin^2 (\alpha + \beta) + (\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)) \cos (\alpha + \beta) = \sin^2 \alpha + \\
& + \sin^2 \beta + (\sin^2 (\alpha + \beta) + \cos^2 (\alpha + \beta)) + \cos (\alpha - \beta) \cos (\alpha + \beta) = \\
& = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 - \cos 2\beta}{2} + 1 + \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2} = 2.
\end{aligned}$$

Задания для самостоятельной работы

Преобразовать произведение в сумму (1—2).

1. [6] 1) $4 \sin 12^\circ \sin 14^\circ \sin 16^\circ$; 2) $3 \cos 25^\circ \cos 15^\circ \cos 35^\circ$.

2. [6] 1) $8 \cos 1^\circ \cos 2^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ$; 2) $4 \sin 25^\circ \cos 15^\circ \sin 5^\circ$.

3. [7] Доказать равенство:

1) $\cos^2 \left(x + \frac{\pi}{6} \right) - \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 0,75$;

2) $\sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{6} \right) - \sin \frac{\pi}{12} \cos \left(2x + \frac{\pi}{12} \right) = \sin 2x$.

4. [6] Упростить выражение:

1) $\sin 2\alpha + 2 \sin \left(\frac{5\pi}{12} - \alpha \right) \cos \left(\frac{5\pi}{12} + \alpha \right)$;

2) $\cos 2\alpha + 2 \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right)$.

5. [6] Упростить сумму:

1) $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$; 2) $\sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7}$.

6. [7] Представить в виде произведения сумму:

1) $\cos 11\alpha + 3 \cos 9\alpha + 3 \cos 7\alpha + \cos 5\alpha$;

2) $\sin 5\alpha \sin 4\alpha + \sin 4\alpha \sin 3\alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha$.

Найти наибольшее и наименьшее значения произведения (7—8).

7. [8] 1) $\cos \left(3x + \frac{2\pi}{5} \right) \cos \left(3x + \frac{\pi}{15} \right)$;

2) $\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$.

8. [9] 1) $\cos(ax + m) \cos(ax + n)$; 2) $\sin(ax + m) \sin(ax + n)$.

Доказать тождество при условии, что α , β и γ — углы треугольника (9—10).

9. [9] 1) $\sin^3 \alpha \cos(\beta - \gamma) + \sin^3 \beta \cos(\gamma - \alpha) + \sin^3 \gamma \cos(\alpha - \beta) = 3 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$;

2) $\sin^3 \alpha \sin(\beta - \gamma) + \sin^3 \beta \sin(\gamma - \alpha) + \sin^3 \gamma \sin(\alpha - \beta) = 0$.

10. [9] 1) $\sin 3\alpha \sin^3(\beta - \gamma) + \sin 3\beta \sin^3(\gamma - \alpha) + \sin 3\gamma \sin^3(\alpha - \beta) = 0$;
 2) $\sin 3\alpha \cos^3(\beta - \gamma) + \sin 3\beta \cos^3(\gamma - \alpha) + \sin 3\gamma \cos^3(\alpha - \beta) = \sin 3\alpha \sin 3\beta \sin 3\gamma$.

Контрольная работа

1. Вычислить $\cos \alpha$ [$\sin \alpha$] и $\operatorname{tg} \alpha$ [$\operatorname{ctg} \alpha$], если

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\cos \alpha = \frac{12}{13} \right] \text{ и } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \left[\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \right].$$

2. Найти значение $\cos 2\alpha$ [$\sin 2\alpha$], если

$$\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{5} [\operatorname{ctg} \alpha = -\sqrt{7}] \text{ и } \frac{11\pi}{2} < \alpha < 6\pi \left[\frac{9\pi}{2} < \alpha < 5\pi \right].$$

3. Найти значение выражения

$$\frac{5 \cos 2\alpha + 3}{3 - 8 \cos^2 \alpha} \left[\frac{2 - 4 \sin^2 \alpha}{3 + \sin 2\alpha} \right],$$

$$\text{если } \operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{5} [\operatorname{ctg} \alpha = -2].$$

4. Упростить выражение

$$\sin(\alpha + 60^\circ) \sin(\alpha - 60^\circ) - \sin^2 \alpha \left[\cos^2 \alpha - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) \right].$$

5. Найти $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ [$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$], если

$$\sin \alpha - \cos \alpha = 1,4 \left[\sin \alpha - \cos \alpha = -1,4 \right]$$

$$\text{и } \frac{3\pi}{8} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} \left[-\frac{\pi}{4} < \alpha < 0 \right].$$

6. Доказать равенство

$$\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$$

$$[8 \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = 1].$$

Глава IX Тригонометрические уравнения

§ 1. Уравнение $\cos x = a$

Примеры с решениями

1. Вычислить:

1) $\cos\left(\arccos \frac{5}{13} - \arccos \frac{4}{5}\right)$; 2) $\arccos(\cos 6)$;

3) $\arccos\left(\sin \frac{9\pi}{7}\right)$; 4) $\arccos(\sin 12)$.

Решение. 1) Обозначим $\arccos \frac{5}{13} = \alpha$, $\arccos \frac{4}{5} = \beta$. Тогда $\cos \alpha = \frac{5}{13}$, $\cos \beta = \frac{4}{5}$, где $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что $\sin \alpha > 0$, $\sin \beta > 0$ и $\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$, $\sin \beta = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$. Применяя формулу для косинуса разности, находим

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5} + \frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} = \frac{56}{65}.$$

2) Заменим $\cos 6$ на косинус угла, заключенного в пределах от 0 до π . Так как $\frac{3\pi}{2} < 6 < 2\pi$, то $-2\pi < -6 < -\frac{3\pi}{2}$, $0 < 2\pi - 6 < \frac{\pi}{2}$. Но $\cos 6 = \cos(2\pi - 6)$, и поэтому $\arccos(\cos 6) = \arccos(\cos(2\pi - 6)) = 2\pi - 6$.

3) Заменим $\sin \frac{9\pi}{7}$ на косинус угла, заключенного между 0 и π :

$$\sin \frac{9\pi}{7} = \sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{2\pi}{7}\right)\right) = \cos \frac{11\pi}{14}, \text{ где } \frac{11\pi}{14} \in [0; \pi].$$

$$\text{Тогда } \arccos\left(\sin \frac{9\pi}{7}\right) = \arccos\left(\cos \frac{11\pi}{14}\right) = \frac{11\pi}{14}.$$

4) Обозначим $\alpha = \arccos(\sin 12)$. Так как $\frac{7\pi}{2} < 12 < 4\pi$, то $\sin 12 < 0$, и поэтому $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Заменим $\sin 12$ на косинус угла, заключенного между $\frac{\pi}{2}$ и π . По формулам приведения $\sin 12 = \sin(12 - 4\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (12 - 4\pi)\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{2} - 12\right)$, где $\frac{\pi}{2} < \frac{9\pi}{2} - 12 < \pi$. Следовательно, $\alpha = \frac{9\pi}{2} - 12$.

2. Доказать равенство

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a. \quad (1)$$

Решение. Обозначим буквами α и β соответственно левую и правую части равенства (1). Тогда $\alpha \in [0; \pi]$, $\cos \alpha = -a$. Используя формулу $\cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi$ и равенство $\cos(\arccos a) = a$, получаем $\cos \beta = \cos(\pi - \arccos(\cos a)) = -a$.

Для доказательства равенства (1) достаточно установить, что $\beta \in (0; \pi)$. Так как $0 \leq \arccos a \leq \pi$, то $-\pi \leq -\arccos a \leq 0$, откуда следует, что $0 \leq \pi - \arccos a \leq \pi$, т. е. $\beta \in [0; \pi]$.

3. Решить уравнение:

1) $\cos^3 x + 1 = 0$; 2) $1 - 2 \sin^2 2x = 2 \cos 4x$;

3) $\cos 3x \cos 2x = \frac{1}{2} + \sin 3x \sin 2x$;

4) $2 \cos^4 x = 2 \sin^4 x - 1$.

Решение. 1) Пусть $\cos x = t$, тогда

$$t^3 + 1 = (t + 1)(t^2 - t + 1) = 0,$$

откуда $t = -1$, а уравнение $t^2 - t + 1 = 0$ не имеет действительных корней. Итак, $\cos x = -1$, откуда $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2) Так как $1 - 2 \sin^2 2x = \cos 4x$, то уравнение можно записать в виде $\cos 4x = 0$, откуда находим $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$.

3) Используя формулу косинуса суммы, запишем уравнение в виде $\cos(3x + 2x) = \frac{1}{2}$, т. е. $\cos 5x = \frac{1}{2}$, откуда $5x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \pm \frac{\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$.

4) Используя равенство $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, получаем уравнение $2 \cos 2x = -1$, $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, откуда $2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Задания для самостоятельной работы

Вычислить (1—6).

1. 4 1) $\cos\left(2 \arccos \frac{5}{13}\right)$; 2) $\cos\left(2 \arccos \frac{4}{5}\right)$.

2. 4 1) $\cos\left(\pi + 2 \arccos \frac{3}{5}\right)$; 2) $\cos\left(\pi - 2 \arccos \frac{4}{5}\right)$.

3. 4 1) $\cos\left(\arccos \frac{3}{5} + \arccos \frac{12}{13}\right)$;

2) $\cos\left(\arccos \frac{12}{13} - \arccos \frac{3}{5}\right)$.

4.5) 1) $\arccos\left(\sin \frac{17\pi}{9}\right)$; 2) $\arccos\left(\sin \frac{34\pi}{9}\right)$.

5.6) 1) $\arccos(\cos 4)$; 2) $\arccos(\cos 10)$.

6.7) 1) $\arccos(\sin 9)$; 2) $\arccos(\sin 13)$.

Решить уравнение (7—10).

7.4) 1) $27 \cos^3 x - 8 = 0$; 2) $27 \cos^3 x + 8 = 0$.

8.3) 1) $1 + 3 \cos 2x = 2 \sin^2 x$; 2) $2 \sin^2 2x = 1 + 3 \cos 4x$.

9.3) 1) $2 \sin 5x \sin 3x = 1 + 2 \cos 5x \cos 3x$;

2) $2 \sin 4x \sin x = 2 \cos 4x \cos x - 1$.

10.4) 1) $16 \cos^4 x = 1$; 2) $4 \cos^4 2x = 1$.

§ 2. Уравнение $\sin x = a$

Примеры с решениями

1. Вычислить:

1) $\sin\left(\arcsin \frac{4}{5} - \arcsin \frac{12}{13}\right)$;

2) $\sin\left(\arcsin \frac{3}{5} + \arccos \frac{5}{13}\right)$;

3) $\arcsin\left(\sin \frac{23\pi}{7}\right)$; 4) $\arcsin\left(\cos \frac{7\pi}{8}\right)$;

5) $\arcsin(\sin 8)$; 6) $\arcsin(\cos 10)$.

Решение. 1) Пусть $\arcsin \frac{4}{5} = \alpha$, $\arcsin \frac{12}{13} = \beta$, тогда $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \beta = \frac{12}{13}$, $\cos \beta = \frac{5}{13}$. Применяя формулу синуса разности, получаем

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} - \frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{16}{65}.$$

2) Пусть $\arcsin \frac{3}{5} = \alpha$, $\arccos \frac{5}{13} = \beta$, тогда $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \beta = \frac{5}{13}$, $\sin \beta = \frac{12}{13}$, т. е.

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} + \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} = \frac{63}{65}.$$

3) Заменяем $\sin \frac{23\pi}{7}$ на синус угла, заключенного между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$. Так как $\sin \frac{23\pi}{7} = \sin\left(3\pi + \frac{2\pi}{7}\right) = \sin\left(\pi + \frac{2\pi}{7}\right) = -\sin \frac{2\pi}{7} = \sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right)$, где $-\frac{\pi}{2} < -\frac{2\pi}{7} < 0$, то

$$\arcsin\left(\sin \frac{23\pi}{7}\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right)\right) = -\frac{2\pi}{7}.$$

4) Заменяем $\cos \frac{7\pi}{8}$ на синус угла, заключенного между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$. Получим

$$\cos \frac{7\pi}{8} = -\cos \frac{\pi}{8} = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = -\sin \frac{3\pi}{8} = \sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right).$$

Следовательно, $\arcsin\left(\cos \frac{7\pi}{8}\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right)\right) = -\frac{3\pi}{8}$.

5) Так как $\frac{5\pi}{2} < 8 < 3\pi$, то $-\frac{\pi}{2} < 8 - 3\pi < 0$, откуда $0 < 3\pi - 8 < \frac{\pi}{2}$, $\sin 8 = \sin(3\pi - 8)$. Тогда

$$\arcsin(\sin 8) = \arcsin(\sin(3\pi - 8)) = 3\pi - 8.$$

6) Пусть $\alpha = \arcsin(\cos 10)$. Так как $3\pi < 10 < \frac{7\pi}{2}$, то $\cos 10 < 0$, и поэтому $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Заменяем $\cos 10$ на синус угла, заключенного между $-\frac{\pi}{2}$ и 0:

$$\cos 10 = -\cos(10 - 3\pi) = \sin\left(10 - 3\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(10 - \frac{7\pi}{2}\right),$$

где $-\frac{\pi}{2} < 10 - \frac{7\pi}{2} < 0$. Следовательно,

$$\arcsin(\cos 10) = \arcsin\left(\sin\left(10 - \frac{7\pi}{2}\right)\right) = 10 - \frac{7\pi}{2}.$$

2. Доказать равенство $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Пусть $\arcsin a = \alpha$, $\arccos a = \beta$, тогда $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \beta \leq \pi$, $\sin \alpha = a$, $\cos \beta = a$. Кроме того, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha = a$, откуда следует, что $\frac{\pi}{2} - \alpha = \arccos a$, так как из неравенств $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ следуют неравенства $-\frac{\pi}{2} \leq -\alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \frac{\pi}{2} - \alpha \leq \pi$. Итак, $\frac{\pi}{2} - \alpha = \beta$, т. е. $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

3. Решить уравнение:

1) $\sin^3 x + 1 = 0$; 2) $\sin^2 x - \sin^4 x = 0$;

3) $2 \sin 4x \cos x = 1 + 2 \cos 4x \sin x$;

4) $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - \frac{1}{2} \sin^2 2x$.

Решение. 1) Так как

$$\sin^3 x + 1 = (\sin x + 1)(\sin^2 x - \sin x + 1),$$

а уравнение $\sin^2 x - \sin x + 1 = 0$ не имеет решений, то исходное уравнение равносильно уравнению $\sin x = -1$, откуда $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2) Преобразуем левую часть уравнения:

$$\sin^2 x - \sin^4 x = \sin^2 x (1 - \sin^2 x) = \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} \sin^2 2x.$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно уравнению $\sin 2x = 0$, откуда $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

3) По формуле синуса разности запишем уравнение в виде $2 \sin(4x - x) = 1$, $2 \sin 3x = 1$, откуда $\sin 3x = \frac{1}{2}$, тогда $3x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, откуда

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

4) Воспользуемся тождеством $1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2$ т. е. $\sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x = \sin^4 x + \cos^4 x + \frac{1}{2} \sin^2 2x$.

