Н. Е. Федорова
М. В. Ткачева

ИЗУЧЕНИЕ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

11

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Н. Е. Федорова
М. В. Ткачева

ИЗУЧЕНИЕ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

в 11 классе

Книга для учителя

Москва • Просвещение • 2009

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
Ф33

Федорова Н. Е.
Ф33 Изучение алгебры и начал математического анализа в 11 классе : кн. для учителя / Н. Е. Федорова, М. В. Ткачева. — М. : Просвещение, 2009. — 159 с. : ил. — ISBN 978-5-09-016555-6.

Книга содержит методические рекомендации учителям, преподающим алгебру и начала математического анализа в 11 классе по учебнику авторов Ю. М. Колягина, М. В. Ткачевой, Н. Е. Федоровой, М. И. Шабунина. Пособие написано в соответствии с концепцией обучения алгебре и началам математического анализа по этому учебнику, а также с его содержанием и структурой. В нем даны как общие, так и конкретные советы по изучению каждой темы.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-016555-6

Глава I Тригонометрические функции

Тригонометрические функции определяются традиционно формулами $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$ и $y = \mathrm{ctg}\, x$, где x — действительные числа, хотя ранее выражения $\sin x$ и $\cos x$ определялись как ордината и абсцисса точки единичной числовой окружности, а выражения $\mathrm{tg}\, x$ и $\mathrm{ctg}\, x$ определялись как отношения $\frac{y}{x}$ и $\frac{x}{y}$ соответственно. Ранее при изучении тригонометрии углы поворота обозначались буквами α и β и выражались как в градусах, так и в радианах. Это было связано с тем, что все основные формулы доказывались с помощью поворота точки единичной окружности с центром в начале координат, а для обозначения координат этой точки использовались буквы x и y. Далее отмечалось, что выражения $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$ и $\mathrm{ctg}\, x$ (где буква x заменила α и β) суть действительные числа, записанные в тригонометрической форме. Поэтому правомерно считать, что все тригонометрические формулы выражают определенные свойства тригонометрических функций. Среди них следует особо выделить те формулы, которые непосредственно относятся к исследованию тригонометрических функций и построению их графиков. Так, формулы $\sin(-x) = -\sin x$ и $\cos(-x) = \cos x$ выражают свойства нечетности и четности соответственно функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Знаки значений синуса, косинуса, тангенса (например, при $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ справедливы равенства $\sin x > 0$, а $\cos x < 0$) выражают промежутки знакопостоянства одноименных тригонометрических функций. Неравенства $|\sin x| \leqslant 1$ и $|\cos x| \leqslant 1$ соответствуют множеству значений этих функций; равенство $\sin(x + 2\pi k) = \sin x$, где $k \in \boldsymbol{Z}$, свидетельствует о периодичности функции $y = \sin x$ и т. д. Таким образом, практически все основные свойства тригонометрических функций были доказаны в VIII—IX главах учебника для 10 класса. Отметим, что в тригонометрических уравнениях неизвестное традиционно обозначалось буквой x, хотя простейшие из них (например, $\sin x = 0$, $\cos x = 1$ и др.) решались с помощью поворота. Следует также обратить внимание на некоторые особенности определений свойств функций.

Построение графиков тригонометрических функций проводится с использованием их свойств и начинается с построения графика $y = \cos x$. График $y = \sin x$ получается сдвигом графика $y = \cos x$ в соответствии с формулой $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. С помощью графиков иллюстрируются известные свойства функций, а также выявляются некоторые дополнительные свойства. Так, из графика функции $y = \cos x$ следует, что эта функция принимает значение, равное 0, при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, наибольшее значение при $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и т. д. С помощью графиков тригонометрических функций легко решаются простейшие тригонометрические уравнения и неравенства (особенно те, которые заданы на некотором промежутке).

Задачи **для интересующихся математикой** (они содержатся в специально выделенном тексте) знакомят учащихся с доказательством утверждений, являющихся отрицанием факта ограниченности функции, периодичности и пр. Логическая структура этих доказательств специально не обсуждается. Приведенные примеры рассуждений в задачах позволяют провести их анализ и направить в нужное русло поиск учащихся при самостоятельном решении упражнений.

Обратные тригонометрические функции (§ 6) даются в **общеобразовательных** классах обзорно, в ознакомительном плане. В этих классах полезно также рассмотреть графики функций $y = |\cos x|$, $y = a + \cos x$, $y = \cos (x + a)$, $y = a \cos x$, $y = \cos ax$, где a — некоторое число (для **профильных** классов это обязательно).

В результате изучения главы I **все** учащиеся должны знать основные свойства тригонометрических функций, уметь строить их графики и распознавать функции по данному графику, уметь отвечать на вопросы к главе, а также решать задачи типа **108—116** и из рубрики «Проверь себя!».

§ 1. Область определения и множество значений тригонометрических функций (2/2 ч)

Цель изучения параграфа — введение понятия тригонометрической функции, формирование умений находить область определения и множество значений тригонометрических функций.

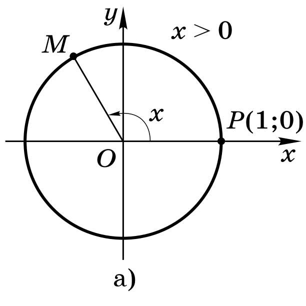
Изучение параграфа рекомендуется начать с повторения материала VIII и IX глав учебника для 10 класса. Для организации повторения на данном и последующих уроках можно использовать отдельные плакаты (или презентацию, кадры которой могут соответствовать этим плакатам). Ниже приведем тексты плакатов и рисунки к каждому из них.

ПЛАКАТ 1. Поворот точки вокруг начала координат (рис. 1)

Точка M получена из точки P (1; 0) поворотом вокруг начала координат на угол x радиан, где $x > 0$.

Точка M_1 получена из точки P (1; 0) поворотом вокруг начала координат на угол x радиан, где $x < 0$.

Если $x = x_0 + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то при повороте на угол x получается та же самая точка, что и при повороте на угол x_0.



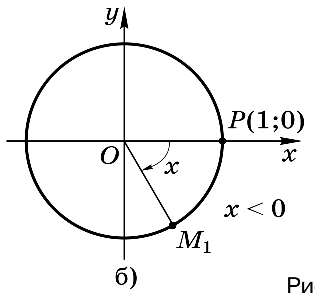


Рис. 1

ПЛАКАТ 2. Определение синуса, косинуса и тангенса числа (рис. 2)

$\sin x$ — ордината точки A, $\sin x_1$ — ордината точки A_1, $\sin x_2$ — ордината точки A_2.

$\cos x$ — абсцисса точки A, $\cos x_1$ — абсцисса точки A_1, $\cos x_2$ — абсцисса точки A_2.

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x, \quad \frac{\sin x_1}{\cos x_1} = \operatorname{tg} x_1, \quad \frac{\sin x_2}{\cos x_2} = \operatorname{tg} x_2 .$$

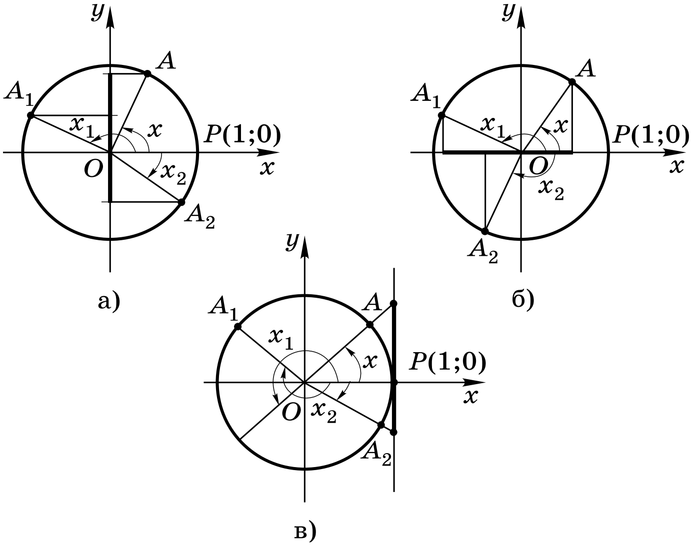


Рис. 2

ПЛАКАТ 3. Знаки значений синуса, косинуса, тангенса (рис. 3)

$\sin x > 0$ в I и II четвертях; $\sin x < 0$ в III и IV четвертях.
$\cos x > 0$ в I и IV четвертях; $\cos x < 0$ во II и III четвертях.
$\operatorname{tg} x > 0$ в I и III четвертях; $\operatorname{tg} x < 0$ во II и IV четвертях.

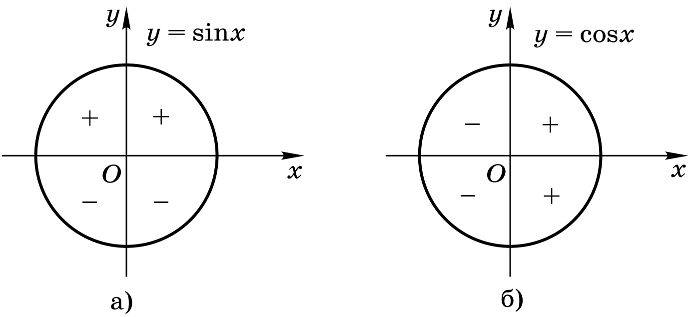
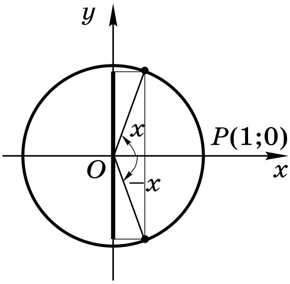


Рис. 3

ПЛАКАТ 4. Синус, косинус и тангенс углов *x* и –*x* (рис. 4)

$\sin(-x) = -\sin x; \quad \cos(-x) = \cos x; \quad \mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\, x.$



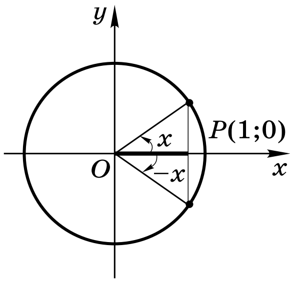


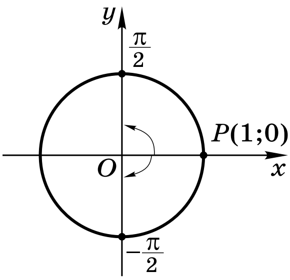
Рис. 4

ПЛАКАТ 5. Решение простейших тригонометрических уравнений (частные случаи) (рис. 5)

$\sin x = 1,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$ $\quad\cos x = 1,\ x = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$

$\sin x = -1,\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$ $\quad\cos x = -1,\ x = \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$

$\sin x = 0,\ x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$ $\quad\cos x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$



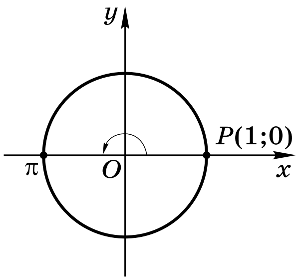


Рис. 5

ПЛАКАТ 6. Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}, \quad \cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x},$$

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{1}{\mathrm{ctg}\, x}, \quad 1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

ПЛАКАТ 7. Решение тригонометрических уравнений

$\sin x = a,\ x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 6).

$\cos x = a,\ x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 7).

$\mathrm{tg}\ x = a,\ x = \mathrm{arctg}\ a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 8).

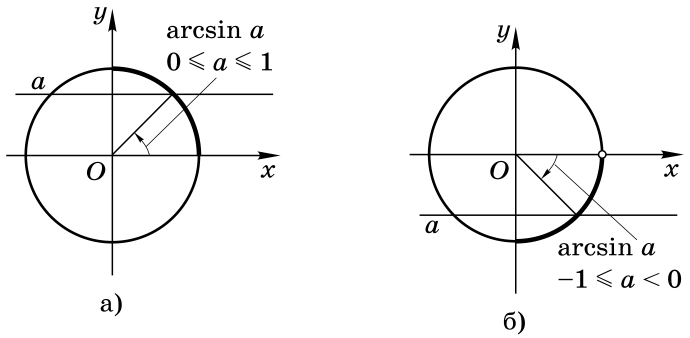


Рис. 6

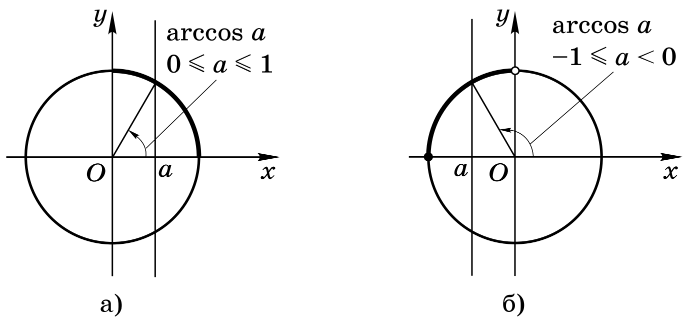


Рис. 7

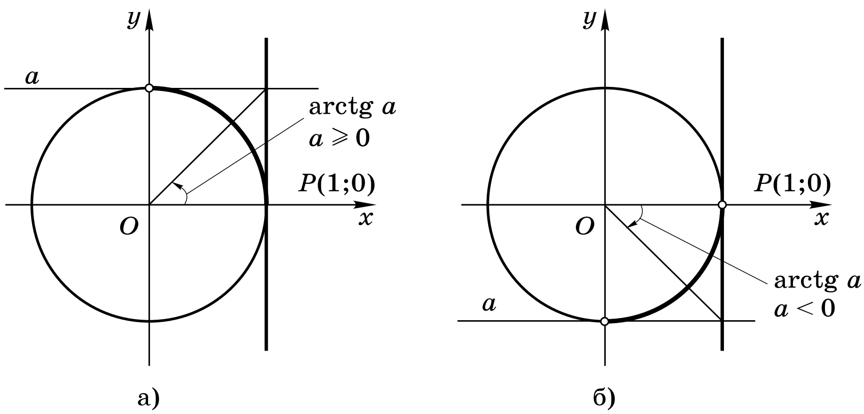


Рис. 8

ПЛАКАТ 8. Ограниченная функция

Функция $y = f(x)$ является ограниченной на множестве X тогда и только тогда, когда существует число $C > 0$, такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant C$.

Это означает, что все точки графика функции $y = f(x)$, $x \in X$, лежат в горизонтальной полосе, ограниченной прямыми $y = C$, $y = -C$ (рис. 9).

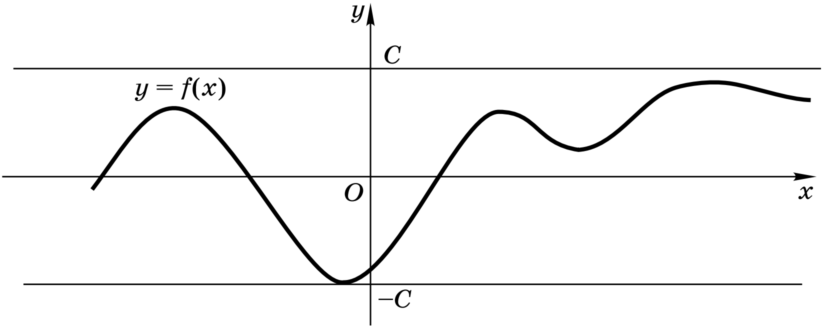


Рис. 9

Рассматривая рисунки и вспоминая теоретический материал, им соответствующий, учащиеся подготовятся не только к восприятию нового теоретического материала, но и к решению задач, изложенных как в этом, так и в последующих параграфах. Подобная работа с плакатами будет полезна при изучении всей главы и при повторении.

Для актуализации знаний учащихся и **общеобразовательных**, и **профильных** классов на этих уроках могут быть использованы приведенные ниже упражнения.

1. Выяснить, в какой четверти расположена точка, полученная поворотом точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат на угол, равный x радиан, если: 1) $x = 1{,}09$; 2) $x = -2{,}9$; 3) $x = 4{,}1$; 4) $x = -6$.

2. Выяснить, в какой четверти расположена точка, полученная поворотом точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат на угол, равный 190π.

3. Определить знак числа: 1) $\sin 1{,}09$; 2) $\cos(-2{,}9)$; 3) $\sin 4{,}1$; 4) $\operatorname{tg}(-6)$.

4. Расположена ли на единичной окружности точка с координатами: 1) $(\cos 1; \sin 1)$; 2) $(\cos(-20); \sin(-20))$; 3) $(0{,}4; 0{,}5)$?

5. Может ли синус принимать значение: 1) равное 0; 2) меньшее –1; 3) большее 1? Может ли такие значения принимать косинус? тангенс?

6. Назвать три числа, косинус которых равен: 1) 0,5; 2) 0,3; 3) a, если $|a| < 1$.

7. Решить уравнение: 1) $\sin x = 0{,}2$; 2) $\cos x = -1$; 3) $\operatorname{tg} x = 5$; 4) $\cos x = 1{,}001$; 5) $\sin x = 1$.

8. При каких значениях a имеет решение уравнение: 1) $2 \sin x = a$; 2) $\cos 3x = a$?

9. Имеет ли смысл выражение $\operatorname{tg} 2x$, если $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$?

10. Является ли ограниченной сверху или снизу функция: 1) $y = -2x^2 + 3x - 2$; 2) $y = x^2 - 7x + 5$?

11. Привести пример графика функции, ограниченной на отрезке $[-3; 3]$.

Ввести понятие тригонометрической функции необходимо, опираясь на известные учащимся сведения о соответствии каждому действительному числу x единственной точки единичной окружности. Опираясь на вышеуказанные плакаты, учащиеся **профильных** классов самостоятельно, а **общеобразовательных** с помощью учебника могут решить проблему нахождения области определения, множества значений и выяснения ограниченности функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$.

В **профильных** классах желательно провести рассуждения, показывающие неограниченность функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. Для этого учащиеся должны составить отрицание того высказывания, которое приведено на плакате 8 и является определением ограниченной функции. Пусть условие, что **существует** число $C > 0$, такое, что для **любого** $x \in X$ верно неравенство $|f(x)| \leqslant C$ **не выполняется**, т. е. **не существует** такое число $C > 0$, чтобы неравенство $|f(x)| \leqslant C$ было верным **для всех** $x \in X$. Иными словами, для любого $C > 0$ указанное неравенство не может выполняться **для всех** $x \in X$. Это означает, что оно не выполняется **хотя бы для одного значения** $x_c \in X$, т. е. выполняется противоположное неравенство $|f(x_c)| > C$. Затем воспользоваться рисунком 8 плаката 7 и показать, что для любого числа $C > 0$, которое можно отметить на оси тангенсов, можно указать угол x, такой, что $|\operatorname{tg} x| > C$. Иными словами, если $C > 0$ — произвольное число, то найдется, например, число $x = \operatorname{arctg}(C + 1)$, такое, что $|\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(C + 1))| = C + 1 > C$.

Задачи **1—3** из учебника предназначены для изучения **всеми** учащимися; задачи **4—6** с учащимися **общеобразовательных** классов можно не решать. В учебнике приведено два способа рассуждений при решении задачи **2:** оба они равноправны, и ученик вправе сам решить, каким из них пользоваться в дальнейшем.

Перед решением задач **4** и **5** полезно вспомнить решение уравнений методом введения вспомогательного угла. С этой целью дома или в классе можно решить, например, уравнения: 1) $4 \sin 3x + 3 \cos 3x - 5 = 0$; 2) $2 \cos 2x + 5 \cos^2 x = 8 \sin 2x - 6$.

В задачах **6** и **7** приводятся примеры доказательства того, что функция является ограниченной, а в задаче **8** — что функция не ограничена. При отсутствии времени на уроках по изучению параграфа в **профильных** классах последние задачи **7** и **8** (а также упражнения **10** и **11**) целесообразно рассмотреть позже, на уроке систематизации и обобщения знаний в конце изучения главы I. Это послужит подготовкой к изучению следующей главы.

При выполнении упражнений к параграфу учащиеся повторяют методы решения уравнений и неравенств. Например, в упражнении **5** приходится решать тригонометрические неравенства, причем задания 4) и 5) выполнить с помощью единичной окружности.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 1, до задачи 2 и после замечания до задачи 3	1, 3	1 (3, 5), 3 (3)	5 (2, 3)
2	§ 1, задачи 2 и 3	2, 4	2 (3, 4)	6 (3, 4), 7 (3)

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 1, до задачи 4	1, 3, 5, 6	4, 5 (1, 2)	
2	§ 1, задачи 4—6	2, 7, 8, 10	7 (3, 4)	11

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны знать, какое множество является областью определения, какое — множеством значений каждой из функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, и уметь решать упражнения типа **1** и **2**. Учащиеся **профильных** классов, кроме того, должны уметь обосновывать ограниченность функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ и выполнять упражнения типа **5** и **7**.

Решение упражнений

9. 1) Преобразуем выражение

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x.$$

Так как $0 \leqslant \sin^2 2x \leqslant 1$, то $-1 \leqslant -\sin^2 2x \leqslant 0$, $\frac{1}{2} \leqslant 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \leqslant 1$, т. е. множество значений функции $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

2) Преобразуем выражение, используя формулу суммы кубов и преобразование предыдущей задачи:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) =$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x - \sin^2 x \cos^2 x =$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x - \frac{1}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x.$$

Рассуждения, аналогичные тем, что приведены в предыдущей задаче, дают результат. Множество значений функции $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

10. 1) Если $|\sin x| \leqslant 1$, то $|1{,}5 - \sin x| \geqslant 1{,}5 - |\sin x| \geqslant 0{,}5$, откуда

$$|y| \leqslant \frac{|\cos x|}{1{,}5 - |\sin x|}, \quad |y| \leqslant \frac{|\cos x|}{0{,}5} \leqslant 2.$$

2) $|\sin x + \cos x| = \sqrt{2}\left|\frac{\sin x}{\sqrt{2}} + \frac{\cos x}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{2}\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant \sqrt{2}$;

$|\sqrt{3} - (\sin x + \cos x)| \geqslant \sqrt{3} - |\sin x + \cos x| \geqslant \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

Следовательно, $|y| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$.

11. 1) Для любого $C > 0$ возьмем $x_n = \frac{1}{2\pi n}$, где $n \in \boldsymbol{N}$, такое, что $\cos\frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi n > C$. Тогда $f(x_n) = \left(\cos\frac{1}{2\pi n}\right)2\pi n \geqslant \left(\cos\frac{1}{2\pi}\right)2\pi n > C$, так как $\cos\frac{1}{2\pi n} \geqslant \cos\frac{1}{2\pi}$ при всех $n \in \boldsymbol{N}$.

2) Для любого $C > 0$ возьмем $n \in \boldsymbol{N}$ таким, чтобы $\frac{\pi}{2} + 2\pi n > C$, и возьмем $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$. Тогда $f(x_n) = \frac{1}{x_n}\sin\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_n} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n > C$. Это означает, что функция $f(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ не ограничена на множестве $\boldsymbol{R}$, кроме точки $x = 0$.

§ 2. Четность, нечетность, периодичность тригонометрических функций (3/3 ч)

Ц е л ь и з у ч е н и я п а р а г р а ф а — обучение исследованию тригонометрических функций на четность и нечетность и нахождению периода функции.

С понятиями четной и нечетной функции учащиеся знакомились в основной школе и повторяли их в 10 классе при изучении степенной функции. В главе «Тригонометрические формулы» рассказывалось, как найти соотношение между синусом, косинусом, тангенсом углов α и $-\alpha$ (при повторении можно воспользоваться плакатом 4). Теперь, после введения понятия тригонометрической функции и знакомства с областью определения каждой из них, можно говорить, что справедливость равенств $\sin(-x) = -\sin x$, $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ для любых x из области определения позволяет сделать вывод о нечетности функций $y = \sin x$ и $y = \operatorname{tg} x$, а справедливость равенства $\cos(-x) = \cos x$ — о четности функции $y = \cos x$. Целесообразно сразу же напомнить особенности графиков четных и нечетных функций.

Доказательство свойств четных и нечетных функций рекомендуется провести только в **профильных** классах (так же, как и решение упражнения **27**); учащихся **общеобразовательных** классов достаточно с этими свойствами только ознакомить. При разборе решения задачи **1** и выполнении упражнений **12**, **13**, **16** важно обращать внимание учащихся на отыскание области определения функции: каждое из равенств $f(-x) = f(x)$, $f(-x) = -f(x)$ должно выполняться для всех x из области определения.

Начиная знакомить учащихся с понятием периодичности, можно вновь вернуться к плакатам (рис. 1) и напомнить учащимся, что если $x = x_0 + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то при повороте на угол x вокруг начала координат получается та же самая точка, что и при повороте на угол x_0, а затем повторить формулы приведения: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$.

Формирование понятия периодической функции происходит при обсуждении решения задач **2—4**, причем в них фактически доказывается, что периодом функций $y = \cos x$ и $y = \operatorname{tg} x$ являются соответственно числа 2π и π. Формулировки задач отличаются друг от друга. В задаче **2** наименьший положительный период функции задан и известно, что функция периодическая. В задаче **4** необходимо прежде доказать, что функция периодическая, и лишь затем найти наименьший положительный период. Таким образом, на этих простых, но важных для изучения конкретных тригонометрических функций примерах показывается, **как** рассуждать в каждом из указанных случаев. В системе упражнений номера **14** и **15** аналогичны задаче **3** текста параграфа.

Опыт показывает, что задачи, подобные задачам **4—6**, кажутся учащимся более трудными, и поэтому упражнения **18—20** рекомендуется решать с учащимися **профильных** классов, а в **общеобразовательных** классах только разобрать решение одной из них с помощью учителя.

18. 1) Функция определена на всей числовой оси, следовательно, числа $x + T$ и $x - T$ принадлежат области определения. Пусть T — период функции. Тогда по определению периодической функции верно равенство $\cos\frac{2}{5}(x + T) = \cos\frac{2}{5}x$, т. е. $\cos\left(\frac{2}{5}x + \frac{2}{5}T\right) = \cos\frac{2}{5}x$, $\frac{2}{5}T = 2\pi$, откуда $T = 5\pi$.

20. 1) Область определения функции $2\pi n \leqslant x \leqslant \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, так как $\sin x \geqslant 0$. Для всех x из области определения числа $x + 2\pi$ и $x - 2\pi$ принадлежат области определения. По формулам приведения верно равенство $\sqrt{\sin(x+T)} = \sqrt{\sin(x+2\pi)} = \sqrt{\sin x}$. Аналогично $\sqrt{\sin(x-T)} = \sqrt{\sin(x-2\pi)} = \sqrt{\sin x}$. Следовательно, функция периодическая.

Задачи **8** и **9** предназначены для тех, кто интересуется математикой. Чтобы убедиться в том, что функция не является периодической, нужно установить, что для любого $T > 0$ найдется такое x (из области определения), что не будет выполняться хотя бы одно из условий: 1) точка $x + T$ принадлежит области определения функции; 2) точка $x - T$ принадлежит области определения функции; 3) $f(x + T) = f(x)$.

На последнем из уроков можно провести небольшую проверочную работу (на 15—20 мин) с целью проверки усвоения материала первых двух параграфов.

1. Найти область определения и множество значений функции:

1) $y = \cos\frac{5}{x}$; 2) $y = \sin 3x + 1$ [1) $y = \sin\frac{2}{x}$; 2) $y = \cos\frac{x}{3} - 1$].

2. Выяснить, является ли четной или нечетной функция $y = x^2 \sin x$ [$y = x^3 \cos x$].

3. Доказать, что наименьший положительный период функции $y = \cos\frac{2}{3}x$ $\left[y = \sin\frac{3}{4}x\right]$ равен 3π $\left[\frac{8\pi}{3}\right]$.

---

4. Найти наименьший положительный период функции $y = \operatorname{tg}\frac{2x}{3}$ $\left[y = \operatorname{tg}\frac{7x}{8}\right]$.

5. Выяснить, является ли периодической функция $y = \sqrt{\cos x}$ [$y = \operatorname{tg}\sqrt{x}$].

Первые три задания можно предложить учащимся **общеобразовательных** классов, **все** задания выполняют учащиеся **профильных** классов.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 2, включая задачу 1	12, 13, 16	12 (3, 6)	17
2	§ 2, после задачи 1 и до задачи 4	14, 15	14 (1, 3)	20
3	§ 2, задачи 1—3	15, 16, 18	В тексте	23, 27

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 2, включая задачу 1	13, 16, 17	16 (3, 4)	27
2	§ 2, после задачи 1 и до задачи 6	14, 15, 18	15 (2, 3)	24, 25
3	§ 2, задачи 6—7	19, 20, 22, 23	В тексте	Задачи 8—9; 21

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны знать определение периодической функции и уметь выполнять упражнения, такие, как **12, 14.** Учащиеся **профильных** классов, кроме того, должны знать свойства четных и нечетных функций и уметь выполнять упражнения, такие, как **13, 18** (1, 2).

Решение упражнений

21. 2) Область определения функции $\boldsymbol{R}$. Предположим, что данная функция периодическая с периодом $T \neq 0$. Тогда для любого $x \in \boldsymbol{R}$ верно равенство $\sin x + \sin\sqrt{2}\,x = \sin(x+T) + \sin(x+T)\sqrt{2}$. Полагая $x = 0$ и $x = T$, получаем $\sin T + \sin\sqrt{2}T = 0$, $\sin T + \sin\sqrt{2}T = \sin 2T + \sin 2\sqrt{2}T$. Следовательно, $\sin 2T + \sin 2\sqrt{2}\,T = 0$, $2\sin T(1+\sqrt{2})\cos T(1-\sqrt{2}) = 0$, откуда

$$T\,(1+\sqrt{2}) = \pi n,\ \ n \in \boldsymbol{Z};\ \ T\,(\sqrt{2}-1) = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Отношение левых частей двух полученных равенств равно $\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 3 + 2\sqrt{2}$. Это — число иррациональное. Отношение правых частей — число рациональное, что невозможно. Следовательно, никакое число $T \neq 0$ не может быть периодом функции.

24. Воспользуемся следующим утверждением: если точки $M_1\,(x_1;\,y_1)$ и $M_2\,(x_2,\,y_2)$ симметричны относительно прямой l, заданной уравнением $x = d$, то $y_1 = y_2$ (точки M_1 и M_2 лежат на одном перпендикуляре к l) и $x_2 = 2d - x_1$ (так как середина отрезка M_1M_2 принадлежит l, т. е. $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = d$). Пусть $M\,(x;\,y)$ — произвольная точка графика F функции $y = f\,(x)$. Тогда точка $M'\,(2a - x;\,y)$, симметричная M относительно прямой $x = a$, лежит на графике F, и точка $M''\,(2b - (2a - x);\,y)$, симметричная M'

относительно прямой $x = b$, также лежит на графике F. Это означает, что значение $2b - (2a - x) = x + (2b - 2a)$ принадлежит области определения данной функции, причем $y = f(x + (2b - 2a)) = f(x)$.

Аналогично, отражая точку M вначале относительно прямой $x = b$, а затем относительно прямой $x = a$, получаем, что значение $x - (2b - 2a)$ принадлежит области определения данной функции, причем $y = f(x - (2b - 2a)) = f(x)$. Таким образом, $y = f(x)$ — функция периодическая с периодом $T = 2(b - a)$.

25. Применим следующее утверждение: если точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ симметричны относительно точки $A(a; b)$, то $x_2 = 2a - x_1$ и $y_2 = 2b - y_1$ (так как A — середина отрезка M_1M_2, т. е. $\frac{x_1 + x_2}{2} = a$, $\frac{y_1 + y_2}{2} = b$). Также воспользуемся утверждением из решения задачи **24**. Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка графика F функции $y = f(x)$. Тогда точка $M'(2a - x; 2b - y)$, симметричная M относительно точки A, лежит на графике F; точка $M''(2c - (2a - x); 2b - y)$, симметричная M' относительно прямой $x = c$, лежит на графике F; точка

$$M'''((2a - (2c - (2a - x)); \ 2b - (2b - y)),$$

$M'''(2(2a - c) - x; y)$, симметричная M'' относительно точки A, также лежит на графике F. Из формул для координат точки M''' вытекает, что M''' симметрична точке M относительно прямой $x = 2a - c$. Итак, график F симметричен относительно прямых $x = c$ и $x = 2a - c$. Из задачи **24** вытекает, что $y = f(x)$ — функция периодическая с периодом $T = = 2(2a - c - c) = 4(a - c)$.

26. Из условия вытекает, что для любого x из области определения числа вида $x + nT$, $n \in \boldsymbol{N}$, также принадлежат области определения. По условию

$$f(x + T) = -f(x), \quad f(x + 2T) = f((x + T) + T) = -f(x + T),$$

откуда $f(x + 2T) = f(x)$. Аналогично $f(x - 2T) = f(x)$, значит, $y = f(x)$ функция периодическая с периодом $2T$.

§ 3. Свойства функции $y = \cos x$ и ее график (3/3 ч)

Ц е л ь   и з у ч е н и я   п а р а г р а ф а — изучение свойств функции $y = \cos x$, обучение построению графика функции и применению свойств функции при решении уравнений и неравенств.

Теоретический материал параграфа разделен на логические блоки: 1) повторение свойств косинуса числа и применение их для исследования функции $y = \cos x$; 2) построение графика функции $y = \cos x$; 3) изложение свойств функции $y = \cos x$; 4) решение задач с использованием изученных свойств функции.

При изучении первого из блоков обобщаются и конкретизируются знания учащихся, полученные ранее: отыскание области определения, множества значений, ограниченности, четности, периодичности функции $y = \cos x$. Все это позволяет перейти ко второй части и выполнить построение графика сначала на отрезке $[0; \pi]$, затем на отрезке $[-\pi; \pi]$ и, наконец, на всей числовой прямой. Доказательство убывания функции на отрезке $[0; \pi]$ основано на повороте точки P $(1; 0)$ вокруг начала координат и определении косинуса. Форма кривой на этом промежутке уточняется путем построения нескольких конкретных точек (при изучении производной можно будет доказать выпуклость графика функции на этом промежутке с помощью второй производной). Свойства функции формулируются с опорой на построенный график.

При изучении блока 1 желательно использовать плакаты (или аналогичную презентацию). Построение графика может выполняться с помощью компьютера (программа, например, GRAPH 16). В дальнейшем для построения синусоиды рекомендуется использовать шаблон.

Учащиеся **общеобразовательных** классов должны уметь «читать» свойства функции по графику, учащимся **профильных** классов полезно аналитически обосновать каждое свойство. В учебнике свойства функции на всей области определения получают, опираясь на ее свойства на промежутке $[0; \pi]$; в **профильных** классах можно предложить учащимся сформулировать свойства функции $y = \cos x$, опираясь на свойства этой функции на другом отрезке, например на отрезке $[-\pi; 0]$.

Применение графиков при решении уравнений и неравенств демонстрируется на задачах, которые учащиеся уже решали в 10 классе с помощью единичной окружности. Полезно напомнить это, предложив в дальнейшем пользоваться теми приемами (с помощью окружности или по графику), которые учащимся более удобны. Учащимся **общеобразовательных** классов достаточно уметь применять график функции при решении уравнений и неравенств на конкретном промежутке.

Важно обратить внимание школьников на то, что отыскание корней уравнения всегда начинается с промежутка $[0; \pi]$, а затем применяется симметрия графика относительно прямых $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

В задачах **4** и **5** рассматривается построение графика с помощью преобразований. Прежде чем переходить к решению, необходимо повторить алгоритм исследования функций элементарными методами, которые изучались в 10 классе. В задаче **4** прежде чем строить график функции $y = \cos^2 x$ выполняется преобразование выражения, что позволяет построить график достаточно просто. В задаче **5** фактически показывается прием построения графика функции с помощью умножения ординат на примере графика функции $y = x \cos x$.

Выполняя упражнения к параграфу, желательно как можно чаще обращаться к графику, чтобы учащиеся могли свободно ориентироваться и в построении, и в чтении графика. Упражнения **29—31** можно рассмотреть до начала построения графика $y = \cos x$. Упражнения **28**, **32—39** в **общеобразовательных** классах желательно решать с помощью графика.

При выполнении упражнения **34 (1)** полезно провести рассуждения разными путями.

34. I способ. $\frac{\pi}{7} \in [0; \pi]$, $\frac{8\pi}{9} \in [0; \pi]$; на отрезке $[0; \pi]$ функция $y = \cos x$ убывает; $\frac{\pi}{7} < \frac{8\pi}{9}$, следовательно, $\cos\frac{\pi}{7} > \cos\frac{8\pi}{9}$.

II способ. $\frac{\pi}{7} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x > 0$ при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, т. е. $\cos\frac{\pi}{7} > 0$. $\frac{8\pi}{9} \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, $\cos x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, т. е. $\cos\frac{8\pi}{9} < 0$. Следовательно, $\cos\frac{\pi}{7} > \cos\frac{8\pi}{9}$.

Решение упражнения **38** полезно и для закрепления свойств функции $y = \cos x$, и для подготовки к изучению следующего параграфа.

38. 3) $\sin\frac{5\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{8}$. Функция $y = \cos x$ убывает на отрезке $[0; \pi]$; $\frac{\pi}{8} \in [0; \pi]$, $\frac{3\pi}{8} \in [0; \pi]$, $\frac{\pi}{8} < \frac{3\pi}{8}$, следовательно, $\cos\frac{\pi}{8} > \cos\frac{3\pi}{8}$, и $\sin\frac{5\pi}{8} > \cos\frac{3\pi}{8}$.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 3, до задачи 1	29—31	28	42
2	§ 3, задача 1	32—35	34 (2, 3)	40, 45
3	§ 3, задачи 1, 2	36—39	36 (1), 38 (1)	47

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 3, задачи 1, 2	29—31, 34—36, 38	35 (1), 36 (2), 38 (5)	50 (2)
2	§ 3, задачи 3, 4	37, 40—45	42 (1), 44 (2), 41 (1)	50 (3)
3	§ 3	46—48	47 (2, 3)	Задачи 5, 49

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны уметь строить график функции $y = \cos x$, по графику выявлять свойства функции и выполнять упражнения, такие, как **34—36**. Учащиеся **профильных** классов, кроме того, должны уметь исследовать функции, выполнять построение графиков, применять свойства функции в таких упражнениях, как **40**, **41**, **43**, **47**.

Решение упражнений

49. Функция $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$ может быть представлена в виде $y = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$ при условии, что область определения функции такова, что $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. График функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$ изображен на рисунке 10.

50. 2) Решением неравенства $2t^2 - 3t - 2 > 0$, где $t = \cos x$, являются промежутки $t > 2$, $t < -\dfrac{1}{2}$. Решением исходного неравенства являются решения неравенства $\cos x < -\dfrac{1}{2}$, т. е. $\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

50. 3) Неравенство выполняется при условии, что $\cos x < 0$, т. е. $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n$ (выражение под знаком корня положительно при всех действительных значениях x). По формулам двойного аргумента, выразив $\cos 4x$ через $\cos x$, получим $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$. Выражение под знаком корня примет вид

$$\frac{7 - 8\cos^4 x + 8\cos^2 x - 1}{2} = 3 - 4\cos^4 x + 4\cos^2 x.$$

При возведении обеих частей неравенства в четвертую степень получим

$$3 - 4\cos^4 x + 4\cos^2 x > 16\cos^4 x, \quad 20\cos^4 x - 4\cos^2 x - 3 < 0.$$

Обозначим $\cos^2 x = t$ и решим неравенство $20t^2 - 4t - 3 < 0$. Его решением является промежуток $(-0{,}3;\ 0{,}5)$, т. е. $\cos^2 x < 0{,}5$,

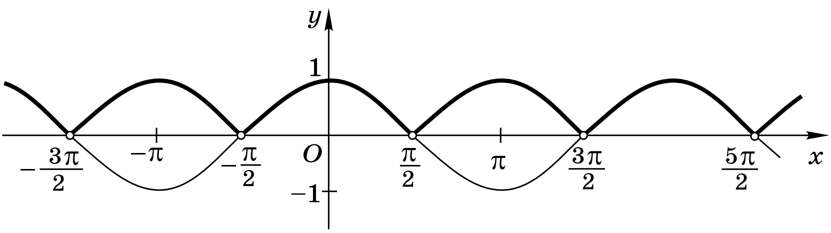


Рис. 10

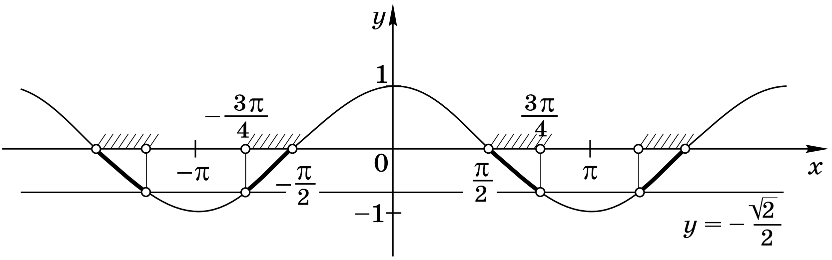


Рис. 11

откуда $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Исходное неравенство выполняется при $\cos x < 0$, следовательно, решение принадлежит промежутку $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < 0$. На графике (рис. 11) видно, что решением неравенства является объединение промежутков

$$-\frac{3\pi}{4}+2\pi n < x < -\frac{\pi}{2}+2\pi n; \quad \frac{\pi}{2}+2\pi n < x < \frac{3\pi}{4}+2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

§ 4. Свойства функции $y = \sin x$ и ее график (3/3 ч)

Цель изучения параграфа — изучение свойств функции $y = \sin x$, обучение построению графика функции и применению свойств функции при решении уравнений и неравенств.

Изучение свойств функции $y = \sin x$ и построение ее графика можно провести аналогично тому, как это было сделано в § 3. В этом случае целесообразно использовать плакаты, представленные в § 1, для повторения всего теоретического материала, уже известного учащимся. Затем учащиеся **общеобразовательных** классов могут построить график с помощью учителя и по графику «прочитать» свойства функции. В **профильных** классах можно предложить учащимся построение графика таким способом выполнить самостоятельно дома, а свойства функции они могут вывести с помощью плакатов.

В учебнике предлагается другой путь изучения свойств функции $y = \sin x$: применение формулы приведения $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, построение графика функции $y = \cos x$ и сдвиг графика вправо на $\frac{\pi}{2}$, получение свойств функции $y = \sin x$ из свойств функции $y = \cos x$. В этом случае начать изучение параграфа можно с выполнения упражнений, которые позволят повторить преобразования графиков функций и подведут учащихся к постановке проблемы. Решение проблемы поиска оптимального пути построения графика функции $y = \sin x$ будет полезно учащимся.

1. Задать аналитически функцию, график которой получен из графика функции $y = x^2$ сдвигом:

1) вдоль оси Ox на две единицы вправо (влево);

2) вдоль оси Oy на единицу вверх (вниз).

2. Изобразить график функции $y = f(x + t)$, если дан график функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3$, $t = \pm 1$;

2) $f(x) = \cos x$, $t = -\frac{\pi}{2}$.

Выполнение последнего задания позволяет перейти к построению графика функции $y = \sin x$.

При решении задач **1** и **2** текста параграфа и упражнений **58, 59, 62—64** необходимо обратить внимание учащихся на отыскание корней уравнения $\sin x = a$ с помощью графика. Желательно, чтобы учащиеся сразу указывали точку на оси Ox, соответствующую $\arcsin a$ (не забывая, что $\arcsin a$ принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$), а затем, используя свойства функции и особенности графика, находили другие точки.

При решении задачи **3** учащимся **профильных** классов напоминают, как элементарными методами построить график сложной функции. Полезно обратить внимание учащихся на то, что сложная функция $y = f(g(x))$, где $g(x)$ — функция периодическая, также является периодической. Повторение теоремы о возрастании и убывании сложной функции (учебник 10 кл., гл. IV, § 2) помогает при исследовании поведения функции на промежутках. При построении графиков в задаче **3** в том и другом заданиях учащиеся повторяют понятие асимптоты (пока только вертикальной).

В главе III они познакомятся с наклонной асимптотой и научатся записывать ее уравнение (материал, **необязательный для всех** учащихся).

Задача **4** не является сложной: здесь учащиеся знакомятся с построением графиков путем сложения ординат. Однако формирование такого умения необязательно для всех учащихся, поэтому эта задача предлагается для решения учащимся, интересующимся математикой.

На *третьем* уроке по изучению данного параграфа можно провести проверочную *самостоятельную* работу (на 15 мин).

1. С помощью графика функции $y = \cos x$ $[y = \sin x]$ найти корни уравнения

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left[\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right] \left[\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]\right]$.

2. С помощью графика функции $y = \cos x$ $[y = \sin x]$ найти все решения неравенства $\cos x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left[\sin x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$ $\left[\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]\right]$.

---

3. Расположить в порядке убывания числа

$$\cos 6, \quad \cos\frac{\pi}{3}, \quad \cos-\frac{5\pi}{8} \quad \left[\sin\frac{\pi}{10},\ \sin 5{,}9,\ \sin-\frac{5\pi}{4}\right].$$

4. Построить график функции

$$y = \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right| \quad [y = x + \cos x].$$

Последнее задание учащиеся **профильных** классов могут выполнять на отдельную оценку.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 4, до задачи 1	52—54	53 (3), 54 (3)	67
2	§ 4, задача 1	51, 55—58	57 (3), 58 (3)	63
3	§ 4, задачи 1, 2	59—62, 70	В тексте	72

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 4, задачи 1 и 2	51—59, 65	56 (3), 57 (3)	72
2	§ 4, задачи 3—4	60—68	61 (3), 67 (3, 4)	73 (1)
3	§ 4	69—71	В тексте	73 (2)

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны уметь строить график функции $y = \sin x$, по графику выявлять свойства функции и выполнять упражнения типа **57—59.** Учащиеся **профильных** классов, кроме того, должны уметь исследовать функции, выполнять построение графиков, применять свойства функции в упражнениях **62—64, 70.**

Решение упражнений

73. 2) Неравенство $3 \sin x - 2 \cos^2 x < 0$ равносильно неравенству $2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 < 0$. Пусть $\sin x = t$, $2t^2 + 3t - 2 < 0$, откуда $-2 < t < \frac{1}{2}$, и решениями данного неравенства будут решения неравенства $\sin x < \frac{1}{2}$, т. е.

$$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

§ 5. Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ и ее график (3/2 ч)

Цель изучения параграфа — ознакомление со свойствами функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, обучение построению графиков функций и применению свойств функций при решении уравнений и неравенств.

Для учащихся **общеобразовательных** классов § 5 является завершающим в данной теме. Повторение свойств тангенса и котангенса числа можно провести по плакатам (§ 1). Возрастание функции $y = \operatorname{tg} x$ в первой четверти можно не доказывать, а проследить по рисунку (рис. 12). При построении графика полезно использовать шаблон, который поможет и при построении графика функции $y = \operatorname{ctg} x$. Свойства функции, как и ранее, «читаем» по графику. Закрепление умений применять свойства функций происходит при выполнении упражнений.

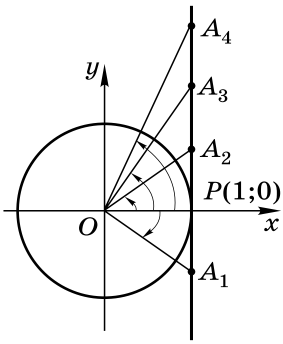


Рис. 12

Как и в предыдущих параграфах, система упражнений позволяет учащимся **общеобразовательных** классов: 1) повторить нахождение значений функции по данным значениям аргумента; 2) научиться применять график и свойства функции для сравнения значений функции при разных значениях аргумента; 3) научиться находить решения простейших уравнений и неравенств на конкретном промежутке; 4) строить графики функций.

Учащимся **профильных** классов можно предложить самостоятельно продумать план построения графика функции $y = \operatorname{tg} x$, а потом и $y = \operatorname{ctg} x$. Сведения о тангенсе, которые возможно забыты, можно почерпнуть из плакатов (§ 1). Доказательство возрастания функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ основывается на свойствах функций синус и косинус, и учащиеся могут его провести с помощью учителя или самостоятельно, работая с учебником.

Учащимся **профильных** классов полезно подробно разобрать решение задачи **4**. Сжатие графика всегда вызывает трудности, поэтому можно сначала посмотреть на компьютере или на готовом чертеже построение графика функции (например, функции $y = \sin 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$).

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 5, до задачи 1	74—78	76 (3), 78 (3)	90
2	§ 5, задача 1, функция $y = \operatorname{ctg} x$	79, 80, 82	79 (3), 80 (3)	87
3	§ 5, задачи 1, 2	81, 84, 89 (1, 2)	81 (3)	94 (1, 2)

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 5, задачи 1—3	74, 79—84	83 (3), 80 (3)	94
2	§ 5, задачи 4, 5	87—93	87 (3), 88 (2), 89 (2)	94

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны уметь строить графики функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, по графику выявлять свойства функций и выполнять упражне-

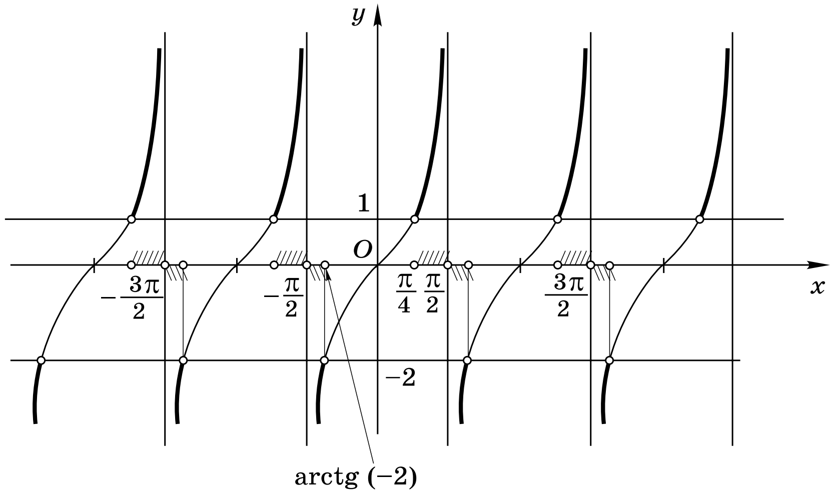


Рис. 13

ния типа **79—81**. Учащиеся **профильных** классов, кроме того, должны у м е т ь исследовать функции, выполнять построение графиков, применять свойства функции в упражнениях типа **83—84, 89**.

Решение упражнений

94. 3) Неравенство $3\sin^2 x + \sin x\cos x > 2$ равносильно каждому из трех неравенств

$$3\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\sin^2 x - 2\cos^2 x > 0,$$
$$\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x > 0,$$
$$\mathrm{tg}^2\, x + \mathrm{tg}\, x - 2 > 0 \quad \left(\cos^2 x > 0,\ \ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in \boldsymbol{Z}\right).$$

Решениями последнего неравенства являются промежутки $\mathrm{tg}\, x < -2$, $\mathrm{tg}\, x > 1$. Следовательно, можно записать о т в е т: $\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < -\mathrm{arctg}\ 2 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 13).

§ 6. Обратные тригонометрические функции (1/3 ч)

Ц е л ь и з у ч е н и я п а р а г р а ф а — ознакомление с обратными тригонометрическими функциями, их свойствами и графиками.

Материал параграфа **не является обязательным** для изучения учащимися **общеобразовательных** классов, но ознакомить школьников с данным типом функций желательно. Для учащихся **профильных** классов изучение теоретического материала параграфа и решение задач необходимо.

Прежде чем приступить к изучению темы, целесообразно повторить понятие взаимно обратных функций (10 кл., гл. IV, § 2) и определения арксинуса, арккосинуса и арктангенса числа. Повто-

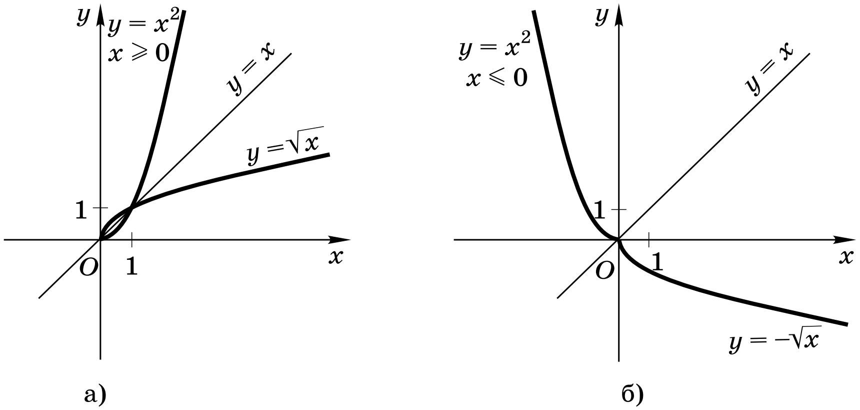


Рис. 14

рение теоремы о взаимном расположении графиков взаимно обратных функций достаточно провести по рисункам (например, рис. 14). Затем выполнить с а м о с т о я т е л ь н у ю работу (в трех вариантах).

1. Построить кривую, симметричную относительно прямой $y = x$ графику функции $y = \sin x$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Построить кривую, симметричную относительно прямой $y = x$ графику функции $y = \cos x$ на промежутке $[0;\ \pi]$.

3. Построить кривую, симметричную относительно прямой $y = x$ графику функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

В результате можно высказать предположение о том, что полученная кривая является графиком функции, обратной данной на заданном промежутке. Далее можно обратиться к тексту учебника и обосновать высказанное предположение.

С учащимися **общеобразовательных** классов дальнейшую работу можно провести либо с помощью презентации, сделанной по тексту учебника, либо непосредственно по тексту учебника. По полученным в результате самостоятельной работы по вариантам, сформулированным выше, рисункам «прочитать» свойства функций и проследить их применение при решении задач **1** и **2**.

С учащимися **профильных** классов по ходу изучения параграфа целесообразно повторять свойства и графики функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ (выполняя в классе и дома упражнения на построение графиков, которые не успели решить ранее, например, **47—49**, **70—72**, **91—93**). Построить график функции $y = \operatorname{arcctg} x$ и сформулировать ее свойства учащиеся **профильных** классов могут самостоятельно, по аналогии с функцией $y = \operatorname{arctg} x$.

Р а с п р е д е л е н и е м а т е р и а л а п а р а г р а ф а по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 6, до задачи 3	95, 96, 98 (1), 99 (1)	95 (3), 96 (3)	103

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 6, до задачи 2	95—97	95 (3), 96 (3), 97 (3)	104
2	§ 6, задачи 2, 3	98—101	98 (3), 99 (3), 100 (3)	105
3	§ 6, задача 4	102—103	Свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$	106

В результате изучения параграфа учащиеся **профильных** классов должны уметь исследовать функции, выполнять построение графиков, применять свойства функции в упражнениях типа **98—101**.

Решение упражнений

105. Обозначим $\arccos x = a$, где $x \in [-1; 1]$. По определению арккосинуса имеем $0 \leqslant a \leqslant \pi$, $\cos a = x$. Тогда по свойствам неравенств $-\pi \leqslant -a \leqslant 0$, откуда $0 \leqslant \pi - a \leqslant \pi$. По формуле приведения $\cos(\pi - a) = -\cos a = -x$. Следовательно, по определению арккосинуса имеем $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ для любого $x \in [-1; 1]$.

Уроки обобщения и систематизации знаний (2/2 ч)

Цель уроков — подвести итог исследованию элементарных функций методами элементарной математики и подготовить учащихся к исследованию функций методами математического анализа.

На этих уроках можно использовать плакаты или презентацию с графиками всех изученных функций (не только тригонометрических), которые можно сделать с помощью учащихся; повторить, как по графику найти область определения и множество значений функции; выполнить аналитическое решение подобных задач на примере некоторых заданий из упражнений **108, 109, 114, 122, 123, 131**.

На тех же готовых графиках можно проиллюстрировать четные и нечетные функции, повторить аналитическое решение задач на выяснение четности и нечетности (упражнения **110, 124**); рассмотреть интервалы знакопостоянства и промежутки возрастания и убывания функций (упражнения **112, 113, 121, 129**); выделить периодичность как характерное свойство тригонометрических функций (упражнения **111, 125**).

Акцентировать внимание учащихся на возможности использования графика и свойств функции при решении уравнений и неравенств (упражнения **115—118**). В ходе решения таких упражнений, как **119, 126**, напомнить учащимся, что выяснение наличия или количества корней уравнения с помощью графика часто приводит к быстрому нахождению результата.

В итоге полезно выполнить построение графиков функций из упражнений **120, 130**, повторить определение функции, перечислить известные элементарные функции, а также, повторяя схему исследования функции, кратко напомнить аналитические пути ответа на вопрос каждого пункта схемы.

В качестве дополнительных вопросов на всех этапах урока можно использовать вопросы к главе.

Решение упражнений

130. 2) $y = \cos x - \sqrt{\cos^2 x}$, $y = \cos x - |\cos x|$;

$$y = \begin{cases} 0 & \text{при } \cos x \geqslant 0; \\ 2\cos x & \text{при } \cos x < 0. \end{cases}$$

График данной функции изображен на рисунке 15.

6) Область определения функции $y = 2^{\sin x}$ все действительные числа, множество значений $y > 0$. Функция периодическая $T = 2\pi$; возрастает на тех промежутках, на которых возрастает функция $y = \sin x$ (по теореме о возрастании сложной функции). График изображен на рисунке 16.

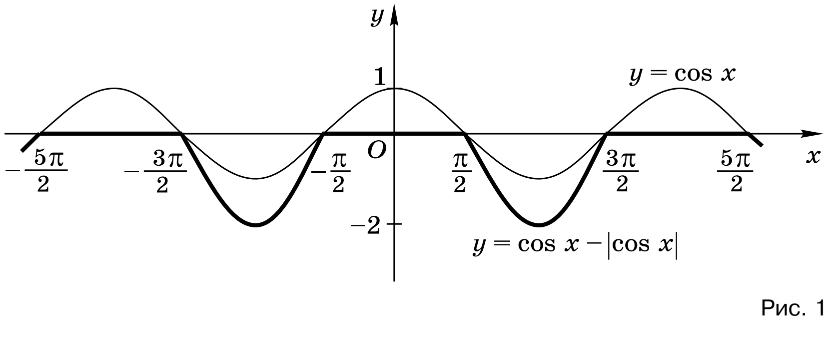


Рис. 15

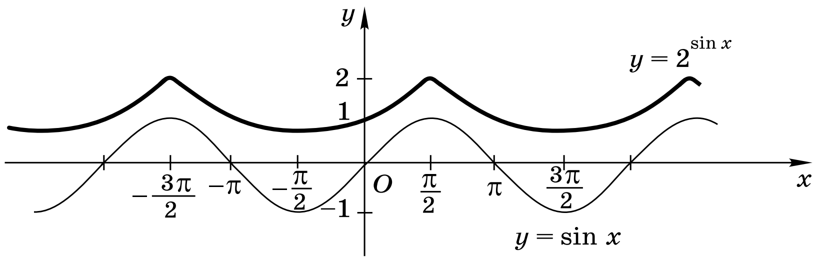


Рис. 16

131. 1) $y = 12 \sin x - 5 \cos x = 13\left(\frac{12}{13}\sin x - \frac{5}{13}\cos x\right) =$
$= 13 \sin (x - \varphi)$, $\varphi = \arcsin\frac{5}{13}$, откуда $-13 \leqslant y \leqslant 13$.

2) Функцию $y = \cos^2 x - \sin x$ можно представить как $y =$ $= 1 - \sin x - \sin^2 x$, $y = \frac{5}{4} - \left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2$. Наибольшее значение y принимает, если $\sin x + \frac{1}{2} = 0$ $\left(\sin x = -\frac{1}{2}\right)$, причем $y_{\max} = \frac{5}{4}$. Наименьшее значение $y_{\min} =$ $= \frac{5}{4} - \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = -1$ функция принимает, если $\sin x = 1$. Множество значений функции — отрезок $\left[-1; \frac{5}{4}\right]$. График на рисунке 17 иллюстрирует множество значений функции.

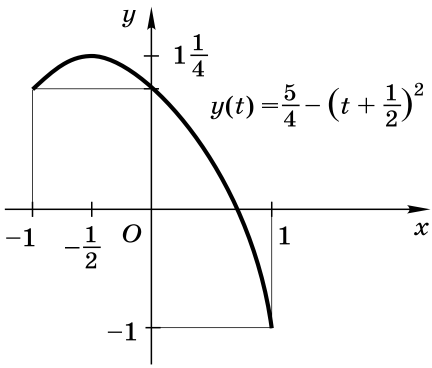


Рис. 17

132. 1) Преобразуем левую часть неравенства $\sin x - \cos x \geqslant 0$, получив $\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Решив неравенство $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$, получим результат $\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Контрольная работа № 1

Базовый уровень

1. Найти область определения и множество значений функции $y = \sin x + 2$ $[y = 3 \cos x]$.
2. Выяснить, является ли функция $y = x^2 + \cos x$ $[y = x \sin x]$ четной или нечетной.

3. Доказать, что наименьший положительный период функции $y = \cos 2x$ $\left[y = \sin\frac{x}{2}\right]$ равен π $[4\pi]$.

4. Найти все принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$ $[[0; 2{,}5\pi]]$ корни уравнения $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\left[\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ с помощью графика функции.

---

5. Построить график функции $y = \sin x - 1$ $\left[y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]$ и найти значения аргумента, при которых функция возрастает [убывает], принимает наибольшее [наименьшее] значение.

Профильный уровень

1. Построить график функции $y = \cos 2x$ $\left[y = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right]$ и найти ее промежутки возрастания [убывания].

2. С помощью графика функции выяснить, сколько корней имеет уравнение $\cos 2x = x^{-\frac{3}{2}}$ $\left[\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt[3]{x}\right]$.

3. Доказать, что функция $y = \operatorname{ctg}\frac{2}{3}x$ $[y = \operatorname{tg} 4x]$ периодическая с наименьшим положительным периодом $T = \frac{3\pi}{2}$ $\left[T = \frac{\pi}{4}\right]$ и найти ее область определения.

---

4. Выяснить, является ли функция
$$y = 3\sin x - 2\cos x \quad [y = 3\sin^2 x + \cos 2x]$$
четной или нечетной, и найти множество ее значений.

5. Построить график функции
$$y = \frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 \quad \left[y = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + 1\right].$$

Глава II Производная и ее геометрический смысл

Содержание разделов курса, составляющих начала математического анализа, трудно для изучения в средней школе. Поэтому в **общеобразовательных** классах их изложение в учебнике ведется на наглядно-интуитивном уровне: многие формулы не доказываются, а только поясняются или принимаются без доказательств. Главное — показать учащимся целесообразность изучения производной и в дальнейшем первообразной (интеграла), так как это необходимо при решении многих практических задач, связанных с исследованием физических явлений, вычислением площадей криволинейных фигур и объемов тел с произвольными границами, с построением графиков функций. Хотя о геометрическом смысле производной говорится в конце главы, можно (в общих чертах) рассказать о нем уже в самом начале изучения темы.

Прежде всего следует показать, что функции, графиками которых являются кривые, описывают многие важные физические и технические процессы. По сравнению с прямой кривые меняют наклон, меняют возрастание на убывание или наоборот; могут существовать значения y, которым соответствует не одно, а несколько значений x, и т. д., т. е. кривые являются существенно более сложными объектами для изучения, чем прямые. Отсюда возникает идея *линеаризации* — сведение изучения кривых к изучению некоторой ломаной, близкой к этой кривой, и далее к изучению отрезков ломаной, являющихся хордами, соединяющими две точки данной кривой. Впервые эту идею высказал Г. Лейбниц, который утверждал, что на небольших промежутках кривая неотличима от прямой, а наклон секущей, проходящей через две точки кривой при сближении этих точек, можно заменить наклоном касательной. Чем ближе концы хорд друг к другу, тем точнее приближение данной кривой к соответствующей ломаной. Следует также иметь в виду, что наклон кривой в той или иной точке промежутка, на котором она рассматривается, определяет многие ее свойства (возрастание, убывание и т. д.). Учащиеся знают, что угол наклона прямой (ее угловой коэффициент) выражается отношением $\frac{y}{x} = k$ (в каждой ее точке), наклон же кривой (или ее градиент) задается отношением $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Это отношение определяет наклон хорды, концами которой являются точки $(x;\, f(x))$ и $(x + h;\, f(x + h))$. Если концы хорды сближаются (т. е. $h \to 0$), то наклон кривой в некоторой точке будет характеризоваться наклоном касательной к кривой в этой точке, т. е. производной $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Таким образом, вблизи избранной точки мы заменяем изучаемую функцию линейной. С помощью производной среди таких линейных функций выбирается та, которая дает наилучшее приближение к данной функции.

Понятия предела и непрерывности функции у учащихся **общеобразовательных** классов формируются на наглядно-интуитивном уровне; учащиеся **профильных** классов знакомятся со строгими определениями этих понятий. Поэтому одни и те же правила дифференцирования и формулы производных элементарных функций в первом случае приводятся без обоснований, а во втором — доказываются строго.

Достаточно подробное изучение теории пределов числовых последовательностей (§ 1) учащимися **профильных** классов не просто готовит их к восприятию сложного понятия предела функции в точке, но и развивает многие качества мыслительной деятельности учащихся. Вводимые понятия горизонтальных и вертикальных асимптот должны облегчить построение графиков многих функций учащимися профильных классов.

В результате изучения главы **все** учащиеся должны знать определение производной, основные правила дифференцирования и формулы производных элементарных функций, приведенные в учебнике; понимать геометрический смысл производной; уметь записывать уравнение касательной к графику функции в заданной точке, решать упражнения типа **104—110**, **94**. Учащиеся **профильных** классов должны дополнительно иметь представление о пределе последовательности, пределе и непрерывности функции и уметь решать упражнения типа **119—121**, **116—118**, **128**.

§ 1. Предел последовательности (1/3 ч)

Цель изучения параграфа в **общеобразовательных** классах — завершение формирования представления о пределе числовой последовательности, демонстрация применения теорем о существовании предела монотонной ограниченной последовательности; в **профильных** классах — знакомство со строгим определением предела числовой последовательности, свойствами сходящихся последовательностей, обучение нахождению пределов последовательностей (на основании свойств пределов), доказательству сходимости последовательности к заданному числу (на основании определения предела последовательности).

В **общеобразовательных** классах рассмотрение текста параграфа, выделенного для этой категории учащихся, проводится в течение одного урока в ознакомительном плане с опорой на знания, полученные в 9 классе, при вычислении суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Изображение последовательности $\{x_n\}$ с помощью точек координатной плоскости вида $(n;\ x_n)$, где $n \in \boldsymbol{N}$, можно проиллюстрировать, например, на последовательности $x_n = (-1)^n\ n$. Изображение последовательностей точками на числовом луче имеется в учебнике (рис. 30, 31).

После интуитивного введения понятия предела числовой последовательности выполняется упражнение **1**.

С содержанием п. 4 можно работать следующим образом: рассматривается определение 1 и приводятся примеры возрастающей и неубывающей последовательностей (например, последовательностей $x_n = n - 5$ и $y_n = \begin{cases} 7, \text{ если } n < 12, \\ n^2, \text{ если } n \geqslant 12 \end{cases}$ соответственно). Аналогично прорабатывается определение 2.

При рассмотрении теорем 1 и 2 также желательно привести примеры соответствующих последовательностей. Например, последовательность $y_n = \dfrac{1}{2^n}$ (рассмотренная в п. 2 параграфа) является убывающей, и любой ее член $y_n \geqslant 0$ (или $y_n \geqslant -\frac{1}{2}$, или $y_n \geqslant -2$ и т. п.); тот факт, что эта последовательность имеет предел, был проиллюстрирован в учебнике даже графически. Желательно, чтобы учащиеся сами сконструировали несколько последовательностей, удовлетворяющих условиям теорем 1 и 2, после чего убедились (на интуитивном уровне) в том, что эти последовательности имеют предел. Применение теоремы 1 в геометрии при обосновании формул длины окружности и площади круга желательно проиллюстрировать с помощью рисунка 33 учебника.

С учащимися **профильных** классов при изучении параграфа акцент делается не на интуитивное понятие предела, а на его строгую трактовку «на ε-языке». Такое определение предела последовательности (а в дальнейшем определение предела функции «на ε-, δ-языке») нелегко усваивается за короткое время даже студентами I курса технических вузов. Все понятия, связанные с бесконечно малыми и бесконечно большими величинами, «не осязаемы» учащимися и поэтому требуют для их формирования длительного времени, многократного «проговаривания» определения понятия с параллельным сопровождением графическими иллюстрациями. Практика показывает, иллюстрация типа рисунка 32 учебника с использованием термина «ε-окрестность точки a» больше всего способствует пониманию понятия предела. Иногда полезно учителю при формулировке определения предела последовательности после слов «...для каждого $\varepsilon > 0$» добавлять слова «каким бы малым оно ни было...». И пояснять: «Если взять ε еще меньше, то и для него найдется такой номер члена последовательности N_ε (зависящий от нового ε)...»

После введения понятия предела числовой последовательности разбирается задача **1** текста учебника, после чего выполняется упражнение **2**. Упражнение **3** может быть выполнено на любом из отведенных уроков, однако если учитель посчитает нужным его рассмотреть до изучения теоремы 3, то предварительно нужно будет в каждом задании сперва «угадать» число, являющееся пределом заданной последовательности, а затем с помощью определения предела (как это сделано в задаче 1) доказать, что это число действительно является пределом заданной последовательности.

Пункты 3—5 параграфа изучаются в ознакомительном плане, однако при рассмотрении свойств 1 и 2 пункта 3 желательно приводить примеры последовательностей, иллюстрирующих эти свойства (аналогично тому, как было рекомендовано выше изучать материал п. 4).

Заметим, что в свойстве 1 фактически формулируется и определение *ограниченной последовательности*. Учащимся желательно сформулировать его в явном виде и дать определение ограниченной снизу и ограниченной сверху последовательностей (что необходимо для четкого понимания формулировок теорем 1 и 2): «Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое M, что $x_n \leqslant M$ $(x_n \geqslant M)$ для всех $n \in \boldsymbol{N}$».

Распределение учебного материала параграфа по урокам в **профильных** классах отражено в таблице.

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 1, пп. 1, 2, задача 1 (1, 2)	1,2		3
2	§ 1, пп. 3, 4	Задача 1 (3, 4) текста параграфа, 4		
3	§ 1, пп. 5, 6, задачи 3 и 4 (1)	5 (1, 2, 5, 6), 6 (1—3)	5 (5, 6), 6 (3)	5 (3, 4), 6 (4)

В результате изучения параграфа учащиеся **общеобразовательных** классов должны иметь представление о пределе числовой последовательности и уметь символически записывать тот факт, что некоторое число является пределом последовательности при $n \to \infty$. Учащиеся **профильных** классов должны усвоить определение предела последовательности, уяснить теорию пределов монотонных последовательностей и уметь находить пределы последовательностей в случаях, аналогичных упражнению **5** (2, 5, 6).

Решение упражнений

5. 3) Так как $\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k+1} - \dfrac{1}{2k+3}\right)$, то

$$x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}\right) =$$

$$= \frac{2n}{6(2n+3)} = \frac{n}{6n+9}; \quad \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{6n+9} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{6 + \frac{9}{n}} = \frac{1}{6}.$$

4) Так как $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, то $x_n = \dfrac{n(n+1)}{2n^2} = \dfrac{n+1}{2n}$;

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}.$$

5) $$\lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{3n+5}{2n-1}} = \lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{n + \frac{5}{3}}{n - \frac{1}{2}}}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{n - \frac{1}{2} + \frac{13}{6}}{n - \frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2} \lim_{n \to \infty} \sqrt{1 + \frac{13}{6\left(n - \frac{1}{2}\right)}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$ (см. замечание после задачи **2** текста параграфа).

6) $x_n = \sqrt{n^2 - n + 2} - n = \dfrac{\left(\sqrt{n^2 - n + 2} - n\right)\left(\sqrt{n^2 - n + 2} + n\right)}{\sqrt{n^2 - n + 2} + n} =$

$= \dfrac{2 - n}{\sqrt{n^2 - n + 2} + n} = \dfrac{\dfrac{2}{n} - 1}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2}} + 1}$, поэтому $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \dfrac{-1}{1 + 1} = -\dfrac{1}{2}$.

6. 4) $x_n = \sqrt[3]{n^3 + 2n} - n =$

$= \dfrac{\left(\sqrt[3]{n^3 + 2n} - n\right)\left(\sqrt[3]{(n^3 + 2n)^2} + \sqrt[3]{n^3 + 2n} \cdot n + n^2\right)}{\sqrt[3]{(n^3 + 2n)^2} + \sqrt[3]{n^3 + 2n} \cdot n + n^2} =$

$= \dfrac{n^3 + 2n - n^3}{\sqrt[3]{n^6 + 4n^4 + 4n^2} + n\sqrt[3]{n^3 + 2n} + n^2} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{n^2 + 4n + \dfrac{4}{n}} + \sqrt[3]{n^3 + 2n} + n}$,

поэтому $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$.

7. Так как $\dfrac{1}{a_k \cdot a_{k+1}} = \dfrac{1}{a_k (a_k + d)} = \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_k} - \dfrac{1}{a_k + d}\right)$, то

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 + nd}\right) = \frac{1}{d} \cdot \frac{nd}{a_1 (a_1 + nd)} =$$

$$= \frac{n}{a_1^2 + n a_1 d} = \frac{1}{\dfrac{a_1^2}{n} + a_1 d},$$

то $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{\dfrac{a_1^2}{n} + a_1 d} = \dfrac{1}{a_1 d}$.

§ 2. Предел функции (0/2 ч)

Цель изучения параграфа — знакомство учащихся **профильных** классов с понятиями предела функции и асимптоты графика функции, со свойствами пределов функций.

С большинством учащихся **профильных** классов материал параграфа рассматривается в ознакомительном плане (только текст, выделенный соответствующим символом). Учитель не должен требовать от всех учащихся воспроизведения определений понятий, вводимых в параграфе. Желательно лишь добиться понимания определения предела функции (п. 1), используя графическую иллюстрацию (рис. 18). На языке «окрестностей точки» данное определение можно переформулировать так: «Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке a при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что, как только число x попадает в δ-окрестность точки a, соответствующее значение $f(x)$ попадает в ε-окрестность точки A» (см. рис. 18).

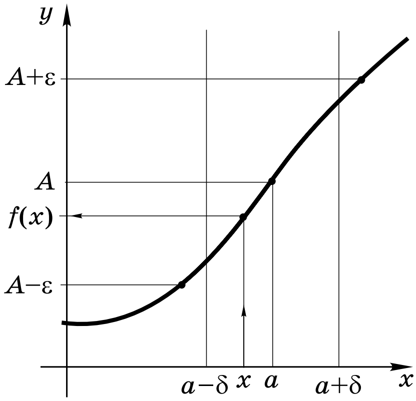


Рис. 18

Понятие вертикальной асимптоты иллюстрируется с помощью рисунков 37—40 учебника, горизонтальной — с помощью рисунков 37—38.

С учащимися, **интересующимися математикой** (при наличии времени), можно рассмотреть п. 3 и свойства пределов функций (п. 4), затем потренироваться в нахождении пределов при решении упражнения **13**. У учащихся, усвоивших свойства пределов числовых последовательностей, изучение п. 4 и рассмотрение задачи 7 не должно вызвать особых затруднений.

Распределение учебного материала параграфа по урокам отражено в таблице.

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 2, п. 1	8		10
2	§ 2, из п. 2 понятия вертикальной и горизонтальной асимптот	11, 12	12 (3)	13 (после рассмотрения пп. 3 и 4)

С учащимися, **интересующимися математикой** (при наличии дополнительного времени), рассматривается материал п. 2. Понятие односторонних конечных пределов рассматривается в основном с целью формулировки необходимого и достаточного условия существования предела функции в точке. Знание бесконечных пределов в конечной точке и пределов в бесконечности дает возможность обоснованного построения графиков функций, имеющих асимптоты. Понятие пределов функции при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ можно ввести с помощью рисунков 42 и 43 учебника лишь на наглядно-интуитивном уровне. Представление о таких пределах и использование указанной символики понадобятся учащимся **профильных** классов при изучении асимптот графиков функций (§ 5, глава III).

При выполнении упражнения **9** учащиеся должны построить график функции, заданной на интервалах, а затем найти пределы слева и справа в заданной точке.

При выполнении упражнения **10** рекомендуем в классе рассмотреть задание 2, а дома задание 1.

В результате изучения параграфа учащиеся **профильных** классов должны иметь представление о пределе функции в точке и уметь его находить с помощью графика функции в заданиях, аналогичных упражнению **8**, а также находить с помощью графического метода вертикальные и горизонтальные асимптоты графика функции в заданиях типа **11 (1, 2), 12.**

Решение упражнений

10. 1) $f(x) = x^2 - 4x + 6$, $|f(x) - 2| = |x^2 - 4x + 6 - 2| = |x^2 - 4x + 4| = (x - 2)^2$. Найдем для любого $\varepsilon > 0$ такое $\delta > 0$, что $|f(x) - 2| < \varepsilon$, как только $|x - 2| < \delta$. Пусть взято некоторое $\varepsilon > 0$, тогда неравенство $(x - 2)^2 < \varepsilon$ равносильно неравенству $|x - 2| < \sqrt{\varepsilon}$. Поэтому для всех x, таких, что $|x - 2| < \delta$, где $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, справедливо неравенство $|f(x) - 2| < \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 4x + 6) = 2$.

2) Равенство $\lim\limits_{x\to 1}((x - 1)^4 + 3) = 3$ верно, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - 1| < \delta$, выполняется неравенство $|(x - 1)^4 + 3 - 3| < \varepsilon$ или равносильные ему неравенства $(x - 1)^4 < \varepsilon$, $|x - 1| < \sqrt[4]{\varepsilon}$. Тогда для всех x, таких, что $|x - 1| < \delta$, где $\delta = \sqrt[4]{\varepsilon}$, будет выполняться и неравенство $\lim\limits_{x\to 1}((x - 1)^4 + 3) = 3$.