Тогда уравнение можно записать в виде $\sin 2x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Задания для самостоятельной работы

Вычислить (1—8).

1.4 1) $\sin\left(2 \arcsin \frac{3}{5}\right)$; 2) $\sin\left(2 \arcsin \frac{4}{5}\right)$.

2.4 1) $\sin\left(\pi - 2 \arcsin \frac{12}{13}\right)$; 2) $\sin\left(\pi + 2 \arcsin \frac{5}{13}\right)$.

3.4 1) $\sin\left(\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{1}{7}\right)$;

2) $\sin\left(\arcsin \frac{3}{4} - \arcsin \frac{1}{4}\right)$.

4.4 1) $\sin\left(\arcsin \frac{1}{3} + \arccos \frac{3}{5}\right)$;

2) $\sin\left(\arcsin \frac{4}{5} - \arccos \frac{2}{3}\right)$.

5.5 1) $\arcsin\left(\sin \frac{21\pi}{8}\right)$; 2) $\arcsin\left(\sin \frac{31\pi}{9}\right)$.

6.5 1) $\arcsin\left(\cos \frac{9\pi}{8}\right)$; 2) $\arcsin\left(\cos \frac{9\pi}{14}\right)$.

7.6 1) $\arcsin(\sin 10)$; 2) $\arcsin(\sin 11)$.

8.7 1) $\arcsin(\cos 8)$; 2) $\arcsin(\cos 11)$.

Доказать равенство (9—10).

9.6 1) $\arcsin \frac{5}{13} = 2 \arccos \frac{5}{\sqrt{26}}$;

2) $\arcsin \frac{3\sqrt{3}+4}{10} - \arccos \frac{4}{5} = \frac{\pi}{6}$.

10. [8] 1) $3 \arcsin \frac{1}{4} + \arccos \frac{11}{16} = \frac{\pi}{2}$;
 2) $\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$.

Решить уравнение (11—15).

11. [3] 1) $\sin x = \sin^3 x$; 2) $\sin 2x = 2 \sin^2 2x$.
 12. [4] 1) $8 \sin^3 x - 1 = 0$; 2) $27 \sin^3 x + 8 = 0$.
 13. [5] 1) $\sin x \sin 2x \cos x = \frac{1}{8}$; 2) $\sin 3x \sin 6x \cos 3x = \frac{1}{4}$.
 14. [3] 1) $2 \cos 2x \sin 3x + \sin x = 2 \sin 2x \cos 3x$;
 2) $3 \cos 3x \sin 5x + 2 \sin 2x = 3 \sin 3x \cos 5x$.
 15. [4] 1) $16 \sin^4 x = 1$; 2) $4 \sin^4 2x = 1$.

§ 3. Уравнение $\operatorname{tg} x = a$

Примеры с решениями

1. Вычислить:

1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3)$; 2) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} \frac{1}{2})$;

3) $\operatorname{tg}(2 \arcsin \frac{2}{3})$; 4) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \frac{5\pi}{8})$;

5) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 23)$.

Решение. 1) Пусть $\operatorname{arctg} 2 = \alpha$, $\operatorname{arctg} 3 = \beta$. Так как $\operatorname{tg} \alpha = 2$, $\operatorname{tg} \beta = 3$, то по формуле тангенса суммы

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{5}{-5} = -1.$$

2) Пусть $\operatorname{arctg} 3 = \alpha$, $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \beta$, тогда

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + 3 \cdot \frac{1}{2}} = 1.$$

3) Пусть $\arcsin \frac{2}{3} = \alpha$, тогда $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, $\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg}(2 \arcsin \frac{2}{3}) = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\frac{4}{\sqrt{5}}}{1 - \frac{4}{5}} = 4\sqrt{5}$.

4) Заменим $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{8}$ на тангенс угла, заключенного между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$. Так как $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{8} = -\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} = \operatorname{tg}(-\frac{3\pi}{8})$, где $-\frac{\pi}{2} < -\frac{3\pi}{8} < 0$, то $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \frac{5\pi}{8}) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-\frac{3\pi}{8})) = -\frac{3\pi}{8}$.

5) Используя неравенство $0 < 22 - 7\pi < \frac{\pi}{2}$, получаем $\arctg(\operatorname{tg} 22) = \arctg(\operatorname{tg}(22 - 7\pi)) = 22 - 7\pi$.

2. Доказать равенство:

$$1) 2 \arctg \frac{1}{4} + \arctg \frac{7}{23} = \frac{\pi}{4}; \quad 2) \arcsin \frac{5}{13} + 2 \arctg \frac{2}{13} = \frac{\pi}{2}.$$

Решение. 1) Пусть $\arctg \frac{1}{4} = \alpha$, $\arctg \frac{7}{23} = \beta$. Тогда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{7}{23}$, $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \frac{\pi}{4} - \beta < \frac{\pi}{4}$, и для доказательства равенства $2\alpha = \frac{\pi}{4} - \beta$ достаточно установить, что $\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \beta \right)$. Это равенство является верным, так как

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{8}{15}, \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \beta \right) = \frac{1 - \frac{7}{23}}{1 + \frac{7}{23}} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}.$$

2) Так как $\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{5}{13} = \arccos \frac{5}{13}$ (§ 2, пример 2), то задача сводится к доказательству равенства $2\alpha = \beta$, где $\alpha = \arctg \frac{2}{3}$, $\beta = \arccos \frac{5}{13}$, $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что равенство $2\alpha = \beta$ является верным, если $\operatorname{tg} 2\alpha =$

$$= \operatorname{tg} \beta. \text{ Учитывая, что } \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}, \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{12}{5}, \cos \beta = \frac{5}{13},$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}, \text{ находим } \operatorname{tg} \beta = \frac{12}{5}, \text{ т. е. } \operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} \beta.$$

3. Решите уравнение:

$$1) \operatorname{tg}^2 x = 3 \operatorname{tg} x; \quad 2) \operatorname{tg}^3 x + 8 = 0; \quad 3) 16 \operatorname{tg}^4 x = 1.$$

Решение. 1) Из равенства $\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x - 3)$ следует, что исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений $\operatorname{tg} x = 0$ и $\operatorname{tg} x = 3$. Находим корни этих уравнений

$$x = \pi n, \quad x = \arctg 3 + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

2) Разложив левую часть уравнения на множители, получаем

$$(\operatorname{tg} x + 2)(\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x + 4) = 0.$$

Исходное уравнение равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = -2$, так как уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x + 4 = 0$$

не имеет решений. Отсюда находим $x = -\arctg 2 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, так как $\arctg(-2) = -\arctg 2$.

§ 4. Тригонометрические уравнения, сводящиеся к алгебраическим. Однородные и линейные уравнения

Примеры с решениями

1. Решить уравнение $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x$.

Решение. Левую часть уравнения можно преобразовать так:

$$\frac{1}{2}\left(\cos \frac{2\pi}{3} - \cos 2x\right) = -\frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x).$$

Тогда уравнение примет вид $2\cos 2x + 4\sin x + 1 = 0$. Так как $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, то уравнение сводится к квадратному относительно $\sin x$, т. е. к уравнению

$$4\sin^2 x - 4\sin x - 3 = 0,$$

откуда $\sin x = \frac{3}{2}$, $\sin x = -\frac{1}{2}$, $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2. Решить уравнение

$$\sin^3 x - 2\sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x + 2\cos^3 x = 0.$$

Решение. Уравнение является однородным относительно $\sin x$ и $\cos x$. Если $\cos x = 0$, то из уравнения следует, что $\sin x = 0$, а $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Поэтому, разделив обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим равносильное уравнение $\operatorname{tg}^3 x - 2\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 2 = 0$. Задача сводится к решению алгебраического уравнения $t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0$, где $t = \operatorname{tg} x$. Разложим его левую часть на множители:

$$t^3 - 2t^2 - t + 2 = t^3 - 2t^2 - (t - 2) = (t - 2)(t^2 - 1) = (t - 2)(t - 1)(t + 1).$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $\operatorname{tg} x = 2$, $\operatorname{tg} x = 1$, $\operatorname{tg} x = -1$.

Ответ. $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. Решить уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \cos^2 2x - 2\cos 2x.$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения, используя тождество

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

и формулу $2\sin x \cos x = \sin 2x$. Тогда уравнение можно записать в виде $1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \cos^2 2x - 2\cos 2x$ или $\cos^2 2x - 4\cos 2x - 1 = 0$, откуда $\cos 2x = 2 \pm \sqrt{5}$.

Ответ. $x = \pm \frac{1}{2} \arccos(2 - \sqrt{5}) + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

4. Решить уравнение

$$\sin x(1 - \cos x)^2 + \cos x(1 - \sin x)^2 = 2.$$

Решение. Это уравнение преобразуем к виду
 $\sin x + \cos x - 4 \sin x \cos x + \sin x \cos x (\sin x + \cos x) = 2.$

Пусть $\sin x + \cos x = t$, тогда $\sin x \cos x = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$. Получаем уравнение $t - 2(t^2 - 1) + \frac{t}{2}(t^2 - 1) = 2$, откуда

$$t^3 - 4t^2 + t = 0, \quad t(t^2 - 4t + 1) = 0.$$

Это уравнение имеет корни $t_1 = 0$, $t_2 = 2 - \sqrt{3}$, $t_3 = 2 + \sqrt{3}$.

Корень t_3 отбрасываем, так как $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ и $|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$.

Если $t = 0$, т. е. $\sin x + \cos x = 0$, то $\operatorname{tg} x = -1$, откуда $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Если $t = 2 - \sqrt{3}$, т. е. $\cos x + \sin x = 2 - \sqrt{3}$, то получаем $\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x + \sin x) = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, или $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, откуда

$$x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. Решить уравнение $\frac{\sin 4x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}(\sin x + \cos x)$.

Решение. Так как $\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x$, $\cos 2x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$, $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x - \cos x)$, то исходное уравнение равносильно уравнению $-2 \sin 2x (\sin x + \cos x) = \sin x + \cos x$ при условии, что $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0$, т. е. $x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Полученное уравнение равносильно совокупности уравнений $\sin x + \cos x = 0$, $\sin 2x = -\frac{1}{2}$, откуда

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Найденные значения x удовлетворяют указанному выше условию и являются корнями исходного уравнения.

6. Решить уравнение $\sin^2 2x - \operatorname{tg}^2 x = \frac{9}{2} \cos 2x$.

Решение. Используя формулы $\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x$, $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$ и обозначив $\cos 2x = t$, получаем уравнение

$1 - t^2 - \frac{1-t}{t+1} = \frac{9}{2}t$, откуда $2t^3 + 11t^2 + 5t = 0$, $t(2t^2 + 11t + 5) = 0$, при условии, что $t \neq -1$ ($\cos x \neq 0$).

Это уравнение имеет корни $t_1 = 0$, $t_2 = -\frac{1}{2}$, $t_3 = -5$, а исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $\cos 2x = 0$, $\cos 2x = -\frac{1}{2}$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

7. Решить уравнение

$$2 \operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x = \sin 2x + 3 \sin x.$$

Решение. Левая часть уравнения определена, если $\sin 2x \neq 0$, $\sin x \neq 0$, т. е. $\sin 2x \neq 0$. При выполнении этого условия исходное уравнение равносильно каждому из уравнений

$$\frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \sin x (2 \cos x + 3),$$

$$\frac{\cos 2x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \sin x (2 \cos x + 3), \quad -\frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x} = \sin x (2 \cos x + 3),$$

$$\cos x (2 \cos x + 3) = -1, \quad 2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0,$$

откуда $\cos x = -1$ (и тогда $\sin x = 0$), $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Ответ. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнение (1—16).

1. $\boxed{4}$ 1) $2 \cos x + \cos 2x = 2 \sin x$;

2) $\sin 2x + 2 \sin x - 3 \cos x = 3$.

2. $\boxed{4}$ 1) $2 \sin^2 x + 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin x - 1$;

2) $2 \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2} - 2 \sin x) \sin x$.

3. $\boxed{4}$ 1) $10 \cos^2 x - 16 \sin x = \cos 2x + 15$;

2) $5 \sin x + \frac{3}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \cos 2x - 3 \sin^2 x$.

4. $\boxed{4}$ 1) $\cos^2 x - 2 \cos x = 4 \sin x - \sin 2x$;

2) $\sin 2x - \sin^2 x = 2 \sin x - 4 \cos x$.

5. $\boxed{4}$ 1) $\operatorname{ctg} x (1 + \cos x) = \sin 2x$;

2) $\operatorname{tg} x (1 - \sin x) = \sin 2x$.

6. $\boxed{4}$ 1) $3 (\cos x - \sin x) = 1 + \cos 2x - \sin 2x$;

2) $2 \cos 2x + 2 \cos x \sin^2 x = \cos x$.

7.4) 1) $\sin^4 x + \cos^4 x = 2 \cos 2x$;
 2) $\sin^4 x + \cos^4 x = 3 \cos 2x$.

8.5) 1) $11 \operatorname{ctg} x - 5 \operatorname{tg} x = \frac{16}{\sin x}$;
 2) $\cos 2x = 2 \operatorname{tg}^2 x - \cos^2 x$.

9.5) 1) $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4 \sin\left(x + \frac{5\pi}{4}\right)$;

2) $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4 \cos\left(\frac{7\pi}{4} - x\right)$.

10.5) 1) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = 1$;

2) $\sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(4x + \frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$.

11.5) 1) $\frac{5}{\cos x} = 5 \operatorname{tg} x + 4 \cos x$;

2) $3 \sin x = 2 \operatorname{ctg} x + \frac{2}{\sin x}$.

12.5) 1) $2 \operatorname{tg} x + \frac{1}{\sin x} = \frac{2}{\sin 2x}$;

2) $2 \operatorname{ctg} x - \frac{1}{\cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$.

13.5) 1) $\operatorname{tg} x \sin x = \cos x + \operatorname{tg} x$;

2) $\operatorname{ctg} x \left(\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x}\right) = 1$.

14.5) 1) $\sin 2x - \cos 2x = \operatorname{tg} x$;

2) $\sin 2x + \cos 2x = 1 + 2 \operatorname{tg} x$.

15.5) 1) $\frac{8(\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x)}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x} = 2 \cos 4x + 5$;

2) $\frac{6\sqrt{3}}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = 4 - \cos 4x$.

16.5) 1) $\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = \frac{1}{2} - \frac{\sin^2 2x}{3}$;

2) $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{5}{4} \cos^2 2x - \frac{7}{10}$.

Решить уравнение, удовлетворяющее неравенству (17—18).

17.6) 1) $\cos 2x = 2 \operatorname{tg}^2 x - \cos^2 x$, $\sin x \geq \cos x$;

2) $2 \operatorname{tg}^2 x \cos 2x = \sin^2 x - 2$, $\cos x \geq \sin x$.

18.6) 1) $4 \sin^4 x + \sin^2 2x = 2 \operatorname{tg}^2 x$, $\sin x \geq 2 \cos x$;

2) $\frac{5}{2} \operatorname{tg}^2 x + \cos^2 2x = 4 \cos^4 x$, $\cos x \geq 2 \sin x$.