11. 1) Если $x \to \pm 2$, то $x^2 - 4 \to 0$, поэтому $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x^2 - 4} = \infty$, $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{x^2 - 4} = \infty$. Вертикальные асимптоты: $x = 2$ и $x = -2$.

2) Если $x \to -\dfrac{3}{2}$, то $x + 1 \neq 0$, а $2x + 3 \to 0$, поэтому $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}}\dfrac{x+1}{2x+3} = \infty$.

Вертикальная асимптота $x = -\dfrac{3}{2}$.

12. 1) $f(x) = \dfrac{3x+2}{x} = \dfrac{3 + \dfrac{2}{x}}{1} = 3 + \dfrac{2}{x} \to 3$ при $x \to \infty$, поэтому $y = 3$ горизонтальная асимптота.

13. 2) $$\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-2} - 2}{x - 6} = \lim_{x\to 6}\frac{\left(\sqrt{x-2} - 2\right)\left(\sqrt{x-2} + 2\right)}{(x-6)\left(\sqrt{x-2} + 2\right)} =$$
$$= \lim_{x\to 6}\frac{x - 2 - 4}{(x-6)\left(\sqrt{x-2} + 2\right)} = \lim_{x\to 6}\frac{1}{\sqrt{x-2} + 2} = \frac{1}{4}.$$

3) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2 + 4x + 7}{6x^2 - x + 5} = \lim_{x\to\infty}\frac{3 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{7}{x^2}}{6 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{x^2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

5) Указание. Использовать то, что $\frac{\sqrt{3x^2+x+7}}{x}=$ $=\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}$.

6) Указание. Умножить и разделить $\sqrt{x^2+2x+3}-$ $-\sqrt{x^2-x+1}$ на сопряженное ему выражение.

§ 3. Непрерывность функции (1/1 ч)

Цель изучения параграфа учащимися **общеобразовательных** классов — формирование графического представления о непрерывности функции; учащимися **профильных** классов — обучение выявлению непрерывных функций с опорой на определение непрерывности функции (в точке; на интервале).

Учащиеся **общеобразовательных** классов на уроке по этой теме восстанавливают графические умения, вспоминают вид графиков ранее изученных функций и выявляют среди них непрерывные и те, которые имеют точки разрыва (пользуясь графическими образами). После рассмотрения первых четырех абзацев параграфа выполняются упражнения **14—18**. При этом учитель после построения графика каждой рассматриваемой функции ставит вопрос о непрерывности этой функции.

Итогом урока в **общеобразовательных** классах может стать, например, перечень ранее изученных функций, непрерывных на всей числовой прямой (линейная, квадратичная, показательная, $y=$ $=\sin x$, $y=\cos x$), непрерывной при $x>0$ ($y=\log_a x$); имеющих точки разрыва $\left(y=\frac{1}{x},\ y=\operatorname{tg}x \text{ и др.}\right)$. С этой же целью можно использовать абзац текста параграфа, предшествующий определению 2.

В **профильных** классах материал параграфа можно начинать изучать с определения 1, а можно — с вводной части параграфа. Текст для **интересующихся математикой** изучается только с теми учащимися, которые познакомились с односторонними пределами. После рассмотрения теоретического материала и задач **1** и **2** текста параграфа выполняются (по выбору учителя) упражнения **15—20**. При этом упражнения **15—19** выполняются с опорой на график функций, а при решении упражнения **20** проверяется выполнение условий *а—в*, приведенных после определения 1.

Встречающиеся в упражнениях **20—22** «кусочные» функции, заданные на конкретных интервалах в виде логарифмической или тригонометрической функции, непрерывны на области определения (см. абзац текста параграфа, предшествующий определению 2), а значит, имеют предел в каждой ее точке.

Желательно, чтобы учащиеся **профильных** классов получили представление о том, что для любой функции $f(x)$, непрерывной на некотором интервале, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, где a принадлежит интервалу непрерывности.

В упражнениях **20** (3, 4), **21**, **22** строгое обоснование непрерывности кусочно заданных функций должно проводиться с помощью односторонних пределов. Но можно, например, при решении упражнения **20** (4) рассуждать следующим образом.

1) Заметим, что способ задания функции таков, что можно считать, что $f(x) = g(x) = \sin x$ при $x < \pi$ и $f(x) = h(x) = 6 + x - \pi$ при $x \geqslant \pi$.

2) Обратим внимание на то, что существуют интервалы, для которых $x = \pi$ — внутренняя точка и на которых определены и $f(x)$, и $g(x)$, и $h(x)$. Например, интервал (3; 4).

3) Подчеркнем очевидный факт: если на выбранном интервале $\lim\limits_{x \to \pi} g(x) = \lim\limits_{x \to \pi} h(x) = A$, то и $\lim\limits_{x \to \pi} f(x) = A$, причем $A = f(\pi)$; если же $\lim\limits_{x \to \pi} g(x) \neq \lim\limits_{x \to \pi} h(x)$, то в точке $x = \pi$ функция $f(x)$ имеет разрыв.

4) Проверяем: $\lim\limits_{x \to \pi} g(x) = \sin \pi = 0$, $\lim\limits_{x \to \pi} h(x) = 6 + \pi - \pi = 6$, т. е. $\lim\limits_{x \to \pi} g(x) \neq \lim\limits_{x \to \pi} h(x)$.

5) Вывод: $f(x)$ не является непрерывной в точке $x = \pi$.

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны уметь по графику функции определять промежутки непрерывности функции и точки разрыва (если они имеются) при выполнении упражнений типа **17—18**; учащиеся **профильных** классов, используя строгое определение непрерывности функции, должны уметь выполнять упражнения типа **19** и **20**.

Решение упражнений

20. 1) Функция не определена в точке $x_0 = -3$, поэтому не является непрерывной в этой точке.

2) Функция определена в точке $x_0 = -2$ и в ее окрестности. Если $x \neq -2$, то $y(x) = x + 2$ и $\lim\limits_{x \to -2} y(x) = 0$. Так как $y(-2) = 3$, то $\lim\limits_{x \to -2} y(x) \neq y(-2)$, значит, функция $y(x)$ не является непрерывной в точке $x = -2$.

21. 1) Функция $f(x)$ определена в точке $x = 2$ и ее окрестности. Если $x \neq 2$, то $f(x) = 1 - x^2$ и $\lim\limits_{x \to 2}(1 - x^2) = -3$. Так как $f(2) = 3 \cdot 2 - 9 = -3$, то $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$, следовательно, $f(x)$ непрерывна в точке $x = 2$.

22. 1) Так как $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = 1$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = b$, $f(1) = 1$ и $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = f(1)$, то функция $f(x)$ будет непрерывной при $b = 1$.

§ 4. Определение производной (2/2 ч)

Цель изучения параграфа — знакомство с понятием производной функции в точке и ее физическим смыслом, формирование начальных умений находить производные элементарных функций на основе определения производной.

В начале первого урока в качестве подготовительных к изучению основного материала могут быть выполнены следующие задания:

1. Найти $f(2)$, $f(a)$, $f(a+2)$, $f(a+2)-f(a)$, если $f(x) = 5x+3$.

2. Найти $f(3)$, $f(t+h)$, $f(t+h)-f(t)$, если $f(t)=t^2+1$.

Так как мгновенная скорость определяется через понятие средней скорости, желательно вспомнить с учащимися, как находится средняя скорость движения. Сделать это можно, например, в ходе решения следующей задачи:

Расстояние от A до B равно 36 км. Первую половину пути велосипедист преодолел за 1 ч. Вторую половину пути он проехал за 2 ч. Какова средняя скорость движения велосипедиста на участке AB?

После этой задачи можно выполнить (при ведущей роли учителя) упражнение **26 (1)**. Затем для подготовки учащихся к использованию понятия разностного отношения и соответствующей ему символики можно дополнить упражнение **26 (1)** следующим заданием:

Найти среднюю скорость движения тела за промежуток времени от t до $t+h$ $(h>0)$, если оно движется по закону $s(t)=1+5t$.

Решение.

Время движения равно $(t+h)-t=h$;

$$v_{\text{ср.}} = \frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \frac{1+5(t+h)-(1+5t)}{h} = \frac{5h}{h} = 5.$$

Затем можно перейти к рассмотрению материала учебника и ввести понятие мгновенной скорости.

В **общеобразовательных** классах вместо примера с движением материальной точки по закону $s=\dfrac{gt^2}{2}$ можно рассмотреть пример с движением точки по закону $s(t)=3t^2$ таким образом, чтобы учащиеся смогли углубить представление о пределе функции.

Если $s(t)=3t^2$, то на отрезке времени $[t;\ t+h]$

$$v_{\text{ср.}} = \frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \frac{3(t+h)^2-3t^2}{h} = \frac{6th+3h^2}{h} = 6t+3h.$$

Подсчитаем средние скорости за различные промежутки времени h, начиная, например, с момента времени $t=1$, и заполним таблицу.

h	1	0,1	0,01	0,001	0,000001
$v_{\text{ср.}}$	9	6,3	6,03	6,003	6,000003

Очевидно, что при уменьшении h $(h \to 0)$ значения средней скорости приближаются к значению мгновенной скорости, т. е. $v(t) = \lim\limits_{h\to 0} v_{\text{ср.}} = \lim\limits_{h\to 0}(6t+3h) = 6t = 6\cdot 1 = 6$.

Существует много прикладных задач, для решения которых нужно находить скорость изменения некоторой функции, например, задачи о нахождении мгновенной величины тока в электрической цепи, о нахождении линейной плотности неоднородного стержня, теплоемкости тела при нагревании, угловой скорости вращающегося тела, о скорости химической реакции и др.

Учащимся **профильных** классов после введения физического смысла производной стоит показать (при наличии дополнительного времени) решение еще одной физической или химической задачи с применением аппарата математического анализа. Это будет способствовать формированию представлений учащихся об универсальности и широкой применимости математических методов. Например, можно рассмотреть задачу о теплоемкости тела.

Чтобы температура тела массой 1 г повысилась от 0° до T°, телу необходимо сообщить определенное количество тепла Q. Значит, Q есть функция температуры T, до которой тело нагревается: $Q = Q(T)$. Пусть температура тела повысилась с T_0 до T. Количество тепла, затраченное для этого нагревания, равно $Q(T) - Q(T_0)$. Отношение $\dfrac{Q(T)-Q(T_0)}{T-T_0}$ есть количество тепла, которое необходимо в среднем для нагревания тела на 1° при изменении температуры от T_0 до T. Это отношение называется *средней теплоемкостью* данного тела в температурном промежутке $[T_0; T]$ и обозначается $C_{ср}$.

Так как средняя теплоемкость не дает представления о теплоемкости для любого значения T, то вводится понятие теплоемкости при данной температуре T_0 (в данной точке T_0).

Теплоемкостью при температуре T_0 называется предел

$$\lim_{T \to T_0} C_{ср.} = \lim_{T \to T_0} \frac{Q(T)-Q(T_0)}{T-T_0} = Q'(T_0).$$

Итак, теплоемкость $C(T)$ при температуре T есть производная от количества тепла $Q(T)$.

При наличии времени (с целью подготовки учащихся к осознанию сути понятия производной в точке, а также в перспективе к восприятию графического смысла производной) понятия средней и мгновенной скорости прямолинейного движения могут быть проиллюстрированы с помощью графиков зависимости пути от времени. Так, с помощью рисунка 19, *а* можно наглядно обосновать связь средней скорости движения на отрезке и «крутизны» графика функции $s = s(t)$ на этом отрезке. Рисунок 19, *б* иллюстрирует знакомое учащимся свойство постоянства средней и мгновенной скоростей при равномерном прямолинейном движении. С помощью рисунка 19, *в* иллюстрируется поведение средней скорости точки (тангенса угла наклона секущей) за промежуток времени h (тем самым осуществляется пропедевтика геометрического смысла производной).

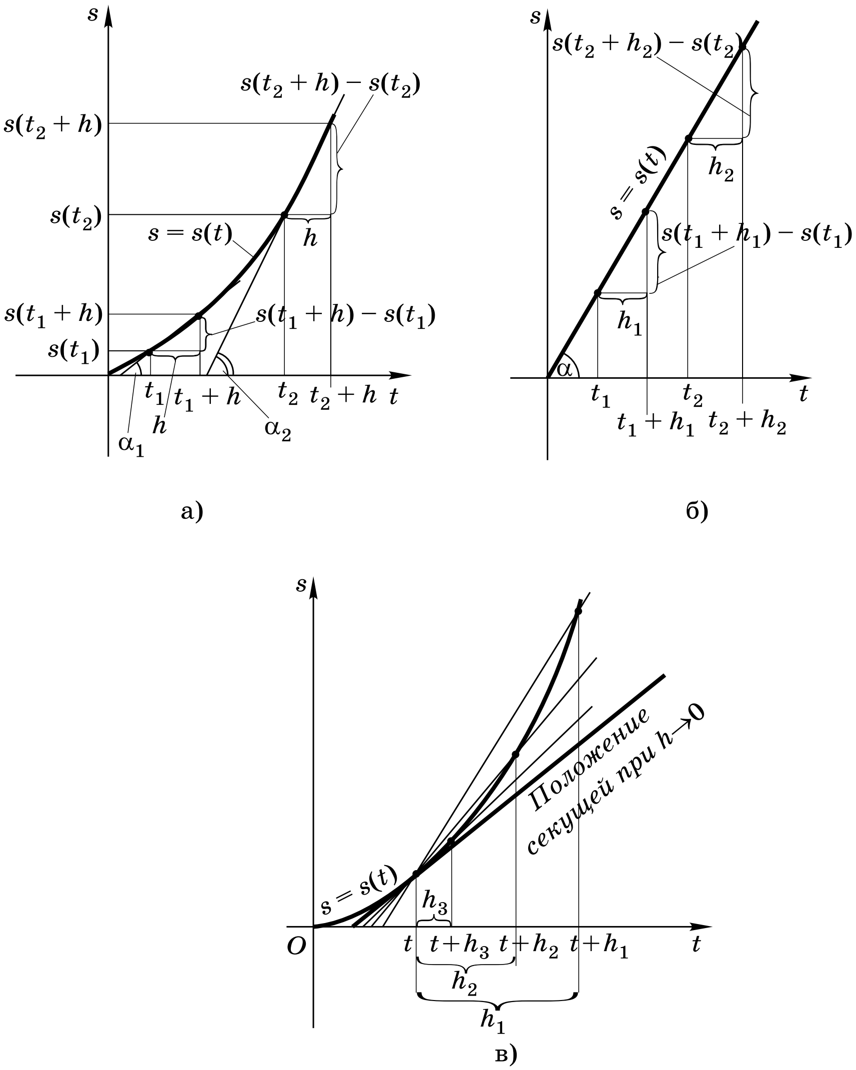


Рис. 19

После введения общего определения производной функции в точке находить предел разностного отношения при $h \to 0$ учащиеся могут в три этапа: 1) найти разность $f(x+h)-f(x)$; 2) составить разностное отношение $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ и найти его преобразованное выражение; 3) найти предел разностного отношения при $h \to 0$.

В **профильных** классах вводятся понятия функции, дифференцируемой в точке, дифференцируемой на промежутке. Рассмотренный в учебнике пример функции $y=|x|$, непрерывной, но не имеющей производной в точке $x = 0$, лучше предварительно записать с помощью ранее введенной символики:

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{|h|}{h}=\begin{cases}1, \text{ если } h>0,\\ -1, \text{ если } h<0.\end{cases}$$

Для большинства учащихся в ситуации, когда теория пределов рассматривалась лишь в ознакомительном плане, отсутствие предела функции $y = |x|$ в точке $x = 0$ становится понятным на наглядно-интуитивном уровне лишь после знакомства с геометрическим смыслом производной.

В конце урока проводится небольшая самостоятельная работа с проверкой в классе.

1. Используя определение производной, найти производную функции $f(x) = 4 - 7x$ $[f(x) = 3 - 5x]$.

2. Найти мгновенную скорость движения точки, движущейся по закону $s(t) = 2t^2 - 3$ $[s(t) = 4t^2 - 1]$.

3. (Для **профильных** классов.) Дана функция

$$f(x)=\frac{1}{6}x^3+4x \quad \left[f(x)=\frac{1}{9}x^3+2x\right].$$

Найти $f'(x)$ в точке $x = 8$ $[x = 6]$.

Распределение материала параграфа по урокам представлено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 4: 1) до определения производной; 2) определение производной, задача 1	26, 27 23, 24 (1, 2)		28
2	§ 4, задачи 2—4	24 (3, 4), 25	Проверочная самостоятельная работа	29

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 4, до задачи 2	26—28, 23, 24 (1, 2)		29
2	§ 4, задачи 2—4	24 (3, 4), 25	Проверочная самостоятельная работа	

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны знать понятие мгновенной скорости движения и определение производной функции в точке; уметь выполнять упражнения типа **24**, а учащиеся **профильных** классов уметь выполнять упражнения типа **28**.

§ 5. Правила дифференцирования (3/3 ч)

Цель изучения параграфа **всеми** учащимися — овладение правилами дифференцирования суммы, произведения и частного двух функций, вынесения постоянного множителя за знак производной; учащимися **профильных** классов — знакомство с дифференцированием сложной функции и правилом нахождения производной обратной функции.

Применение рассматриваемых в параграфе правил дифференцирования иллюстрируется на комбинациях функций $y = kx + b$, $y = x^2$, $y = x^3$ и $y = C$, производные которых были найдены в § 4. Поэтому на первом уроке необходимо повторить формулы производных этих функций.

Материал параграфа изучается в соответствии с текстом учебника, причем после рассмотрения формулы (1) выполняется в классе упражнение **30 (1, 2)**, а после формулы (2) — упражнение **30 (3, 5)**. Упражнение **33 (5—6)** желательно выполнять дважды: с использованием формулы (1), затем — (3).

При наличии времени в сильном **общеобразовательном** классе можно познакомить учащихся с производными сложной функции и обратной функции.

На втором уроке в **общеобразовательных** классах после изучения формулы (3) рассматривается материал п. 2, связанный с обоснованием формулы $(f\,(kx + b))' = kf'\,(kx + b)$. После этого выполняется упражнение **35**, где производная функции может быть найдена двумя способами.

I способ. $f\,(x) = (2x - 3)^2\,(x - 1) = (4x^2 - 12x + 9)\,(x - 1)$;
$f'\,(x) = (4x^2 - 12x + 9)'\,(x - 1) + (4x^2 - 12x + 9)\,(x - 1)' =$
$= (8x - 12)\,(x - 1) + (4x^2 - 12x + 9) \cdot 1 =$
$= 8x^2 - 8x - 12x + 12 + 4x^2 - 12x + 9 = 12x^2 - 32x + 21$.

II способ. $f'\,(x) = ((2x - 3)^2\,(x - 1))' =$
$= ((2x - 3)^2)'\,(x - 1) + (2x - 3)^2\,(x - 1)' =$
$= 2\,(2x - 3) \cdot 2\,(x - 1) + (4x^2 - 12x + 9) \cdot 1 =$
$= 8x^2 - 8x - 12x + 12 + 4x^2 - 12x + 9 = 12x^2 - 32x + 21$.

На третьем уроке изучается формула (7) и отрабатывается ее применение. В конце урока проводится самостоятельная работа (с проверкой в классе).

1. Найти производную функции:

1) $3x^2 - 7x^3$; 2) $x^3\,(x^2 - 5)$; 3) $\dfrac{3x-8}{4-9x}$; 4) $(3x^2 - 1)^3$

[1) $2x^3 - 5x^2$; 2) $(x^3 - 2)\,x^2$; 3) $\dfrac{6-7x}{5x+2}$; 4) $(2x^3 - 3)^2$].

2. (В **профильных** классах.) Записать формулой функцию $f(g(x))$, если $f(y)=\sqrt[3]{3-5y^2}$, $y=g(x)=\sin x$ $[f(y)=\cos y,$ $y=g(x)=\sqrt{8x^2-1}]$.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 5, до формулы (3)	30—32	31 (3, 5)	33 (1—4), 40 (1, 2)
2	§ 5: формула (3), задачи 3—5, формула 8	33 (5, 6) — двумя способами, 34, 35	34 (3)	39, 41
3	§ 5: формула (7), задачи 7 и 8	36, 37	Проверочная самостоятельная работа	42

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 5, до задачи 4	30—32, 34, 40	31 (3, 5)	33
2	§ 5: задачи 4, 5, формула (7), задачи 7, 8	36—37, 41	36 (3)	Доказать формулу (7)
3	§ 5: п.п. 2, 3	35, 38, 39, 44	Проверочная самостоятельная работа	42, 43

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны уметь с помощью правил дифференцирования суммы, произведения и частного функций выполнять упражнения типа **32, 34, 36**; учащиеся **профильных** классов должны уметь находить производные сложных функций в упражнениях, аналогичных **39**.

Решение упражнений

45. 2) $((x^3-2x^2+3x+2)^3)'=3(x^3-2x^2+3x+2)^2(x^3-2x^2+3x+2)'=$ $=3(x^3-2x^2+3x+2)^2(3x^2-4x+3)$.

§ 6. Производная степенной функции (2/2 ч)

Цель изучения параграфа — обучение использованию формулы производной степенной функции $f(x) = x^p$ для любого действительного числа p.

Формула (1) в общем виде при рассмотрении этого параграфа не доказывается. Учащиеся убеждаются в ее справедливости на примере уже знакомых функций $y = x$, $y = x^2$ и $y = x^3$. В **профильных** классах формула (1) доказывается для $p = -1$ и $p = \frac{1}{2}$. Учащиеся **общеобразовательных** классов в своих тетрадях записывают производные функций $\frac{1}{x}$ и $\sqrt{x}$ с помощью формулы (1), затем разбирают задачи **3** и **4** текста параграфа. Оставшееся время используется на отработку навыка нахождения производных степенных функций.

Следует пояснить смысл замечания, сделанного в учебнике сразу после формулы (1). Например, после записи $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ следует пояснить: левая часть равенства имеет смысл при $x \geqslant 0$, а правая — при $x > 0$, значит, равенство справедливо при $x > 0$.

Во многих упражнениях возможно предварительное преобразование выражений, задающих функции (например, $\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{3}{2}}$ в упражнении **47 (6)**). Учитель должен обратить внимание учащихся на то, что производные многих функций можно находить различными способами: 1) «в лоб», не преобразовывая выражение, задающее функцию; 2) выполнив предварительное преобразование выражения, упрощающее процесс дифференцирования (так, например, в упражнении **47 (6)** производную можно было находить нерационально — как производную дроби, в знаменателе которой записано произведение). Отдается предпочтение более рациональному способу нахождения производной. Перед решением задачи **4** повторяется формула (8) из § 5.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 6, формула (1) и ее применение для нахождения $\left(\frac{1}{x}\right)'$ и $(\sqrt{x})'$	46, 47, 53, 49	47 (7), 53 (3)	56, 57
2	§ 6, задачи 3 и 4	48, 52, 54, 55	48 (3), 54 (5)	50

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения: основные для работы в классе и дома	Упражнения: для самостоятельной работы в классе	Упражнения: дополнительные
1	§ 6, до задачи 4	46—49, 53, 54	47 (7), 48 (3, 7), 53 (3), 54 (5)	56, 57
2	§ 6, задачи 4—6	50, 51, 55, 58, 59, 60	55 (3), 58 (3)	52, 61, 62

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны уметь применять формулу производной степенной функции в упражнениях типа **46—47**, а учащиеся **профильных** классов — в упражнениях типа **50, 51**.

Замечание. К следующему уроку желательно заготовить плакат с формулами (1)—(10) из § 7.

Решение упражнений

58. 5) $f'(x) = 2(x+2)\cdot\sqrt{x} + (x+2)^2\dfrac{1}{2\sqrt{x}} =$

$= \dfrac{(x+2)(4x+x+2)}{2\sqrt{x}} = \dfrac{(x+2)(5x+2)}{2\sqrt{x}}$, причем $x > 0$ и $\sqrt{x} > 0$, поэтому $f'(x) > 0$ при $x > 0$.

59. $\omega(t) = \varphi'(t) = 0{,}2t - 0{,}5$, $\omega(20) = 0{,}2\cdot 20 - 0{,}5 = 3{,}5$ (рад/с).

60. $v(t) = s'(t) = -1 + 2t$.

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(-1+2t)^2}{2} = \frac{5(-1+2\cdot 10)^2}{2} = \frac{5\cdot 361}{2} = 902{,}5 \text{ (Дж)}.$$

61. $\rho(l) = m'(l) = 4l + 3$. 1) $\rho(3) = 4\cdot 3 + 3 = 15$ (г/см);
2) $\rho(25) = 4\cdot 25 + 3 = 103$ (г/см).

62. $f'(x) = \dfrac{1}{2}(x^2 - 5x + 6)^{\frac{1}{2}-1}(x^2 - 5x + 6)' = \dfrac{2x-5}{\sqrt{2x^2 - 5 + 6}}$.

§ 7. Производные элементарных функций (3/3 ч)

Цель изучения параграфа — формирование умения находить производные элементарных функций.

В начале первого урока может быть проведена самостоятельная работа (с проверкой в классе) по применению правил дифференцирования к степенным функциям.

1. Найти производную функции:

1) $0{,}1x^8 + 3$; 2) $\sqrt{x}\,(x-1)$; 3) $\dfrac{x^4}{3-x}$

$\left[1)\ \dfrac{1}{3}x^6 - 5;\quad 2)\ (x+1)\sqrt{x};\quad 3)\ \dfrac{x^5}{2-x}\right]$.

2. Найти $f'(16)$ [$f'(8)$], если $f(x) = \sqrt[4]{x} + \dfrac{1}{x}$ $\left[f(x) = \dfrac{1}{x} - \sqrt[3]{x}\right]$.

3. (В **профильных** классах.) Найти $f'(x)$, если

$f(x) = \sqrt[3]{5x-2}\cdot(5x+1)$ $[f(x) = \sqrt[4]{3x+2}\cdot(3x-1)]$.

Желательно, чтобы на протяжении последующих уроков (вплоть до контрольной работы по теме главы) перед глазами учащихся находился плакат с формулами 1—10. На плакате можно разместить приведенные ниже формулы.

$$(x^p)' = px^{p-1},\ p \in \boldsymbol{R},\ x > 0,$$
$$(\sin x)' = \cos x,$$
$$(\cos x)' = -\sin x,$$
$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z,$$
$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},\ x \neq \pi k,\ k \in Z,$$
$$(e^x)' = e^x,$$
$$(a^x)' = a^x \ln a,\ a > 0,\ a \neq 1,$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x},\ \ x > 0,$$
$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x},\ x \neq 0,$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a},\ a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0.$$

Все формулы приводятся на п е р в о м уроке; в **общеобразовательных** классах — без доказательств, в **профильных** — с обоснованиями. Все остальное время учащиеся обучаются применению этих формул.

Если при изучении § 5 учащиеся **профильных** классов рассматривали п. 3, то необходимо найти время для решения задачи **4** текста параграфа.

В конце последнего урока можно провести проверочную с а м о с т о я т е л ь н у ю работу.

1. Найти производную функции:

1) $\log_4 x + \sqrt{x}$; 2) $\ln x\cdot\cos\left(\dfrac{x}{2}+3\right)$; 3) $\dfrac{\sin x}{e^{2x}}$

$\left[1)\ \dfrac{1}{x^3} + \log_5 x;\quad 2)\ 5^x\cdot\sin 3x;\quad 3)\ \dfrac{\ln(3x+1)}{\cos x}\right]$.

2. (В **профильных** классах.) Выяснить, при каких значениях x значение производной функции $f(x)$ положительно, если $f(x) = e^{2x}\sqrt{x}$ $[f(x) = x\ln 6 - 6^x]$.

Приведем решение задания 2.

$f'(x)=2e^{2x}\sqrt{x}+e^{2x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=e^{2x}\cdot\frac{4x+1}{2\sqrt{x}}.$

Так как $e^{2x}>0$ при любом x, то $f'(x)>0$, если $\begin{cases}x>0,\\4x+1>0,\end{cases}$ т. е. при $x>0$.

[$f'(x)=\ln 6-6^x\ln 6=(1-6^x)\ln 6$. Так как $\ln 6>0$, то $f'(x)>0$, если $1-6^x>0$, т. е. $x<0$.]

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения: основные для работы в классе и дома	Упражнения: для самостоятельной работы в классе	Упражнения: дополнительные
1	§ 7, формулы (1)—(10), задачи 1, 2 (1)	63—66	66 (3)	80 (1, 2)
2		67—70, 72 (3—8)	67 (5), 68 (5), 70 (5)	75, 76 (1—4)
3	§ 7, задача 2 (3)	79 (3, 4), 73 (1—6), 77 (1—4)	Проверочная самостоятельная работа	81, 76 (5—8)

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения: основные для работы в классе и дома	Упражнения: для самостоятельной работы в классе	Упражнения: дополнительные
1	§ 7, формулы (1)—(10); обоснование формул (1)—(7); задачи 1, 2 (1, 2)	63—66	66 (3)	80 (1, 2), 67, 68
2	§ 7, обоснование формул (8)—(10); задача 2 (3—6)	69—75, 77 (1—4)	69 (5), 70 (5), 71 (5), 72 (5)	76, 84, 86
3	§ 7, задача 3	78, 79, 82, 85	Проверочная самостоятельная работа	81, 83, 87, 88

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны уметь применять формулы 1—5, 10 к нахождению производных функций, представленных в упражнениях типа **65, 68**, а учащиеся **профильных** классов уметь применять формулы 1—10 в упражнениях типа **70—72, 75**.

Решение упражнений

84. 1) $f'(x) = 5(\cos x + \sin x) - 5\sqrt{2}\sin 5x = 0$, если

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin 5x. \qquad (1)$$

Так как

$$\cos x + \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin x = 2\sin\frac{\frac{\pi}{2} - x + x}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{2} - x - x}{2} =$$

$$= 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right),$$

то равенство (1) выполняется, если $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sin 5x$. Откуда:

а) $\frac{\pi}{4} + x = 5x + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{4} + x = \pi - 5x + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2) $f'(x) = 2\sin 2x + \cos x + \sin x - 1 = \underline{4\sin x\cos x} + \cos x + \sin x + \underline{2\sin^2 x + 2\cos^2 x} - 3 = 2(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x + \cos x) - 3$. Пусть $\sin x + \cos x = t$, тогда $f'(x) = 0$, если $2t^2 + t - 3 = 0$, откуда $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{3}{2}$. а) $\sin x + \cos x = 1$, откуда $x = 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; б) $\sin x + \cos x = -\frac{3}{2}$, корней нет, так как $|\sin x + \cos x| \leqslant \sqrt{2}$, а $\left|-\frac{3}{2}\right| > \sqrt{2}$.

Ответ. $x = 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

85. 1) $e^{2x}\ln(2x - 1) = 0$, когда $\ln(2x - 1) = 0$, т. е. при $x = 1$. $f'(x) = 2e^{2x}\ln(2x - 1) + 2e^{2x}\frac{1}{2x-1} = 2e^{2x}\left(\ln(2x-1) + \frac{1}{2x-1}\right)$; $f'(1) = 2e^2(0 + 1) = 2e^2$.

87. 1) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ при $x > 0$;

$f'(x) = 0$, если $x - 1 = 0$, $x = 1$;

$f'(x) = \frac{x-1}{x} > 0$ при $x > 0$, когда $x > 1$;

$f'(x) = \frac{x-1}{x} < 0$ при $x > 0$, когда $0 < x < 1$.

88. $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}(x^2 - 5x + 6)' = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 6}$ при $x < 2$ и при $x > 3$.

§ 8. Геометрический смысл производной (3/3 ч)

Ц е л ь и з у ч е н и я п а р а г р а ф а — знакомство с геометрическим смыслом производной, обучение составлению уравнения касательной к графику функции в заданной точке.

На всех уроках при изучении этой темы следует закреплять навыки нахождения производных элементарных функций, для чего могут быть использованы ранее решенные упражнения из § 7, а также **104—110** (часть из них нужно зарезервировать для урока обобщения и систематизации знаний).

На первом уроке (до изучения материала параграфа) желательно выполнить следующее задание:

Построить график функции: 1) $y = \frac{1}{2}x - 1$; 2) $y = -2x + 1$. Найти тангенс угла, образованного построенной прямой с осью Ox. Является ли эта функция возрастающей; убывающей?

Объяснение нового материала следует вести в соответствии с текстом учебника, причем рисунки, аналогичные рисункам 48 и 49 учебника, должны быть выполнены учителем на доске, а рисунок 49 должен быть перенесен учащимися в тетради.

Желательно и в **общеобразовательных**, и в **профильных** классах на первом уроке рассмотреть теоретический материал пп. 1 и 2. От учащихся **общеобразовательных** классов в дальнейшем не следует требовать воспроизведения рассуждений, предшествующих формуле (5). После записи формулы (1) в классе выполняются одно-два задания из упражнения **89**, а после рассмотрения задачи **1** выполняется упражнение **90** (1, 3). После введения геометрического смысла производной учащимся предлагается упражнение **91**.

После усвоения учащимися геометрического смысла производной учитель может провести беседу о функциях, не имеющих производной в некоторых точках своей области определения. Так, например, можно сообщить учащимся (не изучавшим строгого определения предела функции), что функция $y = |x|$ не имеет в точке $x = 0$ производной, и этот факт иллюстрируется отсутствием касательной к графику функции в этой точке (можно рассмотреть рисунок 104 учебника и наглядно обосновать отсутствие производной функции $y = |\log^2 x|$ в точке $x = 1$).

Уравнение касательной в общем виде выводится после рассмотрения задачи **3** текста параграфа. Желательно (особенно слабым учащимся) при составлении уравнения касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 придерживаться следующего алгоритма:

1) вычислить $f(x_0)$; 2) найти $f'(x)$; 3) вычислить $f'(x_0)$; 4) записать в общем виде уравнение касательной $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ и в него подставить заданное значение x_0 и вычисленные значения $f(x_0)$ и $f'(x_0)$, затем полученное уравнение преобразовать к виду $y = kx + b$.

На третьем уроке может быть проведена следующая проверочная самостоятельная работа:

Записать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, если:

1) $f(x) = 2x^3 - x$, $x_0 = -2$; 2) $f(x) = \ln(3x - 2)$, $x_0 = 1$;

[1) $f(x) = 3x^2 - x^3$, $x_0 = 2$; 2) $f(x) = \ln(-2x + 3)$, $x_0 = 1$].

В **профильных** классах дополнительным к этой самостоятельной работе может быть упражнение 99 (1) [99 (2)].

При наличии дополнительного времени учащиеся **профильных** классов, **интересующиеся математикой**, могут познакомиться с понятием дифференциала функции (п. 4).

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 8, пп. 1, 2 до задачи 1	89 (1, 2), 90 (1, 2), 91	91 (5)	
2	§ 8, задачи 1, 2; п. 3, до задачи 5	92, 93	92 (3)	89 (3—6), 90 (3—4)
3		94, 95	Проверочная самостоятельная работа	99 (1, 2)

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 8, пп. 1, 2 до задачи 1	89, 90, 91	91 (5)	
2	§ 8, задачи 1, 2; п. 3, до задачи 5	92—95	92 (3), 94 (5), 95 (3)	96
3	§ 8, от задачи 5 до п. 4	97, 98, 99 (3—6), 100	97 (3), проверочная самостоятельная работа	101

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны знать геометрический смысл производной и уметь записывать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 в упражнениях, аналогичных **94**; учащиеся **профильных** классов — аналогичных **95**.

Решение упражнений

97. **1)** Найдем абсциссу точки пересечения графиков функций: $8 - x = 4\sqrt{x+4}$, откуда $\begin{cases} 8 - x \geqslant 0, \\ 64 - 16x + x^2 = 16x + 64; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant 8, \\ x^2 - 32x = 0, \end{cases}$ откуда $x = 0$. $(8 - x)' = -1$, $\operatorname{tg} \alpha_1 = -1$, откуда $\alpha_1 = -\dfrac{\pi}{4}$;

$(4\sqrt{x+4})' = \dfrac{2}{\sqrt{x+4}}$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = \dfrac{2}{\sqrt{0+4}} = 1$, откуда $\alpha_2 = \dfrac{\pi}{4}$. Угол между касательными равен $\alpha_2 + |\alpha_1| = \dfrac{\pi}{2}$.

2) $\dfrac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) = \dfrac{1}{2}(x^2 - 2x + 1)$, откуда $x = 0$.

$\left(\dfrac{1}{2}(x^2 + 2x + 1)\right)' = \dfrac{1}{2}(2x + 2) = x + 1$, $\operatorname{tg}\alpha_1 = 0 + 1 = 1$, откуда $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{4}$.

$\left(\dfrac{1}{2}(x^2 - 2x + 1)\right)' = \dfrac{1}{2}(2x - 2) = x - 1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = 0 - 1 = -1$, откуда $\alpha_2 = -\dfrac{\pi}{4}$.

Угол между прямыми равен $\dfrac{\pi}{2}$.

98. 1) Найдем абсциссу общей точки графиков функций: $x^4 = x^6 + 2x^2$, $x^2(x^4 - x^2 + 2) = 0$. Так как $x^4 - x^2 + 2 > 0$ при любом x, то единственным корнем уравнения $x^2(x^4 - x + 2) = 0$ является $x = 0$. Уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^4$ в точке $x = 0$, очевидно, $y = 0$. Составим уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^6 + 2x^2$ в точке $x = 0$: $f(0) = 0$, $f'(x) = 6x^5 + 4x$, $f'(0) = 0$, откуда $y = 0$. Уравнения касательных обеих функций в точке $x = 0$ одинаковы, значит, в этой точке графики функций имеют общую касательную.

99. 1) $f'(x) = 2x - 3$. Из уравнения $2x - 3 = 1$ находим абсциссу точки графика ($x = 2$), в которой касательная параллельна прямой $y = x$. $f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 4 = 2$. Ответ. (2; 2).

4) $f'(x) = e^x - e^{-x}$. Из уравнения $e^x - e^{-x} = \dfrac{3}{2}$ найдем абсциссы точек графика, в которых касательные параллельны прямой $y = \dfrac{3}{2}x$:

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^x} = \frac{3}{2},\quad 2e^{2x} - 2 = 3e^x,\quad 2e^{2x} - 3e^x - 2 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно e^x, получим $e^{x_1} = 2$, $e^{x_2} = -\dfrac{1}{2}$. Так как $e^x > 0$ при любом x, то $e^x = 2$, откуда $x = \ln 2$.

Ответ. $\left(\ln 2;\ 2\dfrac{1}{2}\right)$.

100. $y' = \dfrac{1\cdot(x-2) - (x+2)\cdot 1}{(x-2)^2} = -\dfrac{4}{(x-2)^2}$. Абсциссы точек графика, в которых касательная образует с осью Ox угол, равный $-\dfrac{\pi}{4}$, найдем из уравнения $-\dfrac{4}{(x-2)^2} = \operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $-\dfrac{4}{(x-2)^2} = -1$, откуда $(x-2)^2 = 4$, $x - 2 = \pm 2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Ответ. (0; –1), (4; 3).