Решить уравнение (19—20).

19.6) 1) $2 + \cos 4x = 5 \cos 2x + 8 \sin^6 x$;

2) $4 + \cos 2x + 3 \cos 4x = 8 \cos^6 x$.

20.8) 1) $\sin x + \sin^2 x + \cos^3 x = 0$; 2) $\cos x - \cos^2 x - \sin^3 x = 0$.

§ 5. Методы замены неизвестного и разложения на множители. Метод оценки левой и правой частей тригонометрического уравнения

Примеры с решениями

1. Решить уравнение $\cos^3 x + \sin^3 x = \cos 2x$.

Решение. Преобразовав левую часть уравнения $\cos^3 x + \sin^3 x = (\cos x + \sin x)(\cos^2 x - \cos x \sin x + \sin^2 x) = (\cos x + \sin x)(1 - \cos x \sin x)$, воспользуемся формулой $\cos 2x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$. Тогда исходное уравнение можно записать в виде

$$(\cos x + \sin x)(1 - \cos x \sin x - (\cos x - \sin x)) = 0.$$

Полученное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\begin{aligned}\cos x + \sin x &= 0, \\ 1 - (\cos x - \sin x) - \cos x \sin x &= 0.\end{aligned}$$

Первое уравнение имеет решения $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Второе заменой $\cos x - \sin x = t$ сводится к уравнению $1 - t - \frac{1-t^2}{2} = 0$, или $t^2 - 2t + 1 = 0$, откуда $t = 1$, т. е. $\cos x - \sin x = 1$. Последнее уравнение равносильно уравнению $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда $x + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$.

Ответ. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2. Решить уравнение

$$\sin^2 2x + \sin^2 4x = \sin^2 6x.$$

Решение. Уравнение равносильно каждому из следующих уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 8x}{2} &= \sin^2 6x, \quad \frac{\cos 4x + \cos 8x}{2} = \cos^2 6x, \\ \cos 6x (\cos 2x - \cos 6x) &= 0, \quad \cos 6x \cos 2x \sin 4x = 0, \\ \cos^2 2x \cos 6x \sin 2x &= 0.\end{aligned}$$

Так как все корни уравнения $\cos 2x = 0$ являются корнями уравнения $\cos 6x = 0$, то исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $\cos 6x = 0$, $\sin 2x = 0$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}$, $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x}{\cos x} (1 - \sin^2 x \cos 2x - 2 \sin^2 x) = 1.$$

Решение. Так как $1 - 2 \sin^2 x = \cos 2x$ и $\cos x \neq 0$, то уравнение равносильно каждому из уравнений

$$\frac{\cos 3x}{\cos x} (\cos 2x - \sin^2 x \cos 2x) = 1, \quad \frac{\cos 3x \cos 2x \cos^2 x}{\cos x} = 1,$$

$$\cos x \cos 2x \cos 3x = 1.$$

Полученное уравнение может иметь решение только в том случае, когда $|\cos x| = |\cos 2x| = |\cos 3x| = 1$.

а) Если $\cos x = 1$, то $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, и тогда $\cos 2x = \cos 3x = 1$.

б) Если $\cos x = -1$, то $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, и тогда $\cos 2x = 1$, $\cos 3x = -1$.

Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению $|\cos x| = 1$, или $\cos^2 x = 1$, или $\sin x = 0$.

Ответ. $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

4. Решить уравнение

$$\frac{\sin^2 7x}{\sin^2 x} = 16 \cos 4x (1 + 2 \cos 4x) + \frac{\cos^2 7x}{\cos^2 x}.$$

Решение. Выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 7x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 7x}{\cos^2 x} &= \frac{(\sin 7x \cos x + \cos 7x \sin x)(\sin 7x \cos x - \cos 7x \sin x)}{\sin^2 x \cos^2 x} = \\ &= \frac{4 \sin 8x \sin 6x}{\sin^2 2x} = \frac{16 \cos 4x \sin 2x \cos 2x \sin 6x}{\sin^2 2x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 2x \sin 6x &= \frac{1}{2} (\sin 8x + \sin 4x) = \frac{1}{2} (2 \sin 4x \cos 4x + \sin 4x) = \\ &= \sin 2x \cos 2x (1 + 2 \cos 4x). \end{aligned}$$

Тогда исходное уравнение равносильно уравнению $\cos 4x (1 + 2 \cos 4x) \cos 2x = \cos 4x (1 + 2 \cos 4x)$

при условии $\sin 2x \neq 0$, а последнее уравнение равносильно (при этом же условии) совокупности уравнений $\cos 4x = 0$, $\cos 4x = -\frac{1}{2}$, $\cos 2x = 1$.

Из первого уравнения находим $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$, из второго $x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$, а корни третьего уравнения не удовлетворяют условию $\sin 2x \neq 0$ (если $\cos 2x = 1$, то $\sin 2x = 0$).

Ответ. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. Решить уравнение $\sqrt{\frac{7}{2} - 3 \sin^2 x} = \sin x + \cos x$.

Решение. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{7}{2} - 3 \sin^2 x = (\sin x + \cos x)^2, \\ \sin x + \cos x \geq 0. \end{cases}$$

Уравнение этой системы сводится к однородному $\frac{1}{2} \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \frac{5}{2} \cos^2 x = 0$, откуда $\operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x - 5 = 0$, $\operatorname{tg} x = 1$, $\operatorname{tg} x = -5$. Если $\operatorname{tg} x = 1$, то $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, а если $\operatorname{tg} x = -5$, то $x = -\operatorname{arctg} 5 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Неравенству системы первая серия корней (корни уравнения $\operatorname{tg} x = 1$) удовлетворяет при четных k (т. е. при $k = 2n$), а вторая — при нечетных k (т. е. при $k = 2n + 1$).

Ответ. $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $x = \pi - \operatorname{arctg} 5 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

6. Решить уравнение

$$2 + \sqrt{3} \sin 2x - |\cos 2x| = 4 \sin^2 \frac{x}{2}.$$

Решение. а) Пусть $\cos 2x \geq 0$, тогда уравнение можно последовательно преобразовать так:

$$2 + \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2 - 2 \cos x, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x = -\cos x,$$

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos x = 0, \quad 2 \sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 0,$$

откуда находим две серии корней:

$$x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3} \pi n, \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Корни первой серии не удовлетворяют условию $\cos 2x \geq 0$ при $n = 3k + 1$, $k \in \mathbf{Z}$, и удовлетворяют этому условию при $n = 3k$ и $n = 3k + 2$, $k \in \mathbf{Z}$. Для корней второй серии условие $\cos 2x \geq 0$ не выполняется.

б) Пусть $\cos 2x < 0$, тогда уравнение можно записать в виде $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos x = 0$, $2 \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 0$,

откуда $x = \frac{4\pi}{9} + \frac{2}{3} \pi n$, $x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Корни первой из этих двух серий удовлетворяют условию $\cos 2x < 0$ только при $n = 3k$, а корни второй серии не удовлетворяют этому условию.

Ответ. $x = -\frac{\pi}{9} + 2\pi k$, $x = \frac{11\pi}{9} + 2\pi k$, $x = \frac{4\pi}{9} + 2\pi k$,
 $x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

7. Решить уравнение

$$(3 \sin x + 4 \cos x)(20 + 12 \sin x + 5 \cos 2x) = 143.$$

Решение. Пусть $f(x) = 3 \sin x + 4 \cos x$, $g(x) = 20 + 12 \sin x + 5 \cos 2x$. Тогда

$$f(x) = 5 \left(\frac{3}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x \right) = 5 \cos(x - \varphi),$$

где $\varphi = \arcsin \frac{3}{5}$.

Функция $f(x)$ принимает наибольшее значение, равное 5, тогда и только тогда, когда $x - \varphi = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, т. е. при $x = \varphi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, где $\sin \varphi = \frac{3}{5}$, $\cos \varphi = \frac{4}{5}$.

Преобразуем $g(x)$, выделив полный квадрат:

$$\begin{aligned} g(x) &= 5(1 - 2 \sin^2 x) + 12 \sin x + 20 = \\ &= -10 \left(\sin^2 x - \frac{6}{5} \sin x + \frac{9}{25} \right) + 25 + \frac{18}{5} = \\ &= \frac{143}{5} - 10 \left(\sin x - \frac{3}{5} \right)^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функция $g(x)$ принимает наибольшее значение, равное $\frac{143}{5}$, тогда и только тогда, когда $\sin x = \frac{3}{5}$. Поэтому левая и правая части уравнения совпадают в том и только в том случае, когда $x = \arcsin \frac{3}{5} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ. $x = \arcsin \frac{3}{5} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнение (1—15).

1. $\boxed{4}$ 1) $\sin 2x \cos 4x = \sin 6x \cos 8x$;
2) $\cos 7x \cos 13x = \cos x \cos 19x$.
2. $\boxed{4}$ 1) $\cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x$;
2) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$.
3. $\boxed{5}$ 1) $2 \sin 3x + 2 \sin 2x + \sin x = 0$;
2) $\sin 3x + \sin^3 x = \sin 2x$.
4. $\boxed{5}$ 1) $\sin^3 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin x$;
2) $\cos x = \cos^2 \frac{3}{4} x$.

$$5. \boxed{5} \quad 1) \frac{\cos 5x}{\cos x} (2 \cos^2 x - \sin^2 x \cos 2x - 1) = 1;$$

$$2) \frac{\cos 5x}{\cos x} (1 - 2 \sin^2 x - \sin^2 x \cos 2x) = 1.$$

$$6. \boxed{6} \quad 1) \frac{\cos x}{\cos 3x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = 8 \sin x \sin 3x;$$

$$2) \frac{\sin x}{\sin 3x} + \frac{\sin 5x}{\sin x} = 8 \cos x \cos 3x.$$

$$7. \boxed{6} \quad 1) \sqrt{\frac{13}{3} + \cos 2x} + \operatorname{ctg} x = 0;$$

$$2) \sqrt{\frac{5}{3} - \cos 2x} + \operatorname{tg} x = 0.$$

$$8. \boxed{6} \quad 1) \sqrt{5 + \cos 2x} = \sin x + 3 \cos x;$$

$$2) \sqrt{17 + 7 \sin 2x} = 3 \sin x + 5 \cos x.$$

$$9. \boxed{7} \quad 1) \frac{\sin^2 5x}{\sin^2 x} = 24 \cos 2x + \frac{\cos^2 5x}{\cos^2 x};$$

$$2) \frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x} = 8 \cos 4x + \frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x}.$$

$$10. \boxed{7} \quad 1) \frac{\operatorname{tg} 2x \operatorname{ctg} 3x}{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 3x} = \frac{\operatorname{ctg} 4x \operatorname{tg} 3x}{\operatorname{ctg} 4x + \operatorname{tg} 3x};$$

$$2) \frac{\operatorname{ctg} 2x \operatorname{ctg} 3x}{\operatorname{ctg} 3x - \operatorname{ctg} 2x} = \frac{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x}.$$

$$11. \boxed{7} \quad 1) \sin 3x \sqrt{\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} + x \right)} = \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(4x - \frac{\pi}{4} \right);$$

$$2) \cos 3x \sqrt{\operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{4} - x \right)} = \cos \left(2x + \frac{3\pi}{4} \right) - \cos \left(4x + \frac{\pi}{4} \right).$$

$$12. \boxed{7} \quad 1) \frac{\sin x}{\cos 6x \cos 7x} + \frac{\sin x}{\cos 7x \cos 8x} = \sin 8x - \operatorname{tg} 6x;$$

$$2) \frac{\sin x}{\cos 4x \cos 5x} + \frac{\sin x}{\cos 5x \cos 6x} = \sin 6x - \operatorname{tg} 4x.$$

$$13. \boxed{8} \quad 1) \frac{\cos 3x \cos 5x + |\sin 5x \sin 3x|}{\sin 2x} = 2 \cos 2x;$$

$$2) \frac{\cos 3x \sin 5x + |\cos 5x \sin 3x|}{\cos 2x} = 2 \sin 2x.$$

$$14. \boxed{8} \quad 1) (5 \sin x + 12 \cos x)(100 + 48 \cos x - 13 \cos 2x) = 1757;$$

$$2) (8 \sin x + 15 \cos x)(53 + 32 \sin x + 17 \cos 2x) = 1318.$$

$$15. \boxed{8} \quad 1) \cos^2 3x + \frac{1}{4} \cos^2 x = \cos 3x \cos^4 x;$$

$$2) \sin^2 4x + \cos^2 x = 2 \sin 4x \cos^4 x.$$

§ 6. Системы тригонометрических уравнений

Примеры с решениями

1. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2 \sin x \cos y = -1, \\ 2 \cos x \sin y = 1. \end{cases}$$

Решение. Складывая и вычитая почленно уравнения системы, получим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} \sin x \cos y + \sin y \cos x = 0, & \begin{cases} \sin(x+y) = 0, \\ \sin(y-x) = 1, \end{cases} \\ \sin y \cos x - \sin x \cos y = 1; \end{cases} \quad \text{откуда}$$

$$\begin{cases} x+y = \pi n, \\ y-x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k. \end{cases}$$

Из полученной линейной системы легко находим решения исходной системы.

Ответ. $\left(\frac{\pi n}{2} - \pi k - \frac{\pi}{4}; \frac{\pi n}{2} + \pi k + \frac{\pi}{4}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}$.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos x \cos(x+y) = 2 \sin y, \\ \cos x = \sin y \cos(x+y). \end{cases}$$

Решение. Разделив почленно первое уравнение на второе, получим

$$\cos(x+y) = \frac{2}{\cos(x+y)},$$

откуда $\cos^2(x+y) = 2$.

Последнее уравнение решений не имеет. Однако было бы преждевременно утверждать, что и исходная система не имеет решений. Почленное деление законно только для тех значений переменных, для которых делители $\cos x$ и $\sin y \cos(x+y)$ не равны 0. Правильный вывод из проведенного преобразования должен быть таким: если $\cos x \neq 0$ и $\sin y \cos(x+y) \neq 0$, то система решений не имеет. Следовательно, множество пар $(x; y)$, для которых $\cos x = 0$ или $\sin y \cos(x+y) = 0$, еще не исследовано. Среди таких пар могут быть решения системы.

Если $\cos x = 0$, то из первого уравнения следует, что и $\sin y = 0$. Второе уравнение при этих условиях также удовлетворяется. Поэтому все решения системы

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin y = 0, \end{cases} \quad \text{т. е. все пары } \left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi k\right), \text{ являются решениями}$$

исходной системы.

Если $\sin y = 0$, то из второго уравнения получаем, что $\cos x = 0$, но такие значения переменных уже рассмотрены. Наконец, если $\cos(x+y) = 0$, то из второго уравнения следует, что $\cos x = 0$, а тогда из первого уравнения получаем $\sin y = 0$, т. е. новых решений и в этом случае нет.

Ответ. $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi k\right)$, $n \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}$.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 12 \sin 2x - 8 \sin 2y = 3, \\ \sin y - \sin x + \cos x - \cos y = 1. \end{cases}$$

Решение. Введем новые переменные $u = \cos x - \sin x$, $v = \sin y - \cos y$. Тогда $\sin 2x = 1 - u^2$, $\sin 2y = 1 - v^2$ и система сводится к алгебраической

$$\begin{cases} 12(1 - u^2) - 8(1 - v^2) = 3, \\ u + v = 1. \end{cases}$$

После упрощения получаем

$$\begin{cases} 12u^2 - 8v^2 = 1, \\ u + v = 1. \end{cases}$$

Исключая v из этой системы, приходим к квадратному уравнению $4u^2 + 16u - 9 = 0$, корни которого $u = -\frac{9}{2}$ и $u = \frac{1}{2}$. Корень $u = -\frac{9}{2}$ отбрасываем, так как $u = \cos x - \sin x \geq -\sqrt{2}$. Для корня $u = \frac{1}{2}$ находим соответствующее значение $v = \frac{1}{2}$.

Таким образом, исходная система равносильна следующей системе уравнений (каждое уравнение содержит только одну переменную):

$$\begin{cases} \cos x - \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin y - \cos y = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}, \\ \sin\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

Ответ можно записать так:

$\left(\frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} + \pi k\right)$,
 $n \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \operatorname{tg}^4 y - \cos 2x = 4, \\ \sin x + \frac{1}{\cos^2 y} = 3. \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся формулой $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ и запишем первое уравнение в виде $2 \operatorname{tg}^4 y - (1 - 2 \sin^2 x) = 4$. Найдем $\sin x$ из второго уравнения и подставим в преобразованное первое: $2 \operatorname{tg}^4 y - \left(1 - 2 \left(3 - \frac{1}{\cos^2 y}\right)^2\right) = 4$.

Так как

$$\frac{1}{\cos^2 y} = \operatorname{tg}^2 y + 1,$$

то, положив $t = \operatorname{tg}^2 y$, получим квадратное уравнение

$$2t^2 - 1 - 2(2 - t)^2 = 4, \quad 4t^2 - 8t + 3 = 0,$$

откуда $t = \frac{3}{2}$, $t = \frac{1}{2}$.

Пусть $t = \frac{3}{2}$, тогда

$$\operatorname{tg} y = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad y = \pm \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2}} + \pi n.$$

Из второго уравнения системы находим

$$\sin x = 3 - \frac{1}{\cos^2 y} = 2 - \operatorname{tg}^2 y = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2},$$

откуда $\sin x = \frac{1}{2}$, т. е.

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k.$$

Если $t = \frac{1}{2}$, то $\operatorname{tg} y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, а $\sin x = 3 - \frac{1}{\cos^2 y} = 2 - \operatorname{tg}^2 y = \frac{3}{2}$,

т. е. в этом случае решений нет.

Ответ. $\left((-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; \pm \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2}} + \pi n \right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos^2 2\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin 3x, \\ \sqrt{\sin 2y - 1} \cdot \sin y = 0. \end{cases}$$

Решение. Левая часть второго уравнения имеет смысл тогда и только тогда, когда $\sin 2y - 1 \geq 0$. Если $\sin y = 0$, то это условие не выполнено. Поэтому второе уравнение системы равносильно уравнению $\sin 2y - 1 = 0$, откуда $y = \frac{\pi}{4} + \pi n$. Подставляя эти значения y в первое уравнение системы, находим $2 \sin 3x = \cos^2 2\pi n$, $2 \sin 3x = 1$, откуда

$$\sin 3x = \frac{1}{2}, \quad 3x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad x = (-1) \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}.$$

Ответ. $\left((-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}; \frac{\pi}{4} + \pi n \right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$.

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{1 + \sin x \sin y} = \cos x, \\ 2 \sin x \operatorname{ctg} y = -1. \end{cases}$$

Решение. Возведем обе части первого уравнения в квадрат и преобразуем его:

$$1 + \sin x \sin y = \cos^2 x, \quad \sin^2 x + \sin x \sin y = 0, \\ \sin x (\sin x + \sin y) = 0.$$

Таким образом, получаем, что либо $\sin x = 0$, либо $\sin x = -\sin y$. Из второго уравнения системы видно, что $\sin x \neq 0$. Если $\sin x = -\sin y$, то из второго уравнения системы находим $\cos y = \frac{1}{2}$.

Заметим, что все функции, входящие в систему, имеют период 2π . Поэтому для отыскания всех ее решений достаточно найти решения $(x; y)$, такие, что x и y принадлежат промежутку $[-\pi; \pi)$. Учитывая это замечание, из уравнения $\cos y = \frac{1}{2}$ находим $y_1 = -\frac{\pi}{3}$, $y_2 = \frac{\pi}{3}$. Из уравнения $\sin x = -\sin y$ находим значения x :

$$\sin x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x'_1 = \frac{\pi}{3}, \quad x''_1 = \frac{2\pi}{3}; \\ \sin x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x'_2 = -\frac{\pi}{3}, \quad x''_2 = -\frac{2\pi}{3}.$$

Таким образом, получаем 4 решения $(\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{3})$, $(\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3})$, $(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3})$, $(-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3})$.

Поскольку в процессе решения обе части первого уравнения возводили в квадрат, могли появиться посторонние решения. Необходима проверка. Ясно, что вторая и четвертая пары чисел не удовлетворяют первому уравнению системы, так как его правая часть не должна быть отрицательной. При подстановке первой и третьей пар чисел в уравнения исходной системы получаются верные числовые равенства. Учитывая периодичность с периодом 2π синуса, косинуса и котангенса, получаем ответ:

$$\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right), \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right), \quad n \in \mathbf{Z}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Задания для самостоятельной работы

Решить систему уравнений (1—8).

$$1. \boxed{6} \quad 1) \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y, \\ \sin 2y = 1 + \sqrt{2} \sin x; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x = 1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y, \\ \cos 2y + \sqrt{3} \cos 2x = -1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
2. \boxed{6} \quad 1) & \begin{cases} \sin(2x+y) + \sin(2x-y) = \sqrt{2} \cos y, \\ \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \cos y = \operatorname{tg}^2 y; \end{cases} \\
& 2) \begin{cases} \cos(2x+y) + \cos(2x-y) = \sqrt{3} \cos y, \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \cos y = \operatorname{tg}^2 y. \end{cases} \\
3. \boxed{7} \quad 1) & \begin{cases} \cos(x-2y) + 3 \cos x = 0, \\ \cos(2x-y) + 2 \cos y = 0; \end{cases} \\
& 2) \begin{cases} \sin(2x+y) = 2 \sin y, \\ \sin(2y+x) = 3 \sin x. \end{cases} \\
4. \boxed{7} \quad 1) & \begin{cases} 3 \sin(x-2y) + 2 \sin y \cos(x-y) = 0, \\ \cos(x-y) = 3 \cos(x+y); \end{cases} \\
& 2) \begin{cases} \sin(x-y) = 2 \cos x \sin y, \\ \cos(2x+y) + \cos x \cos(x+y) = 0. \end{cases} \\
5. \boxed{8} \quad 1) & \begin{cases} 2 \sin x \cos y = 2 \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y, \\ 2 \sin y \cos x = \operatorname{ctg} x + 2 \operatorname{ctg} y; \end{cases} \\
& 2) \begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{1}{2}, \\ \cos(x+y) \sin^2(x-y) + \cos(x-y) \sin^2(x+y) = \frac{3}{4}. \end{cases} \\
6. \boxed{6} \quad 1) & \begin{cases} \cos x - \sin x = 1 + \cos y - \sin y, \\ 3 \sin 2x - 2 \sin 2y = \frac{3}{4}; \end{cases} \\
& 2) \begin{cases} \sin x + \cos x = 2 + \sin y + \cos y, \\ 2 \sin 2x + \sin 2y = 1. \end{cases} \\
7. \boxed{8} \quad 1) & \begin{cases} \sin^2 x + \cos y \sin x = \cos 2y, \\ \cos 2x + \sin 2y = \sin^2 y + 3 \sin x \cos y; \end{cases} \\
& 2) \begin{cases} 2 \sin^2 y + \sin 2y = \cos(x+y), \\ \cos^2 x + 2 \sin 2y + \sin^2 y = \cos(x-y). \end{cases} \\
8. \boxed{8} \quad 1) & \begin{cases} \cos 3x = \cos y, \\ 2 \cos(9x+3y) + 9 \sin(15x-2y) = 4; \end{cases} \\
& 2) \begin{cases} \cos x = \cos 5y, \\ 6 \cos(2x+10y) + 20 \sin(6x-20y) = 9. \end{cases}
\end{aligned}$$

Контрольная работа

1. Вычислить:

$$1) \cos\left(2 \arccos \frac{3}{5}\right) \left[\sin\left(2 \arcsin \frac{12}{13}\right)\right];$$

$$2) \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right) \left[\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} 2\right)\right].$$

2. Решить уравнение:

$$1) \sin x - 16 \sin^5 x = 0 \quad [8 \cos^4 x + \cos x = 0];$$

$$2) \sin^3 x + 3 \sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x - 3 \cos^3 x = 0 \\ [6 \cos^3 x + 3 \cos^2 x \sin x - 2 \cos x \sin^2 x - \sin^3 x = 0].$$

3. Вычислить:

$$1) \arcsin\left(\cos \frac{5\pi}{6}\right) \left[\arccos\left(\sin \frac{4\pi}{5}\right)\right];$$

$$2) \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 16) \quad [\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 10)].$$

4. Решить уравнение

$$\sin^2(\sin x + 3 \cos x) + \cos^2 x (\cos x + 3 \sin x) + \\ + 2 \sin x (1 - 3 \cos x) + 2 \cos x (1 - 3 \sin x) = 3$$

$$\left[3 \cos^3 2x + 11 \sin^2 2x - \frac{4(1 - \operatorname{tg}^2 x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 11\right].$$

Ответы

Глава II

§ 2. 1. 1) Таких чисел нет; 2) таких чисел нет. 3. 1) -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 2) -3 ; 3. 4. 1) 4 ; 2) 6 . 6. 1) $x=1$, $y=0$; 2) $x=2$, $y=0$.

§ 3. 3. 1) Нет; 2) нет. 4. 1) Да; 2) да. 5. 1) Да; 2) да.

§ 4. 2. 1) 14 ; 2) 4 . 3. 1) 13 ; 2) 7 .

§ 5. 1. 1) $x=2-3t$, $y=-1-5t$, $t \in \mathbf{Z}$; 2) $x=4-5t$, $y=-1-4t$, $t \in \mathbf{Z}$. 2. 1) Нет решений; 2) нет решений. 3. 1) $(2; 2)$, $(2; -2)$, $(-2; 2)$, $(-2; -2)$; 2) $(2; 3)$, $(2; -3)$, $(-2; 3)$, $(-2; -3)$. 4. 1) $(3; -1)$; 2) $(-1; 3)$. 5. 1) $(2; 0)$, $(-2; 0)$, $(2; 2)$, $(-2; -2)$; 2) $(0; 2)$, $(0; -2)$, $(2; 2)$, $(-2; 2)$. 6. 1) $(2; 0)$, $(2; 2)$; 2) $(-3; 1)$, $(-5; 1)$.

Глава III

§ 1. 1. 1) $x+7$; 2) $x-9$; 3) $2x-1$; 4) $3x-2$. 2. 1) x^2-x+1 ; 2) x^2+x-2 ; 3) $2x^2-3x-1$; 4) $2x^2+2x-3$. 3. 1) $3x^3-6x+7$, $x-1$; 2) $2x^3+5x-7$, $-x+2$; 3) $4x^4+3x^2-x$, x^2-x ; 4) $3x^4-4x^2+x$, x^2-1 . 4. 1) $a=-5$; 2) $a=-2$; 3) $a=-26$; 4) $a=12$; 5) $a=9$; 6) $a=14$. 5. 1) $a=-5$, $b=1$, $c=1$; 2) $a=3$, $b=-2$, $c=-8$; 3) $a=-1$, $b=2$, $c=3$; 4) $a=-3$, $b=2$, $c=-7$. 6. 1) $2x-1$; 2) $3x+1$; 3) $-x+2$; 4) $-x+3$. 7. 1) $n_1=1$, $n_2=3$, $n_3=5$; 2) $n_1=2$, $n_2=4$, $n_3=8$.

§ 2. 1. 1) -6 ; 2) -3 ; 3) 5 ; 4) 4 . 2. 1) $5x^2-3x-1$; 3) $6x^2-5x-2$; 4) $2x^3-x^2+3x-1$; -7 ; 4) $3x^3-x^2-2x+1$; -6 .

§ 3. 1. 1) $x_1=-\frac{3}{2}$, $x_2=-\frac{2}{3}$; 2) $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{1}{5}$. 2. 1) $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=-\frac{1}{2}$; 2) $x_1=0$, $x_2=-3$, $x_3=-\frac{1}{3}$. 3. 1) $x=-2$; 2) $x_1=3$, $x_2=-\frac{1}{2}$, $x_3=\frac{1}{3}$.

4. 1) Делится; 2) делится. 5. 1) Не делится; 2) не делится. 6. 1) 1 ; 2) -20 . 7. 1) 131 ; 2) 31 . 8. 1) $2\frac{1}{16}$; 2) $6\frac{25}{81}$. 9. 1) $n=-8$; 2) $n=4$. 10. 1) $n=2$; 2) $n=3$. 11. 1) $a=1$, $b=3$, $c=-4$; 2) $a=2$, $b=9$, $c=9$.

§ 4. 4. 1) $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=1$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$; 2) $x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=-1$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{3}$. 5. 1) $x_2=\frac{1}{2}$, $x_{3,4}=\pm 2$, $x_5=1$; 2) $x_2=-\frac{1}{3}$, $x_{3,4}=\pm 1$, $x_5=3$.

6. 1) 3 ; 2) -1 . 7. 1) 4 ; 2) 6 . 8. 1) -16 ; 2) 0 . 9. 1) $\frac{3}{4}x^2+2x+\frac{1}{4}$; 2) x^2+x-1 . 10. 1) $2x^2+5x+1$; 2) $11x^2-14x+2$. 11. 1) $3x+6$; 2) $-2x^2+5x+3$. 12. 1) $-x^2+2x+8$; 2) $\frac{1}{3}x^2+2x+\frac{8}{3}$. 13. 1) $11x-17$; 2) $2x+2$. 14. 1) x^3-3x ; 2) $0,5x^3-6x$.

§ 5. 1. 1) $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=5$; 2) $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=-5$.

2. 1) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-3$; 2) $x_1=3$, $x_2=-2$, $x_3=-1$.

3. 1) $x_1=1$, $x_{2,3}=1\pm\sqrt{3}$; 2) $x_1=-1$, $x_{2,3}=1\pm\sqrt{3}$.

4. 1) $x_1=2$, $x_2=-2$, $x_{3,4}=1\pm\sqrt{2}$; 2) $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_3=\pm\sqrt{3}$.

5. 1) $x_1 = -2$, $x_{2,3} = \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{2}$; 2) $x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{73}}{2}$, $x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$.