101. $k_1 = f'(x) = 3x^2 - 1$, $k_2 = g'(x) = 6x - 4$. Касательные параллельны, если $k_1 = k_2$, т. е. когда $3x^2 - 1 = 6x - 4$, откуда $x^2 - 2x + 1 = 0$, $x = 1$, т. е. $y = 2x - 3$ — уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(1; -1)$, $y = 2x - 2$ — уравнение касательной к графику функции $y = g(x)$ в точке $(1; 0)$.

Уроки обобщения и систематизации знаний (2/2 ч)

Повторение теоретического материала главы желательно проводить при непосредственном применении его в практических ситуациях. Так, например, повторение физического и геометрического смысла производной можно провести совместно, используя график движения точки на прямолинейном участке пути (рис. 20). По этому графику можно задавать вопросы, связанные с определением средней скорости на различных участках пути, а также предлагать задания на сравнение мгновенных скоростей в различные моменты времени. Знание определения производной учащиеся должны продемонстрировать в процессе нахождения «по определению» производной какой-либо конкретной функции (например, функции $f(x) = x^2 - 3x$). На этих уроках используются вопросы к главе II.

На *первом* уроке формулы производных элементарных функций и правил дифференцирования, написанные на плакате, могут быть вывешены для обозрения. На *втором* уроке плакат следует убрать и потребовать от учащихся уверенного применения всех изученных формул.

На уроках обобщающего повторения решаются ранее не выполненные задания из раздела «Упражнения к главе II». Обязательный уровень усвоения материала в **общеобразовательных** и **профильных** классах можно проверить с помощью блоков заданий «Проверь себя!».

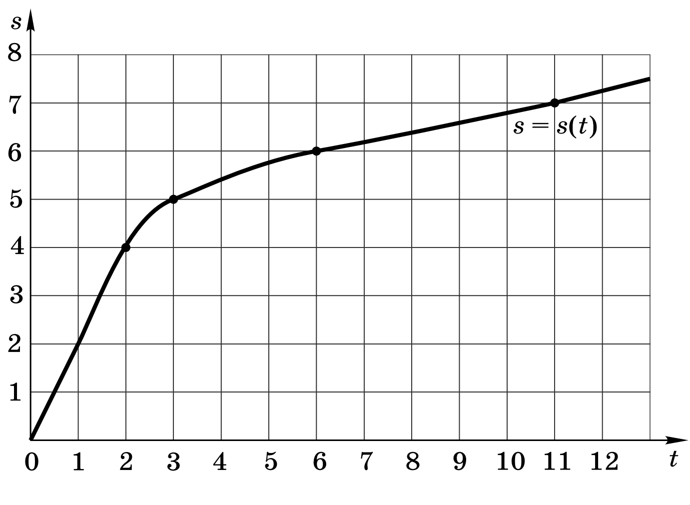


Рис. 20

Решение упражнений

122. $f'(x) = 3x^2 + 6x + a$. $f'(x) \geqslant 0$ для всех действительных значений x, если $D = 36 - 12a \leqslant 0$ (старший коэффициент квадратного трехчлена $3 > 0$), т. е. при $a \geqslant 3$.

123. $f'(x) = 3ax^2 - 12x - 1 < 0$ при любом x, если $\begin{cases} 3a < 0, \\ 144 + 12a < 0, \end{cases}$ откуда $a < -12$.

124. 1) $f'(x) = 2ax + \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{2(ax^4+1)}{x^3}$. Уравнение $\dfrac{2(ax^4+1)}{x^3} = 0$ не имеет действительных корней при $a \geqslant 0$.

126. 1) Найдем абсциссу точки пересечения графиков: $2\sqrt{x} = 2\sqrt{6-x}$, $x = 6 - x$, $x = 3$. Далее $y_1' = (2\sqrt{x})' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $y_2' = (2\sqrt{6-x})' = -\dfrac{1}{\sqrt{6-x}}$, $y_1'(3) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $y_2'(3) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Касательная к графику первой функции в точке $x = 3$ имеет угол наклона с осью Ox, равный $\dfrac{\pi}{6}$, касательная к графику второй функции — угол, равный $-\dfrac{\pi}{6}$. Между прямыми, а значит, и между графиками функции в точке $x = 3$ угол равен $\dfrac{\pi}{3}$.

127. 1) $y\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 2\sin\dfrac{3\pi}{4} = \sqrt{2}$, $y' = \cos\dfrac{x}{2}$, $y'\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = \cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Уравнение касательной $y = \sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right)$ или $y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2} + \dfrac{3\pi}{2}$.

128. 1) $f'(x) = 2x - 4$. Касательная параллельна оси Ox в той точке, где $f'(x) = 0$, т. е. если $2x - 4 = 0$, $x = 2$. $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4$. Уравнение касательной $y = -4$.

129. $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2$, $y = 6x$; $y' = x^2 - 5x$. Так как угловой коэффициент прямой равен 6, то $y' = x^2 - 5x = 6$, т. е. $x^2 - 5x - 6 = 0$, откуда $x_1 = 6$, $x_2 = -1$. Надо написать уравнения касательных в точках $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, где $y_1 = y(6) = \dfrac{1}{3}\cdot 6^3 - \dfrac{5}{2}\cdot 6^2 = 6^2\left(2 - \dfrac{5}{2}\right) = -18$, $y_2 = y(-1) = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{5}{2} = -\dfrac{17}{6}$. Уравнения касательных $y - y_k = 6(x - x_k)$, где $k = 1;\ 2$, т. е. $y + 18 = 6(x - 6)$, $y + \dfrac{17}{6} = 6(x + 1)$, или $y = 6x - 54$ и $y = 6x + \dfrac{19}{6}$.

130. $y' = -\frac{4}{x^2}$, $y'(1) = -4$. Уравнение касательной к гиперболе в точке (1; 4) имеет вид $y - 4 = -4(x - 1)$, или $y = -4x + 8$. Прямая $y = -4x + 8$ пересекает координатные оси в точках (0; 8) и (2; 0), а искомая площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 = 8$ (кв. ед.).

131. $y'(x) = -\frac{k}{x^2}$, $y'(x_0) = -\frac{k}{x_0^2}$. Уравнение касательной $y - \frac{k}{x_0} = -\frac{k}{x_0^2}(x - x_0)$, или $y = -\frac{kx}{x_0^2} + \frac{2k}{x_0}$. Если $x = 0$, то $y = \frac{2k}{x_0}$, а если $y = 0$, то $x = 2x_0$. Следовательно, касательная пересекает координатные оси в точках $\left(0; \frac{2k}{x_0}\right)$ и $(2x_0; 0)$, а искомая площадь равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{2k}{|x_0|} \cdot 2|x_0| = 2k$.

Контрольная работа № 2

Базовый уровень

1. Найти производную функции:

1) $3x^2 - \frac{1}{x^3}$; 2) $\left(\frac{x}{3} + 7\right)^6$; 3) $e^x \cos x$; 4) $\frac{\ln x}{1 - x}$

$\left[1)\ 2x^3 - \frac{1}{x^2};\ 2)\ (4 - 3x)^7;\ 3)\ e^x \sin x;\ 4)\ \frac{2 - x}{\ln x}\right]$.

2. Найти значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0, если $f(x) = 1 - 6\sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$ $\left[f(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}},\ x_0 = \frac{1}{4}\right]$.

3. Записать уравнение касательной к графику функции $f(x) = \sin x - 3x + 2$ $[f(x) = 4x - \cos x + 1]$ в точке $x_0 = 0$.

---

4. Найти значения x, при которых значения производной функции $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 3}$ $\left[f(x) = \frac{1 - x}{x^2 + 8}\right]$ положительны [отрицательны].

5. Найти точки графика функции $f(x) = x^3 - 3x^2$ $[f(x) = x^3 + 3x^2]$, в которых касательная к нему параллельна оси абсцисс.

Профильный уровень

1. Найти производную функции:

1) $\frac{2}{x^5} - 3\sqrt[4]{x^3}$; 2) $\left(\frac{x}{3} + 5\right)^9$; 3) $e^x \cos x$; 4) $\frac{\ln x}{1 - x}$

$\left[1)\ 2\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x^6};\ 2)\ \left(13 + \frac{x}{5}\right)^{10};\ 3)\ e^x \sin x;\ 4)\ \frac{2 - x}{\ln x}\right]$.

2. Найти значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0, если $f(x) = \log_2(x^2 + 3)$, $x_0 = 1$ $\quad [f(x) = 3^{x^3 - 1}, \ x_0 = 1]$.

3. Записать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, если
$$f(x) = \sin x - 3x + 2, \ x_0 = \pi \quad \left[f(x) = 4x - \cos x + 1, \ x_0 = \frac{\pi}{2}\right].$$

---

4. Найти значения x, при которых значения производной функции $f(x) = e^x x^{-2}$ положительны $[f(x) = x^2 e^{-x}$ отрицательны$]$.

5. Найти точки графика функции $y = f(x)$, в которых касательная к нему имеет заданный угловой коэффициент k, если
$$f(x) = \sqrt{5x+1}, \ k = \frac{5}{8} \quad \left[f(x) = \sqrt{3x+1}, \ k = \frac{3}{8}\right].$$

6. Найти все значения a, при которых неравенство $f'(x) > 0$ $[f'(x) < 0]$ не имеет действительных решений, если
$$f(x) = \frac{a}{3}x^3 + 2x^2 - x + 5 \quad \left[f(x) = \frac{a-4}{3}x^3 + x^2 - x - 4\right].$$

Глава III Применение производной к исследованию функции

Основной целью изучения главы является демонстрация возможностей производной в исследовании свойств функций и построении их графиков.

При изучении этой главы широко используются знания, полученные учащимися при изучении главы II. Так, например, постоянно имеется в виду тот факт, что если производная функции существует в каждой точке некоторого промежутка, т. е. функция дифференцируема на нем, то она непрерывна на этом промежутке (обратное утверждение неверно, простейший пример тому $y = |x|$ — непрерывная функция, не имеющая производной в точке $x = 0$).

В главе III обосновываются следующие утверждения:

— если $f'(x) > 0$ на некотором промежутке, то функция $f(x)$ на этом промежутке возрастает; если $f'(x) < 0$ — убывает;

— если функция дифференцируема в окрестности некоторой точки и имеет в этой точке производную, равную нулю, то данная точка является или *точкой максимума*, или *точкой минимума*, или *точкой перегиба*.

Точки, в которых $f'(x) = 0$ или в которых функция недифференцируема, называют *критическими*; точки, в которых $f'(x) = 0$, называют *стационарными*.

После введения понятий максимума и минимума функции формируется представление о том, что функция может иметь *экстремум* в точке, в которой она не имеет производной, например $y = |x|$ в точке $x = 0$.

В учебнике определение вида экстремума связано с переменой знака производной функции при переходе через точку экстремума. Желательно показать учащимся не только профильных классов, что это можно сделать проще — по знаку второй производной: если $f''(x) > 0$ в некоторой стационарной точке x, то рассматриваемая стационарная точка есть точка минимума; если $f''(x) < 0$, то эта точка — точка максимума; если $f''(x) = 0$, то стационарная точка x есть точка перегиба.

Кроме критических точек, важное значение при построении графиков имеют *точки разрыва* функции, например точка $x = 0$ для функции $y = \frac{1}{x}$; *нули функции*, т. е. те точки, в которых $f(x) = 0$.

Если область определения функции состоит из нескольких промежутков, то полезно рассматривать поведение функции в граничных точках этих промежутков.

В § 5 приводится схема исследования основных свойств функции, предваряющая построение графика. В **общеобразовательных** классах эта схема выглядит так: 1) область определения функции; 2) точки пересечения графика с осями координат; 3) производная функции и стационарные точки; 4) промежутки монотонности; 5) точки экстремума и значения функции в этих точках.

В **профильных** классах (после изучения второй производной) схема исследования функции более детальна: 1) область определения функции; четность (нечетность); периодичность; 2) нули функции; промежутки знакопостоянства; 3) асимптоты графика функции; 4) первая производная; критические точки; промежутки монотонности; экстремумы; 5) вторая производная; промежутки выпуклости, направления выпуклостей и точки перегиба.

В результате изучения главы **все** учащиеся должны знать, какие свойства функции выявляются с помощью производной; уметь строить графики функций в упражнениях типа **57**, **58**, решать задачи нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции типа **59, 60.** Учащиеся **профильных** классов должны уметь решать упражнения типа **67**, **68**, **71**.

§ 1. Возрастание и убывание функции (2/2 ч)

Цель изучения параграфа — обучение применению достаточных условий возрастания и убывания к нахождению промежутков монотонности функции.

В **общеобразовательных** классах достаточное условие возрастания (убывания) функции (теорема 2) вводится без доказательства. Однако после повторения определений возрастающей и убывающей на некоторых промежутках функции учащиеся по виду графика функции должны научиться выявлять промежутки ее возрастания и убывания. Так, например, по графику функции $y = f(x)$, представленному на рисунке 21, учащиеся должны определить, что функция возрастает на промежутках $x < 0$ и $x \geqslant 2$, убывает на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$.

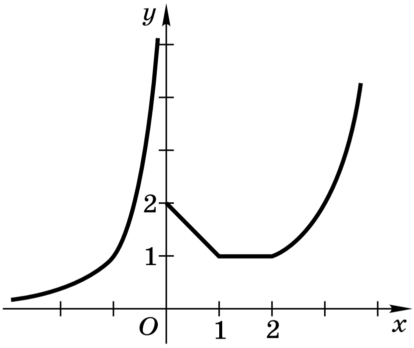


Рис. 21

Учащимся **профильных** классов при наличии времени можно предложить доказательство факта возрастания функции $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ на интервале $x > 1$, используя определение возрастающей функции (впоследствии этот факт можно доказать с привлечением понятия производной и учащиеся смогут оценить достоинства аппарата математического анализа при исследовании функции).

Пусть $x_2 > x_1 > 1$, тогда $f(x_2) - f(x_1) = x_2 + \dfrac{1}{x_2} - \left(x_1 + \dfrac{1}{x_1}\right) =$

$= (x_2 - x_1) - \left(\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2}\right) = (x_2 - x_1) - \dfrac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} =$

$= (x_2 - x_1)\left(1 - \dfrac{1}{x_1 x_2}\right) > 0$, так как $x_2 - x_1 > 0$ (по предположению $x_2 > x_1$), а $x_1 x_2 > 1$ (по условию $x_1 > 1$ и $x_2 > 1$), откуда $0 < \dfrac{1}{x_1 x_2} < 1$, и значит, $1 - \dfrac{1}{x_1 x_2} > 0$.

Пояснение смысла теоремы Лагранжа можно сопровождать рассуждениями о движении «сверху вниз» прямой m (рис. 22), параллельной секущей AB и не имеющей общих точек с частью графика дифференцируемой на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$.

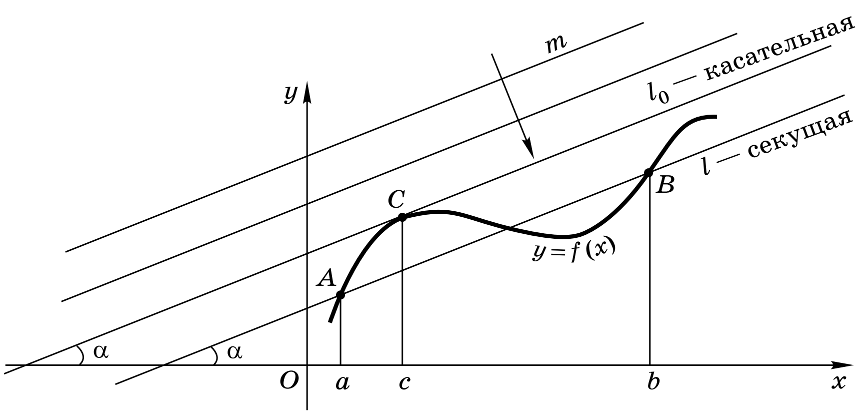


Рис. 22

При перемещении такой прямой m в направлении к секущей AB фиксируется первая общая с рассматриваемой частью графика функции точка (на рисунке это точка C) и положение прямой l_0, проходящей через эту точку. Из рисунка видно, что точка C (с абсциссой c) — точка касания прямой l_0 с графиком функции $y = f(x)$. Если α — угол, который образует секущая AB с осью Ox, и соответственно угол между касательной l_0 и осью Ox, то согласно геометрическому смыслу производной $f'(c) = \operatorname{tg} \alpha = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Таким образом, если функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, то на этом интервале существует точка c, такая, что $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, откуда $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Предполагается, что учащимся **общеобразовательных** классов понятие достаточности условия должно быть понятно на интуитивно-бытовом уровне (например, для покупки карандаша стоимостью три рубля пяти рублей достаточно, а двух рублей недостаточно). Учащиеся должны, к примеру, понимать, что для утверждения того факта, что на интервале $(a; b)$ дифференцируемая на этом интервале функция $f(x)$ возрастает, достаточно (вполне достаточно) показать, что $f'(x) > 0$ на $(a; b)$.

Таким образом, учащиеся **общеобразовательных** классов должны осознавать, что условия, без выполнения которых утверждение A заведомо не может быть верным, называют *необходимыми* условиями, а условия, при выполнении которых утверждение A заведомо верно, называют *достаточными* условиями.

Теоретический материал параграфа и задачу **1** желательно разобрать на одном уроке, а оставшееся время посвятить практическому использованию теоремы **2** и аналогичной ей для случая убывания функции.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 1, определение возрастающей и убывающей функций; теорема 2, задача 1	1, 2, 5	2 (1)	
2		3, 4		6

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 1, до задачи 2	1, 2, 5	2 (3)	
2	§ 1, задачи 2—4	3, 4, 6, 7	4 (3)	Задача 5 текста параграфа, 8

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны уметь находить по графику и с помощью производной промежутки возрастания и убывания функции в упражнениях типа **2**; учащиеся **профильных** классов — в упражнениях типа **3—5**.

Решение упражнений

6. 1) $y = x^3 - ax$, $y' = 3x^2 - a$. Если $a < 0$, то $y' > 0$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$, и поэтому функция возрастает на $\boldsymbol{R}$. Если $a = 0$, то функция $y = x^3$ возрастает на $\boldsymbol{R}$ (хотя $f'(0) = 0$). Пусть $a > 0$, тогда y' меняет знак при переходе через точки $x = \pm\frac{\sqrt{3a}}{3}$, и поэтому функция не является возрастающей на всей числовой прямой. Ответ. При $a \leqslant 0$.

2) $y = ax - \sin x$, $y' = a - \cos x$. Если $a > 1$, то $y' > 0$ на $\boldsymbol{R}$, и поэтому функция возрастает на $\boldsymbol{R}$. Если $a < 1$, то y' меняет знак, и поэтому функция не является возрастающей на всей числовой прямой. При $a = 1$ функция также является возрастающей на $\boldsymbol{R}$. Чтобы доказать это, нужно воспользоваться неравенством $|\sin x_2 - \sin x_1| < |x_2 - x_1| = x_2 - x_1$, при $x_2 > x_1$. Ответ. При $a \geqslant 1$.

7. $y' = \frac{-2x+1}{2\sqrt{6+x-x^2}}$; $y' > 0$, если $\begin{cases} 6 + x - x^2 > 0, \\ -2x + 1 > 0, \end{cases}$ т. е. при $x \in \left[-2;\ \frac{1}{2}\right]$; $y' < 0$, если $\begin{cases} 6 + x - x^2 > 0, \\ -2x + 1 < 0, \end{cases}$ т. е. при $x \in \left[\frac{1}{2};\ 3\right]$.

8. 1) Пусть $\varphi(x) = \ln(1 + x) - x$. Эта функция дифференцируема при всех $x > 0$, причем $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 < 0$ при $x > 0$. Функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x = 0$, поэтому функция $\varphi(x)$ убывает при $x \geqslant 0$. Так как $\varphi(0) = 0$, то при $x > 0$ справедливо неравенство $\varphi(x) < \varphi(0)$, т. е. $\ln(1 + x) - x < 0$, откуда $\ln(1 + x) < x$.

§ 2. Экстремумы функции (2/2 ч)

Цель изучения параграфа — знакомство с понятиями точек экстремума функции, стационарных и критических точек, с необходимыми и достаточными условиями экстремума функции; обучение нахождению точек экстремума функции.

Понятия максимума и минимума функции вводятся с опорой на рисунок 59 учебника. Заметим, что для облегчения усвоения учащимися курса анализа в учебнике под точкой максимума (минимума) понимается точка *собственного* максимума (минимума), тогда как в строгом курсе анализа, для того чтобы точка x_0 была точкой максимума (минимума), требуется выполнение условия $f(x) \leqslant f(x_0)$ $(f(x) \geqslant f(x_0))$ для всех x из некоторой окрестности точки x_0.

Дается обобщенное название точек максимума и минимума («точки экстремума»), после чего по рисунку 23 (заранее выполненному учителем на доске) находятся точки максимума и минимума функции, а также выполняются следующие задания:

1. Для каждой найденной точки максимума (минимума) x_i указать какую-нибудь окрестность точки x_i, в которой выполняется неравенство $f(x) < f(x_i)$ $(f(x) > f(x_i))$.

2. Объяснить, почему, например, точки $x = 1$, $x = 1{,}5$ не являются точками экстремума функции $f(x)$.

3. Как расположены касательные к графику функции $y = f(x)$ в точках экстремума?

4. Найти $f'(-5)$, $f'(-2)$, $f'(0)$ (при нахождении $f'(0) = 0$ обращается внимание на то, что $x = 0$ не является точкой экстремума).

5. Есть ли на отрезке $[2; 6]$ значения x, для которых $f'(x) = 0$?

6. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$.

Теорема Ферма (необходимое условие экстремума) иллюстрируется с помощью рисунков 60, 61 и 62 учебника, после чего делается вывод о том, что точки максимума и минимума следует искать среди тех точек, в которых производная равна 0; однако

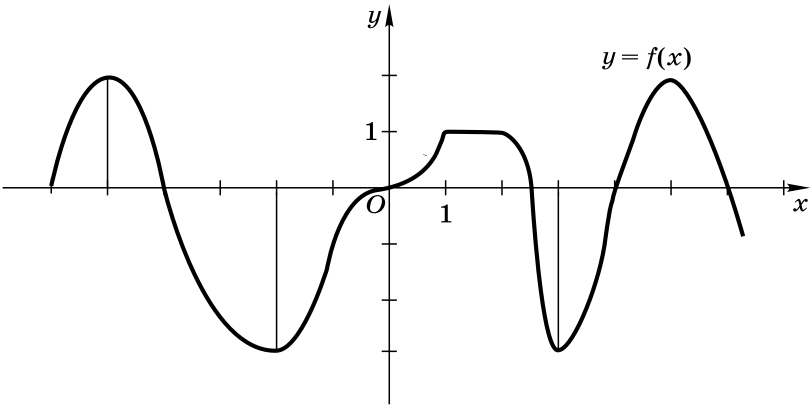


Рис. 23

не всегда точка, в которой производная обращается в нуль, является точкой экстремума (точка $x = 0$ на рисунке 63 не является точкой экстремума, хотя в ней производная функции обращается в нуль).

После введения понятий стационарных и критических точек выполняются упражнения **9**, **10** и рассматривается (без доказательства в общеобразовательных классах) достаточное условие экстремума.

После рассмотрения задач **2** и **3** учащиеся должны понять, что точки экстремума выявляются с помощью знакомой им задачи нахождения интервалов возрастания и убывания функции.

В начале уроков изучения этой темы закрепляются навыки нахождения производных, повторяется решение различных уравнений и квадратных неравенств. Возможно повторение метода интервалов, которому при изучении следующего параграфа уделяется значительное внимание. Задания на актуализацию знаний могут быть выбраны из следующих:

1. Найти производную функции:

1) $3x^4 - 2x + 5$; 2) e^{-2x+1}; 3) $x^2 \cdot \sin x$.

2. Найти значения x, при которых $f(x) = 0$, если:

1) $f(x) = 5x^2 + 3x$; 2) $f(x) = 2x^3 - 4x^2$; 3) $f(x) = xe^x$;

4) $f(x) = \sqrt{3 - x}$.

3. Решить неравенство:

1) $15x + 1 > 0$; 2) $x(3 - x) > 0$; 3) $x^2 - 5x + 6 > 0$;

4) $x - 5x + 6 < 0$; 5) $\dfrac{x-1}{x} < 0$; 6) $(x + 2)e^x > 0$.

В конце второго урока изучения § 2 или в начале следующего урока (перед изучением материала § 3) можно провести проверочную самостоятельную работу.

1. Найти стационарные точки функции $y = \sin\dfrac{x}{2}$ $[y = \operatorname{tg} 2x]$.

2. Найти точки экстремума функции $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{x}{3}$ $\left[y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{2}\right]$.

3. (В **профильных** классах.) Найти точки экстремума и значения функции $f(x)$ в точках экстремума, если $f(x) = e^{2x} - 2e^x$ $[f(x) = 3e^{2x} - 2e^{3x}]$.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения: основные для работы в классе и дома	Упражнения: для самостоятельной работы в классе	Упражнения: дополнительные
1	§ 2, п. 1	9, 10	9 (5)	
2	§ 2, теорема 2, задача 2	11	Проверочная самостоятельная работа	12

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 2, п. 1, п. 2 до задачи 3	9—11	9 (5), 11 (3)	При каких a функция $y = ax^3 + 3x^2 - 2x + 5$ убывает на всей числовой прямой?
2	§ 2, п. 2, задачи 3, 4	12—14	Проверочная самостоятельная работа	

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны знать определения точек максимума и минимума, стационарных и критических точек; уметь применять необходимые и достаточные условия экстремума для нахождения точек экстремума функции при решении заданий типа 11.

§ 3. Наибольшее и наименьшее значения функции (3/3 ч)

Цель изучения параграфа — обучение нахождению наибольшего и наименьшего значений функции с помощью производной.

В общеобразовательных классах изучение материала параграфа желательно рассматривать в следующей последовательности: 1) алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции (2-й абзац), задачи **1** и **3**; 2) рассуждения о решении прикладных задач (3-й абзац), задача **4**; 3) замечание (4-й абзац), задача **2**. В **профильных** классах теоретический материал (до задачи **1**) можно рассмотреть единым блоком, после чего разобрать задачи **1**, **3**, **2**, **4**, **5** в указанной последовательности, закрепляя на соответствующих упражнениях полученные умения.

Учащимся **общеобразовательных** классов можно посоветовать записать в тетради алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$: 1) найти значение функции на концах отрезка, т. е. числа $f(a)$ и $f(b)$; 2) найти ее значения в критических точках, принадлежащих интервалу $(a; b)$; 3) из найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

На втором уроке можно провести проверочную самостоятельную работу.

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$ $[f(x) = x^4 - 18x^2 + 30]$ на отрезке $[-3; 2]$ $[[-4; 3]]$.

2. Найти наименьшее значение функции $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$ $\left[f(x) = \frac{x^2}{e^x}\right]$ на интервале $x > 1$ $[x > 0]$.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 3, 1-й и 2-й абзацы, задачи 1, 3	15—17, 24	15 (3)	18 (1)
2	§ 3, 3-й абзац, задача 4	18 (2—4), 20—23		19, 24
3	§ 3, 4-й абзац, задача 2	26 (1, 2), 28	Проверочная самостоятельная работа	25

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 3, теоретическая часть, задачи 1, 3	15—17	15 (3)	18 (1), 25
2	§ 3, задача 4	18 (2—4), 19, 20—23	19 (1)	24, задача 5 текста параграфа, 31
3	§ 3, задача 2	26 (1, 2), 28, 30 (1)	Проверочная самостоятельная работа	32

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны уметь находить наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке в упражнениях типа **15—17**; учащиеся **профильных** классов должны уметь решать прикладные задачи типа **20—23** на нахождение наибольшего (наименьшего) значения функции на интервале.

Решение упражнений

28. 1) $y=\sqrt[3]{x^2(1-x)}, y'=\frac{1}{3}(x^2(1-x))^{-\frac{2}{3}}(2x-3x^2), 0<x<1.$ На интервале (0; 1) имеется одна точка экстремума $x_0=\frac{2}{3}$ (точка максимума), причем $y\left(\frac{2}{3}\right)=\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}.$

30. 1) $f(-1)=2,\ f(1)=0,\ f(2)=1$. На интервалах (–1; 1) и (1; 2) уравнение $f'(x)=0$ корней не имеет, значит, на отрезке [–1; 2] $M=2,\ m=0$.

31. Площадь прямоугольника $S(x)=x(3-x^2)$ — функция, заданная на $x\in(0;\ \sqrt{3})$. $S'(x)=3-3x^2$, $S'(x)=0$ при $x=\pm1$. Интервалу $(0;\ \sqrt{3})$ принадлежит критическая точка $x=1$. На интервале (0; 1) выполняется неравенство $S'(x)>0$, на интервале $(1;\ \sqrt{3})$ — неравенство $S'(x)<0$, поэтому $S(1)=2$ — наибольшая площадь прямоугольника, удовлетворяющего условию задачи.

32. Стороны прямоугольника x и $\frac{p}{2}-x$, его диагональ $f(x)=$ $=\sqrt{x^2+\left(\frac{p}{2}-x\right)^2}$, причем $0<x<\frac{p}{2}$. $f'(x)=\dfrac{4x-p}{2\sqrt{x^2+\left(\frac{p}{2}-x\right)^2}}$;

$f'(x)=0$ при $x=\frac{p}{4}$. На интервале $\left(0;\ \frac{p}{4}\right)$ выполняется неравенство $f'(x)<0$, а на интервале $\left(\frac{p}{4};\ \frac{p}{2}\right)$ — неравенство $f'(x)>0$.

Значит, $f\left(\frac{p}{4}\right)=\sqrt{\frac{p^2}{16}+\left(\frac{p}{2}-\frac{p}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{p^2}{8}}=\frac{p\sqrt{2}}{4}$ — наименьшее значение диагонали прямоугольника с периметром p.

§ 4. Производная второго порядка, выпуклость и точки перегиба (1/2 ч)

Цель изучения параграфа — знакомство **всех** учащихся с понятием второй производной функции и ее физическим смыслом; учащиеся **профильных** классов осваивают аппарат применения второй производной для нахождения интервалов выпуклости и точек перегиба функции.

С учащимися **общеобразовательных** классов изучается лишь п. 1 параграфа. После этого выполняется упражнение **37** и решаются следующие задачи:

1. Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t) = 8t^2 - \frac{2}{3}t^3$, где $s(t)$ — путь в метрах, t — время в секундах. Найти ускорение движения в момент времени $t = 1$; $t = 3$; $t = 4$.

2. Скорость материальной точки, движущейся прямолинейно, изменяется по закону $v(t) = \frac{t^3}{3} - 16t$, где скорость измеряется в метрах в секунду. В какой момент времени скорость движения будет наименьшей, если движение рассматривается за промежуток времени от $t_1 = 2$ с до $t_2 = 10$ с?

3. Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t) = \frac{1}{12}t^4 - t^3$. В какой момент времени из промежутка [1; 5] ускорение движения будет минимальным?

При этом для домашней работы учащимся можно дать последнюю из предложенных трех задач (или ей аналогичную) из упражнения **37** (2, 4, 6).

В **профильных** классах на первом уроке следует повторить решение неравенств методом интервалов. После рассмотрения п. 1 параграфа желательно решить предложенные выше 3 задачи, иллюстрирующие физический смысл второй производной. Остальное время посвящается изучению геометрического смысла второй производной, нахождению интервалов выпуклости и точек перегиба. Перед решением упражнения **40** (1) учащиеся **профильных** классов могут вывести правило нахождения второй производной произведения двух функций: «Если $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, то $f''(x) = g''(x) \cdot h(x) + 2g'(x) \cdot h'(x) + g(x) \cdot h''(x)$».

Распределение материала параграфа по урокам (в **профильных** классах) отражено в таблице.

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 4: пп. 1, 2	37, 38, 40	38 (1)	Задачи 1—3 из текста методических рекомендаций
2	§ 4: п. 3	39, 41	39 (3)	Найти интервалы выпуклости функции: 1) $y = x^4 - 6x^2 + 4$; 2) $y = (x + 1)^4$.

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны уметь находить вторые производные функций в упражнениях типа **37**; учащиеся **профильных** классов должны уметь находить интервалы выпуклости и точки перегиба функции в упражнениях типа **38, 39**.

Решение упражнений

39. 1) $f(x) = \cos x$, $-\pi < x < \pi$; $f''(x) = -\cos x$, $f''(x) = 0$ при $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ и $x_2 = \frac{\pi}{2}$. В этих точках $f''(x)$ меняет знак, и поэтому точки $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ — точки перегиба.

40. 1) $f(x) = (x^2 - 3x + 2)\, e^x$,

$f'(x) = (2x - 3)\, e^x + (x^2 - 3x + 2)\, e^x = e^x (x^2 - x - 1)$,

$f'' = e^x (x^2 - x - 1) + e^x (2x - 1) = e^x (x^2 + x - 2)$. Так как $e^x > 0$ при любом x, то $f''(x) = 0$ при $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Так как $f''(x) > 0$ при $x < -2$ и $x > 1$, то на этих интервалах функция выпукла вниз; на интервале $(-2; 1)$ функция выпукла вверх, так как здесь $f''(x) < 0$.

§ 5. Построение графиков функций (2/4 ч)

Цель изучения параграфа — формирование у **всех** учащихся умения строить графики функций-многочленов с помощью первой производной, у учащихся **профильных** классов — с привлечением аппарата второй производной.

Учащиеся **общеобразовательных** классов рассматривают лишь решение задачи **2** параграфа, после чего формулируется алгоритм исследования функции с помощью первой производной и построения ее графика: 1) найти область определения функции; 2) выяснить, является ли функция четной (нечетной), периодической; 3) найти точки пересечения графика с осями координат (после нахождения $f(0)$ и корней уравнения $f(x) = 0$); 4) найти промежутки знакопостоянства функции (решить неравенства $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$); 5) найти $f'(x)$; найти стационарные точки (решить уравнение $f'(x) = 0$); 6) найти промежутки возрастания и убывания функции (решить неравенства $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$); 7) найти точки экстремума функции и ее значения в точках экстремума; 8) занести результаты исследования в таблицу; отметить на координатной плоскости точки, через которые пройдет график функции; изобразить график функции.

Таблицу, аналогичную той, которая представлена в задаче **2**, учащиеся могут заполнять одновременно с выполнением пп. 5—7 сформулированного алгоритма.

Умение строить график функции, содержащий точки, в которых функция не определена (как, например, в упражнении **44**) **не является обязательным** для учащихся **общеобразовательных** классов. Если же учитель показывает построение графиков таких функций, то перед построением графика желательно порекомендовать учащимся провести пунктирные вертикальные линии через те точки на оси абсцисс, в которых функция не определена (график функции их нигде не пересечет). Эти линии — вертикальные асимптоты графика (например, в упражнении **44 (3)** такая линия — прямая $x = -2$).

Можно порекомендовать учащимся для более точного построения графика заданной функции всегда находить несколько дополнительных точек, принадлежащих графику, как это сделано в задаче **2** текста параграфа.

Для *самостоятельной* работы учащимся можно порекомендовать построить график конкретной квадратичной функции, находя вершину параболы как точку экстремума.

Учащиеся **профильных** классов изучают материал параграфа в последовательности, предложенной учебником; не рассматриваются задача **2** (где исследование функции проводится без аппарата второй производной) и доказательство теоремы (оно предложено лишь для учащихся, **интересующихся математикой**).

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 5: задача 2	42	Построить график функции 1) $y = 2x^2 + 5x - 3$	44 (1)
2		43	2) $y = -x^2 + 3x - 4$	44 (3)

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 5, п. 1	44, 45	Найти асимптоту графика функции: 1) $f(x) = \frac{x-3}{x}$; 2) $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$.	
2	§ 5, из п. 2 алгоритм построения графика, задача 3	42, 43	43 (3)	46
3	§ 5, задача 4	47, 48		51
4	§ 5, задача 5	49, 50	49 (5)	52

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны *уметь* строить графики функций, аналогичных заданным в упражнениях **42, 43** (с помощью первой производной), а учащиеся **профильных** классов — в упражнениях типа **47—49** (с помощью аппарата первой и второй производных).

Решение упражнения

52. Очевидно, $x = 1$ является корнем уравнения. Рассмотрим функцию $f(x) = 1 - 2x + 2x^3 - x^5$; $f'(x) = -2 + 6x^2 - 5x^4$. Если обозначить $x^2 = t$, то функция $g(t) = -2 + 6t - 5t^2$ принимает при любом t только отрицательные значения ($a = -5 < 0$, $D = 36 - 40 < 0$), значит, $f'(x) < 0$ при любом x, т. е. функция $f(x)$ — убывающая на всей области определения ($x \in \boldsymbol{R}$) и больше одного нуля не имеет. Ответ. Один действительный корень.

Уроки обобщения и систематизации знаний (2/2 ч)

На этих уроках систематизируются знания, полученные учащимися фактически, при изучении двух глав учебника. Поэтому в начале первого урока можно повторить основные понятия, введенные во II главе. Сделать это можно с помощью вопросов **4—13** к главе II. Вопросы к главе III следует дополнять вопросами практического характера. Например, после ответов на вопросы **1—2** следует спросить учащихся о том, как найти промежутки возрастания (убывания) функции; после ответа на вопрос **3** спросить о практическом нахождении точек максимума и минимума функции; после ответа на вопрос **4** выяснить практическое значение теоремы Ферма и т. д.

После такой работы с вопросами к главе следует предложить учащимся выполнить (с большой долей самостоятельности) задания блока «Проверь себя!».

Учитель должен проверить работу каждого учащегося и на втором уроке (после анализа работ) устранить обнаруженные ошибки.

Закрепить приобретенные на предыдущих уроках умения в исследовании функций и построении их графиков можно с помощью упражнений к главе III.

Решение упражнений

73. Прямая (отличная от прямой вида $x = c$) имеет с параболой ровно одну общую точку только в том случае, если эта точка — точка касания графиков. Парабола $y = x^2 + a$ и прямая $y = -4x + 5$ имеют ровно одну общую точку, когда дискриминант уравнения $x^2 + 4x + a - 5 = 0$ равен нулю, т. е. когда $16 - 4a + 20 = 0$. Ответ. При $a = 9$.

74. Пусть $S(r)$ — площадь сечения тоннеля, тогда $S(r) = \frac{\pi r^2}{2} + 2r \cdot \frac{p - 2r - \pi r}{2} = \frac{r^2}{2}(-\pi - 4) + rp$, где $0 < r < \frac{p}{4}$. На указанном интервале значений r имеем $S(r) = 0$, если $(-\pi - 4)r + p = 0$, т. е. при $r_0 = \frac{p}{\pi + 4}$. Слева от r_0 значения $S'(r) > 0$, справа от r_0 значения

$S'(r) < 0$, значит, r_0 — точка максимума функции $S(r)$. Ответ. При $r = \dfrac{p}{4+\pi}$.

75. Из подобия треугольников $\dfrac{x}{a} = \dfrac{x+a}{AC}$, откуда $AC = \dfrac{a(x+a)}{x}$;

$$S(x) = \frac{a(x+a)^2}{2x},\ S'(x) = \frac{2a(x+a)\cdot 2x - a(x+a)^2\cdot 2}{4x^2} =$$

$$= \frac{2ax^2 + 2a^2x - ax^2 - 2a^2x - a^3}{2x^2} = \frac{a(x^2-a^2)}{2x^2};$$ $S'(x) = 0$ при $x = a$, так как $x > 0$ и $a > 0$. Если $x < a$, то $S'(x) < 0$; если $x > a$, то $S'(x) > 0$, потому $x = a$ — точка минимума функции $S(x)$.

77. Пусть h — высота цилиндра, r — радиус основания ($r > 0$, $h > 0$), тогда площадь поверхности $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$, откуда $h = \dfrac{S - 2\pi r^2}{2\pi r}$. Объем цилиндра $V(r) = \dfrac{\pi r^2(S - 2\pi r^2)}{2\pi r} = \dfrac{rS}{2} - \pi r^3$; $V'(r) = \dfrac{S}{2} - 3\pi r^2$. $V'(r) = 0$ при $r_0 = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$. Если $r < r_0$, то $V'(r) > 0$; если $r > r_0$, то $V'(r) < 0$, т. е. r_0 — точка максимума, тогда $V\left(\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}\right) = \dfrac{S}{2}\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}} - \dfrac{\pi S}{6\pi}\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}} = \dfrac{S}{3}\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$.

81. $F\cos\alpha = (mg - F\sin\alpha)k$, откуда $F = \dfrac{mgk}{\cos\alpha + k\sin\alpha} = F(\alpha)$;

$F'(\alpha) = \dfrac{-mgk(-\sin\alpha + k\cos\alpha)}{(\cos\alpha + k\sin\alpha)^2}$.

$F'(\alpha) = 0$, если $-\sin\alpha + k\cos\alpha = 0$, откуда $\operatorname{tg}\alpha = k$ или $\alpha = \operatorname{arctg} k$. Если $0 \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{arctg} k$, то $F'(\alpha) < 0$; если $\operatorname{arctg} k < \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, то $F'(\alpha) > 0$, значит, $\alpha = \operatorname{arctg} k$ — точка минимума функции $F(\alpha)$.

Контрольная работа № 3

Базовый уровень

1. Найти экстремумы функции:

1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$; 2) $f(x) = e^x(5x - 3)$

[1) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$; 2) $f(x) = (8 - 7x)e^x$].

2. Найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$ [$f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$].

---

3. Построить график функции $f(x) = x^3 - 2x + x + 3$ [$f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$].

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^3 - 2x + x + 3$ [$f(x) = x^3 - x - x + 2$] на отрезке $\left[0;\ \dfrac{3}{2}\right]$ $\left[\left[-1;\ \dfrac{3}{2}\right]\right]$.

5. В прямоугольный треугольник с катетами 5 см и 8 см вписан имеющий с ним общий угол прямоугольник наибольшей площади. Найти площадь прямоугольника.
[Найти наибольшую площадь ромба, сумма длин диагоналей которого равна 12 см.]

Профильный уровень

1. Установить, при каких значениях a функция $f\,(x) = e^{-2x} - ax$ убывает [$f\,(x) = ax - e^{-3x}$ возрастает] на всей области определения.

2. Найти асимптоты графика функции
$$f\,(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 1} \quad \left[f\,(x) = \frac{x^2 + 5}{x - 1}\right].$$

3. Построить график функции $f\,(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x + 1}$ $\left[f\,(x) = \dfrac{x^2 + 5}{x - 1}\right]$.

---

4. Найти высоту конуса наименьшего объема, описанного около цилиндра с высотой h (оси цилиндра и конуса совпадают). [Найти высоту правильной четырехугольной призмы наибольшего объема, вписанной в конус с высотой H (плоскости оснований призмы и конуса совпадают).]

5. Построить график функции $f\,(x) = \dfrac{x}{2} - \sin x$ $\left[f\,(x) = \dfrac{x}{2} - \cos x\right]$ на отрезке $[-\pi; \pi]$.

Глава IV Первообразная и интеграл

В главе II рассматривался как механический, так и геометрический смысл производной. На языке функций и их графиков он раскрывался в идее линеаризации: замена криволинейного участка графика прямолинейным означала замену неравномерного движения равномерным, а также замену некоторой дуги кривой отрезком касательной. Та же идея реализуется и при рассмотрении интеграла.

С точки зрения механики скорость прямолинейного движения определяется как производная пути по времени: если некоторая точка прошла путь $s\,(t)$, то ее мгновенная скорость $v\,(t) = s'\,(t)$. Если рассмотреть обратную задачу — нахождение пути, пройденного точкой с заданной скоростью $v\,(x)$, то придем к функции $s\,(t)$, которую называют *первообразной* функции $v\,(t)$, т. е. такой функцией, что $s'\,(t) = v\,(t)$. Так как производная постоянной равна нулю, то первообразная определяется с точностью до постоянной. Например, $(x^2)' = 2x$ и $(x^2 + 3)' = 2x$, и поэтому первообразной функции $y = 2x$ является функция $y = x^2 + C$, где C — произвольная постоянная.

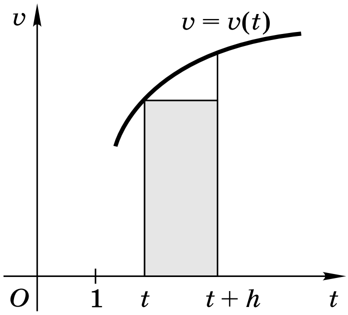


Рис. 24

Если скорость меняется по закону $v = v\ (t)$ и ее графиком является некоторая кривая (рис. 24), то путь, пройденный точкой за промежуток времени $[t;\ t + h]$, приближенно равен площади (закрашенного) прямоугольника со сторонами, длины которых равны $v\ (t)$ и h, т. е. $s = v\ (t)\ h$. Точное значение пути $s\ (t)$ будет равно площади криволинейной трапеции, образованной кривой $v\ (t)$, осью Ox и прямыми $v\ (t)$ и $v\ (t + h)$.

Если в заданную кривую $v\ (t)$ вписать некоторую ломаную, то $s\ (t)$ можно вычислить с лучшим приближением (чем в случае $v\ (t)\ h$), заменив площадь криволинейной трапеции суммой площадей прямоугольников разбиения. Чем меньше будет основание каждого прямоугольника, тем ближе сумма площадей прямоугольников будет выражать площадь криволинейной трапеции. Так, процесс линеаризации приводит к понятию определенного интеграла.

Учебный материал главы строится так, что сначала определяется операция интегрирования как операция, обратная дифференцированию, далее вводится понятие первообразной, при этом не вводится ни определение неопределенного интеграла, ни его обозначение. Таблица правил интегрирования (т. е. таблица первообразных), естественно, в этом случае получается из таблицы производных. Формулируется утверждение, что все первообразные для функции $f\ (x)$ выражаются как $F\ (x) + C$, где $F\ (x)$ — первообразная, найденная в таблице. Этот факт строго не доказывается, а только поясняется.

Связь между первообразной и площадью криволинейной трапеции устанавливается формулой Ньютона — Лейбница. Далее возникает определенный интеграл как предел интегральной суммы; при этом формула Ньютона — Лейбница также оказывается справедливой. Таким образом, эта формула является главной: с ее помощью вычисляются определенные интегралы и находятся площади криволинейных трапеций.

Простейшие дифференциальные уравнения и применение производной и интеграла к решению физических задач (§ 5, 6) даются в **общеобразовательных** классах в **ознакомительном** плане. Учащиеся **профильных** классов знакомятся с задачами нахождения пути по заданной скорости, вычислением работы переменной силы, задачами о размножении бактерий и о радиоактивном распаде более подробно, чем школьники общеобразовательных классов, и учатся решать простейшие дифференциальные уравнения.

Желательно, чтобы учащиеся усвоили основные идеи интегрального исчисления. Не следует усложнять и без того трудный для школьников учебный материал. Система упражнений не содержит действительно трудных задач по теме, так как цель данного курса — ознакомить с основами интегрального исчисления: сформировать первичные умения применять теоретический материал, дать представление о возможности применения интеграла в простейших случаях. Более глубокое изучение данной темы — задача вуза, где рассматривается интеграл под тем углом зрения, который необходим в соответствующей сфере деятельности.

В результате изучения главы **все** учащиеся должны знать правила нахождения первообразных основных элементарных функций, формулу Ньютона — Лейбница и уметь их применять к вычислению площадей криволинейных трапеций при решении задач типа **39**, **40** (1, 2), **41** и из рубрики «Проверь себя!» (задания **1**, **2**, **4**). Учащиеся **профильных** классов должны, кроме того, уметь решать задачи, такие как **40**, **44**, **45** (1, 2).

§ 1. Первообразная (2/2 ч)

Цель изучения параграфа — ознакомление с понятием первообразной, обучение нахождению первообразной для степенной и тригонометрических функций.

Изучение материала параграфа полезно начать с повторения понятия производной и ее физического смысла на примере задачи о мгновенной скорости. Далее, следуя тексту учебника, нужно поставить задачу о нахождении закона движения по данному закону изменения скорости и перейти к определению первообразной и задаче **1**. Сформулированное после задачи **1** замечание фактически представляет собой определение первообразной на отрезке. На данном этапе с этим замечанием достаточно познакомить учащихся **профильных** классов, но вернуться к нему при изучении § 3. Можно пояснить школьникам, интересующимся математикой, что под производной функции на концах отрезка $[a; b]$ понимаются правая и левая производные:

$$F'(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{F(a+h) - F(a)}{h}, \quad F'(b) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{F(b+h) - F(b)}{h}.$$

Задания в упражнении **1** аналогичны задаче **1** и способствуют формированию первых представлений учащихся о первообразной.

Выполнение заданий 1) и 2) из этого упражнения подготовит учащихся к нахождению первообразной для степенной функции, которая в общем виде формулируется в задаче **2**. Остальные задания упражнения **1** позволят повторить таблицу производных, правила нахождения производных и послужат пропедевтикой формирования представления о неоднозначности первообразной.

Тот факт, что если $F'(x) = 0$ на некотором интервале $(a; b)$ и функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то $F(x) = C$ на отрезке $[a; b]$, где C — постоянная, был доказан в предыдущей главе. В **общеобразовательных** классах это утверждение поясняется, опираясь на геометрический смысл производной (для большей наглядности можно использовать рисунок учебника). Опираясь на него, в **профильных** классах доказывается теорема, которая и показывает, что первообразные для одной и той же функции могут отличаться лишь на постоянную величину. Теперь можно говорить о нахождении всех первообразных функции, что и делается в задаче **3**.

Следует обратить внимание учащихся на то, что в таблице первообразных для функции $\frac{1}{x}$ первообразная определяется для $x < 0,\ x > 0$ как $\ln|x| + C$.

Затем рассматривается расположение графиков первообразных и решается задача **4** текста учебника. После нее полезно выполнить упражнение **4** (4).

4. 4) $f(x) = \sqrt{x}$, следовательно, $F(x) = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$. По условию график $F(x)$ проходит через точку $M(9; 10)$, т. е. $F(9) = 10$, откуда $\dfrac{9^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = 10$, $C = -8$, поэтому $F(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} - 8$.

К упражнениям учебника можно добавить, например, такое:

Тело движется прямолинейно, его скорость задается формулой $v(t) = 1 + 3t$. Найти закон движения этого тела, если в момент времени $t = 4$ тело находилось на расстоянии 20 ед. от начала движения.

На втором уроке можно предложить самостоятельную работу, которую желательно проверить непосредственно после выполнения.

1. Показать, что функция $F(x) = \dfrac{x^6}{6}$, $\left[F(x) = \dfrac{x^7}{7}\right]$ является первообразной для функции $f(x) = x^7$ $[f(x) = x^6]$ на всей числовой прямой.

2. Найти все первообразные для функции $f(x) = x^{\frac{2}{5}}$ $\left[f(x) = x^{\frac{3}{4}}\right]$.

3. Для функции $f(x) = x^2$ $\left[f(x) = \dfrac{1}{x^2}\right]$ найти первообразную, график которой проходит через точку $M(3; 1)$ $[A(0{,}5; 4)]$.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 1, задачи 1, 2	1, 2	1 (5), 2 (1)	
2	§ 1, задачи 3, 4	3, 4	В тексте	

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 1 (лекция)	1—3 (по одному заданию)	2 (3), 3 (3)	
2	§ 1	1—4	В тексте	

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны знать определение первообразной и уметь выполнять упражнения, такие, как **1**, **4** (1, 2). Учащиеся **профильных** классов, кроме того, должны уметь доказывать теорему и выполнять упражнения типа **3**, **4**.

§ 2. Правила нахождения первообразных (2/2 ч)

Цель изучения параграфа — ознакомление с понятием интегрирования и обучение применению правил интегрирования при нахождении первообразных.

Изучая материал параграфа, учащиеся продолжают знакомиться с таблицей первообразных для элементарных функций и учатся применять правила интегрирования. Повторение формул и правил нахождения производных полезно провести при проверке таблицы первообразных и тех правил, по которым они будут находить первообразную для каждой функции. При этом следует сразу обратить внимание учащихся на тот факт, что первообразная и функция во всех рассмотренных примерах определены на одном и том же промежутке, т. е. функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на том промежутке, где они обе определены. Это важно, в частности, для правильного понимания того, что первообразная для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ лишь для $x > 0$ равна $\ln x + C$.

Если речь идет о всех действительных значениях x, кроме нуля, т. е. и о случае отрицательных значений x, то применяется общая формула и первообразная равна $\ln|x| + C$.

Вторая таблица первообразных сложнее для применения и для запоминания, поэтому вполне возможно при решении упражнений учащимися **общеобразовательных** классов пользоваться учебником или вынести таблицу на плакат. Учащиеся **профильных** классов должны знать правило нахождения первообразной для функции от линейной функции, т. е. для функции $f(kx + b)$, которое требует вынесения коэффициента $\frac{1}{k}$. Таблицу первообразных заучивать не нужно.

Желательно вновь обратить внимание учащихся на функцию $f(x) = e^x$ и пояснить, что тот факт, что функция, ее производная и первообразная для нее имеют один и тот же вид, предопределяет важную роль данной функции в решении многих практических задач (подробнее об этом они могут узнать из § 6).

На конкретных примерах можно показать, что правило нахождения первообразной для функции, представленной в виде суммы функций, верно не только для суммы двух слагаемых, но и трех и более. Для чего выполнить упражнения **5** (3, 4), **6** (3, 4) и добавить, например, следующее:

Найти первообразные для функции: 1) $3x^3 + 2x^2 - x + 1$; 2) $2 + 3e^x + 4\cos x$; 3) $4\sqrt{x} + \sin 2x - x^4 - 3$.

Затем проверить результат решения упражнений дифференцированием. Полезно периодически проверять результат выполнения аналогичных заданий дифференцированием: при этом учащиеся не только повторяют изученный материал, но и глубже осознают связь двух операций.

Учащимся **профильных** классов в качестве дополнительного материала можно предложить решить задачи, которые будут готовить их к вычислению интегралов.

1. Найти первообразную для функции $y = 2\sin 5x + 3\cos\frac{x}{2}$, которая при $\frac{\pi}{3}$ принимает значение, равное 0.

Р е ш е н и е. $F(x) = -\frac{2}{5}\cos 5x + 6\sin\frac{x}{2} + C$;

$F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{2}{5}\cos\frac{5\pi}{3} + 6\sin\frac{\pi}{6} + C = -\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2} + 6\cdot\frac{1}{2} + C = 0$; откуда $C = -\frac{14}{5} = -2\frac{4}{5}$, поэтому $F(x) = 6\sin\frac{x}{2} - \frac{2}{5}\cos 5x - 2\frac{4}{5}$.

2. Найти одну из первообразных для функции:

1) $\frac{x}{x-3}$; 2) $\cos^2 x$.

Р е ш е н и е. 1) $f(x) = \frac{x}{x-3} = \frac{x-3+3}{x-3} = \frac{x-3}{x-3} + \frac{3}{x-3} = 1 + \frac{3}{x-3}$. С помощью правил и таблицы интегрирования получаем $F(x) = x + 3\ln|x-3|$.

2) $f(x)=\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x$. С помощью правил и таблицы интегрирования получаем $F(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x$.

На последнем уроке по теме можно предложить самостоятельную проверочную работу.

1. Найти все первообразные для данной функции:

1) x^5-2x; 2) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^3}$; 3) $2\sin x+x^2$

$\left[1)\ x^6+3x^2;\ \ 2)\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^4};\ \ 3)\ 3\cos x-x\right]$.

2. Для функции $f(x)=2x+3$ $[f(x)=4x-1]$ найти первообразную, график которой проходит через точку $M(1;2)$ $[(-1;3)]$.

3. Найти первообразную $F(x)$ для функции

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}+2(x+1)^3\quad\left[f(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}+4(x-1)^5\right],$$

если $F(0)=0$ $[F(0)=1]$.

4. Скорость прямолинейного движения материальной точки задается формулой $v(t)=3t+2\sqrt{t}$. Найти закон движения точки, если $s(1)=\dfrac{11}{6}$.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 1	5, 6, 13 (1)	5 (5), 6 (3)	11
2	§ 1	6—8 (1, 4)	В тексте	12, 13 (7, 8)

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 1	6—9, 13 (1—3)	7 (5), 8 (6, 7)	
2	§ 1	10—12, 13 (5, 8)	В тексте	

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны знать правила нахождения первообразных, уметь применять таблицу первообразных при выполнении упражнений типа **5**, **6** (1, 2). Учащиеся **профильных** классов должны уметь решать упражнения типа **8**, **9**, **13**.

§ 3. Площадь криволинейной трапеции. Интеграл и его вычисление (2/3 ч)

Цель изучения параграфа — формирование понятия криволинейной трапеции, ознакомление с понятием определенного интеграла, обучение вычислению площади криволинейной трапеции в простейших случаях.

Материал параграфа дается на наглядно-интуитивном уровне, поэтому учителю не следует требовать от учащихся воспроизведения каких-либо рассуждений, приведенных в тексте учебника.

Представление о криволинейной трапеции учащиеся должны получить, изучая рисунки 86—93 учебника (имеет смысл перенести их на кодопленку, в таблицу или использовать программу GRAPH 16). Каждый раз, распознавая на этих рисунках график функции, непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a; b]$, положительной на интервале $(a; b)$, и прямые $x = a$ и $x = b$, $y = 0$, учащиеся еще и еще раз выявляют особенности фигуры, которая называется *криволинейной трапецией*. Естественно возникает вопрос о возможности вычисления площади полученной фигуры.

Рассматривая задачу на вычисление площади криволинейной трапеции с помощью площади многоугольника, представляющего собой объединение прямоугольников, можно использовать рисунок 24. Тогда утверждение о том, что при достаточно малых значениях h площадь криволинейной трапеции приблизительно равна $f(x)\,h$, становится более наглядным. Важно, чтобы ученик увидел следующий алгоритм в рассуждениях о нахождении площади криволинейной трапеции: 1) разбиваем $[a; b]$ на n частей (необязательно равных); 2) составляем суммы, которые называют интегральными; 3) находим предел, к которому стремятся интегральные суммы и который в результате и является площадью трапеции.

Интегральные суммы появляются, когда начинаем увеличивать число точек разбиения отрезка так, чтобы длина наибольшего из отрезков стремилась к нулю. Если рассматривать любую непрерывную на отрезке функцию (необязательно неотрицательную), то можно вновь составить интегральные суммы и найти их предел на данном отрезке, который и назовем *определенным интегралом*.

Далее вводим формулу Ньютона — Лейбница, которая помогает вычислять интегралы. Для учащихся **общеобразовательных** классов никаких теоретических рассуждений проводить не следует. Ученики переходят к решению задач **1** и **2**, в которых фактически и кроется применение интеграла для вычисления площади криволинейной трапеции в простейших случаях. При решении задач на нахождение площади криволинейной трапеции важно, чтобы учащиеся грамотно делали чертеж и могли его использовать для иллюстрации решения: на этом этапе вычисление интеграла вторично, главное — вычисление площади.

Учащимся **профильных** классов необходимо геометрически пояснить появление формулы Ньютона — Лейбница. Достаточно, чтобы это сделал учитель, не требуя воспроизведения от учащихся.

Начать решение задач целесообразно с выяснения, является ли данная на рисунке 25 фигура криволинейной трапецией, затем

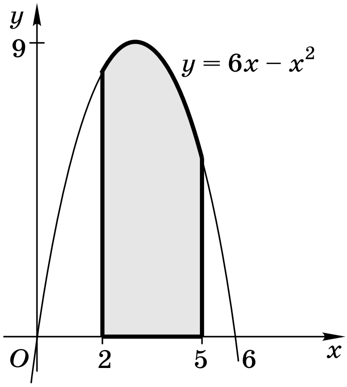


Рис. 25

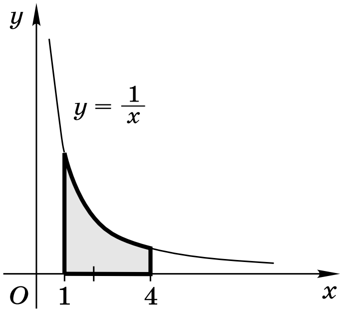


Рис. 26

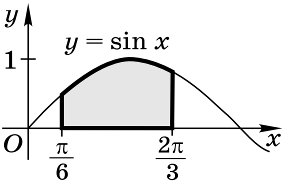


Рис. 27

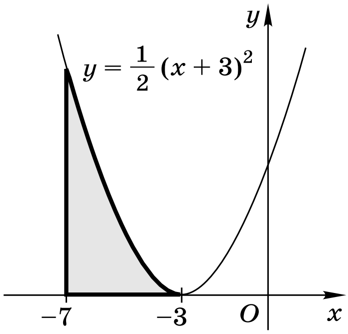


Рис. 28

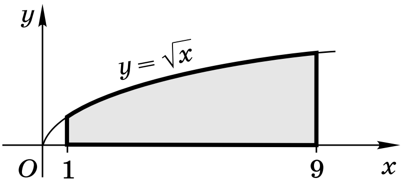


Рис. 29

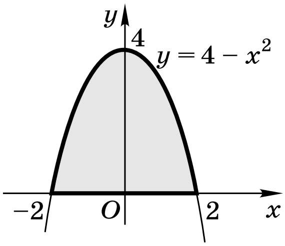


Рис. 30

по рисункам 26—30 только записать формулу Ньютона — Лейбница для нахождения площади и далее перейти к выполнению упражнений **14, 15**. Учащимся **общеобразовательных** классов этим можно ограничиться.

Для учащихся **профильных** классов полезно выполнить упражнения **16—18**, так как умение вычислять интегралы пригодится при вычислении площадей криволинейных трапеций. Рекомендуется обратить внимание учащихся **профильных** классов на выполнение упражнения **19,** где по данному интегралу нужно изобразить трапецию, площадь которой определяется вычислением данного интеграла.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 3, пункты 1—3, задачи 1, 2	14	14 (3)	19 (1, 2)
2	§ 3	14, 15	15 (5, 8)	20, 21

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 3, до задачи 4	15	15 (7, 8)	20
2	§ 3, задачи 4, 5	15—17, 19 (1, 4)	17 (2, 3), 19 (3)	21—23
3	§ 3	18—19	18 (7), 19 (7)	Задачи 6, 7, 24

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны уметь изображать криволинейную трапецию, знать формулу Ньютона — Лейбница и уметь ее применять при решении упражнений, таких, как **14, 15.** Учащиеся **профильных** классов, кроме этого, должны уметь решать упражнения, такие, как **17, 19.**

Решение упражнений

20. 2) $\int\limits_1^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx = \int\limits_1^2 \left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right) dx = \left(\frac{x^3}{3}+2x-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^2 =$

$= \frac{8}{3}+4-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{3}+2-1\right) = 4\frac{5}{6}.$

21. 3) $\int\limits_1^2 \frac{5x-2}{\sqrt[3]{x}} dx = \int\limits_1^2 \left(5x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{-1}{3}}\right) dx = \left(5x^{\frac{5}{3}}\cdot\frac{3}{5}-2x^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{3}{2}\right)\Bigg|_1^2 =$

$= \left(3x^{\frac{5}{3}}-3x^{\frac{2}{3}}\right)\Bigg|_1^2 = 3\sqrt[3]{4}.$

22. 1) $\int\limits_0^5 \frac{6}{\sqrt{3x+1}}dx = \int\limits_0^5 6\,(3x+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left(6\cdot\frac{1}{3}\,(3x+1)^{\frac{1}{2}}\,2\right)\Bigg|_0^5 =$

$= \left(4\,(3x+1)^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_0^5 = 4\cdot 16^{\frac{1}{2}} - 4 = 12.$

23. 1) $\int\limits_0^2 e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}\Bigg|_0^2 = \frac{1}{3}e^6 - \frac{1}{3} = \frac{e^6-1}{3};$

3) $\int\limits_1^2 \frac{3}{2x-1}dx = \int\limits_1^2 3\cdot\frac{1}{2x-1}dx = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln|2x-1|\Bigg|_1^2 = \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{3}{2}\ln 1 = \frac{3}{2}\ln 3.$

24. 4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)\right)dx =$

$= \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi-3\sqrt{3}}{12}.$

§ 4. Вычисление площадей фигур с помощью интегралов (0/3 ч)

Ц е л ь и з у ч е н и я п а р а г р а ф а — научить выявлять фигуры, ограниченные данными линиями, и находить площади этих фигур.

Материал параграфа изучается только в **профильных** классах: обучающиеся по базовому уровню стандарта должны у м е т ь вычислять площади криволинейных трапеций в простейших случаях, тех, которые были рассмотрены в предыдущем параграфе.

Прежде чем переходить к изучению нового материала, целесообразно повторить построение графиков некоторых элементарных функций. Для этого достаточно по готовым чертежам напомнить алгоритм построения того или иного графика, например по рисункам 25—30.

Изучение можно проводить непосредственно по тексту параграфа, разбирая задачи текста и примеры к ним. Полезно пойти и другим путем. Сначала решить все задачи текста, выделяя особо случаи, когда фигура ограничена: 1) графиком функции, принимающей отрицательные значения; 2) графиками двух функций; 3) графиками двух функций, одна из которых линейная, что позволяет находить одну из площадей по известным из курса геометрии формулам. Затем можно приступить к решению упражнений. В любом случае, прежде чем начинать вычислять, необходимо провести анализ условия и прикинуть, какой вид будет иметь фигура, площадь которой предстоит вычислить.

В качестве упражнений для актуализации знаний можно использовать работу по готовым чертежам, используя рисунки тех фигур, площади которых предстоит находить на уроке, не указывая конкретные пределы интегрирования. Это позволит тратить меньше времени на выявление пределов при выполнении упражнений и будет способствовать формированию умений в нахождении оптимальных путей решения задач. Например, по рисункам 31—36 назвать, из каких фигур состоит фигура, площадь которой

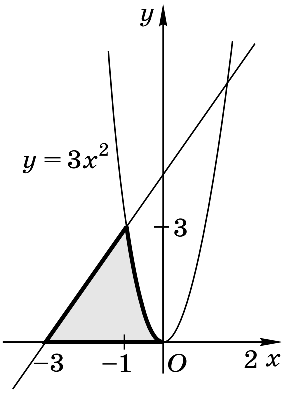


Рис. 31

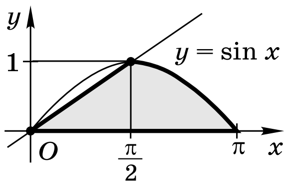


Рис. 32

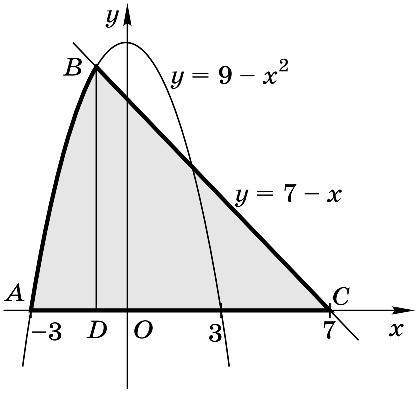


Рис. 33

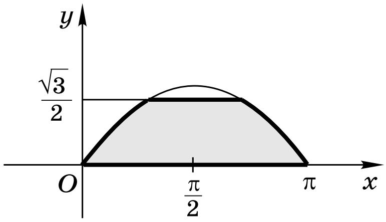


Рис. 34

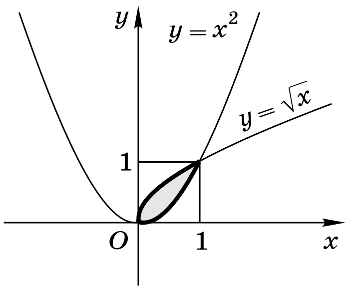


Рис. 35

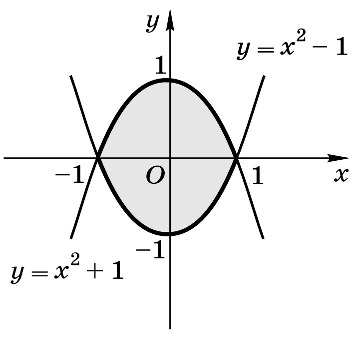


Рис. 36

вычисляется, и указать пределы интегрирования. Эти рисунки можно использовать при решении упражнений **26—32**.

Решая задачи, учащиеся сами выбирают путь рассуждений, однако, хотя бы раз желательно рассмотреть разные пути решения. Например, упражнение **26 (3)** можно решать двумя способами.

I способ (рис. 37). График функции $y = 4x - x^2$ — парабола, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ — нули функции, D (2; 4) — вершина.

Прямая, проходящая через точки B (4; 0) и C (1; 3), пересекает параболу в этих точках (можно проверить, подставив в уравнение параболы). Фигура OCB, площадь которой нужно найти, состоит из фигур OAC и CAB;

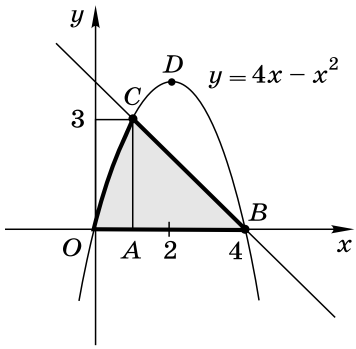


Рис. 37

$S_{CAB} = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4\frac{1}{2}$;

$$S_{OAC} = \int_0^1 (4x - x^2)\,dx = \left(4 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = 1\frac{2}{3};$$

$$S_{OCB} = 4\frac{1}{2} + 1\frac{2}{3} = 6\frac{1}{6}.$$

II способ. Запишем уравнение прямой, проходящей через точки (4; 0), (1; 3), для чего решим систему уравнений $\begin{cases} 0 = k \cdot 4 + b, \\ 3 = k \cdot 1 + b, \end{cases}$ откуда $y = 4 - x$. Найдем площадь фигуры CAB с помощью интеграла:

$$S_{CAB} = \int_1^4 (4 - x)\,dx = \left(4x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^4 = 8 - 3\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}.$$

Далее найдем, как в предыдущем способе, S_{OAC}, S_{OCB}.

Выполняя упражнения **26—28**, учащиеся используют рассуждения, подобные тем, что приведены в задаче **2** текста параграфа; с помощью задачи **3** вычисляется площадь в упражнении **29**; с помощью задачи **4** решаются упражнения **30—31**; решения задач **3** и **4** помогут при выполнении упражнения **32**.

Желательно, чтобы учащиеся, где возможно, использовали симметрию графиков, например в упражнении **28** (2, 3, 5, 6).

При выполнении упражнений **31** (1, 2, 3), **32** (1, 5, 6) целесообразно обратить внимание учащихся на то, что выяснить взаимное расположение графиков функций на заданном отрезке можно и аналитически. Решение соответствующих неравенств будет полезно.

Система упражнений параграфа позволяет провести изучение теории в форме урока-практикума.

Р а с п р е д е л е н и е м а т е р и а л а п а р а г р а ф а по урокам отражено в таблице.

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 4, задачи 1—5	25, 26 (1), 27 (1), 31 (2)		
2	§ 4	26—29	27 (2), 28 (6)	47 (1)

В р е з у л ь т а т е и з у ч е н и я п а р а г р а ф а учащиеся **профильных** классов должны у м е т ь решать упражнения, такие, как **25**, **26** (1, 2), **27** (1, 2), **29**.

Решение упражнений

47. 1) Исследуем функцию $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ и изобразим ее график на отрезке [0; 1] (рис. 38). Так как $y' = 3x^2 - 6x - 9$, то стационарные точки $x_1 = -1$, $x_2 = 3$; функция на интересующем нас промежутке убывающая, причем $y(0) = 1$, $y(1) = -10$. Как видно из рисунка 38, $S_{AEDC} = S_{AEDF} + S_{AFC}$, где $AEDF$ — прямоугольник со сторонами 1 и 5. Площадь криволинейной трапеции AFC можно найти как $\int_0^1 (-f(x) + 1)\,dx$, т. е.

$y = -(x^3 - 3x^2 - 9x + 1) + 1 =$
$= -x^3 + 3x^2 + 9x$,

$$S_{AFC} = \int_0^1 (-x^3 + 3x^2 + 9x)\,dx =$$

$$= \left(-\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} + 9\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$= -\frac{1}{4} + 1 + 4{,}5 = 5{,}25$. Следовательно, $S_{AEDC} = 5 + 5{,}25 = 10{,}25$.

S_{AEDC} можно найти иначе

$$S_{AEDC} = S_{KEDC} - S_{KAC},$$

где $S_{KEDC} = 16$; S_{KAC} можно найти по формуле

$$S_{KAC} = \int_0^1 (f(x) + 10)\,dx;$$

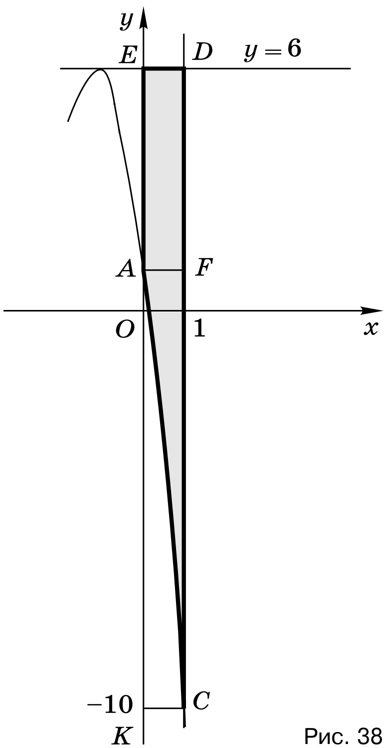


Рис. 38

$$S_{KAC} = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 - 9x + 11)dx = \left(\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} - 9\frac{x^2}{2} + 11x\right)\Bigg|_0^1 =$$

$= 5{,}75$, откуда $S_{AEDC} = 16 - 5{,}75 = 10{,}25$.

§ 5. Применение интегралов для решения физических задач (1/1 ч)

Цель изучения параграфа — ознакомить **всех** учащихся с применением интегралов для решения физических задач, научить учащихся **профильных** классов решать задачи на движение с применением интегралов.

В параграфе рассматривается решение задач на движение и работу с применением определенных интегралов. При решении задач не предполагается вводить дифференциальные уравнения — это материал необязательный. Поэтому решаются самые несложные задачи. Важно, чтобы **все** учащиеся осознали, почему функция пути является первообразной для функции скорости, работа переменной силы есть первообразная для функции силы.

Учащимся **общеобразовательных** классов достаточно решить задачи, предложенные в тексте параграфа, и упражнение **33**. Решая задачу **34** в **профильных** классах, следует обратить внимание учащихся на то, что начало движения тела по условию предполагается в начале координат. Так как скорость изменяется по закону, задающемуся квадратичной функцией, то остановка произойдет в точке, где скорость вновь станет равной 0, т. е. в точке с координатой 4. Таким образом, пределы интегрирования 0 и 4, т. е. $s = \int_0^4 (4t - t^2)dt$.

В этих же классах можно предложить учащимся еще несколько задач.

1. Материальная точка движется по оси Ox под действием силы $F(x) = 9 - x^2$, направленной вдоль оси Ox. Вычислить работу силы по перемещению материальной точки из точки $x = 0$ в точку $x = 3$.

2. Расстояние s, которое пролетает самолет, определяется интегралом $\int_1^q \frac{k}{x}dx$, где коэффициент k равен работе мотора на 1 кг горючего, q — отношение нагрузки в данный момент к первоначальной нагрузке. Вычислить s, если $k = 4000$, $q = 0{,}6$.

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны уметь решать задачи типа упражнения **33**.

§ 6. Простейшие дифференциальные уравнения (0/1 ч)

Материал этого параграфа не является обязательным для изучения всеми учащимися и может быть либо рассмотрен на уроке ознакомительно, либо предложен учащимся для самостоятельного изучения. Упражнения **35** и **36** требуют умения находить первообразную функции, что послужит повторению предыдущего учебного материала. В упражнении **37** фактически необходимо найти первообразную, удовлетворяющую данным условиям.

37. 2) Все решения этого уравнения записываются формулой $y(x) = 2\sin x + C$. Из условия $y(\pi) = 1$ находим $2\sin\pi + C = 1$, откуда $C = 1$.

Ответ. $y = 1 + 2\sin x$.

Урок по теме можно провести и в форме семинара с предварительно подготовленными учащимися сообщениями по каждому из пунктов текста учебника.

Уроки обобщения и систематизации знаний (2/2 ч)

На уроках рекомендуется рассмотреть не только первообразную, но и производную, подчеркнуть, что операция интегрирования является обратной относительно дифференцирования. Кроме этого, вспомнить разные задачи, которые решались с помощью математического анализа. Тем самым будет подведен итог изучению элементов математического анализа.

Полезными могут быть упражнения **39**, **41** (из главы IV), а также **362**, **363**, **387**, **391**, **437**, **449** (из заключительной главы, посвященной итоговому повторению) для учащихся **общеобразовательных** классов; упражнения **42—45** (из главы IV), а также, **365**, **386**, **403**, **417**, **451** (из заключительной главы, посвященной итоговому повторению) для учащихся **профильных** классов.

Решение упражнений

451. 3) $\int\limits_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}dx = \int\limits_3^4 \frac{x^2-4+7}{x-2}dx = \int\limits_3^4 \left(x+2+\frac{7}{x-2}\right)dx =$

$= \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 7\ln|x-2|\right)\Big|_3^4 = 5{,}5 + 7\ln 2.$

Контрольная работа № 4

Базовый уровень

1. Доказать, что функция

$$F(x) = 3x + \sin x - e^{2x} \quad [F(x) = e^{3x} + \cos x + x]$$

является первообразной для функции

$$f(x) = 3 + \cos x - 2e^{2x} \quad [f(x) = 3e^{3x} - \sin x + 1]$$

на всей числовой оси.