6. 1) $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{17}$, $x_{3,4} = \frac{-11 \pm \sqrt{153}}{2}$; 2) $x_{1,2} = \frac{6 + \sqrt{7} + \sqrt{19 + 12\sqrt{7}}}{2}$.

7. 1) $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{37}}{2}$; 2) $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5 + 4\sqrt{26}}}{2}$. 8. 1) $x_1 = -1$, $x_2 = 0,5$,

$x_3 = 2$; 2) $x_{1,2} = \pm 1$, $x_3 = \frac{2}{3}$, $x_4 = \frac{3}{2}$. 9. 1) $a < -1$, $-1 < a \leq 0$;

2) $a < -2$, $-2 < a < -1$. 10. 1) $a < -3$; 2) $a < -1$, $-1 < a < 0$.

11. 1) $-2 \leq a \leq -1$, $1 \leq a \leq 3$; 2) $a \leq -1$, $2 \leq a \leq 3$. 12. 1) $a < -2$, $-1 \leq a \leq 1$; 2) $-1 \leq a < 0$, $0 < a \leq 1$, $a \geq 2$.

§ 7. 1. 1) $x^5 + y^5 = u^5 - 5u^3v + 5uv^2$; 2) $x^6 + y^6 = u^6 - 6u^4v + 9u^2v^2 - 2u^3v^3$. 2. 1) $(2; \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}; 2)$; 2) $(1; 1)$, $(-2; 1)$, $(1; -2)$.

3. 1) $(x+y)(x+1)(y+1)$; 2) $(x+y+1)(xy+x+y)$.

§ 8. 1. 1) $(x-2y)(3x+4y)$; 2) $(5x+y)(2x-3y)$. 2. 1) $(x+y) \times (y+z)(z+x)$; 2) $(x+y+z)(xy+yz+zx)$. 3. 1) $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)$; 2) $(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$.

§ 9. 1. 1) $1 + 12a + 54a^2 + 108a^3 + 81a^4$; 2) $81b^4 + 108b^3 + 54b^2 + 12b + 1$; 3) $32a^5 - 80a^4b + 80a^3b^2 - 40a^2b^3 + 10ab^4 - b^5$; 4) $x^5 - 10x^4y + 40x^3y^2 - 80x^2y^3 + 80xy^4 - 32y^5$.

2. 1) $\frac{1}{64} - \frac{3\sqrt{2}}{16} + \frac{15}{8} - 5\sqrt{2} + 15 - 12\sqrt{2} + 8$; 2) $27 - 18\sqrt{3} + 15 - \frac{20\sqrt{3}}{9} + \frac{5}{9} - \frac{2\sqrt{3}}{81} + 729$; 3) $x^7 - \frac{7x^5}{2} + \frac{21x^3}{4} - \frac{35x}{8} + \frac{35}{16x} - \frac{21}{32x^3} + \frac{7}{64x^5} - \frac{1}{128x^7}$; 4) $\frac{1}{256y^8} - \frac{1}{16y^6} + \frac{7}{16y^4} - \frac{7}{4y^2} + \frac{35}{8} - 7y^2 + 7y^4 - 4y^6 + y^8$.

3. 1) $462a^8\sqrt{a}$; 2) $\frac{252\sqrt{a}}{a^3}$.

4. 1) $\frac{231}{16}x^{15}$; 2) $\frac{231}{32}y^{13}$. 5. 1) $T_7 = 28a^3$; 2) $T_7 = 924b^7$; 3) $T_{13} = 455$;

4) $T_{13} = 18564x^{-1}$. 6. 1) $\frac{286a^2\sqrt{b}}{b^9}$; 2) $\frac{1001x^3}{y^6}$.

§ 10. 1. 1) $(2; 0)$, $(0; 2)$; 2) $(1; 2)$, $(2; 1)$. 2. 1) $(2; 1)$, $(1; 2)$;

2) $(2; 1)$, $(1; 2)$. 3. 1) $(\frac{5}{3}; \frac{13}{3})$, $(-\frac{5}{3}; -\frac{13}{3})$, $(3; 5)$, $(-3; -5)$;

2) $(-2; 1)$, $(2; -1)$, $(\frac{5}{\sqrt{138}}; \frac{13}{\sqrt{138}})$, $(-\frac{5}{\sqrt{138}}; -\frac{13}{\sqrt{138}})$. 4. 1) $(0; 0)$,

$(7; 7)$; 2) $(0; 0)$, $(8; 8)$. 5. 1) $(1; -6)$; 2) $(2; -3)$. 6. 1) $(2; 4)$, $(-2; -4)$;

2) $(4; 2)$, $(-4; -2)$. 7. 1) $(\frac{1}{2}; -3)$, $(2; -4)$, $(\frac{3}{2}; -5)$; 2) $(3; -3)$,

$(2; -4)$, $(0; -2)$. 8. 1) $(\sqrt{2}; 3)$, $(-\sqrt{3}; 2)$; 2) $(\sqrt{3}; -1)$, $(-\sqrt{3}; -1)$.

9. 1) $(-2; \frac{1}{4})$; 2) $(-2; \frac{1}{4})$. 10. 1) $(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$, $(\frac{4}{9}; \frac{2}{3})$; 2) $(-\frac{12}{35}; \frac{8}{35})$,

$(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. 11. 1) $(3; 2; -1)$; 2) $(2; -1; 3)$. 12. 1) $(-1; \frac{5}{18}; \frac{7}{6})$,

$(1; -\frac{5}{18}; -\frac{7}{6})$; 2) $(\frac{5}{6}; \frac{7}{6}; -\frac{1}{2})$, $(-\frac{5}{6}; -\frac{7}{6}; \frac{1}{2})$.

13. 1) $(-\sqrt[3]{9}; -3\sqrt[3]{3}; -2)$, $(-\sqrt[3]{\frac{3}{2}}; -\sqrt[3]{\frac{9}{2}}; -\sqrt[3]{\frac{1}{2}})$;
 2) $(-2\sqrt[3]{4}; -\sqrt[3]{\frac{9}{2}}; -\sqrt[3]{\frac{3}{2}})$, $(-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}; -\sqrt[3]{\frac{3}{4}}; \sqrt[3]{\frac{9}{4}})$.
 14. 1) $(0; 0; 0)$, $(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; -1)$, $(-\frac{5}{6}; -\frac{1}{6}; -\frac{1}{2})$; 2) $(0; 0; 0)$,
 $(4; 12; -4)$, $(1; 6; -4)$. 15. 1) $(\frac{1}{2}; 2; 1)$, $(-\frac{1}{2}; -2; -1)$, $(1; 1; -1)$,
 $(-1; -1; 1)$, $(\frac{1}{2}; -1; -2)$, $(-\frac{1}{2}; 1; 2)$; 2) $(1; 1; \frac{1}{2})$, $(-1; -1; -\frac{1}{2})$,
 $(\frac{1}{2}; -1; 1)$, $(-\frac{1}{2}; 1; 1)$, $(\frac{1}{2}; 2; -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}; -2; \frac{1}{2})$.

Глава IV

§ 1. 6. 1) Нет; 2) да.

§ 2. 1. 1) Является; 2) не является. 2. 1) Не является; 2) является. 3. 1) Является; 2) не является. 4. 1) $-2, 7$; 2) $0, 1$.

5. 1) 1; 2) 0. 6. 1) $S = 8 + 4\sqrt{3}$; 2) $S = -3\sqrt{3}$. 7. 1) $\frac{3\sqrt{3}+5}{2}$;

2) $\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3}{2\sqrt{3}}$. 8. 1) 2 случая: $b_1 = \frac{4-\sqrt{2}}{7}$, $b_2 = \frac{2\sqrt{2}-1}{14}$ или

$b_1 = \frac{4+\sqrt{2}}{7}$, $b_2 = \frac{1+2\sqrt{2}}{14}$; 2) 2 случая: $b_1 = \frac{3}{13} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$,

$b_2 = \frac{3}{13} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}\right)$ или $b_1 = \frac{3}{13} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $b_2 = -\frac{3}{13} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}\right)$.

9. 1) $\frac{16}{15}$; 2) $\frac{81}{65}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) 18. 10. 1) 24; 2) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$.

§ 3. 1. 1) 3; 2) 13. 2. 1) 4; 2) 17. 3. 1) При $x \geq 1$, $x \leq 0$;
 2) $x \leq -1$, $x \geq 0$. 4. 1) $x \leq -1$, $0 \leq x \leq 1$; 2) $-1 \leq x \leq 0$; $x \geq 1$.

5. 1) $x \leq -1$, $x \geq 7$; 2) $x \leq 5$, $x \geq 8$. 6. 1) $3(x-2)^2\sqrt{2(x-2)}$;

2) $0,5|x-3|\sqrt{5(x-3)}$. 7. 1) $2(x-2)\sqrt[3]{x(x-2)}$; 2) $\frac{2}{3}(x-3)\sqrt[3]{x-3}$.

8. 1) $\sqrt{\frac{3(y-x)}{y+x}}$; 2) $\sqrt{\frac{5(x-y)}{x+y}}$. 9. 1) $\sqrt{\frac{x}{x+y}}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{x+y}{x-y}}$.

10. 1) $\sqrt[3]{5a^2bc^n}$; 2) $\sqrt[4]{3x^{-1}yz^5}$. 11. 1) 1; 2) 5. 12. 1) 1; 2) 10.

13. 1) $\sqrt[3]{6}-1$; 2) $\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}$. 14. 1) Да; 2) да. 15. 1) $\frac{(m+n)(\sqrt[3]{x}-1)}{x-1}$;

2) $\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}$. 16. 1) $\frac{(a-1)(\sqrt{a-1}+\sqrt{a+2})}{-3}$; 2) $1,5a(\sqrt{b+2}-\sqrt{1-b})$.

17. 1) $z(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})$; 2) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$. 18. 1) Является, $a = -\sqrt{2}$; 2) является, $a = -\sqrt{2}$. 19. 1) Является, $a = -\sqrt[3]{6}$; 2) является, $a = -\sqrt[3]{7}$.

20. 1) Является, $a = -\sqrt{2\sqrt{3}-2}$; 2) является, $a = -\sqrt{2}$.

§ 4. 1. 1) $a^{\frac{1}{6}}$; 2) $a^{\frac{3}{4}}$. 2. 1) $a^{-\frac{3}{8}}$; 2) $a^{\frac{7}{12}}$. 3. 1) $a^{-\frac{1}{30}}$; 2) $a^{\frac{9}{14}}$.
 4. 1) $3b^{-\frac{1}{12}}$; 2) 8. 5. 1) $a^{-0,1}$; 2) 1. 6. 1) $\frac{3}{5}$; 2) 2,5. 7. 1) 15; 2) 28.
 8. 1) $0,2a^{-0,2}$; 2) $(ax)^{0,3}$. 9. 1) 2; 2) $2x^{1,2}$. 10. 1) $2ab$; 12;
 2) $b^{0,5}$; $\frac{5}{3}$. 11. 1) $a^{\frac{2}{3}}$; 0,5; 2) ab ; 12.

$$12. 1) \begin{cases} c^{-1} \text{ при } 0 < c < 1, \\ c \text{ при } c \geq 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} -\frac{2a}{b} \text{ при } |a| \geq |b|, \\ -\frac{2b}{a} \text{ при } |a| < |b|, \end{cases}$$

из условия задания следует, что a и b должны иметь одинаковые знаки, причем $a \neq 0$, $b \neq 0$.

$$13. 1) \begin{cases} \sqrt{2} \text{ при } \frac{1}{2} \leq a \leq 1, \\ \sqrt{4a-2} \text{ при } a > 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2|b| \text{ при } b^2 \leq a \leq 2b^2, \\ 2\sqrt{a-b^2} \text{ при } a > 2b^2. \end{cases}$$

Глава V

§ 2. 1. 1), 2) Не является; 3) — 8) является. 2. 1) $y = \frac{1}{3\sqrt{x}}$,
 $x \neq 0$, $y \neq 0$; 2) $y = \frac{1}{5\sqrt{x}}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$; 3) $y = -\frac{1}{4\sqrt{x}}$, $x > 0$, $y < 0$;
 4) $y = -\frac{1}{6\sqrt{x}}$, $x > 0$, $y < 0$; 5) $y = (-x)^{\frac{3}{2}}$, $x \leq 0$, $y \geq 0$; 6) $y = (-x)^{\frac{2}{3}}$,
 $x \leq 0$, $y \geq 0$; 7) $y = x^{-\frac{2}{5}}$, $x > 0$, $y > 0$; 8) $y = x^{-\frac{3}{4}}$, $x > 0$, $y > 0$.
 3. 1) Убывает при $x \leq 1$, возрастает при $x \geq 3$; 2) убывает при
 $x \leq 1$, возрастает при $x \geq 5$; 3) возрастает при $1 \leq x \leq 1,5$, убывает
 при $1,5 \leq x \leq 2$; 4) возрастает при $2 \leq x \leq 2,5$, убывает при
 $2,5 \leq x \leq 3$; 5) убывает при $-2 \leq x \leq -0,75$, возрастает при
 $-0,75 \leq x \leq 0,5$; 6) убывает при $-0,5 \leq x \leq 1,25$, возрастает при
 $1,25 \leq x \leq 3$.

§ 3. 1. 1) $y = 2$, $x = -3$; 2) $y = 3$, $x = -4$; 3) $y = -3$, $x = 4$;
 4) $y = -2$, $x = 3$. 3. 1) $-7 \leq y < 3$, $y = -\frac{1}{3} + \frac{10}{3(3-x)}$; 2) $-5 \leq y < 2$,
 $y = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4(2-x)}$; 3) $y < -1$, $y = \frac{3}{2} + \frac{3}{x+1}$; 4) $y < -2$, $y = \frac{4}{3} + \frac{8}{3(x+2)}$.

§ 4. 1. 1) — 4) Уравнения равносильны; 5), 6) второе; 7), 8)
 первое. 2. 1) $x = 1$; 2) нет корней. 3. 1) $x = 3$; 2) $x = 6$; 3) $x = 5$;
 4) $x = 4$. 4. 1) $x > 2$, $-5,5 < x < -1$; 2) $x < -3$, $4 < x < 39$; 3) $0 < x < 1$,
 $x < 0$; 4) $x > 1$, $-1 < x < 0$. 5. 1) Равносильны (второе уравнение
 второй системы — почленная сумма уравнений первой систе-
 мы, разделенная на 4); 2) — 4) равносильны. 6. 1) $x_1 = 9$,
 $x_2 = -1$; 2) $x_1 = 4$, $x_2 = -0,4$; 3) $x_1 = -4$, $x_2 = -\frac{2}{3}$; 4) $x_1 = -2$,
 $x_2 = 8$; 5) $x_1 = -9$, $x_2 = 3$, $x_3 = 7$; 6) нет корней. 7. 1) Если $a < -1$
 и $a > 1$, то $x = 4$; если $a = -1$, то $x \geq 4$; если $-1 < a < 1$, то $x_1 = 4$,

$x_2 = \frac{4a-8}{a+1}$; если $a=1$, то $-2 \leq x \leq 4$; 2) если $a=1$, то $-1 \leq x \leq 2$; если $a > 1$, то $x=2$; если $a < -1$, то $x=2$; если $-1 < a < 1$, то $x_1=2$, $x_2 = \frac{2a-4}{a+1}$; если $a=-1$, то $x \geq 2$.

§ 5. 1. 1) $x=3$; 2) $x=3$. 2. 1) $x=5$; 2) $x=2\frac{9}{32}$. 3. 1) $x_1=4$, $x_2=-9$; 2) $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=2$; 3) $x_1=-2$, $x_2=3$; 4) $x_1=1$, $x_2=4$. 4. 1) $x_1=-\frac{8}{3}$, $x_2=1$; 2) $x_1=-\frac{8}{3}$, $x_2=1$. 5. 1) $-6 \leq x \leq -3$; 2) $x \geq 13$. 6. 1) $x \leq -1$, $x = \frac{1}{5}$; 2) $x \leq -\frac{5}{4}$, $x = -\frac{1}{4}$. 7. 1) $x=3$; 2) $x=3$; 3) $x = -\frac{1}{2}$; 4) $x=1$. 8. 1) $-10 \leq a \leq 8$; 2) $0 < a \leq 3$. 9. 1) Если $a < -1$, $0 \leq a < 1$, то корней нет; если $-1 \leq a < 0$, $a \geq 1$, то $x = \frac{a^2+1}{2a}$; 2) если $a < 0$, $\frac{1}{2} \leq a < 1$, то корней нет; если $0 \leq a < \frac{1}{2}$, $a \geq 1$, то $x = \frac{a^2}{2a-1}$; 3) если $a \leq -4$, то $x = \frac{a^2+24a+16}{16}$; если $a > -4$, то корней нет; 4) если $a < 2$, то корней нет; если $a \geq 2$, то $x = 0,5a + \sqrt{2(a-2)}$. 10. 1) (2; 3); 2) (3; 4); 3) (-4; 2); 4) (5; -1).

§ 6. 1. 1) $0 \leq x < 5$; 2) $0 \leq x \leq 3$. 2. 1) $-5 \leq x \leq -3$, $x \geq 3$; 2) $x \leq -2$, $2 \leq x \leq 3$; 3) $-1 \leq x < 3$; 4) $x > 3$. 3. 1) $-2\frac{4}{11} < x \leq -2$, $x \geq 5$; 2) $x \leq -4$, $x > 2$; 3) $1 < x \leq 4$; 4) $2 \leq x \leq 3$; 5) $-2 \leq x \leq -\frac{1}{2}$, $x=2$; 6) $x=-1$, $\frac{3}{2} \leq x \leq 4$; 7) $x \leq -1$, $x \geq 9$; 8) $x \leq -8$, $x \geq 2$. 4. 1) $1 \leq x \leq 2$; 2) $x \geq 6$; 3) $x \leq -3$, $3 \leq x \leq 4$; 4) $8 \leq x \leq 9$. 5. 1) $-1 \leq x \leq 1$; 2) $x \leq 4$. 6. 1) Если $a \leq 0$, то $x \geq -1$; если $a > 0$, то $-1 \leq x \leq \frac{1}{a^2} - 1$; 2) при $a \leq 0$ решений нет; если $a > 0$, то $x \leq 2 - \frac{1}{a^2}$; 3) если $a \leq 0$, то $x \geq -a$; если $a > 0$, то $-a \leq x < \frac{1}{a^2} - a$; 4) если $a \leq 0$, то $x \geq a$; если $a > 0$, то $a \leq x < a + \frac{25}{a^2}$.

Глава VI

§ 1. 1. 1) $y=2^x$; 2) $y=3^x$; 3) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$; 4) $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$; 5) $y=0,5^x$; 6) $y=2^x$. 4. 1) $a > b$; 2) $a < b$; 3) $a < b$; 4) $a < b$; 5) $a < b$; 6) $a > b$; 7) $a < b$; 8) $a > b$. 5. 1) $3^{1+\sqrt{2}}$, $3^{\sqrt{6}}$, $3^{2,5}$; 2) $0,3^{2-\sqrt{3}}$, $0,3^{\sqrt{0,1}}$, 1; 3) $3^{-1,6}$, $(\sqrt{3})^{-3,1}$, $\frac{1}{3\sqrt{3}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sqrt[3]{0,1}$, $0,1^{0,3}$. 6. 1) $0 < a < 1$; 2) $a > 1$; 3) $a > 1$; 4) $0 < a < 1$. 7. 1) $x \leq 7$; $y \geq 1$; 2) $x \geq -7$; $0 < y \leq 1$; 3) $x \leq -\sqrt{5}$; $x \geq \sqrt{5}$; $0 < y \leq 1$; 4) $-2 \leq x \leq 2$; $1 \leq y \leq 9$; 5) $0 \leq x \leq 2$; $\frac{1}{3} \leq y \leq 1$; 6) $x \leq 0$; $x \geq 5$; $0 < y \leq 1$.

§ 2. 1. 1) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$; 2) $x_1 = -2$, $x_2 = -4$; 3) $x_1 = 1 + \sqrt{7}$, $x_2 = 1 - \sqrt{7}$; 4) $x_1 = -1$, $x_2 = -7$. 2. 1) $x = 1$; 2) $x = 0$; 3) $x = 1, 5$; 4) $x = 0, 5$. 3. 1) $x = 0$; 2) $x = 0$; 3) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; 4) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. 4. 1) $x = -\frac{1}{4}$; 2) $x = 7$; 3) $x = 1, 5$; 4) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. 5. 1) $x = 1$; 2) $x = 0$; 3) $x = 1$; 4) $x = -1$. 6. 1) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2}$; 2) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. 7. 1) $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$; 2) $x_1 = -\frac{1}{5}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$. 8. 1) $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. Указание. Разделить обе части уравнения на 6^{2x+6} ; 2) $x_1 = -1$, $x_2 = 4$. Указание. Разделить обе части уравнения на 5^{6x+6} . 9. 1) При $a > 0$ один корень, при $a \leq 0$ корней нет; 2) при $a > 0$ один корень, при $a \leq 0$ корней нет; 3) при $a < 0$ корней нет, при $a = 0$ один корень, при $a > 0$ два корня; 4) при $a < 0$ корней нет, при $a = 0$ один корень, при $a > 0$ два корня. 10. 1) $a < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $k < 5$, $k > 11$.

§ 3. 1. 1) $x < -2$, $x > 2$; 2) $x < -3$, $x > 3$; 3) $-2 < x < 2$; 4) $-0,7 < x < 0,7$. 2. 1) $x \leq -\frac{1}{2}$; 2) $x \leq \frac{1}{2}$; 3) $x < 0$, $x > 2$; 4) $-2 < x < -1$. 3. 1) $-1 \leq x \leq 0$; 2) $-1 \leq x \leq 3$; 3) $-1 \leq x \leq 0$; 4) $-1 \leq x \leq 0$; 5) $x \leq 0$; 6) $x = 0$; 7) $x \leq 0$, $x > 1$; 8) $x < -\sqrt{5}$, $-2 \leq x < \sqrt{5}$; 9) $-1 \leq x < 0$, $x > 3$; 10) $x \geq 2$. 4. 1) $-1 \leq x \leq 3$; 2) $-1 \leq x \leq 3$. 5. 1) $0 \leq x \leq 1$; 2) $0 \leq x \leq 4$. 6. 1) $x \geq 2$; 2) $x \leq -4$. 7. 1) $x \geq 1$; 2) $x < -1$. 8. 1) $0 \leq x \leq 2$. Указание. Сделать замены $1 = 0,5^x \cdot 2^x$ и $0,3 = 0,6 \cdot 0,5$; 2) $-3 \leq x \leq -1$. Указание. Представить $5^{x+1} = 0,5^{x+1} \cdot 10^{x+1}$. 9. 1) При $a \leq 0$; 2) при $a \leq 0$; 3) при $a \geq 0$; 4) при $a \geq 0$. 10. 1) $m > 1$; 2) $n \geq 2$.

§ 4. 1. 1) (2; 1); 2) (1; 2); 3) (1; 3); 4) (2; 2); 5) (4; 1); 6) (4; 1); 7) (2; 1), $(-1; \frac{23}{2})$; 8) (2; 2), $(-1; \frac{58}{3})$. 2. 1) (1; 1), $(2; \frac{1}{8})$; 2) (1; 1), $(\frac{2}{3}; \frac{9}{4})$; 3) (1; 1), $(\frac{1}{2}; 4)$; 4) (1; 1). 3. 1) (2; -1), $(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3})$; 2) $(\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{4}; \frac{3}{4})$. 4. 1) (2; 2), (2; -2); 2) (3; 3), (3; -3).

Глава VII

§ 1. 1. 1) -2; 2) -2; 3) -1; 4) -1. 2. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{4}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{4}$. 3. 1) 27; 2) 0,25. 4. 1) 5; 2) $3\frac{2}{3}$. 5. 1) $-2 < x < 0$; $0 < x < 2$; 2) $-3 < x < 0$; $0 < x < 3$; 3) $x < -5$; $5 < x < 6$; $x > 6$; 4) $x < -5$; $-5 < x < -4$; $x > 4$. 6. 1) $x_1 = 2$, $x_2 = \log_3 2 - 1$; 2) $x = 4 + \log_{0,2} 2$. 7. 1) $x = 0$; 2) $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.

§ 2. 1. 1) $x = \frac{a^2 \sqrt{b}}{a^2 - b^2}$; 2) $x = \frac{\sqrt{a^3 b^3}}{(a+b)^2}$. 3. 1) -3; 2) -1; 3) 1; 4) 1. 4. 1) $-\log_3 5$; 2) $\frac{1}{2} \log_3 7$; 3) $2 \log_3 4$; 4) $-2 \log_3 2$. 5. 1) $x = 5$;

2) $x = \frac{1}{12}$. 6. 1) -8 ; 2) $\frac{2}{9}$; 3) -6 ; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) $-11\frac{1}{2}\log_5 2$; 6) $8\log_2 3$.
 7. 1) 1000 ; 2) $0,1$; 3) $\frac{1}{7}$; 4) $\frac{2}{3}$. 8. 1) 5 ; 2) 7 . 9. 1) $2,903$; 2) $2,602$;
 3) $-0,796$; 4) $-1,097$. 10. 1) $x = \sqrt{2}$; 2) $x = \sqrt{3}$; 3) $x = \sqrt{3}$; 4) $x = \sqrt{5}$.

§ 3. 1. 1) $x = 27$; 2) $x = 16$. 2. 1) $\frac{a+b}{1-b}$; 2) $\frac{1+a}{b-1}$. 3. 1) $\frac{4(3-a)}{3+a}$;
 2) $\frac{3(2-a)}{4-a}$. 4. 1) $\lg x = \frac{13}{24}\lg a + \frac{4}{3}\lg b$; 2) $\lg x = \frac{2}{3}\lg a + \frac{7}{24}\lg b$;
 3) $\lg x = \frac{4}{3}\lg 2 + \frac{13}{24}\lg 3$; 4) $\lg x = \frac{7}{24}\lg 5 + \frac{2}{3}\lg 3$. 5. 1) $\frac{7}{8} - \ln 10$;
 2) $\frac{11}{24}\ln 5 + 1$.

§ 4. 1. 1) $x > 2$; 2) $x > -1$. 2. 1) $x < -2$, $-1 < x < 0$, $x > 0$;
 2) $-2 < x < 0$, $0 < x < 2$; 3) $2 < x < 3$, $x > 3$; 4) $x < -3$, $-3 < x < 1$;
 5) $-1 < x < 0,5$; 6) $-\frac{1}{2} < x < 3$. 3. 1) $x > 2\sqrt{2}$; 2) $x > 2\sqrt{3}$; 3) $0 < x < 1$,
 $1 < x < 5$; 4) $0 < x < 1$, $1 < x < 6$. 5. 1) $x_{1,2} = \pm 1$; 2) $x = 1$; 3) $x = 3$;
 4) $x = 3$. 6. $x_{1,2} = \pm 1$; 2) $x_{1,2} = \pm 5$. 7. 1) $x_1 = 2$, $x_2 \approx 0,1$; 2) $x_1 = 1$,
 $x_2 \approx -0,9$. 8. 1) $x = 2$; 2) $x = 2$.

§ 5. 1. 1) $x = 4$; 2) $x = 2$. 2. 1) Нет корней; 2) нет корней.
 3. 1) $x = 2$; 2) $x = -2$. 4. 1) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$; 2) $x = 4$. 5. 1) $x = 4$;
 2) $x = 3$. 6. 1) $x_1 = \frac{1}{9}$, $x_2 = 9$; 2) $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = 4$; 3) $x_1 = 0,1$,
 $x_2 = 100$; 4) $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 27$. 7. 1) $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = 25$; 2) $x_1 = 0,001$,
 $x_2 = 1000000$. 8. 1) $x_1 = 10$, $x_2 = \sqrt{10}$; 2) $x_1 = 100$, $x_2 = 10\sqrt{10}$.
 9. 1) $x = 10$; 2) $x = 10$. 10. 1) $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 9$; 2) $x_1 = \frac{1}{125}$, $x_2 = 25$.
 11. 1) $x_1 = \frac{1}{625}$, $x_2 = 5$; 2) $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 81$. 12. 1) $x = 20$; 2) $x = 12$.
 13. 1) $x_{1,2} = \pm 0,5$; 2) $x_{1,2} = \pm 0,5$. 14. 1) При $a \leq 0$ и $a \geq 1$ уравне-
 ние не имеет корней; если $0 < a < 1$, то $x = \frac{2}{1-a}$; 2) при $a \leq 1$
 уравнение не имеет корней; если $a > 1$, то $x = \frac{6}{a-1}$; 3) при
 $a \leq 0$, $a = 1$ и $a > 4$ уравнение не имеет корней; если $0 < a < 1$ и
 $1 < a \leq 4$, то $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-a}$; 4) при $a \leq 0$, $a = 1$ и $a > 3$ уравнение
 не имеет корней; если $0 < a < 1$ и $1 < a \leq 3$, то $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-a^2}$.
 15. 1) При $a \leq -\frac{1}{3}$ уравнение не имеет корней; если $a > -\frac{1}{3}$, то
 $x = \log_4(3a+1) - \log_4(a^2-2a+2)$; 2) при $a \leq \frac{1}{2}$ уравнение не
 имеет корней; если $a > \frac{1}{2}$, то $x = 2\log_9 a - \log_9(2a-1)$.

16. 1) $x = \frac{\sqrt{10}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{10}}{5}$; 2) $x = \frac{\sqrt{33}}{6}$, $y = \frac{4\sqrt{33}}{33}$.