2. Найти первообразную $F(x)$ для функции $f(x) = 2\sqrt{x}$ $[f(x) = -3\sqrt{x}]$, график которой проходит через точку $A\left(0;\ \frac{7}{8}\right)$ $\left[A\left(0;\ \frac{3}{4}\right)\right]$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = 3x - x^2,\ x = 1,\ x = 2$ $\left[y = \cos x,\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{3}\right]$

и осью Ox.

Профильный уровень

1. Найти первообразную для функции

$f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ $\left[f(x) = \frac{2}{x-3} + \sqrt{2x-7}\right]$,

если $F\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1$ $\left[F(4) = \frac{2}{3}\right]$.

2. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = t^2 - 2t + 3$ $[v(t) = t^2 + t - 2]$ (м/с). Вычислить путь, пройденный телом за промежуток времени от $t = 1$ до $t = 3$ [от $t = 2$ до $t = 5$].

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = x^2 - 4x + 3,\ y = x^2 - 12x + 35,\ y = 8$

$[y = 6x - x^2,\ y = -x^2 + 14x - 40,\ y = 9]$.

---

4. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)dx$ $\left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\left(x + \frac{\pi}{8}\right)dx\right]$.

Глава V Комбинаторика

Основные цели изучения главы V — развитие комбинаторного мышления учащихся; знакомство с теорией соединений (как самостоятельным разделом математики и в дальнейшем — с аппаратом решения ряда вероятностных задач); обоснование формулы бинома Ньютона (с которой учащиеся лишь знакомились в курсе 10 класса).

В Большой советской энциклопедии комбинаторика определяется как раздел математики, изучающий некоторые операции над конечными множествами. Основными задачами комбинаторики считаются следующие: 1) составление упорядоченных множеств (образование перестановок); 2) составление подмножеств данного множества (образование сочетаний); 3) составление упорядоченных подмножеств данного множества (образование размещений).

В Математическом энциклопедическом словаре (М.: Советская энциклопедия, 1988. — С. 276) приводится следующее описание комбинаторики:

«Комбинаторный анализ, комбинаторная математика, комбинаторика — раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами. Каждое такое правило определяет способ построения некоторой конструкции из элементов исходного множества, называемой комбинаторной конфигурацией. Поэтому можно сказать, что целью комбинаторики является изучение комбинаторных конфигураций, в частности вопросы их существования, алгоритмы построения, решение задач на перечисление. Примерами комбинаторных конфигураций являются перестановки, размещения и сочетания; блок-схемы и латинские квадраты.

Возникновение основных понятий и развитие комбинаторики шло параллельно с развитием других разделов математики, таких, как алгебра, теория чисел, теория вероятностей, с которыми комбинаторный анализ тесно связан. Еще математикам Древнего Востока были известны формула, выражающая число сочетаний через биномиальные коэффициенты, и формула бинома Ньютона с натуральным показателем n. С мистическими целями изучались магические квадраты 3-го порядка. Рождение комбинаторики как раздела математики связано с трудами Б. Паскаля и П. Ферма по теории азартных игр. Эти труды, составляющие основу теории вероятностей, одновременно содержали принципы определения числа комбинаций элементов конечного множества.

Большой вклад в развитие комбинаторных методов был сделан Г. Лейбницем, Я. Бернулли, Л. Эйлером. С 50-х годов XX в. интерес к комбинаторике возрождается в связи с бурным развитием кибернетики, дискретной математики, теории планирования и теории информации. На формирование направления исследований в дальнейшем оказывают влияние два фактора. С одной стороны, выбор объектов исследований, с другой — формулировка целей исследования, зависящая в конечном счете от сложности изучаемых объектов. Если исследуемая комбинаторная конфигурация имеет сложный характер, то целью исследования является выявление условий ее существования и разработка алгоритмов построения...»

Из всего многообразия вопросов, которыми занимается комбинаторика, в содержание образования старшей школы сегодня включается лишь теория соединений — комбинаторных конфигураций, называющихся перестановками, размещениями и сочетаниями. Причем обязательными для изучения являются лишь *соединения без повторений* — соединения, составляемые по определенным правилам *из различных элементов*. Типичными примерами задач на подсчет числа определенных соединений являются следующие:

1. *Задача на подсчет числа перестановок из пяти элементов* **(P_5)**.

Сколькими способами можно расставить на полке пять различных книг? (Ответ. 120)

2. *Задачи на подсчет числа размещений из четырех по два* (A_4^2).

1) Сколько существует вариантов назначения главного бухгалтера и его заместителя из четверых претендентов на эти должности? (Ответ. 12)

2) Сколько различных двузначных чисел можно записать с помощью цифр 5, 6, 7, 8, используя каждую из них в записи не более одного раза? (Ответ. 12)

3. *Задача на подсчет числа сочетаний из четырех по два* (C_4^2).

Сколько существует вариантов выбора двоих человек для участия в конференции из числа четверых претендентов? (Ответ. 6)

Для подсчета числа соединений каждого вида с помощью правила произведения в этой главе выводятся формулы

$$P_n = n!, \quad A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}, \quad C_m^n = \frac{m!}{n!\,(m-n)!},$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ — произведение первых n натуральных чисел; при этом доопределяются $1! = 1$ и $0! = 1$. Для учащихся (после знакомства с рассмотренными тремя видами соединений) при решении конкретной задачи основной проблемой становится подведение условия под конкретный тип соединения. Обычно задачи на подсчет числа перестановок учащиеся легко узнают. А отличать задачи на подсчет числа размещений от задач на подсчет числа сочетаний слабым учащимся часто бывает затруднительно. Учителю приходится нередко придумывать мнемонические подсказки для такой дифференциации. Например, чтобы учащиеся поняли, что размещения — это *упорядоченные* множества элементов, можно «привязать» термин размещения к словосочетаниям вида *размещение* (чего-либо; где-либо) *по порядку*. Эффективным для этой же цели бывает напоминание того, что перестановки — это частный случай размещений.

Решая прикладную (текстовую) комбинаторную задачу на подсчет числа соединений (без повторений), в первую очередь ученик должен выяснить — разные или одинаковые, по сути, получаются соединения, если поменять в них порядок расположения элементов.

Теория соединений с повторениями не является обязательной для рассмотрения даже в **профильных** классах, тем не менее мы считаем полезным в этих классах ввести понятие хотя бы *размещений с повторениями,* так как подсчет числа этих размещений может встретиться уже на первых уроках при решении задач на применение правила произведения. Типичным примером задачи на подсчет числа размещений с повторениями является следующая: «Сколько различных пятизначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3?» (Ответ. $5^3 = 125$.) В общем виде обосновать формулу для подсчета числа размещений с повторениями ($\overline{A}_m^n = m^n$) не составит труда и для учащихся **общеобразовательных** классов.

Знакомство с остальными соединениями с повторениями изложено в доступной форме и может быть рассмотрено с учащимися **профильных** классов при наличии времени. Доказательство же справедливости формул для подсчета числа перестановок с повторениями

$$\left(\overline{P}_{n_1,\ n_2,\ \dots,\ n_m} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdot\ldots\cdot n_m!},\ \text{где}\ n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m\right),$$

и числа сочетаний с повторениями $\left(\overline{C}_m^n = \overline{P}_{m-1,\ n} = \dfrac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!}\right)$ следует рассматривать только с учащимися, **интересующимися математикой**, причем усвоившими применение метода математической индукции.

Дополнительной мотивацией рассмотрения, например, перестановок с повторениями является тот факт, что биномиальные коэффициенты C_m^k есть не что иное, как $\overline{P}_{k,\ m-k}$. Поэтому учащиеся, знакомые с понятием перестановок с повторениями, легко воспринимают вывод формулы бинома Ньютона.

Помимо правила произведения в комбинаторике основным считается и правило суммы, которое можно сформулировать следующим образом: «Если некоторый элемент можно выбрать n способами, а другой элемент можно выбрать m способами, то выбрать либо первый, либо второй элемент можно $n + m$ способами». Однако при использовании правила суммы в данной формулировке необходимо следить за тем, чтобы ни один из способов выбора первого элемента не совпал с каким-либо способом выбора второго элемента (если такое совпадение имеется, то правило суммы нельзя применять, так как число способов выбора будет равно $n + m - k$, где k — число совпадений). Правило суммы в главе не рассматривается, так как решение задач на его применение (без специального знакомства с правилом) не вызывает затруднений даже у слабых учащихся. Приведем пример задачи, решаемой с помощью комбинаторного правила суммы: «В классе 10 девочек и 12 мальчиков. Сколькими способами из учащихся класса можно выбрать одного дежурного по столовой?» (Ответ. 22.)

Следует подчеркнуть, что с учащимися **базового** уровня не следует расширять перечень обязательных комбинаторных заданий. Вполне достаточно, если они научатся применять при решении задач комбинаторное правило произведения и не будут допускать ошибок при подведении фабулы задачи под нахождение соединений (без повторений) конкретного вида и найдут число этих соединений по формуле.

В результате изучения главы V **все** учащиеся должны уметь решать упражнения типа **5, 6, 9, 20, 23, 31, 32, 41, 42, 48**, а учащиеся **профильных** классов — **15, 21, 24, 37, 49, 53, 69.**

§ 1. Математическая индукция

Цель изучения параграфа в **профильных** классах (с учащимися, **интересующимися математикой)** — овладение методом доказательства утверждений, распространяемых на множество всех натуральных чисел; развитие интуиции, логического и комбинаторного качеств мышления.

В те годы, когда отечественное математическое образование включало в свой состав элементы комбинаторики, изучение метода математической индукции было естественным началом соответствующих глав учебника (см., например, учебник «Алгебра и начала анализа для 9 класса», изданный в 1977 г. под редакцией А. Н. Колмогорова). Этим методом можно было строго доказать формулы для нахождения числа различных видов соединений. Очевидны мировоззренческое и общекультурное значения этого метода. Поэтому, несмотря на то, что в новых стандартах математического образования не предусмотрено знакомство учащихся с методом математической индукции, мы бы советовали учителям в **профильных** классах при наличии времени все же познакомить учащихся с этим методом, провести с его помощью обоснования ряда формул, не требуя от учащихся самостоятельного его применения.

В учебнике метод математической индукции введен с двумя целями — и как самоценный объект изучения, и как аппарат доказательства ряда формул, которые предлагаются для рассмотрения только учащимся, интересующимся математикой.

Распределение материала параграфа (при наличии дополнительного времени) по урокам отражено в таблице.

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 1	1	1 (3)	3
2		2, 4	2 (3)	

В результате изучения параграфа учащиеся должны понять суть метода математической индукции и уметь с его помощью доказывать справедливость равенств типа предложенных в упражнении 1.

Решение упражнений

2. 3) а) При $n = 1$ в левой части данного равенства имеем $(2n - 1)^3 = (2 \cdot 1 - 1)^3 = 1^3 = 1$, в правой части — $n^2 (2n^2 - 1) = 1^2 \cdot (2 \cdot 1^2 - 1) = 1$, т. е. равенство верно.

б) Пусть данное равенство верно для некоторого натурального n. Докажем, что тогда оно верно и для следующего натурального числа $n+1$, т. е. что верно равенство

$$1^3 + 3^3 + \ldots + (2n-1)^3 + (2(n+1)-1)^3 = (n+1)^2\,(2\,(n+1)^2 - 1)$$

или (после преобразований в скобках) равенство

$$1^3 + 3^3 + \ldots + (2n-1)^3 + (2n+1)^3 = (n+1)^2\,(2n^2 + 4n + 1). \quad (*)$$

Прибавив к обеим частям верного по предположению исходного равенства число $(2n+1)^3$, получим верное равенство

$$1^3 + 3^3 + \ldots + (2n-1)^3 + (2n+1)^3 = n^2\,(2n^2 - 1) + (2n+1)^3.$$

Преобразуем правую часть последнего равенства, получив $n^2\,(2n^2 - 1) + (2n+1)^3 = 2n^4 - n^2 + 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 = 2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = (n+1)^2\,(2n^2 + 4n + 1)$, что убеждает в верности равенства (*). Заметим, что представление многочлена четвертой степени в виде произведения учащиеся могут осуществить делением этого многочлена на «ожидаемый множитель» $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. Следовательно, предложенное равенство верно для любого натурального n.

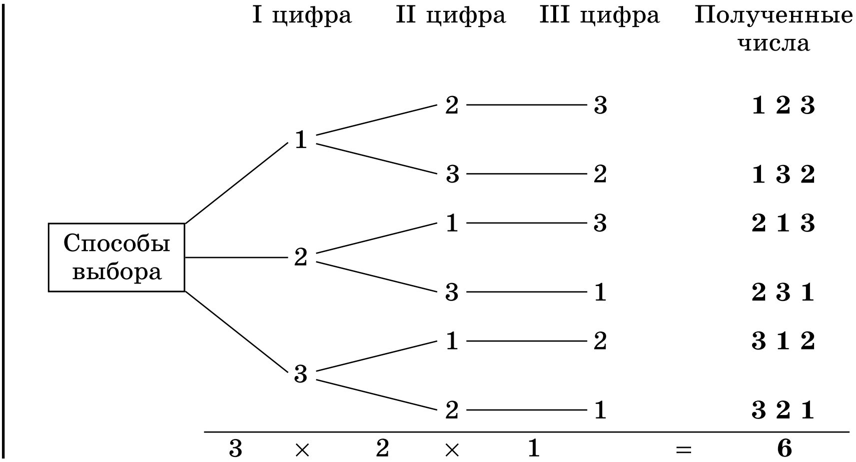
§ 2. Правило произведения. Размещения с повторениями (1/2 ч)

Цель изучения параграфа — овладение одним из основных средств подсчета числа различных соединений (комбинаторным правилом произведения), знакомство учащихся **профильных** классов с размещениями с повторениями.

С этого параграфа начинается изучение главы «Комбинаторика» в **общеобразовательных** классах. Первый урок учитель может начать с актуализации комбинаторных знаний учащихся, полученных ими в основной школе (см. Ткачева М. В., Федорова Н. Е. Элементы статистики и вероятность. — М.: Просвещение, 2005).

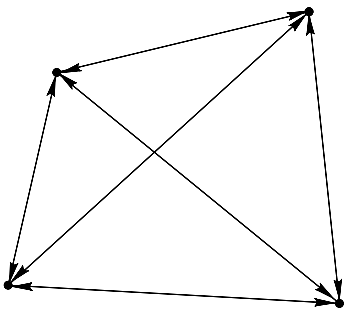
Если учащиеся в основной школе не изучали вопросы комбинаторики, вероятностей и статистики, учителю следует прочитать им лекцию о значении стохастических знаний как в повседневной жизни человека, так и в его профессиональной деятельности. Материал для лекции можно выбрать из названного выше пособия, из введения к данной главе, а также из ряда статей, посвященных вопросам стохастики и публиковавшихся в журналах «Математика в школе» в 2003 г.

До введения определения понятия размещений с повторениями материал параграфа не сложен для понимания всеми учащимися. Однако в классах, где присутствует много учащихся с гуманитарными способностями, решение хотя бы одной задачи на применение правила произведения желательно проиллюстрировать с помощью схемы-дерева. Например, наглядное представление перебора всех способов записи трехзначных чисел (не имеющих одинаковых цифр) и записанных с помощью цифр 1, 2 и 3 (упражнение 5(1)) будет выглядеть так:



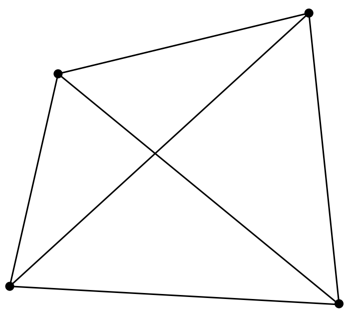
После рассмотрения задачи **1** текста параграфа можно предложить учащимся устно выполнить упражнение **7**, затем рассмотреть упражнение **8** (предложив упражнение **9** для домашней работы). В каждой из этих задач правило произведения применяется по одному разу.

После рассмотрения задачи **2** текста учебника выполняются упражнения **5**, **6**, **10—12**. Упражнения **13** и **14** желательно рассмотреть последовательно на одном уроке. Подсчет искомого числа соединений в упражнении **13** (это число равно $10 \cdot 9 = 90$ — каждый из 10 участников раздал 9 карточек) можно произвести устно. Затем при рассмотрении упражнения **14** разъяснить, почему число рукопожатий в 2 раза меньше числа визиток из упражнения **13**. Для слабых учащихся процессы раздачи визитных карточек и рукопожатий, например, среди 4 человек могут быть проиллюстрированы с помощью схем (графов) на рисунках 39 (визитные карточки) и 40 (рукопожатия).



$n = 3 \cdot 4 = 12$

Рис. 39



$n = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$

Рис. 40

В **профильных** классах тема изучается в последовательности, предложенной учебником. При этом с учащимися, изучавшими § 1, обязательным к рассмотрению считается доказательство формулы (1) методом математической индукции.

Распределение учебного материала по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 2, до задачи 3	7—9, 5, 6, 10, 13, 14	10	11—12, задача 3 текста параграфа

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 2, до задачи **3**	7—9, 5, 6, 10—14	10	
2	От задачи **3** до конца параграфа	Задача. Сколько различных пятибуквенных шифров можно составить, используя буквы a, b, c? **15, 82, 16, 17**	Найти $\overline{A}_2^6$, $\overline{A}_3^4$	81

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны уметь применять правило произведения при решении упражнений типа **5, 6, 9**, а учащиеся **профильных** классов — при выполнении упражнений типа **15**.

Решение упражнений

16. На первом месте может стоять любая из девяти цифр от 1 до 9; на третьем месте может стоять любая из 8 неиспользованных (на первом месте) цифр или цифра 0, т. е. любая из 9 цифр; на пятом месте может стоять любая из 8 оставшихся цифр; а на седьмом месте — любая из 7 еще не использованных цифр. Согласно правилу произведения существует $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ способов расположить на нечетных местах семизначного числа различные цифры. Для второго, четвертого и шестого мест существует $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ способов расположения цифр. Всего различных семизначных чисел, удовлетворяющих условию задачи, существует $4536 \cdot 1000 = 4536000$.

17. Нечетное число определяется последней цифрой числа; в данной задаче это одна из четырех цифр (1, 3, 5 или 7). После выбора последней (четвертой) цифры числа первую цифру можно выбрать 6 способами (на первом месте может быть любая из 8 заданных цифр, кроме 0 и той, которая выбрана на последнее место), вторую после этого — шестью, третью — пятью способами. Согласно правилу произведения существует $4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 = 720$ чисел с требуемыми свойствами.

§ 3. Перестановки (2/2 ч)

Цель изучения параграфа — знакомство с первым видом соединений — перестановками; демонстрация применения правила произведения при выводе формулы числа перестановок из n элементов.

При знакомстве уже с первым видом изучаемых в школе соединений (с перестановками) учитель должен сфокусировать внимание учащихся на том, что элементы в соединениях нужно мысленно представлять выстроенными в ряд (в разных учебниках можно встретить разные специальные названия такого ряда, например, *кортежи*, *цепочки*). В одних видах соединений (перестановках, размещениях) важна последовательность, очередность расположения элементов в этом ряду. В других видах соединений (сочетаниях) важна лишь конкретная совокупность элементов, находящихся в соединении, и не важно, в какой последовательности эти элементы «выстроятся в ряд».

Такое представление об организации соединений важно для однозначного восприятия **всеми** учащимися фабулы текстовых комбинаторных задач, для выделения существенных признаков конкретного вида соединения. В противном случае, например, при рассмотрении задачи **1** текста параграфа некоторые учащиеся могут задавать учителю вопросы такого типа: «А установка одной книжки корешком наружу или корешком внутрь — это разные способы поставить книги?»

Со **всеми** учащимися теоретический материал параграфа до символа «М» рассматривается на первом уроке, закрепляется при выполнении упражнений, а проверяется во второй половине второго урока в ходе выполнения самостоятельной работы (15 мин).

1. Сколько различных четырехзначных чисел можно записать с помощью цифр 5, 6, 7, 8, 9? [Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4?]

2. Найти значение выражения $\frac{98!}{100!}$ $\left[\frac{1000!}{998!}\right]$.

3. Упростить выражение $\frac{P_{n+4}}{P_{n+3}}$ $\left[\frac{P_{n+5}}{P_{n+6}}\right]$.

4. Сколько различных шестизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7 так, чтобы последними были цифры 5 и 6, записанные в любой последовательности [первой была цифра 7, а последней — либо цифра 2, либо цифра 3].

С учащимися **профильных** классов, **интересующимися математикой** (при наличии дополнительного урока), изучается теория и практика перестановок с повторениями.

Распределение учебного материала по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 3, до символа «М»	18—20, 22	Найти значение P_1; P_2; P_5	66, 26
2		21, 23—25	Проверочная самостоятельная работа	67

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 3, до символа «М»	18—23	22 (7), 23 (7)	66
2		67, 24, 69 (1, 2), 26, 27	Проверочная самостоятельная работа	28—30 (после рассмотрения текста для интересующихся математикой)

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны знать определение перестановок из n элементов и уметь выполнять упражнения типа **20**, **23**. Учащиеся **профильных** классов должны уметь выполнять упражнения типа **21**, **24**.

Решение упражнений

24. 3) Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{2\,(n-1)!}{(n+1)!} - 1 = 0, \\ n - 1 \geqslant 1, \\ n \in \boldsymbol{N}; \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} 2 = n\,(n+1), \\ n \geqslant 2, \\ n \in \boldsymbol{N}. \end{cases}$$

Корнями уравнения $n^2 + n - 2 = 0$ являются числа $n_1 = -2$, $n_2 = 1$, при этом ни одно из них не удовлетворяет системе.

Ответ. Корней нет.

26. I способ. Число различных пятизначных чисел, составленных из указанных цифр, равно P_5. Все числа, кратные 5, получаются перестановками цифр 1, 2, 3, 4 на первых четырех местах при том, что последняя цифра равна 5 (в данном случае необходимое и достаточное условие кратности составленного числа числу 5), таких чисел P_4. Число искомых в задаче чисел равно $P_5 - P_4 = 5! - 4! = 120 - 24 = 96$.

II способ. Последняя цифра числа, отличная от 5, может быть выбрана 4 способами, предпоследняя (после выбора последней) — 4 способами, третья цифра — 3 способами, вторая — 2 способами, первая цифра — единственная оставшаяся. Всего количество чисел, удовлетворяющих условию задачи, согласно правилу произведения равно $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$.

27. 1) В данной задаче две книги одного автора можно считать «одной книгой». Решение задачи сводится к подсчету числа перестановок из 9 элементов.

28. 1) Задача сводится к подсчету числа перестановок с повторениями $\overline{P}_{2,\,1,\,1}$. Ответ. 12.

3) $\overline{P}_{1,\,1,\,2,\,1} = \dfrac{5!}{1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60.$

5) $\overline{P}_{1,\,3,\,1,\,1,\,1} = \dfrac{7!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840.$

7) $\overline{P}_{2,\,3,\,2,\,1,\,1,\,1} = \dfrac{10!}{2!\,3!\,2!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 151200.$

29. Пусть книги занумерованы числами от 1 до 6. Во всевозможных перестановках из этих книг одному брату достаются первые 2 книги, второму — следующие 2 книги, третьему — последняя пара книг (число перестановок из 6 книг равно $P_6 = 720$). Каждому из братьев неважно, в какой последовательности он получил книги своей пары, т. е. искомое число способов будет в $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ раз меньше, чем P_6, т. е. равно $720 : 8 = 90$. Фактически в этой задаче находится $\overline{P}_{2,2,2} = \frac{6!}{2!\,2!\,2!} = 90$.

§ 4. Размещения без повторений (1/1 ч)

Цель изучения параграфа — введение понятия размещений (без повторений) из m элементов по n; создание математической модели для решения комбинаторных задач, сводимых к подсчету числа размещений.

Урок начинается с анализа самостоятельной работы, выполненной в конце предыдущего урока. Если материал предыдущих параграфов учащимися **общеобразовательных** классов усвоен недостаточно, то следует закрепить его и лишь после этого приступить к изучению § 4, добавив на его изучение еще один урок.

После рассмотрения задачи **1** параграфа (можно предложить это сделать учащимся самостоятельно) не должно возникнуть затруднений в обосновании формулы (1). Новым для учащихся будет лишь название образуемых соединений, с которыми они фактически уже встречались при изучении § 2.

После вывода формулы (1) **все** учащиеся выполняют упражнение **31**, после рассмотрения задачи **2** текста — упражнения **32** и **34** (**33** и **35** задаются на дом). После задачи **3** предлагается упражнение **37**, после вывода формулы (2) и рассмотрения задачи **4** — упражнения **36** и **38**. В **профильных** классах выполняются и упражнения **39**, **40**.

При анализе формулы (1) и ее применении в упражнении **31** следует обратить внимание учащихся на тот факт, что количество множителей в правой части формулы совпадает с числом n — верхним индексом числа размещений. При анализе формулы (2) обязательно определяется понятие 0!.

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны знать определение понятия размещений из m элементов по n и уметь использовать формулу (1) при выполнении упражнений типа **31**, **32**. Учащиеся **профильных** классов должны уметь решать задания типа **37**, **69** (3, 4).

Решение упражнений

38. $\dfrac{A_{10}^{n} \cdot P_{11-n}}{P_9} = \dfrac{10! \cdot (11-n)!}{(10-n)! \cdot 9!} = \dfrac{10\,((10-n)+1)!}{(10-n)!} =$
$= 10\,((10-n)+1) = 10\,(11-n)$ при любом $n \leqslant 10$.

39. Подсчет способов распределения трех девушек по восьми (от 1 до 8) местам аналогичен подсчету всевозможных трехзначных чисел без повторяющихся цифр, записанных с помощью цифр от 1 до 8. Их число равно $A_8^3 = 336$.

40. $A_n^{k+1} = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))(n-k) = A_n^k \cdot (n-k)$, где $k < n$, $k \in \boldsymbol{N}$, $n \in \boldsymbol{N}$.

§ 5. Сочетание без повторений и бином Ньютона (3/3 ч)

Цель изучения параграфа — знакомство с сочетаниями и их свойствами; решение комбинаторных задач, сводящихся к подсчету числа сочетаний из m по n элементов; обоснованное конструирование треугольника Паскаля; обучение возведению двучленов в натуральные степени с использованием формулы Ньютона.

В 10 классе в главе «Многочлены» без вывода приводилась формула (2), где через C_m^n обозначались (без пояснений) биномиальные коэффициенты. При знакомстве с данным параграфом учащиеся получают возможность соотнести ранее изученные алгебраические понятия с элементами теории соединений. Учащиеся **профильных** классов, **интересующиеся математикой**, в конце параграфа смогут познакомиться со строгим доказательством формулы (5) бинома Ньютона (оно опирается на знание теории соединений с повторениями).

Первый урок можно начать с устной работы, направленной на повторение определений ранее изученных соединений и формул для нахождения P_n и A_m^n.

При конструировании треугольника Паскаля учитель может показать и «другую форму» треугольника — не прямоугольную, а равнобедренную:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
. & & . & & . & & . & & . & & .
\end{array}$$

Многим учащимся такая форма кажется более удобной (элементы следующей строки получаются так: первый и последний элементы равны 1, а каждый промежуточный равен сумме двух ближайших к нему членов из предыдущей строки). Однако треугольник Паскаля, изображенный на с. 171 учебника, более наглядно иллюстрирует применение свойства (4) при конструировании треугольника.

На третьем уроке желательно провести самостоятельную работу с проверкой в классе, составленную из упражнений учебника.

Распределение материала параграфа по урокам может быть следующим.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 5, до Замечания	41—45	41 (9, 11)	49
2	§ 5, от Замечания до задачи **4**	46—48, 51	48 (3)	50
3	§ 5, задача **4**	52, 68	С проверкой в классе: I в.: 72, 78 (2), 69 (5) II в.: 73, 78 (3), 69 (6)	53, 55

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 5, до Замечания	41—45, 49	41 (9, 11)	68
2	§ 5, до задачи 4	46—48, 51, 53, 54	48 (3), 53	50
3	§ 5, задача 4	52, 57, 58, 55, 56	С проверкой в классе: I в.: 72, 69 (5), 80 II в.: 73, 69 (6), 82	59, 60

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны знать определение сочетаний из m по n, свойства числа сочетаний; уметь раскладывать степень бинома по формуле Ньютона при нахождении биномиальных коэффициентов с помощью треугольника Паскаля; выполнять упражнения типа **41, 42, 48.** Учащиеся **профильных** классов должны уметь выполнять упражнения типа **49, 53.**

Решение упражнений

49. Двух девочек из шести можно выбрать $C_6^2 = \dfrac{6!}{2!\,4!} = 15$ способами. К каждой паре девочек одного мальчика можно присоединить 4 способами. Согласно правилу произведения двух девочек и мальчика можно выбрать $15 \cdot 4 = 60$ способами.

50. 1) $C_m^3 = \dfrac{m!}{3!\,(m-3)!}$, $C_{m+2}^4 = \dfrac{(m+2)!}{4!\,(m-2)!}$. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} m \in \boldsymbol{N}, \\ m \geqslant 3, \\ m+2 \geqslant 4, \\ \dfrac{m!}{3!\,(m-3)!} = \dfrac{4}{15} \cdot \dfrac{(m+2)!}{4!\,(m-2)!}; \end{cases} \qquad \begin{cases} m \in \boldsymbol{N}, \\ m \geqslant 3, \\ 1 = \dfrac{(m+1)\,(m+2)}{15\,(m-2)}. \end{cases}$$

Ответ. $m_1 = 8,\ m_2 = 4$.

53. 1) $C_x^2 + C_x^3 = C_{x+1}^3 = \dfrac{(x+1)!}{3!\,(x-2)!} = \dfrac{(x-1)\,x\,(x+1)}{6}$ при $x \geqslant 3$, $x \in \boldsymbol{N}$. Таким образом, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x \in \boldsymbol{N}, \\ \dfrac{x\,(x+1)}{6} = 15, \end{cases}$$

Ответ. $x = 9$.

55. Два яблока из пяти можно выбрать C_5^2 способами, два апельсина из шести — C_6^2 способами. Указанный набор можно выбрать $C_5^2 \cdot C_6^2 = \dfrac{5!}{2!\,3!} \cdot \dfrac{6!}{2!\,4!} = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 = 150$ способами.

57. Пусть искомый член разложения имеет вид $C_{10}^k\,(\sqrt{x})^{10-k} \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^k$. Согласно условию задачи должно выполняться равенство $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{10-k} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^k = x^2$, откуда $\dfrac{1}{2}(10-k) - \dfrac{1}{2}k = 2$ или $10 - k - k = 4$, $k = 3$. Искомый член разложения равен $C_{10}^3\,x^2 = 120x^2$.

59. I способ. Каждую из k прямых пересекают $(k-1)$ прямая. В произведении $k\,(k-1)$ каждая из точек пересечения подсчитана дважды, т. е. всего $\dfrac{k\,(k-1)}{2}$ точек.

II способ. $C_k^2 = \dfrac{k!}{2!\,(k-2)!} = \dfrac{(k-1)k}{2}$.

60. 12 белых шашек могут занять 32 клетки доски C_{32}^{12} способами, после этого оставшиеся 20 клеток 12 черных шашек могут занять C_{20}^{12} способами. Ответ. $C_{32}^{12} \cdot C_{20}^{12}$.

§ 6. Сочетания с повторениями

Цель изучения параграфа учащимися **профильных** классов, **интересующимися математикой**, — завершение формирования представлений о соединениях с повторениями.

Применение нестандартного приема вывода формулы числа сочетаний с повторениями расширит арсенал методов решения комбинаторных задач, поспособствует развитию конструкторских способностей учащихся.

Текст параграфа может быть разобран учащимися, **интересующимися математикой**, самостоятельно.

Решение упражнений

63. Нужно найти количество всевозможных соединений, состоящих из трех элементов, выбираемых из элементов четырех видов (и отличающихся друг от друга хотя бы одним элементом); их число равно

$$\overline{C}_4^3 = \frac{(4+3-1)!}{(4-1)!\,3!} = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{4\cdot5\cdot6}{2\cdot3} = 20.$$

64. Число способов равно

$$\overline{C}_4^7 = \frac{(4+7-1)!}{(4-1)!\,7!} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{8\cdot9\cdot10}{2\cdot3} = 120.$$

65. Число различных прямоугольных параллелепипедов равно

$$\overline{C}_8^3 = \frac{(8+3-1)!}{(8-1)!\,3!} = \frac{10!}{7!\,3!} = 120.$$

Урок обобщения и систематизации знаний (1/1 ч)

На этом уроке после повторения теоретических сведений (с помощью вопросов на с. 178 учебника) и устранения пробелов в знаниях решаются упражнения типа **70—74**, требующие обоснованного подведения фабулы под конкретный вид соединений.

При организации урока полезно использовать материал введения к данной главе этого пособия.

В **общеобразовательных** и **профильных** классах могут быть использованы для работы ранее не выполнявшиеся упражнения к главе V учебника, а также задания рубрики «Проверь себя!» (с. 178, 179 учебника).

В **профильных** классах с учащимися, **интересующимися математикой**, следует разобрать 2 способа решения упражнения **87** и с помощью метода математической индукции доказать равенство получаемых выражений (см. ниже «Решение упражнений»).

Решение упражнений

84. 1) $(C_{12}^2 + C_{12}^3) + C_{13}^4 = C_{13}^3 + C_{13}^4 = C_{14}^4 = \dfrac{14!}{4!\cdot10!} =$

$= \dfrac{11\cdot12\cdot13\cdot14}{2\cdot3\cdot4} = 11\cdot13\cdot7 = 1001;$

3) $C_8^4 - C_7^4 = (C_7^3 + C_7^4) - C_7^4 = C_7^3 = \dfrac{7!}{3!\,4!} = \dfrac{5\cdot6\cdot7}{2\cdot3} = 5\cdot7 = 35;$

5) $C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 = C_7^0 + C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 = \dfrac{1}{2}\cdot2^7 = 64.$

86. Число матчей равно $2\cdot C_{18}^2=\dfrac{2\cdot 18!}{2!\cdot 16!}=17\cdot 18=306$.

87. I способ. Первую пару можно составить C_{2n}^2 способами, после этого выбрать пару из оставшихся $2n-2$ элементов можно C_{2n-2}^2 способами. К первым двум парам, число которых $C_{2n}^2\cdot C_{2n-2}^2$, третью можно присоединить C_{2n-4}^2 способами и т. д. Число способов разбиения $2n$ различных элементов на n упорядоченных пар равно

$$C_{2n}^2\cdot C_{2n-2}^2\cdot C_{2n-4}^2\cdot\ldots\cdot C_6^2\cdot C_4^2\cdot C_2^2=$$

$$=\frac{(2n)!\,(2n-2)!\,(2n-4)!\cdot\ldots\cdot 6!\cdot 4!\cdot 2!}{2^n\,(2n-2)!\,(2n-4)!\cdot\ldots\cdot 4!\,2!0!}=\frac{(2n)!}{2^n}.$$

Так как в разбиении порядок расположения пар не имеет значения, то число способов разбиения на n неупорядоченных пар в $n!$ раз меньше найденного числа, т. е. равно

$$\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}. \qquad (1)$$

II способ. 1) Занумеруем данные элементы: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2n}$. 2) Упорядочим в каждой создаваемой паре (a_i, a_j) ее элементы так, что $i<j$. 3) Упорядочим каждый получаемый набор пар так, что первой парой будет (a_1, a_l), второй — (a_m, a_n), третьей — (a_p, a_q) и т. д., причем $a_1<a_m<a_p$ и т. д. ($m\geqslant 2$, причем $m=2$, если $l\neq 2$). 4) Для подсчета числа всевозможных наборов выясним, сколько пар могут оказаться первыми: так как первым элементом первой пары будет обязательно a_1, а вторым элементом первой пары может быть любой из оставшихся $2n - 1$ элементов, то первых пар будет $2n-1$. 5) После фиксирования первой пары остаются $2n-2$ элементов, среди которых есть элемент с наименьшим номером. Он и будет первым элементом второй пары, а вторым элементом второй пары можно брать любой из оставшихся $2n-3$ элементов. Следовательно, вторых пар будет $2n-3$. Проводя аналогичные рассуждения, получаем, что третьих пар будет $2n-5$, четвертых пар будет $2n-7$, ..., а n-х пар будет $(2n-(2n-1))=1$. 6) По правилу произведения получаем, что число всевозможных пар равно

$$(2n-1)\,(2n-3)\,(2n-5)\cdot\ldots\cdot(2n-(2n-1)). \qquad (2)$$

Докажем, что выражения (1) и (2) равны, т. е. что справедливо равенство

$$(2n-1)\,(2n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1=\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}. \qquad (3)$$

Доказательство проведем методом математической индукции.
а) Проверкой убеждаемся, что при $n=1$ равенство (3) верно:

$$2\cdot 1-1=\frac{(2\cdot 1)!}{2^1\cdot 1!}.$$

б) Пусть равенство (3) верно для какого-либо натурального n. Докажем, что равенство (3) верно и для $n+1$, т. е. что верно равенство

$$(2n+1)(2n-1)\cdot \ldots \cdot 5\cdot 3=\frac{(2n+2)!}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}. \qquad (4)$$

Левая часть равенства (4) при использовании замены ее множителей, начиная со второго, выражением, стоящим в правой части равенства (3), примет вид

$$(2n+1)\cdot\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}. \qquad (5)$$

Преобразуем правую часть равенства (4):

$$\frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!}=\frac{(2n)!\,(2n+1)\,(2n+2)}{2\cdot 2^n\cdot n!\,(n+1)}=\frac{(2n)!\,(2n+1)\cdot 2\,(n+1)}{2^n\cdot n!\cdot 2\,(n+1)}=$$

$=(2n+1)\dfrac{(2n)!}{2^n\cdot n!}$, т. е. вид (5). Таким образом, равенство (3) верно для любого $n\in \boldsymbol{N}$.

88. Два туза из четырех можно выбрать C_4^2 способами, к каждому такому набору присоединить 16 из 32 карт без тузов можно C_{32}^{16} способами. Выбрать два туза и 16 карт из 32 можно $C_4^2\cdot C_{32}^{16}$ способами. Выбранный набор из 18 карт (половина колоды) однозначно определяет и вторую половину колоды. Каждая половина колоды в разбиении приведенным способом упорядочена, поэтому число разбиений колоды просто на две неупорядоченные части (с указанным содержимым) в 2 раза меньше. О т в е т. $\dfrac{C_4^2\cdot C_{32}^{16}}{2}$.

89. Число различных пар из 28 учащихся равно $C_{28}^2=\dfrac{28!}{26!\cdot 2!}=$ $=27\cdot 14=378$. Это число больше числа дней в учебном году, значит, требуемое расписание составить можно.

90, 91. См. идею решения упражнения **57**.

92. Среди данных чисел 10 четных и 10 нечетных. Три числа, сумма которых четна, можно выбрать следующими двумя независимыми способами.