§ 6. 1. 1) $-1,5 < x < 0$; $x > 1$; 2) $x < -1$; $0 < x < 2,5$. 2. 1) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq$
 $\leq x \leq -\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} < x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $-\frac{2}{3} \leq x < 0$; $0 < x \leq \frac{2}{3}$; 3) $-\frac{1}{3} \leq x < -\frac{1}{6}$;

$\frac{1}{6} < x \leq \frac{1}{3}$; 4) $x < -\frac{\sqrt{13}}{6}$; $x > \frac{\sqrt{13}}{6}$. 3. 1) $-1 \leq x < 1$; $6 < x \leq 8$; 2) $2 < x \leq 4$; $5 \leq x < 7$. 4. 1) $-2 < x \leq 0$; 2) $-1 < x \leq -0,6$; 3) $-2 < x \leq -1$; $x \geq 10$; 4) $x \leq -3$; $1 \leq x < 4$. 5. 1) $\frac{\sqrt{5}}{5} \leq x < 1$; $x \geq 5$; 2) $0,25 \leq x < 1$; $x \geq 2$. 6. 1) $0,1 < x < 10$; 2) $0 < x < 0,01$; $x = 1$; $x > 100$. 7. 1) $-8 \leq x \leq \frac{8}{9}$; $1 \frac{1}{9} \leq x \leq 10$; 2) $x \leq -3$; $-1,5 \leq x < -1$; $-1 < x \leq -0,5$; $x \geq 1$. 8. 1) $-3 < x \leq -2$; $2 \leq x < 3$; 2) $-2 < x \leq -1$; $1 \leq x < 2$; 3) $-3 < x \leq -2$; $2 \leq x < 3$; 4) $-1 \leq x < \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} < x \leq 1$; 5) $-1 \leq x < 0$; $x > 1$; 6) $x < -1$; $0 < x \leq 2$. 9. 1) $0 < x < \frac{1}{2}$; $1 < x < 2$; $3 < x < 6$; 2) $-3 < x < -2$; $-1 < x < 0$; $1 < x < 3$; 3) $\log_9 7 < x < 1$; $x > 1$; 4) $\log_4 7 < x \leq \log_2 3$. 10. 1) $x \leq 1$; $x \geq 5$; 2) $x \leq -\frac{2}{3}$; $x \geq \frac{1}{2}$; 3) $x \geq \frac{1}{2}$; 4) $x \geq \sqrt{5}$; 5) $1 \leq x < 2$; $3 < x \leq 4$; 6) $-1 \leq x < 1$; $3 < x \leq 5$. 11. 1) Если $a \leq 0$ и $a \geq 1$, то решений нет; если $0 < a < 1$, то $3 < x < \frac{3-a}{1-a}$; 2) если $a \leq 1$, то решений нет; если $a > 1$, то $\frac{a-7}{a-1} < x < 1$; 3) при $a \leq 1$ решений нет; если $1 < a < 1,5$, то $x < -\sqrt{\frac{3-a}{a-1}}$ и $x > \sqrt{\frac{3-a}{a-1}}$; если $a \geq 1,5$, то x — любое число; 4) при $a = 0$ и $a \geq 3$ решений нет; если $a < 0$, то $-\frac{\sqrt{(1,5-a)(4,5-a)}}{3} < x < \frac{\sqrt{(1,5-a)(4,5-a)}}{3}$; если $0 < a \leq 1,5$, то $x < -\frac{\sqrt{(1,5-a)(4,5-a)}}{3}$ и $x > \frac{\sqrt{(1,5-a)(4,5-a)}}{3}$; если $1,5 < a < 3$, то x — любое число; 5) если $a < 2$, то $x > \log_4 \frac{2-a}{3-a}$; если $2 \leq a \leq 3$, то x — любое число; если $a > 3$, то $x < \log_4 \frac{a-2}{a-3}$; 6) если $a < 1$, то $x > \log_4 \frac{1-a}{5-a}$; если $1 \leq a \leq 5$, то x — любое число; если $a > 5$, то $x > \log_4 \frac{a-1}{a-5}$.

Глава VIII

§ 1. 1. 1) $\frac{\pi}{8}$; 2) $\frac{107\pi}{450}$. 2. 1) $\frac{41\pi}{720}$; 2) $\frac{149\pi}{2160}$. 3. 1) $\frac{431\pi}{5400}$; 2) $\frac{427\pi}{3600}$. 4. 1) 18° ; 2) $1,8^\circ$. 5. 1) 612° ; 2) 864° . 6. 1) $\approx 1,15^\circ$; 2) $\approx 2,87^\circ$. 7. 1) $\frac{7\pi}{5}$ см; 2) $\frac{4\pi}{3}$ см. 8. 1) а) $\frac{17\pi}{5}$ см; б) $\frac{27\pi}{2}$ см²; 2) а) $\frac{7\pi}{3}$ см; б) $\frac{13\pi}{45}$ см². 9. 1) 0,3718; 1,3657; 3,4607; 2) 0,4835; 1,4401; 3,5108. 10. 1) $25^\circ 15'$, $74^\circ 29'$, $114^\circ 33'$; 2) $27^\circ 56'$, $85^\circ 57'$, $126^\circ 3'$.

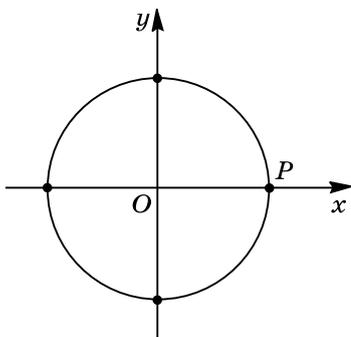


Рис. 7

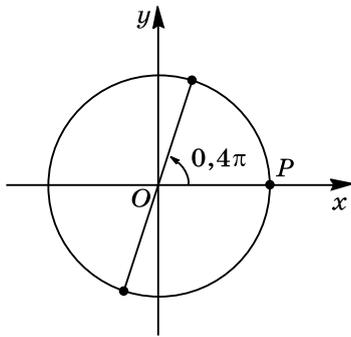


Рис. 8

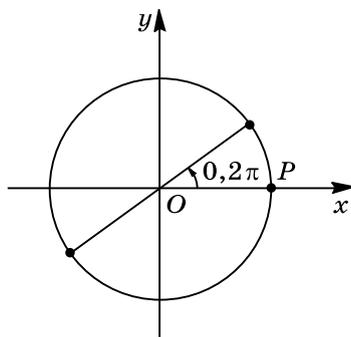


Рис. 9

- § 2. 8. 1) III и IV; 2) I и IV. 9. 1) I и IV; 2) I и IV. 10. 1) II и III; 2) I и II. 11. 1) и 2) Рис. 7, $\gamma = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. 12. 1) Рис. 8, $\gamma = 0,4\pi + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; 2) рис. 9, $\gamma = 0,2\pi + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. 13. 1) Рис. 10, $\gamma = \pm 0,1\pi + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; 2) рис. 11, $\gamma = \pm 0,4\pi + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. 14. 1) $-\frac{3\pi}{4}$; 2) $\frac{8\pi}{7}$. 15. 1) $\frac{7\pi}{32}$; 2) $\frac{15\pi}{32}$. 16. 1) $\frac{5\pi}{12}$; 2) $\frac{13\pi}{60}$. 17. 1) $6\frac{2}{3}$ с; 2) 20 с. 18. 1) 2760 об/мин; 2) 3600 об/мин.

- § 3. 1. 1) $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; 2) $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 2. 1) $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 3. 1) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$; 2) $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

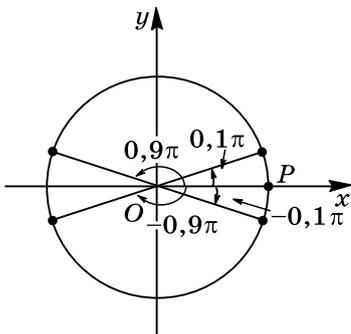


Рис. 10

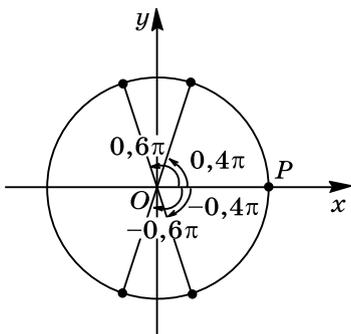


Рис. 11

4. 1) $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin \frac{5\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{5\pi}{2} = 0$.
5. 1) $\sin\left(-\frac{8\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(-\frac{8\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$; 2) $\sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,
 $\cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 6. 1) 0, π ; 2) $-\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$. 7. 1) $-\pi$, π ; 2) $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$,
 $\frac{3\pi}{2}$. 8. 1) $\sin \frac{2\pi}{3} > \sin \frac{5\pi}{6}$; 2) $\sin \frac{3\pi}{4} > \sin \frac{5\pi}{8}$. 9. 1) $\cos \frac{2\pi}{3} > \cos \frac{5\pi}{3}$;
2) $\cos \frac{3\pi}{4} > \cos \frac{5\pi}{8}$. 12. 1) 3, 1; 2) $1\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$. 13. 1) 2, -2; 2) 3, -3.
14. 1) $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. 15. 1) $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$;
2) $x = \frac{\pi}{2} + 6\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 16. 1) $x = -\frac{\pi}{12} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = 5\pi + 8\pi n$,
 $n \in \mathbf{Z}$. 17. 1) а) $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; б) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = 1$;
2) а) $K\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; б) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$.

§ 4. 1. 1) \pm , $-$, \pm ; 2) \pm , $+$, \pm . 2. 1) $-$, \pm , \pm ; 2) $+$, \pm , \pm .

3. 1) \pm , $+$, \pm ; 2) \pm , $-$, \pm . 4. 1) $\sin \frac{\pi}{13} > \sin \frac{25\pi}{13}$; 2) $\cos \frac{7\pi}{18} > \cos \frac{11\pi}{18}$. 5. 1) $\sin(-1,3) < \sin(-3,2)$; 2) $\cos(-2,5) < \cos(-5,5)$.
6. 1) $\operatorname{tg} 585^\circ > \cos 585^\circ$; 2) $\operatorname{ctg} 485^\circ < \sin 485^\circ$. 7. 1) Минус;
2) минус. 8. 1) Плюс; 2) минус. 9. 1) $\sin \alpha < 0$; 2) $\sin \alpha > 0$.
10. 1) $\cos \alpha > 0$; 2) $\cos \alpha > 0$. 11. 1) Не может; 2) может.

- § 5. 1. 1) $\sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sec \alpha = -\sqrt{3}$; 2) $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$, $\operatorname{cosec} \alpha = -\frac{13}{5}$. 2. 1) $\sin \alpha = \frac{24}{25}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{24}{7}$; 2) $\cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{2}$.
3. 1) $2\pi n \leq x \leq \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;
4. 1) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $x \neq \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 5. 1) Нет; 2) нет.
6. 1) $\frac{6a+1}{3-4a}$; 2) $\frac{3+7a}{4a-3}$. 7. 1) $\frac{505}{262}$; 2) $\frac{25}{22}$. 8. 1) $\frac{303}{901}$; 2) $\frac{15}{9}$.
9. 1) -0,944; 2) 0,296. 10. 1) 6; 2) 11. 11. 1) $\approx 0,9$; 2) $\approx 0,7$.
12. 1) $\frac{5a-a^5}{4}$; 2) $\frac{5b-b^5}{4}$.

- § 6. 2. 1) $2\pi n - \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $2\pi n < x < \pi + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. 1) $2\pi n - \pi < x < 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;
2) $2\pi n - \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 4. 1) $\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \pi + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;
2) $\frac{3\pi}{2} + \pi n < x < 2\pi + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 5. 1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;

2) $\pi + 2\pi n < x < 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 6. 1) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $x \neq \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
 7. 1) $x \neq \frac{\pi}{2}(n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $x \neq \frac{\pi}{2}(n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$. 8. 1) $x \neq \frac{\pi}{2}(n+1)$,
 $n \in \mathbf{Z}$; 2) $x \neq \frac{\pi}{2}(n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$.

§ 7. 1. 1) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) < -\cos\frac{2\pi}{3}$; 2) $\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) > \cos\frac{5\pi}{4}$.

2. 1) $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{7} > \operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; 2) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) < \operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}$. 3. 1) $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right) >$
 $> \operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}$; 2) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{6}\right) < \cos\left(-\frac{13\pi}{7}\right)$. 4. 1) $\pm\sqrt{2-a^2}$; 2) $\pm\sqrt{2-a^2}$.

§ 8. 1. 1) $\sin(\alpha + \beta) = \frac{63}{65}$, $\cos(\alpha - \beta) = -\frac{56}{65}$;

2) $\sin(\alpha - \beta) = -\frac{33}{65}$, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -3\frac{15}{16}$. 2. 1) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -\frac{40}{73}$,
 $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = -\frac{23}{80}$; 2) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = -2$, $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = 5,5$. 9. 1) $x = \frac{2\pi k}{a+1}$,
 $a \neq -1$, $k \in \mathbf{Z}$, $x \in \mathbf{R}$, $a = -1$; 2) $x = \frac{\pi k}{a+1}$, $a \neq -1$, $k \in \mathbf{Z}$, $x \in \mathbf{R}$, $a = -1$.

§ 9. 1. 1) $\sin 2\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = -2\sqrt{2}$; 2) $\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$,

$\operatorname{ctg} 2\alpha = -\frac{7}{24}$. 2. 1) $\sin 4\alpha = 0,96$; 2) $\cos 4\alpha = -\frac{527}{625}$. 3. 1) $\sin 3\alpha =$
 $= \frac{5\sqrt{3}}{9}$; 2) $\cos 3\alpha = -\frac{13\sqrt{3}}{9}$. 4. 1) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{24}{7}$; 2) $\sin \alpha = \frac{24}{25}$.

5. 1) Нет; 2) нет. 6. 1) Нет; 2) нет. 12. 1) $\frac{3}{16}$; 2) 3.

13. 1) $\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$; 2) $\frac{\sqrt{5+1}}{4}$.

§ 10. 1. 1) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$; 2) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$,

$\cos \alpha = -\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$. 2. 1) $2 \cos \frac{x}{2} \left(2 \sin \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{2}\right)$;

2) $2 \cos \frac{x}{2} \left(5 \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)$. 3. 1) -3; 2) -3. 4. 1) -3; 2) -2.

5. 1) $\sqrt{0,8}$; 2) $-\sqrt{0,1}$. 6. 1) $\sqrt{0,2}$; 2) $\sqrt{0,9}$.

§ 11. 1. 1) $\sin 40^\circ > \sin 160^\circ$; 2) $\cos 70^\circ > \cos 280^\circ$.

2. 1) $\cos 6,4\pi < 0,5$; 2) $\sin 3,1\pi > -0,5$. 3. 1) $\cos 0,9\pi = \sin 252^\circ$;
 2) $\cos 6,4\pi < \sin(-252^\circ)$. 4. 1) $\operatorname{tg} 3,7\pi = \operatorname{ctg} 3,8\pi$; 2) $\operatorname{tg} 765^\circ <$
 $< \cos 348^\circ$. 5. 1) 0; 2) 0. 6. 1) 0; 2) 0. 7. 1) -1; 2) -1.

8. 1) $\frac{1}{\cos 2x}$; $\sqrt{2}$; 2) $3 \operatorname{tg} 2x$; $-\sqrt{3}$. 9. 1) $2 - \sqrt{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 10. 1) $\sqrt{3}$;

2) 1. 11. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{9}{4}$.