1) Все три слагаемых — четные числа; таких соединений будет C_{10}^3. 2) Два слагаемых — нечетные числа, а третье — четное. Так как 2 из 10 слагаемых можно выбрать C_{10}^2 способами, а третье слагаемое — любое из 10 четных чисел, то по правилу произведения получаем $C_{10}^2\cdot 10$ троек чисел с четной суммой. Таким образом, всего вариантов $C_{10}^3+C_{10}^2\cdot 10=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{10\cdot 9}{1\cdot 2}\cdot 10=120+450=570.$

94. 1) $\overline{P}_{2,\,2,\,4}:\overline{C}_3^{\,5}=\dfrac{(2+2+4)!}{2!\cdot 2!\cdot 4!}:\dfrac{(3+5-1)!}{(3-1)!\,5!}=\dfrac{8!\cdot 2!\cdot 5!}{2\cdot 2\cdot 4!\cdot 7!}=$ $=\dfrac{8\cdot 5}{2}=20;$

2) $\overline{A}_5^2 + \overline{C}_6^3 : \overline{P}_{3,\,5} = 5^2 + \dfrac{(6+3-1)!}{(6-1)!\,3!} : \dfrac{(3+5)!}{3!\,5!} = 25 + \dfrac{8!\,3!\,5!}{5!\,3!\,8!} = 26.$

95. Задача сводится к подсчету чисел сочетаний с повторениями из 7 видов по 3 элемента в каждом: $\overline{C}_7^3 = \dfrac{(7+3-1)!}{(7-1)!\cdot 3!} = \dfrac{9!}{6!\,3!} = \dfrac{7\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 3} = 7 \cdot 12 = 84.$

Контрольная работа № 5

Базовый уровень

1. Найти $\dfrac{P_{10}}{A_9^7} + C_6^4 \quad \left[P_5 + \dfrac{A_{10}^3}{C_9^2}\right].$

2. Сколькими способами из числа 15 учащихся класса можно выбрать культорга и казначея? [Сколькими способами 7 детей ясельной группы можно рассадить на 7 стульях?]

3. Сколько различных шестизначных чисел можно записать с помощью цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7 таким образом, чтобы все цифры в числах были различны? [Сколькими способами можно составить набор из 5 карандашей, выбирая их из 8 имеющихся карандашей восьми различных цветов?]

---

4. Записать разложение бинома $(2 - x)^5 \quad [(2a - 1)^6]$.

5. Сколько существует различных кодов, состоящих из двузначного числа, цифры которого выбираются из цифр 1, 2, 3, и следующего за ним трехбуквенного слова, буквы которого выбираются из гласных букв русского алфавита? (Цифры и буквы в коде могут повторяться.)
[Шифр сейфа образуется из двух чисел. Первое, двузначное число, образуется из цифр 1, 2, 3, 4 (цифры в числе могут повторяться). Второе, трехзначное число, образуется из цифр 7 и 6. Сколько различных шифров можно использовать в таком сейфе?]

Профильный уровень

1. Найти $P_7 - \overline{A}_2^6 + \dfrac{A_9^3}{C_{10}^2} \quad \left[\dfrac{P_8}{A_7^5} + C_6^4 - \overline{A}_3^4\right].$

2. См. № **2** базового уровня.

3. См. № **3** базового уровня.

4. См. № **5** базового уровня.

5. Записать разложение бинома $\left(2 - \dfrac{c}{2}\right)^5 \quad \left[\left(3a - \dfrac{1}{3}\right)^4\right].$

---

6. Используя свойства числа сочетаний, найти
$C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 \quad [C_{11}^9 - C_{10}^8].$

7. Сколькими способами можно разложить 7 монет по двум карманам так, чтобы ни один карман не был пустым?
[Сколькими способами 6 игроков команды могут рассесться на двух скамейках таким образом, чтобы ни одна из скамеек не пустовала (на одной скамейке могут уместиться не менее 6 человек)?]
8. Найти коэффициент при x^4 в разложении
$(2x^2 + 2x + 1)^5$ $[(1 + x + 2x^2)^6]$.

Глава VI Элементы теории вероятностей

Задачи, которые учащиеся до недавнего времени решали в курсе математики, предполагали конкретные действия и их однозначный результат. Однако есть большой круг задач, которые имеют широкое применение в различных науках, технике, прикладных знаниях, но в которых результат действия не определен однозначно. Простейший пример: если подбросить монету, то нельзя точно сказать, какой стороной вверх она упадет — орлом или решкой. Здесь результат действия (подбрасывания монеты) не определен однозначно. Может показаться, что в этой задаче и в аналогичных ей нет никакого определенного результата. Однако это не так. Даже игровая практика показывает, что при большом числе бросков примерно в половине случаев выпадает орел, а в половине — решка. А это уже своеобразная закономерность.

Еще один пример из реальной практики: при обработке деталей на станке-автомате размеры получаемых деталей будут колебаться около некоторого значения. Колебания носят случайный характер. Однако распределение размеров в больших партиях деталей имеет довольно строгие закономерности: средние арифметические размеров деталей в разных партиях оказываются приблизительно равными; отклонения той или иной величины размера от среднего значения также встречаются в разных партиях примерно одинаково часто.

Рассмотренные виды закономерностей и им подобные, встречающиеся в массовых случайных явлениях, изучаются теорией вероятностей.

Впервые такого рода закономерности были замечены при решении задач, связанных с азартными играми, в основном с игрой в кости в XVII в. (о чем свидетельствуют научные поиски того времени математиков П. Ферма и Б. Паскаля). Тогда и были введены основные понятия теории: случайный опыт (испытание), случайное событие, относительная частота события, вероятность события.

Относительной частотой (W) события A называют отношение числа случаев M появления этого события к общему числу испытаний N, проведенных в одних и тех же условиях, и записывают: $W(A) = \frac{M}{N}$. Устойчивость относительной частоты при многократном проведении испытаний может объясняться лишь проявлением некоторого объективного свойства случайного события, состоящего в существовании определенной степени его возможности. Например, приблизительное равенство относительных частот выпадения 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков при бросании игральной кости объясняется ее симметриями, делающими одинаково возможным выпадение каждой из ее граней.

Таким образом, степень объективной возможности случайного события можно измерить числом. Это число называется *вероятностью события* (и обозначается буквой P). Именно около этого числа группируются относительные частоты случайного события при увеличении числа испытаний ($P(A) \approx W(A)$). Относительная частота события зависит от числа произведенных испытаний, вероятность же случайного события связана только с самим случайным событием (при постоянных условиях).

Такой подход в определении вероятности называют *статистическим*. Подробно о нем рекомендуем учителю прочитать в пособии М. В. Ткачевой и Н. Е. Федоровой «Элементы статистики и вероятность, 7—9 классы» (М.: Просвещение, 2005).

Только в простейших случаях вероятность случайного события может быть найдена «на бумаге» без проведения многочисленных испытаний (чему и посвящена глава VI учебника). Каждое испытание в этих случаях таково, что оно заканчивается одним и только одним из исходов (событий), называемых элементарными событиями ($\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$). С каждым исходом ω_k связывается неотрицательное число p_k — *вероятность* этого исхода. При этом $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Затем рассматривается более сложное событие A, состоящее в том, что «наступает или ω_i, или ω_j, ..., или ω_m». Исходы $\omega_i, \omega_j, \ldots, \omega_m$ называют *благоприятствующими* событию A и по определению полагают вероятность $P(A)$ события A равной сумме вероятностей благоприятствующих ему исходов: $P(A) = p_i + p_j + \ldots + p_m$. Частный случай, когда $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$ (в учебнике в основном и рассматриваются такие события), приводит к классическому определению вероятности, выраженному формулой $P(A) = \frac{m}{n}$: «Вероятность события A равна отношению числа m исходов, благоприятствующих A, к числу всех равновозможных исходов n».

Подсчет всех возможных исходов испытания и исходов, благоприятствующих событию A, часто осуществляется с помощью методов комбинаторики. Приведем пример условия и решения такой задачи.

Задача. В научном обществе 3 девушки и 5 юношей. Какова вероятность того, что случайным образом выбранные для участия в конференции 2 человека из числа членов общества окажутся юношами?

Р е ш е н и е. Пусть событие A — случайным образом выбраны 2 юноши. Число всех возможных пар, составленных из членов общества, $n = C_8^2 = 28$. Число пар, благоприятствующих событию A, равно числу возможных пар, выбранных из 5 юношей, т. е. $m = C_5^2 = 10$. Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$.

В Большой советской энциклопедии теория вероятностей определяется как «математическая наука, позволяющая по вероятностям одних случайных событий находить вероятности других случайных событий, связанных каким-либо образом с первыми».

Глава VI учебника и посвящена исследованию простейших взаимосвязей между различными событиями, а также нахождению вероятностей некоторых видов событий через вероятности других событий.

В результате изучения главы **все** учащиеся должны уметь находить вероятности случайных событий с помощью классического определения вероятности при решении упражнений типа **5**, **7**; иметь представление о сумме и произведении двух событий, уметь находить вероятность противоположного события (решать упражнения типа **16**); интуитивно определять независимые события и уметь находить вероятность одновременного наступления независимых событий в задачах, аналогичных **31**, **34**, **35**. Учащиеся **профильных** классов должны уметь решать упражнения типа **11**, **20**, **39**, **42**.

Приведем список дополнительной литературы по вопросам комбинаторики и теории вероятностей.

1. Бернулли Я. О законе больших чисел. — М., 1986.

2. Бунимович Е. А., Булычев В. А. Основы статистики и вероятность. — М., 2004.

3. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. — М., 1969.

4. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. — М., 1997.

5. Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. — М., 1982.

6. Лютикас В. С. Факультативный курс по математике. Теория вероятностей. — М., 1990.

7. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. — М., 1985.

8. Плоцки А. Вероятность в задачах для школьников. — М., 1996.

9. Ткачева М. В., Федорова Н. Е. Элементы статистики и вероятность. Учебное пособие для учащихся 7—9 кл. — М., 2005.

10. Тюрин Ю. Н. и др. Теория вероятностей и статистика. — М., 2004.

11. Чистяков В. П. Курс теории вероятностей. Пособие для студентов вузов. — М., 1982.

12. Шибасов Л. П., Шибасова З. Ф. За страницами учебника математики. — М., 1997, 2008.

§ 1. Вероятность события (2/2 ч)

Цель изучения параграфа — знакомство с различными видами событий, комбинациями событий; введение понятия вероятности события (в классическом понимании) и обучение нахождению вероятности случайного события с очевидными благоприятствующими исходами.

Содержание п. 1, 3 и частично п. 2 (кроме комбинаций событий) повторяет содержание соответствующих разделов пособия [9] из приведенного выше списка, поэтому рассмотрение этого текста не должно вызвать затруднений у учащихся. Тем не менее из-за большого количества вводимых понятий работу по усвоению каждого из них рекомендуется вести по схеме: 1) введение нового понятия; 2) рассмотрение учителем примеров, иллюстрирующих понятие, выделение существенных признаков понятия; 3) приведение учащимися примеров событий, соответствующих рассматриваемому виду событий; 4) выполнение соответствующих упражнений.

При изучении материала п. 3 (на втором уроке) следует напомнить учащимся *статистическое* определение вероятности (см., например, материал введения к этой главе и § 12 пособия [9]). Многие испытания, проводимые в одних и тех же условиях, не приводят к равновозможным элементарным исходам; найти их вероятности с помощью классического определения невозможно и приходится проводить большую серию практических испытаний с вычислением относительной частоты рассматриваемого события. В качестве примера можно исследовать вопрос нахождения вероятности события A — подброшенная кнопка упала «острием» вверх.

Заметим, что если в условии задачи не введены обозначения событий, то при решении задач это необходимо сделать. Например, решение упражнения **5** нужно начать со слов: «Пусть событие A — выпадение числа, кратного 3, в результате одного подбрасывания кости».

Для успешного решения в дальнейшем задач на нахождение вероятностей «комбинированных» событий с учащимися **профильных** классов следует повторять (на следующих уроках) материал п. 2.

Основными объектами постановки вероятностных задач будут правильные монеты и кубики, игральные карты, наборы костей домино и т. п. Учитель регулярно (на этих и последующих уроках) может задавать учащимся устные вопросы, самостоятельно конструируя несложные задачи, решаемые с помощью определения вероятности события.

1) Какова вероятность того, что при одном броске игральной кости выпадает число очков, меньшее пяти?

2) Какова вероятность того, что вынутая случайным образом из набора домино кость окажется дублем?

3) С какой вероятностью, извлекая из колоды в 36 карт одну из них, можно вынуть семерку черной масти?

4) В коробке лежат 2 белых, 3 красных и 4 синих шара; какова вероятность получить красный шар, извлекая случайным образом один шар?

При разборе задачи **3** текста параграфа следует обратить внимание учащихся на записи пар выпавших сторон монет (ОО; ОР; РО; РР) — без использования запятой между буквами. Тем самым подчеркивается, что пары упорядоченные (первая буква соответствует первой монете, вторая — второй). Запятую между элементами множеств будем использовать тогда, когда их порядок в совокупности не будет иметь значения.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 1, до задачи 3	1—6	Какова вероятность выпадения 1 или 3 очков в результате одного бросания игральной кости?	Из колоды карт вынимается одна. Какова вероятность того, что эта карта с числом?
2	§ 1, задачи 3—5	7—11	7 (5, 6)	12

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 1, до задачи 3	1—7	7 (5, 6)	Из колоды карт вынимается одна. Какова вероятность того, что это число пиковой масти?
2	§ 1, задачи 3—5	8—12	10 (3)	13

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны усвоить понятия случайных, достоверных и невозможных событий, несовместных событий, элементарных событий; уметь находить сумму и произведение двух событий; понимать, что такое событие, противоположное данному; знать определение вероятности события (в классическом понимании) и находить вероятности событий в упражнениях типа **6, 7**. Учащиеся **профильных** классов должны уметь решать упражнения типа **9—11**.

Решение упражнений

10. Число всех возможных исходов испытания $n = 6 \cdot 6 = 36$ (см. задачу **4** текста параграфа).

1) Нечетной сумма двух чисел будет тогда, когда одно слагаемое — четное число, а другое — нечетное. На каждой кости 3 четных и 3 нечетных числа очков. Число благоприятствующих исходов $m = 2 \cdot (3 \cdot 3) = 18$ (см. таблицу 1 исходов-сумм), $P = \frac{m}{n} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

2) Произведение двух множителей четно, когда хотя бы один из них — четное число, поэтому $m = 3 \cdot 6 + 3 \cdot 3 = 27$ (см. таблицу 2 исходов-произведений), $P = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$.

Таблица 1

I кость	II кость					
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Таблица 2

I кость	II кость					
	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

3) $m = 21$, $P = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$ (см. таблицу 1).

11. $n = C_{15}^2 = \frac{15 \cdot 14}{1 \cdot 2} = 105$. 1) $m = C_3^2 = 3$, $P = \frac{3}{105} = \frac{1}{35}$;

2) $m = 3 \cdot (15 - 3) = 36$, $P = \frac{36}{105} = \frac{12}{35}$;

3) $m = C_{12}^2 = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} = 66$, $P = \frac{66}{105} = \frac{22}{35}$.

12. $n = 36$. Благоприятные исходы 2 и 1; 3 и 2, 3 и 1; 4 и 3, 4 и 2, 4 и 1; 5 и 4, 5 и 3, 5 и 2, 5 и 1; 6 и 5, 6 и 4, 6 и 3, 6 и 2, 6 и 1, т. е. $m = 15$, $P = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

13. $n = (1 + 3 + 4) \cdot (3 + 2 + 3) = 8 \cdot 8 = 64$, $m = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 21$, $P = \frac{21}{64}$.

§ 2. Сложение вероятностей (2/2 ч)

Цель изучения параграфа — знакомство с теоремой о вероятности суммы двух несовместных событий и ее применением, в частности при нахождении вероятности противоположного события; знакомство учащихся **профильных** классов с теоремой о вероятности суммы двух произвольных событий.

До рассмотрения теоремы 1 повторяются (с приведением примеров) понятия несовместных событий и суммы событий. При этом сумму двух событий можно определить и как событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из данных событий.

После доказательства теоремы 1 на п е р в о м уроке желательно разобрать задачу **1**, а после этого перейти к рассмотрению следствия из теоремы (с последующим решением задачи **2** текста параграфа).

В **общеобразовательных** классах на в т о р о м уроке (а в **профильных** — на п е р в о м же уроке) при рассмотрении задачи **3** текста учебника следует подчеркнуть, что знание следствия из теоремы в ряде случаев существенно облегчает решение задачи. Необходимо лишь не ошибаться в понимании и формулировке события, противоположного данному. Так, если событие A — отсутствие элементов некоторого множества, то $\overline{A}$ — наличие хотя бы одного элемента этого множества.

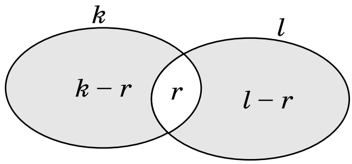


Рис. 41

При изучении теоремы 2 с учащимися **профильных** классов можно привести графическую иллюстрацию благоприятствующих исходов совместных событий A и B (рис. 41).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2 можно провести и другим способом, пользуясь понятием *совместных* событий (тех событий, которые имеют общие благоприятствующие им исходы).

Если события A и B совместные, то событие $A + B$ наступает, когда наступает одно из трех несовместных событий: $A\overline{B}$, $\overline{A}B$ или AB. По замечанию к теореме 1 о сложении вероятностей несовместных событий имеем

$$P(A + B) = P(A\overline{B} + \overline{A}B + AB) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) + P(AB). \quad (*)$$

Событие A произойдет, когда наступит одно из двух несовместных событий: $A\overline{B}$ или AB. По теореме сложения вероятностей несовместных событий справедливо равенство $P(A) = P(A\overline{B}) + P(AB)$, откуда

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB). \quad (**)$$

Аналогично $P(B) = P(\overline{A}B) + P(AB)$, откуда

$$P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB). \quad (***)$$

Подставив равенства (***) и (**) в равенство (*), получим $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Учащимся **профильных** классов следует сказать, что формула (1) учебника получается из формулы (2), так как в случае независимости событий A и B вероятность их произведения $P(AB) = 0$.

В качестве дополнительного учащимся **профильных** классов предлагается упражнение **59** — задача, в которой необходимо применение интегрированных знаний в действиях с событиями. Если при изучении этого параграфа не останется времени на ее рассмотрение, желательно все же решить эту задачу хотя бы на уроке обобщения знаний.

В конце второго урока можно провести проверочную самостоятельную работу по материалу § 1 и § 2.

Общеобразовательные классы

1. Из колоды карт наугад вынимается одна карта. Какова вероятность того, что эта карта шестерка [туз красной масти]?

2. Брошены две монеты. Какова вероятность того, что выпали орел и решка [два орла]?

3. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что не выпали два одинаковых числа очков [не выпали два одинаковых четных числа очков]?

Профильные классы

1. Из колоды карт наугад вынимается одна карта. Какова вероятность того, что эта карта либо король треф, либо дама красной масти [либо валет черной масти, либо туз пик]?

2. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что на первой кости появилось четное число, а на второй — число, меньшее 5 [на одной из костей появилось нечетное число, а на другой — число, большее 2]?

3. В классе 10 девушек и 12 юношей. Какова вероятность того, что среди случайным образом выбранных 2 дежурных окажется хотя бы одна девушка? [В бригаде рабочих 4 женщины и 7 мужчин. Какова вероятность того, что среди троих случайным образом выбранных рабочих для отделочных работ окажется хотя бы один мужчина?]

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 2, до задачи 3	14—18	17	50
2	§ 2, задача 3	19, 20	Проверочная самостоятельная работа	55

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 2, до теоремы 2	14—20	17	50, 55
2	§ 2, теорема 2 (два способа доказательства), задача 4	21, 22	Проверочная самостоятельная работа	59

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны знать теорему 1, следствие из нее и уметь их применять при решении задач типа **15, 17, 18.** Учащиеся **профильных** классов после изучения теоремы 2 должны уметь решать упражнения типа **21.**

Решение упражнений

20. Пусть событие A — в группе из троих студентов оказалась хотя бы одна девушка, тогда событие $\overline{A}$ — в группе из троих студентов не оказалось ни одной девушки, т. е. в группе только юноши. Найдем $P(\overline{A})$ так: $n = C_{22}^3$, $m = C_{18}^3$,

$$P(\overline{A}) = \frac{m}{n} = \frac{C_{18}^3}{C_{22}^3} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20} = \frac{204}{385}.$$

Тогда $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{204}{385} = \frac{181}{385}$.

21. Событие A — попадание при первом выстреле; B — попадание при втором выстреле.

1) Требуется найти $P(A + B)$ при условии, что $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}8$, $P(AB) = 0{,}56$. Имеем $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}56 = 0{,}94$.

2) Нужно найти вероятность события $\overline{A+B}$:

$$P(\overline{A+B}) = 1 - P(A + B) = 1 - 0{,}96 = 0{,}04.$$

22. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}3 + 0{,}8 - 0{,}1 = 1$, т. е. $A + B$ — достоверное событие.

55. Событие A — 3 очка появились хотя бы на одной кости; событие $\overline{A}$ — 3 очка не появились ни на одной из двух костей. Число всех возможных исходов при бросании 2 игральных костей $n = 6 \cdot 6 = 36$. Благоприятствующими событию $\overline{A}$ будут исходы, в парах очков которых нет троек, т. е. на каждой кости должно появиться одно из 5 очков (1, 2, 4, 5 или 6 очков): $m = 5 \cdot 5 = 25$. Тогда и $P(\overline{A}) = \frac{25}{36}$ и $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{11}{36}$.

59. Нужно найти вероятность события C — две случайным образом вынутые костяшки домино имеют хотя бы по одной совпадающей цифре (числу очков). Имеем 28 костяшек с семью (от 0 до 6) цифрами и 56 «полукостяшек», каждая из которых встречается 8 раз. Первую вынутую костяшку назовем A, а вторую, которая может прикладываться к первой, назовем B. Возможны два случая.

1) A — какой-то дубль и $P(A) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$. Тогда 6 из оставшихся 27 костяшек на одной из своих «полукостяшек» имеют ту же цифру, которая дважды была на A. Вероятность того, что B приложится к A равна $\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$. Итак, вероятность прикладывания в этом случае равна $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{18}$.

2) A — не дубль, тогда $P(A) = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$. Из оставшихся 27 костяшек для B подойдут: 2 дубля и 10 недублей, на каждой из которых есть одна совпадающая с A цифра. То есть $P(B) = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$. Вероятность прикладывания в этом случае равна $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{3}$.

Случаи 1 и 2 несовместны, поэтому $P(C) = \frac{1}{18} + \frac{1}{3} = \frac{7}{18}$.

§ 3. Условная вероятность. Независимость событий

Цель изучения параграфа учащимися **профильных** классов, **интересующимися математикой** (при наличии дополнительного времени), — знакомство со строгим подходом к введению понятия независимости событий.

Учащиеся могут прочитать § 3 и самостоятельно, учитель должен лишь поставить акцент на том, что в строгом курсе теории вероятностей независимость событий определяется с помощью формулы (6).

Решение упражнений

23. 1) Задача равносильна задаче нахождения вероятности того, что взят красный карандаш со стола, где лежат уже 3 синих и 3 красных карандаша. Вероятность этого события равна $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

24. 1) После первого изъятия осталось 9 билетов, среди которых один выигрышный и восемь без выигрыша; $P = \frac{8}{9}$.

2) Число упорядоченных пар с первым выигрышным и вторым невыигрышным билетами равно $2 \cdot 8 = 16 = m$. Всего упорядоченных пар из 10 билетов $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90 = n$, тогда $P = \frac{m}{n} = \frac{16}{90} = \frac{8}{45}$.

25. 1) $P = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; б) $P = \frac{A_5^2}{A_9^2} = \frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 8} = \frac{5}{18}$.

26. 1) $P = \frac{A_{18}^2}{A_{36}^2} = \frac{18 \cdot 17}{36 \cdot 35} = \frac{17}{70}$, или $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{35} = \frac{17}{70}$.

2) $P = \frac{18 \cdot 18}{A_{36}^2} = \frac{18}{70} = \frac{9}{35}$, или $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{35} = \frac{18}{70} = \frac{9}{35}$.

3) $P = \frac{18}{36 - 1} = \frac{18}{35}$.

28. I способ. $P = \frac{10 \cdot 5}{A_{15}^2} = \frac{10 \cdot 5}{15 \cdot 14} = \frac{5}{21}$.

II способ. $P = \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} = \frac{5}{21}$.

§ 4. Вероятность произведения независимых событий (1/1 ч)

Цель изучения параграфа — интуитивное введение понятия независимых событий; обучение нахождению вероятности произведения двух независимых событий (а в **профильных** классах — любого числа независимых в совокупности событий).

Материал параграфа изучается в последовательности, предложенной учебником, причем после обоснования формулы (1), т. е. до рассмотрения задачи **1**, устно выполняются упражнения **31—34**. В **общеобразовательных** классах можно рассмотреть лишь задачу **2**, демонстрирующую возможность проверки независимости двух событий при знании вероятностей каждого из них и вероятности их совместного наступления.

После рассмотрения задачи **3** текста выполняются упражнения **35—39**, а в **профильных** классах дополнительно упражнения **40, 41** (после введения понятия независимости событий в совокупности), причем упражнение **40** устно.

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны иметь представление о независимости двух событий, уметь находить вероятность совместного наступления независимых событий при решении задач типа **33**, **34**, а учащиеся **профильных** классов — задач типа **35**, **37**.

Решение упражнений

41. Событие A — выбран мужчина, событие B — человек сделал прививку, событие C — человек уходит в отпуск не в мае. $P\,(A) = \dfrac{80}{120} = \dfrac{2}{3}$, $P\,(B) = \dfrac{1}{5}$, $P\,(C) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$. События A, B, C — независимые в совокупности, поэтому

$$P\,(ABC) = P\,(A) \cdot P\,(B) \cdot P\,(C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{9}{10} = \frac{3}{25} = 0{,}12.$$

§ 5. Формула Бернулли (0/1 ч)

Цель изучения параграфа учащимися **профильных** классов — знакомство с формулой Бернулли, дающей возможность находить вероятность разнообразных комбинаций событий в сериях однотипных опытов, в каждом из которых фиксируемое событие либо происходит, либо не происходит.

Материал параграфа, выделенный символом «П», в действительности может быть усвоен и учащимися **общеобразовательных** классов. Поэтому при желании учителя его содержание может быть рассмотрено в классе (при наличии дополнительного времени) либо может быть предложено к самостоятельному изучению дома учащимися **общеобразовательных** классов, легко усваивающими математику.

Учащиеся **профильных** классов, **интересующиеся математикой**, самостоятельно дома изучают обоснование формулы (3) (выделенное в тексте символом «М»).

На уроке учитель может рассмотреть лишь задачи **1** и **3** текста параграфа (предложив задачи **2** и **4** рассмотреть дома) и по своему усмотрению выбирает для закрепления формулы (3) упражнения из **42—45**.

В результате изучения параграфа учащиеся должны уметь с помощью формулы Бернулли решать задачи типа **42**, **43**.

Решение упражнений

42. 1) $P_{10}(4) = C_{10}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-4} = 210\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{64} = \frac{105}{512}$.

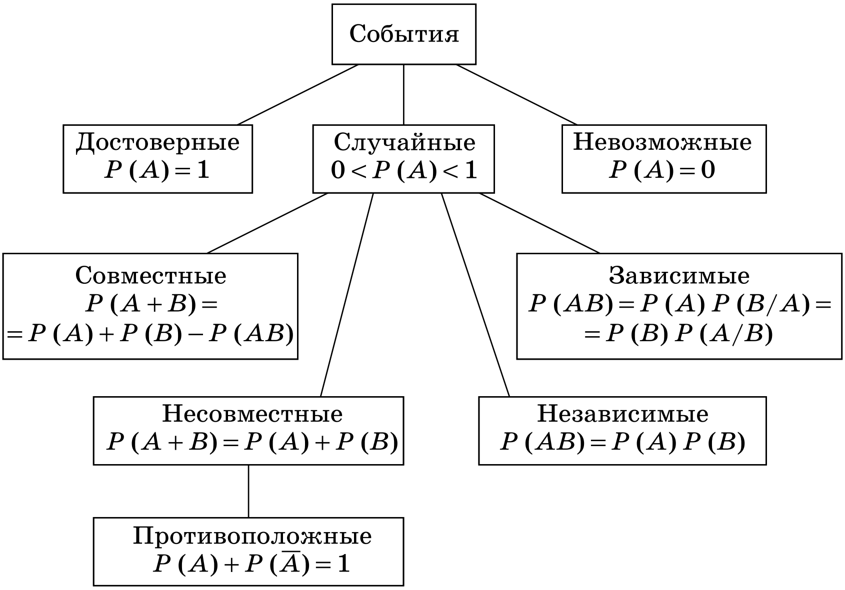
43. 1) $P_5(2) = C_5^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)^3 = 10\cdot\frac{1}{36}\cdot\frac{125}{216} = \frac{625}{3888}$.

44. $P = P_4(3) + P_4(4) = C_4^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1 + C_4^4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^0 =$
$= 4\cdot\frac{1}{216}\cdot\frac{5}{6} + 1\cdot\frac{1}{1296}\cdot 1 = \frac{7}{432}$.

45. $P = P_3(1) + P_3(2) + P_3(3) = C_3^1 \cdot 0{,}7^1 \cdot 0{,}3^2 + C_3^2 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^1 +$
$+ C_3^3 \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3^0 = 3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}09 + 3 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}343 \cdot 1 =$
$= 0{,}189 + 0{,}441 + 0{,}343 = 0{,}973$.

Урок обобщения и систематизации знаний (1/1 ч)

Систематизировать изученные знания можно, например, используя следующую схему:



При рассмотрении схемы повторяются определения всех видов событий и теоремы, связанные с этими событиями. В **профильных** классах при повторении независимых событий можно вспомнить и формулу Бернулли. Можно организовать повторение теории и с помощью вопросов на с.с. 201—202 учебника.

На этом уроке решаются ранее нерешенные задания из упражнений к главе VI. Задания «Проверь себя!» могут быть использованы как для фронтальной классной, так и для самостоятельной работы с проверкой в классе. Часть из них может быть предложена для домашней работы, однако при этом учитель должен напомнить учащимся об обязательной сверке своих результатов с ответами к этой рубрике, приведенными в конце учебника.

Решение упражнений

56. 1) $P = \dfrac{A_4^2}{A_{36}^2} = \dfrac{C_4^2}{C_{36}^2} = \dfrac{4 \cdot 3}{36 \cdot 35} = \dfrac{1}{105}$; 2) $P = \dfrac{4}{36} \cdot \dfrac{4}{35} = \dfrac{4}{315}$;

3) $P = \dfrac{A_9^2}{A_{36}^2} = \dfrac{9 \cdot 8}{36 \cdot 35} = \dfrac{2}{35}$, или $P = \dfrac{9}{36} \cdot \dfrac{8}{35} = \dfrac{2}{35}$;

4) $P = \dfrac{4}{36-1} = \dfrac{4}{35}$.

58. I способ. Событие «выпало не более двух орлов» состоит из суммы трех несовместных событий: A — выпало 2 орла, B — выпал 1 орел, C — не выпало ни одного орла (выпали одни решки).

$P(A) = \dfrac{C_3^2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \dfrac{3}{8}$, $P(B) = \dfrac{C_3^1}{8} = \dfrac{3}{8}$, $P(C) = \dfrac{C_3^0}{8} = \dfrac{1}{8}$

или $P(C) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$;

$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = \dfrac{3}{8} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{8}$.

II способ. Если событие A — выпало не более двух орлов, то ему противоположное событие $\overline{A}$ — выпало более двух орлов, т. е. 3 орла.

$$P(\overline{A}) = \frac{1}{8},\ P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

59. Решение приведено в § 2 настоящего пособия.

61. Событие A — наличие хотя бы одного выигрышного билета; $\overline{A}$ — отсутствие выигрышных билетов. Число всех возможных исходов при изъятии k билетов равно C_n^k. Число исходов, благоприятствующих событию $\overline{A}$, равно C_{n-m}^k;

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}.$$

62. Число всех возможных исходов равно C_m^k. Число благоприятствующих исходов (согласно правилу произведения) равно $C_n^p \cdot C_{m-n}^{k-p}$, так как C_n^p способами можно выбрать p деталей из n бракованных и к каждому этому набору можно присоединить любой набор из небракованных $k-p$ деталей, выбранных из $m-n$ небракованных деталей. Искомая вероятность $P=\dfrac{C_n^p \cdot C_{m-n}^{k-p}}{C_m^k}$.

63. Число всех возможных исходов равно C_{52}^{26}. Благоприятствующие исходы можно считать так: каждый из C_{48}^{24} наборов карт, среди которых нет тузов, может соединиться C_4^2 способами с двумя тузами, т. е. число благоприятствующих исходов равно $C_{48}^{24} \cdot C_4^2$ (вторая пачка образуется автоматически после составления первой пачки). Искомая вероятность $P=\dfrac{C_{48}^{24} \cdot C_4^2}{C_{52}^{26}}$.

64. 9 из 18 команд можно выбрать C_{18}^9 способами — это число всех возможных исходов опыта со случайным выбором. К пяти командам из одной республики можно присоединить 4 команды из других республик C_{13}^4 способами. Число благоприятствующих исходов в 2 раза больше числа C_{13}^4, так как пятерка команд может оказаться как в первой, так и во второй группе. Таким образом, $P=\dfrac{2 \cdot C_{13}^4}{C_{18}^9}$.

65. 4) $P=P_8(2)+P_8(1)+P_8(0)=$

$$=C_8^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8+C_8^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8+C_8^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8=\left(\frac{1}{2}\right)^8(28+8+1)=\frac{37}{256}.$$

66. 4) $P=P_5(4)+P_5(5)=C_5^4 \cdot \left(\dfrac{1}{6}\right)^4 \cdot \dfrac{5}{6}+C_5^5 \cdot \left(\dfrac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^0=$

$$=\left(\frac{1}{6}\right)^5(5 \cdot 5+1)=\frac{26}{6^5}=\frac{13}{3 \cdot 6^4}=\frac{13}{3888}.$$

67. $P=P_{10}(8)+P_{10}(9)+P_{10}(10)=\dfrac{1}{2^{10}}(45+10+1)=\dfrac{56}{2^{10}}=\dfrac{7}{128}$.

Контрольная работа № 6

Общеобразовательный уровень

1. Бросают 2 игральных кубика — большой и маленький. Какова вероятность того, что:
1) на обоих кубиках появятся четыре очка [пять очков];
2) на большом кубике появится 2 очка, а на маленьком — четное число очков [на маленьком кубике появится кратное 3 число очков, а на большом — 5 очков].

2. В коробке лежат 3 черных, 2 белых и 4 красных шара. Случайным образом вынимается один шар. Какова вероятность того, что это или белый, или красный шар [или черный, или красный шар]?

3. Вероятность попадания по мишени стрелком равна $\dfrac{19}{20}\left[\dfrac{14}{15}\right]$.

Какова вероятность: 1) непопадания по мишени при одном выстреле? 2) попадания по мишени в каждом из двух последовательных выстрелов? 3) попадания при первом и промахе — при втором выстреле?

---

4. В коробке лежат 4 белых и 3 черных шара. Наугад вынимают два шара. Какова вероятность того, что вынуты белый и черный шары [два черных шара]?

5. В вазе стоят 5 гвоздик и 6 нарциссов. Какова вероятность того, что среди трех случайным образом вынутых цветков окажется по крайней мере одна гвоздика [один нарцисс]?

Профильный уровень

1. В вазе лежат 7 яблок и 4 груши. Не глядя из вазы последовательно берут 2 фрукта, не возвращая их обратно. Какова вероятность того, что второй извлечена груша, при условии, что первой также была извлечена груша [вторым извлечено яблоко, при условии, что первой была извлечена груша]?

2. В ящике лежат 15 красных и 5 синих шаров. Наугад вынимают 2 шара. Какова вероятность того, что вынуты шары разных цветов [оба шара оказались красными]?

3. В коробке лежат 10 деталей, среди которых 4 [3] легче остальных. Случайным образом на 6 [7] из них сделали напыление. Какова вероятность того, что вынутая из коробки деталь окажется легкой без напыления [тяжелой с напылением]?

---

4. См. № 5 базового уровня.

5. Вероятность поражения мишени стрелком равна 0,9. Какова вероятность того, что после четырех выстрелов мишень будет поражена хотя бы двумя пулями [после пяти выстрелов мишень будет поражена хотя бы четырьмя пулями]?

6. Среди 10 [12] деталей 4 [5] бракованных. Наугад вынимают 3 детали. Какова вероятность того, что среди вынутых деталей две окажутся бракованными?

Глава VII Комплексные числа

Российская школа имеет опыт обучения комплексным числам. В учебниках алгебры для старших классов, по которым учились старшеклассники до 1964 г. (учебники А. П. Киселева), от издания к изданию совершенствовалось изложение и расширялось содержание темы «Комплексные числа». Но в результате реформы математического образования семидесятых годов прошлого века комплексные числа перешли в программу факультативных курсов, а затем в программу математических классов. И только в учебниках (до 1991 г.) для 9—10 классов общеобразовательных школ Ш. А. Алимова и др., под научным руководством академика А. Н. Тихонова в восьмидесятых годах прошлого века вновь появляется глава «Комплексные числа».

Комплексные числа вводятся в средней школе либо как упорядоченная пара чисел, либо как выражение $a + bi$, где a и b — действительные числа, i — некоторый символ, такой, что $i^2 = -1$. Затем формулируются правила, устанавливающие равенство комплексных чисел, вводятся числа, соответствующие привычным для школьников нулю и единице, устанавливаются правила арифметических действий над комплексными числами.

И в том и в другом случае возникают трудности, которые приходится преодолевать, с тем чтобы учащиеся осознанно воспринимали новое для них множество чисел. Например, когда комплексное число определяется как пара чисел, возникают трудности при введении алгебраической, а затем и тригонометрической формы его записи; в дальнейшем при выполнении арифметических действий. При введении комплексного числа другим способом сталкиваются с трудностями восприятия i как **символа**, такого, что $i^2 = -1$, а затем как **числа**, называемого *мнимой единицей*.

На примере теории комплексных чисел старшеклассники впервые (а возможно и вообще единственный раз) знакомятся со строгим построением теории чисел.

В учебнике раскрывается главная причина появления комплексных чисел как стремление сделать алгебраические уравнения разрешимыми. Введение числа i как корня уравнения $x^2 + 1 = 0$ (или как корня многочлена $x^2 + 1$) присоединяет это число к полю действительных чисел и таким образом расширяет это поле до поля комплексных чисел. Говорят, что поле комплексных чисел является алгебраическим расширением поля действительных чисел.