§ 12. 1. 1) $2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$; 2) $2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$. 6. 1) $2 \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$;

2) $-8 \cos 2\alpha$. 7. 1) $\sin 2\alpha \sin 2\beta$; 2) $\sin^2(\alpha - \beta)$.

§ 13. 1. 1) $\sin 10^\circ + \sin 14^\circ - \sqrt{3} \sin 12^\circ$; 2) $\cos 5^\circ + \cos 15^\circ + \cos 25^\circ$. 2. 1) $\cos 1^\circ + \cos 3^\circ + \cos 5^\circ + \cos 7^\circ + \cos 9^\circ + \cos 11^\circ + \cos 13^\circ + \cos 15^\circ$; 2) $\cos 5^\circ - \sqrt{3} \cos 15^\circ + \cos 35^\circ$. 4. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$. 5. 1) $-0,5$; 2) $\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7}$. 6. 1) $8 \cos 8\alpha \cos^3 \alpha$; 2) $2 \sin 5\alpha \sin 3\alpha \cos \alpha$. 7. 1) $\frac{3}{4}$; $-\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{4}$; $-\frac{3}{4}$. 8. 1) $\frac{1}{2} (\cos(m-n)+1)$; $\frac{1}{2} (\cos(m-n)-1)$; 2) $\frac{1}{2} (\cos(m-n)+1)$; $\frac{1}{2} (\cos(m-n)-1)$.

Глава IX

§ 1. 1. 1) $-\frac{119}{169}$; 2) $\frac{7}{25}$. 2. 1) $\frac{7}{25}$; 2) $-\frac{7}{25}$. 3. 1) $\frac{16}{65}$; 2) $\frac{56}{65}$. 4. 1) $\frac{11}{18}$; 2) $\frac{13}{18}$. 5. 1) $2\pi-4$; 2) $4\pi-10$. 6. 1) $9-\frac{5}{2}\pi$; 2) $\frac{9}{2}\pi-13$. 7. 1) $x = \pm \arccos \frac{2}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \pm \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 8. 1) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$. 9. 1) $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \pm \frac{\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$. 10. 1) $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$.

§ 2. 1. 1) $\frac{24}{25}$; 2) $\frac{24}{25}$. 2. 1) $\frac{120}{169}$; 2) $-\frac{120}{169}$. 3. 1) $\frac{4(1+3\sqrt{3})}{35}$; 2) $\frac{3\sqrt{15}-7}{16}$. 4. 1) $\frac{8\sqrt{2}+3}{15}$; 2) $\frac{8-3\sqrt{5}}{15}$. 5. 1) $\frac{3}{8}\pi$; 2) $-\frac{4}{9}\pi$. 6. 1) $-\frac{3}{8}\pi$; 2) $-\frac{\pi}{7}$. 7. 1) $3\pi-10$; 2) $11-4\pi$. 8. 1) $\frac{5}{2}\pi-8$; 2) $11-\frac{7}{2}\pi$. 11. 1) $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \frac{\pi n}{2}$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. 12. 1) $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{2}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 13. 1) $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{6}$, $n \in \mathbf{Z}$. 14. 1) $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. 15. 1) $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$.

§ 3. 1. 1) $\frac{1}{\sqrt{10}}$; 2) $\frac{5}{13}$. 2. 1) $\frac{11}{13}$; 2) $\frac{7}{11}$. 3. 1) $\sqrt{\frac{11}{3}}$; 2) $\frac{24}{7}$. 4. 1) $\frac{33}{65}$; 2) $\frac{9}{\sqrt{85}}$. 5. 1) $-\frac{3}{7}\pi$; 2) $-\frac{4}{9}\pi$. 6. 1) $13-4\pi$; 2) $7-2\pi$. 10. 1) $x = \pi n$, $x = \pm \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \frac{\pi n}{2}$, $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. 11. 1) $x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 12. 1) $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \pm \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

§ 4. 1. 1) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. 2. 1) $x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. 3. 1) $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$. 4. 1) $x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbf{Z}$. 5. 1) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \pi n, x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$. 6. 1) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$. 7. 1) $x = \pm \frac{1}{2} \arccos(2 - \sqrt{3}) + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \pm \frac{1}{2} \arccos(3 - \sqrt{8}) + \pi n, n \in \mathbf{Z}$. 8. 1) $x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$. 9. 1) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, x = (-1)^n \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$. 10. 1) $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \frac{\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$. 11. 1) $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. 12. 1) $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$. 13. 1) $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. 14. 1) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \pi n, x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$. 15. 1) $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$. 16. 1) $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{4}{5} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$. 17. 1) $x = \pm \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} + (2n+1)\pi, n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = (-1)^{n+1} \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$. 18. 1) $x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = (-1)^n \arcsin \sqrt{\frac{3}{8}} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$. 19. 1) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \pi n, x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$. 20. 1) $x = 2\pi n, x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

§ 5. 1. 1) $x = \frac{\pi n}{4}, x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{10}, n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \frac{\pi n}{12}, n \in \mathbf{Z}$. 2. 1) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 - \sqrt{17}}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$. 3. 1) $x = \pi n, x = \pm \arccos \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \frac{\pi n}{2}, x = \pm \arccos \frac{2}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. 4. 1) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$;

2) $x = 4\pi n$, $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 5. 1) $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 6. 1) $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$. 7. 1) $x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = -\operatorname{arctg} \sqrt{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 8. 1) $x = -\frac{\pi}{8} + 2\pi n$, $x = \frac{3\pi}{8} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = -\frac{\pi}{8} + 2\pi n$, $x = \frac{3\pi}{8} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 9. 1) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. 10. 1) $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbf{Z}$. 11. 1) $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 12. 1) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \neq 2+4k$, $n \neq 3+6k$, $n \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \frac{\pi n}{6}$, $n \neq 3+6k$, $n \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}$. 13. 1) $x = \frac{\pi}{12} + \pi n$, $x = \frac{13\pi}{24} + \pi n$, $x = \frac{5\pi}{24} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \frac{\pi n}{2}$, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 14. 1) $x = \arcsin \frac{5}{13} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \arcsin \frac{8}{17} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. 15. 1) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

§ 6. 1. 1) $(\pi k; \frac{\pi}{4} + \pi n)$, $(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \pi n)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$;

2) $(-\frac{5\pi}{12} + \pi k; -\frac{\pi}{6} + \pi n)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$. 2. 1) $(\frac{\pi}{8} + \pi k; \pi + 2\pi n)$, $(\frac{\pi}{8} + \pi k; \pm \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi n)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $(\frac{\pi}{12} + \pi k; \pi + 2\pi n)$, $(\frac{\pi}{12} + \pi k; \pm \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi n)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. 1) $(\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi n)$, $(\frac{\pi}{4} + (-1)^k \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi k}{2} + \pi n; (-1)^k \operatorname{arctg} 2 + \pi n)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $(\pi k; \pi n)$, $(\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k; \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n)$, $(-\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k; -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$. 4. 1) $(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi n)$, $(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi n)$, $(-\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{6} + \pi n)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $(\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi n)$, $(\frac{\pi}{4} + \pi k; \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n)$, $(-\frac{\pi}{4} + \pi k; -\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n)$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$. 5. 1) $(\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi n)$,

$$\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi k}{2} + 2\pi n\right), k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}; 2) \left(\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right),$$

$$\left(\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right), k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}.$$

$$6. 1) \left((-1)^k \frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{4} + \frac{\pi k}{2}; (-1)^n \arcsin \frac{3}{4} + \frac{\pi n}{2}\right), k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z};$$

$$2) \left(-\frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3} + \pi k; -\frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} \arcsin \frac{\sqrt{2}}{3} + \pi n\right),$$

$$k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}. 7. 1) \left((-1)^k \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi n + \pi k; -\frac{\pi}{4} + \pi n\right),$$

$$\left((-1)^k \left(\arctg \frac{1}{2} + \pi n\right) + \pi k; \arctg \frac{1}{2} + \pi n\right), k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z};$$

$$2) \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi n\right), \left(\frac{3\pi}{4} + \pi(2k+n); -\frac{\pi}{4} + \pi n\right),$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} - \arctg 2 + \pi(2k+n); -\arctg 2 + \pi n\right), k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}.$$

$$8. 1) \left((-1)^k \frac{1}{9} \arcsin \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \pi k; (-1)^k \frac{1}{3} \arcsin \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \pi k + 2\pi n\right),$$

$$\left((-1)^k \frac{1}{21} \arcsin \frac{2}{9} + \frac{\pi k}{21}; (-1)^{k+1} \frac{1}{7} \arcsin \frac{2}{9} + \frac{\pi k}{7} + 2\pi n\right), k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z};$$

$$2) \left((-1)^k \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{6} + \frac{\pi k}{2} + 2\pi n; (-1)^k \frac{1}{10} \arcsin \frac{1}{6} + \pi k\right),$$

$$\left((-1)^{k+1} \frac{1}{10} \arcsin \frac{3}{20} + \frac{\pi k}{10} + 2\pi n; (-1)^{k+1} \frac{1}{50} \arcsin \frac{3}{20} + \frac{\pi k}{50}\right), k \in \mathbf{Z},$$

$$n \in \mathbf{Z}.$$

Содержание

Предисловие	3
Глава II	
Делимость чисел	5
§ 1. Понятие делимости. Делимость суммы и произведения	—
§ 2. Деление с остатком	6
§ 3. Признаки делимости	8
§ 4. Сравнения	9
§ 5. Решение уравнений в целых числах	10
Глава III	
Многочлены. Алгебраические уравнения	14
§ 1. Многочлены от одной переменной	—
§ 2. Схема Горнера	16
§ 3. Многочлен $P(x)$ и его корень. Теорема Безу	—
§ 4. Алгебраическое уравнение. Следствия из теоремы Безу	18
§ 5. Решение алгебраических уравнений разложением на множители	20
§ 6. Делимость двучленов $x^m \pm a^m$ на $x \pm a$	23
§ 7. Симметрические многочлены	24
§ 8. Многочлены от нескольких переменных	26
§ 9. Формулы сокращенного умножения для старших степеней. Бином Ньютона	27
§ 10. Системы уравнений	29
Глава IV	
Степень с действительным показателем	38
§ 1. Действительные числа	—
§ 2. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия	39
§ 3. Арифметический корень натуральной степени	41
§ 4. Степень с рациональным и действительным показателями	44

	Глава V	
	Степенная функция	48
§	1. Степенная функция, ее свойства и график	—
§	2. Взаимно обратные функции. Сложная функция	49
§	3. Дробно-линейная функция	51
§	4. Равносильные уравнения и неравенства	52
§	5. Иррациональные уравнения	55
§	6. Иррациональные неравенства	57
	Глава VI	
	Показательная функция	60
§	1. Показательная функция, ее свойства и график	—
§	2. Показательные уравнения	62
§	3. Показательные неравенства	63
§	4. Системы показательных уравнений и неравенств	65
	Глава VII	
	Логарифмическая функция	67
§	1. Логарифмы	—
§	2. Свойства логарифмов	68
§	3. Десятичные и натуральные логарифмы. Формула перехода	70
§	4. Логарифмическая функция, ее свойства и график	71
§	5. Логарифмические уравнения	73
§	6. Логарифмические неравенства	75
	Глава VIII	
	Тригонометрические формулы	79
§	1. Радианная мера угла	—
§	2. Поворот точки вокруг начала координат	80
§	3. Определение синуса, косинуса и тангенса угла	82
§	4. Знаки синуса, косинуса и тангенса	84
§	5. Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла	85
§	6. Тригонометрические тождества	88
§	7. Синус, косинус и тангенс углов α и $-\alpha$	90
§	8. Формулы сложения	—
§	9. Синус, косинус и тангенс двойного угла	91
§	10. Синус, косинус и тангенс половинного угла	94
§	11. Формулы приведения	—
§	12. Сумма и разность синусов. Сумма и разность косинусов	97
§	13. Произведение синусов и косинусов	99

Глава IX	
Тригонометрические уравнения	102
§ 1. Уравнение $\cos x = a$	—
§ 2. Уравнение $\sin x = a$	104
§ 3. Уравнение $\operatorname{tg} x = a$	107
§ 4. Тригонометрические уравнения, сводящиеся к алгебраическим. Однородные и линейные уравнения	110
§ 5. Методы замены неизвестного и разложения на множители. Метод оценки левой и правой частей тригонометрического уравнения	114
§ 6. Системы тригонометрических уравнений	119
Ответы	125

Учебное издание

Шабунин Михаил Иванович
Ткачёва Мария Владимировна
Фёдорова Надежда Евгеньевна
Доброва Ольга Николаевна

Алгебра и начала математического анализа

Дидактические материалы

10 класс

Углублённый уровень

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. Н. Белоновская, Н. Н. Сорокина*
Младший редактор *Е. А. Андреевкова*
Художник *Е. В. Соганова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *А. Г. Вьюниковской*
Технические редакторы *Р. С. Еникеева, С. Н. Терехова*
Корректоры *Л. А. Ермолина, И. Н. Панкова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Под-
писано в печать 30.07.12. Формат 60×90^{1/16}. Бумага офсетная. Гарни-
тура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 9,47. Тираж 3000 экз.
Заказ № 33228.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат».
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.
www.sarpk.ru

ПРОДУКЦИЮ ИЗДАТЕЛЬСТВА МОЖНО ПРИОБРЕСТИ:

ДИЛЕРЫ ИЗДАТЕЛЬСТВА

ООО «РАЗУМНИК»

143987, г. Железнодорожный, а/я 24
Тел.: (495) 589-2688
E-mail: zakaz@razumnik.ru
<http://www.razumnik.ru>

ООО «АБРИС»

129075, Москва, ул. Калибровская, 31А
Тел./факс: (495) 229-6759
E-mail: abrisd@textbook.ru
<http://www.textbook.ru>

ООО «Абрис-СПб»

Торговый отдел (опт.)
192171, Санкт-Петербург,
Железнодорожный пр-т, 20
Тел.: (812) 327-0450, 327-0451, 612-1103
Факс: 560-2417
E-mail: info@prosv-spb.ru
<http://www.spb.textbook.ru>

Интернет-магазин Umlit.ru

Доставка почтой по России,
курьером по Москве
129075, Москва, ул. Калибровская, 31А,
ООО «Абрис»
Тел.: (495) 981-1039, 258-8213, 258-8214
Факс: 229-67-59 (доб. 229)
E-mail: zakaz@umlit.ru
<http://www.umlit.ru>

Интернет-магазин «Умник и К»

Доставка почтой по России
129110, Москва, Напрудный пер., 15,
ООО «Разумник»
Тел.: (495) 961-5008
E-mail: 9615008@mail.ru
<http://www.umnikk.ru>

Интернет-магазин «Лабиринт»

115419, Москва,
2-й Рошинский пр., д. 8, строение 4
Тел.: (495) 276-0863
Факс.: 8-800-555-08-63
<http://www.labirint.ru>



Книжный магазин «УЗНАЙ-КА!»

127434, Москва,
Дмитровское шоссе,
д. 25, корп. 1

Тел.: (499) 976-4860
E-mail: info@martbook.ru