В самом деле, определяя комплексное число как число вида $a + bi$, где a называют действительной частью числа, а b — мнимой, получаем, что это число при $b = 0$ становится действительным. Таким образом, можно говорить о том, что действительные числа — частный случай комплексных. Причем операции сложения и умножения комплексных чисел определяются по правилам сложения и умножения многочленов при условии, что $i^2 = -1$. Для этих операций верны переместительное, сочетательное и распределительное свойства (т. е. эти операции коммутативны, ассоциативны и связаны соотношением дистрибутивности). Для операций сложения и вычитания существуют обратные, это соответственно вычитание и деление. Поэтому комплексные числа образуют поле.

Введение комплексно сопряженных (или просто сопряженных) чисел и модуля комплексного числа готовит к выполнению операции деления. При выполнении деления учащиеся должны осознать, что достаточно числитель и знаменатель дроби умножить на число, сопряженное знаменателю. Полученное при этом в знаменателе действительное число есть не что иное, как квадрат модуля числа, стоящего в знаменателе.

Геометрическая интерпретация комплексного числа играет важную роль в физике и других областях науки и техники, где приходится оперировать величинами, которые можно представить в виде точки на плоскости или в виде вектора. В настоящее время комплексные числа (точнее теория функций комплексного переменного) нашли широкое применение для решения многих проблем теоретической физики, гидродинамики, аэромеханики, электротехники, кораблестроения, теории упругости, картографии и, конечно, самой математики. Ф. Клейн (1849—1925) еще в начале XX в. отмечал, что физика давно перешла к употреблению мнимых величин, в особенности в оптике, когда приходится иметь дело с уравнениями колебательных движений.

Осознание геометрического смысла модуля комплексного числа, модуля разности комплексных чисел позволяет решать и геометрические, и физические задачи. Четкое представление об изображении комплексного числа точкой (или вектором) на плоскости позволяет осознанно воспринять понятие аргумента и соответственно тригонометрическую интерпретацию комплексного числа.

Операции умножения и деления комплексных чисел в тригонометрической форме выполняются достаточно легко. В отличие от них операции возведения в степень и извлечения корня натуральной степени не так просты для многих школьников и поэтому не являются обязательными для усвоения.

Тригонометрическая интерпретация комплексного числа позволяет решать алгебраические уравнения (в частности квадратные) в поле комплексных чисел и осознанно воспринимать основную теорему алгебры, которая формулируется в конце главы.

В результате изучения главы учащиеся должны уметь представлять комплексное число в алгебраической и тригонометрической форме, изображать число на комплексной плоскости, уметь выполнять операции сложения, вычитания, умножения и деления чисел, записанных в алгебраической форме, операции умножения и деления чисел, представленных в тригонометрической форме; знать ответы на вопросы **1—14** к главе VII, выполнять упражнения, такие, как **78—85**, и задания из рубрики «Проверь себя!».

§ 1. Определение комплексных чисел. Сложение и умножение комплексных чисел (0/2 ч)

Цель изучения параграфа — формирование понятия комплексного числа, обучение сложению и умножению комплексных чисел в алгебраической форме.

С расширением понятия числа учащиеся знакомились еще в основной школе, когда вводилось определение иррационального числа. Но только теперь им предстоит осознать не только причину, по которой расширение происходит, но и понять сам процесс расширения. Здесь строго выстраивается понятие комплексного числа, выясняется, как связаны комплексные и действительные числа, описываются свойства действий над комплексными числами.

На первом уроке желательно обратить внимание учащихся на историю развития понятия числа, которая коротко изложена в конце главы учебника. Такая беседа послужит осознанному восприятию новых для учащихся чисел. Кроме того, школьникам будет легче принять i как **символ**, такой, что $i^2 = -1$, и его же как **число**, которое называют **мнимой** единицей.

Для целостного восприятия понятия комплексного числа целесообразно весь теоретический материал параграфа представить в форме лекции на 25—30 мин урока.

План лекции может быть таким: 1) история расширения понятия числа; 2) понятие комплексного числа как выражения $a + bi$; 3) понятие комплексного числа как упорядоченной пары чисел; 4) равенство, сложение и умножение комплексных чисел, записанных в алгебраической форме.

Распределительное свойство умножения относительно сложения доказано в учебнике. Можно предложить учащимся прочитать его по книге в классе или дома. Остальные свойства учащиеся могут доказать аналогично, выполняя упражнение **15**.

Для усвоения понятия комплексного числа важными являются упражнения **9—14**. Именно при их выполнении учащиеся каждый раз обращаются к определению комплексных чисел и их равенству. Перед решением упражнения **12** рекомендуется рассмотреть более простое упражнение **9**. Решение упражнения **12** можно записать следующим образом:

12. 1) Число z — действительное, если его мнимая часть равна нулю.

Запишем число z в виде $z = -5x^2 + i\,(6x^2 + 2x)$, тогда $6x^2 + 2x = 0$, если $x = 0$ или $x = -\frac{1}{3}$. Таким образом, $z = 0 + 0i$ или $z = -\frac{5}{9} + 0i$.

При выполнении упражнения **12** учащиеся еще раз обращаются к тому, что число $0 + i0$ является и действительным, и чисто мнимым.

При решении упражнения **13** получаются два значения действительной и два значения мнимой части числа. Здесь следует обратить внимание на то, что в результате получаются четыре пары значений. Полезно показать, что каждый ответ можно записать и в виде $a + bi$, и в виде пар $(a; b)$.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблице.

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 1 (лекция)	1—5, 10	10 (3)	15 (1, 3, 5)
2	§ 1	7—9, 12—14	12 (2), 14 (1)	15 (2, 4, 6)

В результате изучения параграфа учащиеся должны знать определение комплексного числа; уметь доказывать равенство комплексных чисел и выполнять действия сложения и умножения при решении таких упражнений, как **7**, **8**, **10**.

§ 2. Комплексно сопряженные числа. Модуль комплексного числа. Операции вычитания и деления (0/3 ч)

Цель изучения параграфа — научить выполнять операции вычитания и деления комплексных чисел.

Важное место при изучении теоретического материала параграфа занимает введение операций деления и вычитания как операций, обратных умножению и сложению. Учащиеся обычно забывают, что вычитание и деление дробей обыкновенных и десятичных они изучали как действия, обратные сложению и умножению, в десятом классе деление многочленов рассматривали как действие, обратное умножению. Поэтому полезно попросить одного из учащихся подготовить небольшое сообщение, используя учебники математики для 5—6, 10 классов и, например, «Энциклопедический словарь юного математика». Из этого сообщения должен быть сделан вывод о необходимости введения числа, противоположного данному и обратного данному. И если число, противоположное данному, легко ввести, зная операцию умножения ($(-1)\,z$), то проблема введения числа, обратного данному, более сложная. Для ее решения можно использовать частично поисковый метод. К решению проблемы учащиеся подходят с помощью вопросов учителя: 1) Произведение взаимно обратных действительных чисел равно 1. Верно ли это для комплексных чисел? 2) Если верно, то что представляют собой действительная и мнимая части числа, обратного данному? Как они связаны с действительной и мнимой частью данного числа?

Отвечая на поставленные вопросы, учащиеся предполагают, что для числа $z = a + bi$ обратным будет число $x + yi$ и произведение двух комплексных чисел равно 1. Значит, справедливо равенство $(a + bi)\,(x + yi) = 1$, откуда $(ax - by) + (bx + ay)\,i = 1$, т. е. действительная часть равна 1, а мнимая равна 0. После решения соответствующей системы $\begin{cases} ax - by = 1, \\ bx + ay = 0 \end{cases}$ учащиеся приходят к выражениям для x и y, которые требуют дальнейшего толкования. Отсюда учитель может перейти к введению понятий сопряженных чисел и модуля комплексного числа.

Рассматривая теперь вычитание и деление, обращаем внимание учащихся на то, что обе операции вводятся как операции, обратные сложению и умножению:

1. Для любых двух чисел z_1 и z_2 существует, и при том только одно число z, такое, что выполняется соответствующее равенство $z + z_2 = z_1$ ($z_2 z = z_1$).

2. Выражаем z из каждого уравнения. Для чего к обеим частям первого уравнения прибавляем число, противоположное z_2. Обе части второго умножаем на число, сопряженное с z_2.

Изучая модуль комплексного числа, можно упомянуть о том, что модуль действительного числа есть расстояние от начала координат до точки, соответствующей числу. При изучении уже следующего параграфа учащиеся смогут ответить на вопрос, что же представляет собой модуль комплексного числа с геометрической точки зрения.

Свойства, связанные с сопряженными числами, учащиеся смогут наблюдать, выполняя упражнения **16**, **21**, **22**.

Учащимся, **интересующимся математикой**, можно предложить самостоятельно доказать, что: 1) сумма и произведение взаимно сопряженных чисел — действительное число; 2) число, сопряженное сумме двух комплексных чисел, равно сумме чисел, сопряженных слагаемым; 3) число, сопряженное разности двух комплексных чисел, равно разности чисел, сопряженных уменьшаемому и вычитаемому; 4) число, сопряженное произведению двух комплексных чисел, равно произведению чисел, сопряженных множителям; 5) число, сопряженное частному двух комплексных чисел (делитель отличен от нуля), равно частному сопряженных чисел.

Важным итогом изучения должно стать уверенное выполнение учащимися изученных операций, в частности операции возведения в степень двучлена с использованием формулы бинома Ньютона. Желательно, чтобы возведение в натуральную степень мнимой единицы учащиеся делали осознанно, не заучивая наизусть результат возведения в степень.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблице.

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 2, до задачи 2	16—18, 23	16 (3, 4), 17 (3, 4)	30
2	§ 2, задачи 2, 3	19—22, 24—26	20 (1, 3), 21 (3, 7)	32, 34;
3	§ 2	27—29, 31 (1)	28 (3, 4)	33

В результате изучения параграфа учащиеся должны знать определения сопряженных чисел, модуля комплексного числа; уметь выполнять арифметические действия с комплексными числами при решении упражнений типа **19—22**.

Решение упражнений

30. 1) Пусть $z = x + iy$, тогда $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ и уравнение примет вид $\sqrt{x^2+y^2} - i(x+iy) = 1 - 2i$. Это уравнение равносильно уравнению $(\sqrt{x^2+y^2} + y) - xi = 1 - 2i$. Таким образом, приходим к системе уравнений $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + y = 1, \\ -x = -2, \end{cases}$ откуда $x = 2$, $y = -1{,}5$. Следовательно, $z = 2 - 1{,}5i$.

2) Пусть $z = x + iy$, тогда $z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$, $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ и уравнение примет вид $(x^2 - y^2) + 2xyi + 3\sqrt{x^2+y^2} = 0$. Получим систему уравнений $\begin{cases} x^2 - y^2 + 3\sqrt{x^2+y^2} = 0, \\ 2xy = 0. \end{cases}$ Решение ее приводит к совокупности двух систем

$$\begin{cases} x = 0, \\ -y^2 + 3\sqrt{y^2} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0, \\ x^2 + 3\sqrt{x^2} = 0. \end{cases}$$

Решением первой системы являются три значения y: 0, 3, –3. Вторая система решений не имеет. Следовательно, корни уравнения $z_1 = 0$, $z_2 = 3i$, $z_3 = -3i$.

31. 1) Так как $i^{4n+k} = i^k$, то степени числа i можно вычислить следующим образом: $i^6 = i^{4+2} = i^2 = -1$, $i^{20} = i^{4 \cdot 5} = i^0 = 1$, $i^{30} = -1$, $i^{36} = 1$, $i^{54} = -1$. Сумма $-1 + 1 - 1 + 1 - 1$ равна -1.

2) Так как $i^{13} = i^{4 \cdot 3 + 1} = i$, $i^{23} = -i$, $i^{33} = i$, то сумма дробей равна

$$\frac{2}{i} + \frac{1}{-i} = \frac{2(-i)}{i(-i)} + \frac{1(i)}{(-i)i} = -2i + i = -i.$$

32. Так как для любых комплексных чисел z_1 и z_2 верно равенство $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ (см. задачу **4**, § 2), то $2(c^2 + c^2) = 4c^2$.

33. 1) Применим формулу бинома Ньютона и возведение числа i в степень. Получим $(1 + i)^8 = 1 + 8i + 28i^2 + 56i^3 + 70i^4 + 56i^5 + 28i^6 + 8i^7 + i^8 = 1 + 8i - 28 - 56i + 70 - 56i - 28 - 8i + 1 = 16 - 112i$.

34. Пусть $a = m^2 + n^2$, $b = p^2 + q^2$. Но $m^2 + n^2 = (m + in)(m - in)$, $p^2 + q^2 = (p + iq)(p - iq)$, следовательно, $ab = (m + in)(p - iq) \times (m - in)(p + iq) = (mp + nq + i(np - mq))(mp + nq - i(np - mq)) = (mp + nq)^2 + (np - mq)^2$.

35. Пусть $z = a + ib$, $z \neq 1$, тогда

$$c = \frac{1-z}{1+z} = \frac{1-a-ib}{1+a+ib} = \frac{(1-a-ib)(1+a-ib)}{(1+a)^2+b^2} =$$

$$= \frac{1-a^2-b^2 + i(b(a-1) - b(a+1))}{(1+a)^2+b^2}. \qquad (1)$$

Если c — чисто мнимое число, то $1 - a^2 - b^2 = 0$, т. е. $a^2 + b^2 = 1$, следовательно, $|z| = 1$. Обратно, пусть $|z| = 1$, т. е. $z = a + ib$, где $a^2 + b^2 = 1$, то из (1) следует, что действительная часть числа $c = \dfrac{1-z}{1+z}$ равна 0, т. е. число c — чисто мнимое.

§ 3. Геометрическая интерпретация комплексного числа (0/2 ч)

Цель изучения параграфа — научить изображать числа на комплексной плоскости, сформировать представление о геометрической интерпретации свойств арифметических действий над комплексными числами.

Учащиеся знают геометрическую интерпретацию действительных чисел. С ее помощью, в частности, вводилось понятие отрицательных чисел и действий сложения и вычитания положительных и отрицательных чисел. Представление комплексного числа в виде пары чисел или в алгебраической форме подсказывает возможность изображения этого числа на плоскости. С помощью геометрической интерпретации комплексного числа можно наглядно демонстрировать не только сами числа, но и действия над ними, и в частности решать с ее помощью как задачи самой теории комплексных чисел, так, например, и задачи по геометрии.

Перед изучением темы желательно предложить учащимся дома повторить материал, который поможет в усвоении нового: уравнение окружности, определение координат вектора, формулу расстояния между двумя точками, свойство перпендикуляра, проведенного к отрезку через его середину.

Так как содержание темы требует активного применения наглядности, целесообразно подготовить на плакатах или в форме раздаточного материала рисунки **104—110** учебника (учитывая, что старшеклассники не всегда приносят учебники на занятия). Можно использовать презентацию, выполненную в соответствии с этими рисунками, добавив кадры с решениями некоторых заданий из упражнений **40**, **41**, а также при наличии готового рисунка (рис. 42) упражнение **43** дополнительно, которое может быть быстро решено со всем классом.

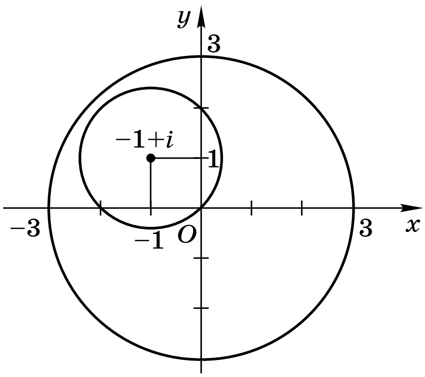


Рис. 42

Можно заранее заготовить раздаточный материал с изображением комплексной плоскости и заданий по изображению на ней важных для осознания геометрической интерпретации понятий.

1. Построить на комплексной плоскости точки

$$5,\ -2,\ 3i,\ -4i,\ 1+2i,\ -2+3i,\ -1-5i,\ 2-4i.$$

2. Построить на той же комплексной плоскости точки, соответствующие числам, сопряженным с числами, данными в первом задании.

3. На комплексной плоскости изобразить множество точек, удовлетворяющих условию:

$|z| = 5$, $|z + 2| = 3$, $|z - 1 - 2i| = |z - 2 + 4i|$, $|z + 1 + 5i| < 2$.

4. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} |z-2| = |z-6|, \\ |z-3i| = |z-5i|; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |z-2| = |z-6|, \\ |z| = 4. \end{cases}$

Решение системы, подобной заданию **4** из предложенных выше, подготовит к решению более трудных упражнений типа **42, 44**.

При наличии времени учитель может показать решение одной из геометрических задач с помощью комплексных чисел.

З а д а ч а. Доказать, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Р е ш е н и е. Расположим в комплексной плоскости параллелограмм так, как показано на рисунке 43. Пусть z_1, z_2 — комплексные числа, соответствующие координатам вершин параллелограмма. Тогда комплексная координата третьей вершины $z = z_1 + z_2$. Известно, что $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, кроме того, длины диагоналей равны длинам векторов $\overrightarrow{z_1z_2}$, $\overrightarrow{Oz}$. Значит, применяя результат решения задачи **4** из § 2, получим

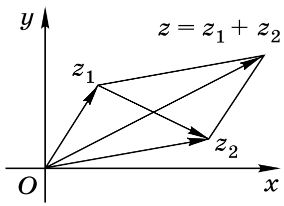


Рис. 43

$$|\overrightarrow{z_1z_2}|^2 + |\overrightarrow{Oz}|^2 = (z_2 - z_1)(\overline{z_2 - z_1}) + (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) =$$
$$= (z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) =$$
$$= 2(|\overrightarrow{Oz_1}|^2 + |\overrightarrow{Oz_2}|^2).$$

Р а с п р е д е л е н и е м а т е р и а л а п а р а г р а ф а по урокам отражено в таблице.

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 3, до задачи 1	36, 37, 39	36 (5, 7, 13), 37 (3)	43
2	§ 3, задачи 1, 2	38, 40, 41	40 (5), 41 (3)	42, 44

В р е з у л ь т а т е и з у ч е н и я п а р а г р а ф а учащиеся должны у м е т ь изображать числа на комплексной плоскости, з н а т ь, в чем состоит геометрический смысл модуля комплексного числа, у м е т ь решать упражнения типа **36, 37**.

Решение упражнений

42. 1) Решением первого уравнения системы являются все числа вида $-1{,}5 + yi$. Эти числа находятся на одинаковом расстоянии от точек $(-1; 0)$ и $(-2; 0)$ (задача **1**, § 3). Подставив значение $x = -1{,}5$

во второе уравнение системы, получим $|3(-1{,}5 + yi) + 9| = |5(-1{,}5 + yi) + 10i|$, откуда $|4{,}5 + 3yi| = |-7{,}5 + (5y + 10)i|$. Модули чисел равны, следовательно, $\sqrt{4{,}5^2 + 9y^2} = \sqrt{(-7{,}5)^2 + (5y+10)^2}$. Корнями полученного уравнения являются числа $y_1 = -\frac{17}{4}$ и $y_2 = -2$. Следовательно, $z_1 = -1{,}5 - \frac{17}{4}i$, $z_2 = -1{,}5 - 2i$.

43. Решениями первого уравнения системы являются все числа, удаленные от числа $-1 + i$ на расстояние, равное $\sqrt{2}$, решениями второго — числа, удаленные от начала координат на расстояние, равное 3. Окружности с центром в точке $-1 + i$ и точке (0; 0), радиусов $\sqrt{2}$ и 3 соответственно не пересекаются (см. рис. 42). Действительно, диаметр первой окружности равен $2\sqrt{2}$ (так как $|z - (-1 + i)| = \sqrt{2}$); он меньше радиуса второй окружности. Следовательно, система не имеет решения.

44. Первое уравнение системы равносильно уравнению $|z - 4| = |z - 8|$, решением которого является множество чисел, равноудаленных от точек 4 и 8 действительной оси, т. е. $x = 6$. Тогда второе уравнение примет вид $|6 + yi - 12| = \frac{5}{3}|6 + (y - 8)i|$, откуда $\sqrt{36 + y^2} = \frac{5}{3}\sqrt{36 + (y-8)^2}$. Решив это уравнение, получим $y_1 = 17$, $y_2 = 8$. Система имеет два решения $z_1 = 6 + 17i$, $z_2 = 6 + 8i$.

§ 4. Тригонометрическая форма комплексного числа (0/1 ч)

Ц е л ь и з у ч е н и я п а р а г р а ф а — формирование понятия аргумента комплексного числа, обучение записи комплексного числа в тригонометрической форме.

Осознанное восприятие аргумента числа во многом зависит от умения представить число на комплексной плоскости. С этого и имеет смысл начать изучение темы. Можно использовать рисунок 111 учебника для того, чтобы вспомнить, как же найти модуль каждого комплексного числа. Затем поставить вопрос о нахождении угла между вектором, соответствующим числу z, и положительным направлением оси Ox. Каждое комплексное число вполне определяется этим углом и модулем числа, что приводит к введению понятия аргумента комплексного числа.

Связь действительной и мнимой частей комплексного числа с его модулем и аргументом целесообразнее устанавливать на конкретных примерах. В частности можно пользоваться рисунком 105 учебника. Для каждой точки выписать значения действительной и мнимой частей соответствующего числа, его аргумента и модуля. Только затем сделать вывод о том, что аргумент определяется неоднозначно, и записать комплексное число в тригонометрической форме.

Выполняя упражнение **45**, учащиеся в первую очередь ставят вопрос о расположении числа на комплексной плоскости, что позволяет точно оценить аргумент.

Решая задачу **2 (1)** и упражнение **46 (1—6)**, желательно придерживаться алгоритма: 1) выяснить расположение числа на комплексной плоскости; 2) вычислить тангенс и найти аргумент числа; 3) вычислить модуль; 4) записать число в тригонометрической форме.

В задаче **2** (2) и упражнениях **46** (7, 8), **48**, **49**, **52** учащимся, прежде чем выражать число в тригонометрической форме, необходимо проанализировать выражение, представляющее это число.

Например, при решении задачи **48 (1)** выясняем, что модуль числа равен 1, аргументы синуса и косинуса на первый взгляд одинаковые, но перед мнимой частью числа стоит знак минус. Однако, пользуясь нечетностью функции синус, запишем $-\sin\frac{\pi}{9}=\sin\left(-\frac{\pi}{9}\right)$, а четность функции косинус позволяет преобразовать косинус: $\cos\frac{\pi}{9}=\cos\left(-\frac{\pi}{9}\right)$. Таким образом, число запишется в виде $\cos\left(-\frac{\pi}{9}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{9}\right)$.

В последнем абзаце параграфа приводятся примеры записи выражений, которые не представляют собой записи чисел в тригонометрической форме. Полезно предложить учащимся самостоятельно проанализировать причину, по которой нельзя считать данную запись тригонометрической формой комплексного числа. Затем аналогично провести анализ упражнения **49**, объясняя причину, по которой выражения в заданиях **49** (2, 4, 5) нельзя считать тригонометрической формой записи числа $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Ученик должен понять, что $\frac{5\pi}{3}$ и $-\frac{\pi}{3}$ и есть тот самый аргумент: $-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}-2\pi$, поэтому верный ответ 1 и 3.

Умение представить число, записанное в алгебраической форме, в форме тригонометрической и наоборот — главная задача этого урока. Решая упражнение **47**, ученик должен вспомнить, что $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Следовательно, a и b находим, вычисляя соответственно косинус и синус числа.

47. 1) $\cos\frac{5\pi}{3}=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{5\pi}{3}=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, поэтому $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

На уроке и дома целесообразно решить по несколько заданий из упражнений **45—49**, дополнительно упражнения **51**, **52**. Остальные упражнения можно решать в течение последующих уроков. Усвоение последующих тем требует уверенного владения представлением комплексного числа и в алгебраической, и в тригонометрической формах.

В результате изучения параграфа учащиеся должны уметь выполнять упражнения типа **46**, **47**.

Решение упражнений

51. Так как $|z| = 1$, то $|z|^2 = 1$. Следовательно, $z \cdot \bar{z} = 1$, поэтому $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

52. 2) Так как

$$\cos 40° = -\cos(180° + 40°), \quad \sin 40° = -\sin(180° + 40°),$$

то

$$-5(\cos 40° + i \sin 40°) =$$
$$= -5\left(-\cos(180° + 40°) + i(-\sin(180° + 40°))\right) =$$
$$= 5(\cos 220° + i \sin 220°).$$

3) Так как $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$, $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, то $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$.

§ 5. Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме. Формула Муавра (0/2 ч)

Цель изучения параграфа — научить учащихся выполнять арифметические действия над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме; ознакомить с возведением в степень числа, записанного в тригонометрической форме.

При изучении материала параграфа учащимся потребуются умения представлять комплексное число в тригонометрической форме и выполнять преобразования тригонометрических выражений. Поэтому целесообразно начать урок с повторения и выполнить задания предыдущего параграфа из тех, что не успели на предыдущем уроке, например, из упражнений **47**, **48**, **50**.

Введение умножения и деления чисел, записанных в тригонометрической форме, требует знания теоремы сложения для синуса и косинуса и умения выполнять деление комплексных чисел, записанных в алгебраической форме. Поэтому учащимся можно предложить самостоятельно вывести формулы (1) и (2).

Выполняя упражнения **53**, **54**, учащиеся прежде всего должны убедиться в том, что числа, арифметические действия с которыми они выполняют, записаны в тригонометрической форме.

Материал параграфа после задачи **2** не является обязательным для учащихся. Однако прямое применение формулы Муавра для возведения в степень числа, записанного в тригонометрической форме, не должно вызывать трудности. Желательно ознакомить всех учащихся с формулой и задачей **3**. Если учитель сочтет возможным, можно предложить всем учащимся выполнить упражнения **55** и **56** (1, 2, 4). Эти упражнения полезны тем, что прежде чем их выполнять, необходимо провести анализ условия и наметить пути решения. Желательно, чтобы ученик видел, что первым действием в упражнении **56 (1)** должно быть деление, а потом умножение на число i. В упражнении **56 (2)** достаточно числитель и знаменатель умножить на число, сопряженное знаменателю. Упражнение **56 (4)** можно решить разными путями: 1) второй множитель числителя представить в алгебраической форме и затем выполнить действия; 2) все числа записать в тригонометрической форме и затем выполнить действия. Упражнение **56 (3, 5)** полезно проанализировать и обсудить пути решения, даже не выполняя всех вычислений.

Упражнения **59** и **60** интересны тем, что при их решении активно повторяется тригонометрия, что полезно перед экзаменами. Учащиеся, **интересующиеся математикой**, могут решить упражнение **60** самостоятельно после знакомства с приемами решения задачи **6** текста параграфа.

Уравнение, решение которого приведено в задаче **5**, и упражнение **58** красиво решаются с помощью тригонометрической формы записи комплексного числа. К сожалению, не всегда аргумент находится так легко и красиво, поэтому на данном уроке не стоит усложнять упражнения. В § 6 учащиеся увидят общий прием решения квадратного уравнения $z^2 = a$, где a — комплексное число.

На *втором* уроке можно провести *самостоятельную* работу, цель которой — проверить умение выполнять арифметические действия над числами, записанными как в алгебраической, так и в тригонометрической форме.

1. Выполнить действия и результат записать в тригонометрической форме:

1) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(1+i)$ $\left[(-1+i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right]$;

2) $\dfrac{2}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$ $\left[\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}{i}\right]$.

2. Выполнить указанные действия и результат записать в алгебраической форме:

1) $3(\cos 12^\circ + i\sin 12^\circ)\cdot 2(\cos 18^\circ + i\sin 18^\circ)$
$\left[0{,}5\left(\cos\frac{3\pi}{7}+i\sin\frac{3\pi}{7}\right)\cdot 3\left(\cos\frac{\pi}{14}+i\sin\frac{\pi}{14}\right)\right]$;

2) $\dfrac{0{,}5\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)}{4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}$ $\left[\dfrac{0{,}7(\cos 87^\circ+i\sin 87^\circ)}{0{,}2(\cos 42^\circ+i\sin 42^\circ)}\right]$.

---

3. Решить уравнение $z^2 = 25i$ $[z^2 = -9i]$ с помощью тригонометрической формы комплексного числа.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблице.

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 5, задачи 1 и 2	53, 54, 56 (1, 2)	53 (3), 54 (3)	59 (1, 2)
2	§ 5, задача 3 (по желанию)	48, 50, 53, 54, 57 (1)	Задачи в тексте	58, 60, задачи 4, 5, 6

В результате изучения параграфа учащиеся должны уметь выполнять действия умножения и деления комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме при выполнении упражнений типа **53, 54**.

Решение упражнений

57. 2) Модуль числа должен быть положительным, поэтому представим первый множитель в виде $3\left(-\cos\frac{\pi}{6}+i\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)$. Далее $-\cos\frac{\pi}{6}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{7\pi}{6}$, а $-\sin\frac{\pi}{6}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{7\pi}{6}$.

Преобразуем второй множитель, используя свойства четности и формулу Муавра:

$$\left(\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)\right)^4=\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)^4=$$

$$=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right).$$

Выполним умножение

$$3\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=3\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

3) Преобразования выполним в следующем порядке: представим числитель и знаменатель в тригонометрической форме, выполним деление, затем возведем в степень по формуле Муавра.

$$\sqrt{3}i+1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),\quad i-1=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Частное равно $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$. Применим формулу Муавра:

$$\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)\right)^6=8\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

58. 3) Представим число $2-2i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме: $2-2i\sqrt{3}=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$. Пусть $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Данное уравнение примет вид $r^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$. Отсюда $r=2$, $2\varphi=\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in \boldsymbol{Z}$, $\varphi=\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in\boldsymbol{Z}$. Все решения уравнения можно записать в виде $z=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\pi k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi k\right)\right)$, $k\in\boldsymbol{Z}$. Решение в алгебраической форме имеет вид $z_1=\sqrt{3}+i$, $z_2=-\sqrt{3}-i$.

59. 4) Преобразуем дробь, применяя свойства степени, $\frac{(1+i)^{2n}(1+i)}{(1-i)^{2n}(1-i)^{-1}}=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n}(1+i)(1-i)$. Произведение $(1+i)(1-i)$ равно 2. Выполним деление:

$$2\left(\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^{2n}=2\left(\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\right)^{2n}=2i^{2n}.$$

Запишем полученное число в тригонометрической форме $2i^{2n}=$ $=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{2n}$.

Если n — четное, то $z=2(\cos 0+i\sin 0)$; если n — нечетное, то $z=2(\cos\pi+i\sin\pi)$.

Преобразования можно выполнить иначе: представить числитель и знаменатель в тригонометрической форме, применить свойства степени и затем формулу Муавра.

61. $\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n=\left(\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha-i\sin\alpha}\right)^n=\frac{\cos n\alpha+i\sin n\alpha}{\cos n\alpha-i\sin n\alpha}=\frac{1+i\operatorname{tg}n\alpha}{1-i\operatorname{tg}n\alpha}$.

62. Рассмотрим одновременно решение обоих заданий, для чего введем обозначения:

$$S_n=\sin x+\sin 3x+\ldots+\sin(2n-1)x,$$
$$\Sigma_n=\cos x+\cos 3x+\ldots+\cos(2n-1)x.$$

Рассмотрим сумму Σ_n+iS_n, группируя слагаемые парами. Получим

$$T_n=(\cos x+i\sin x)+(\cos 3x+i\sin 3x)+\ldots$$
$$\ldots+(\cos(2n-1)x+i\sin(2n-1)x).$$

Здесь первая пара слагаемых, записанных в скобках, представляет собой тригонометрическую форму некоторого комплексного числа z, а остальные пары в соответствии с формулой Муавра соответственно z^3, z^5, ..., z^{2n-1}, причем суммы действительных частей равны Σ_n, а мнимых — S_n. Сумму T_n можно записать так: $T_n=z+z^3+\ldots+z^{2n-1}=z(1+z^2+\ldots+z^{2n-2})$. Выражение в скобках представляет собой сумму геометрической прогрессии, у которой $b_1=1$, $q=z^2$. Эта сумма равна $z\frac{1-z^{2n}}{1-z^2}=\frac{z-z^{2n+1}}{1-z^2}$. Таким образом, $T_n = \dfrac{\cos x + i\sin x - (\cos(2n+1)x + i\sin(2n+1)x)}{1-\cos 2x - i\sin 2x}$. Умножая числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю, и выполняя преобразования с применением теоремы сложения, получим дробь

$$\frac{(\cos x - \cos(2n+1)x + i(\sin x - \sin(2n+1)x)(1-\cos 2x + i\sin 2x)}{(1-\cos 2x)^2 + \sin^2 2x},$$

после преобразования которой получим число $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}i$, где

$a = \cos x - \cos x \cdot \cos 2x - \cos(2n+1)x + \cos 2x \cdot \cos(2n+1)x -$
$- \sin x \cdot \sin 2x + \sin 2x \cdot \sin(2n+1)x,$

$b = \sin 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \cos(2n+1)x + \sin x - \sin x \cdot \cos 2x -$
$- \sin(2n+1)x + \cos 2x \cdot \sin(2n+1),$

$c = 2(1-\cos 2x).$

Здесь дробь $\dfrac{a}{c}$ представляет собой действительную часть, а дробь $\dfrac{b}{c}$ — мнимую часть комплексного числа T_n. В числителе первой дроби сумма первого, второго и пятого слагаемых равна 0, а сумма четвертого и шестого равна $\cos(2n-1)x$. Таким образом,

$$\sum\nolimits_n = \frac{\cos(2n-1)x - \cos(2n+1)x}{4\sin^2 x} = \frac{2\sin 2nx \cdot \sin x}{4\sin^2 x} = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}.$$

В числителе второй дроби сумма первого и четвертого слагаемых равна $\sin x$, а сумма второго и шестого равна $\sin(2n-1)x$. Таким образом,

$$S_n = \frac{2\sin x - \sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x}{4\sin^2 x} = \frac{2\sin x - 2\sin x \cdot \cos 2nx}{4\sin^2 x} =$$
$$= \frac{1-\cos 2nx}{2\sin x} = \frac{2\sin^2 nx}{2\sin x} = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$$

§ 6. Квадратное уравнение с комплексным неизвестным (0/1 ч)

Цель изучения параграфа — научить учащихся решать квадратные уравнения с комплексными неизвестными и действительными коэффициентами.

Решение уравнения $z^2 = a$, где $a < 0$, дается в учебнике аналогично тому, как это было сделано при решении уравнения при неотрицательных значениях a. Начинается с уравнения $z^2 = -1$, что позволяет заменить -1 известным символом i^2 и применить формулу разности квадратов. Уравнение $z^2 = a$, где $a < 0$, учащиеся могут решить по аналогии самостоятельно, записав $a = -1 \cdot |a|$. Тогда уравнение $z^2 = a$ можно записать в виде $z^2 = -1 \cdot |a|$. Далее $z^2 = i^2|a|$, $z^2 - i^2|a| = 0$, $(z - i\sqrt{|a|})(z + i\sqrt{|a|}) = 0$, $z_{1,2} = \pm i\sqrt{|a|}$.

Необходимо акцентировать внимание учащихся на том, что теперь формула $z_{1,2} = \pm\sqrt{a}$ верна для любых действительных значений a так же, как и равенство $(\sqrt{a})^2 = a$.

Решая полные квадратные уравнения с действительными коэффициентами, учащиеся сами придут к выводу о том, что комплексные корни уравнения являются сопряженными. Обучение применению теоремы Виета и разложению квадратного трехчлена на множители не должно становиться самоцелью: важно, чтобы учащиеся осознали, что комплексные корни квадратного уравнения обладают теми же свойствами, что и действительные.

Решение уравнения $z^2 = a$, где a — комплексное число, не является обязательным. Однако учащимся полезно знать, что в этом случае (как и в задаче **5**, § 5) решение опирается на равенство комплексных чисел. Прием записи равенства действительной и мнимой частей чисел, записанных в алгебраической форме, не требует нахождения аргумента комплексного числа, что не всегда легко сделать.

Упражнения **64 (1—4)**, **65** можно решить устно. Из упражнений **68—71** достаточно выполнить по два задания, а остальные оставить для уроков обобщения и систематизации знаний.

В результате изучения параграфа учащиеся должны уметь решать квадратные уравнения при выполнении упражнений типа **64—67**.

Решение упражнений

72. 1) Представим z_1 в виде $x + iy$ и найдем второй корень уравнения как число, ему сопряженное: $z_1 = \frac{(-3-2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} =$ $= -\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$, откуда $z_2 = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$. Для составления квадратного уравнения (по теореме Виета) найдем $p = -(z_1 + z_2) = \frac{8}{5}$, $q = z_1 z_2 = \frac{13}{5}$. Получим уравнение $5z^2 + 8z + 13 = 0$.

73. 1) Представим z в виде $z = x + iy$, где x и y — действительные числа. Получим $(x + iy)^2 = -5 + 12i$, откуда по определению равенства комплексных чисел имеем $\begin{cases} x^2 - y^2 = -5, \\ 2xy = 12. \end{cases}$ $x = \frac{6}{y}$; откуда $\frac{36}{y^2} - y^2 = -5$; полученное уравнение приведем к целому виду $(y \neq 0)$ и решим биквадратное уравнение $y^4 - 5y^2 - 36 = 0$.

$y^2 = t$, $t^2 - 5t - 36 = 0$, $t_1 = 9$, $t_2 = -4$. Тогда $y^2 = 9$, $y_{1,2} = \pm 3$, $x_{1,2} = \pm 2$. Если $t = -4$, то $y^2 = -4$, второе уравнение действительных корней не имеет. $z_{1,2} = \pm(2 + 3i)$ — корни уравнения.

73. 5) Пусть $z^3 = t$, тогда уравнение примет вид $t^2 - 7t - 8 = 0$, откуда $t_1 = 8$, $t_2 = -1$. Следовательно, $z^3 = 8$, $z^3 = -1$. Разложив на множители правые части в каждом из уравнений, получаем $z^3 - 8 = 0$, $(z - 2)(z^2 + z + 4) = 0$, $z^3 + 1 = 0$, $(z + 1)(z^2 - z + 1) = 0$. Приравняем нулю каждый из множителей. Из первого уравнения получим $z_1 = 2$, $z_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}$, из второго уравнения получим $z_4 = -1$, $z_{5,6} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

§ 7. Извлечение корня из комплексного числа. Алгебраические уравнения

Материал данного параграфа **не является обязательным** для изучения. Учитель сам вправе решить, знакомить ли учащихся с теоретическим материалом.

Вывод формулы, с помощью которой извлекается корень натуральной степени из комплексного числа, основан на равенстве комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме.

Решая задачи **1** и **2**, ученики могут просто воспользоваться готовой формулой. Здесь важно понять, почему из всех целых чисел k выбираются значения от 0 до $n - 1$. Полезно при решении, например, задачи **1** проследить, что при значениях k, равных 5, 6, 7, значения корней повторяются. В задаче **2** демонстрируется наличие шести корней уравнения шестой степени с комплексными неизвестными. Это несложное уравнение помогает осознать суть основной теоремы алгебры и следствия из нее.

Решение упражнений

75. 6) Решение уравнения сводится к вычислению корня четвертой степени из числа $1 + i$. Здесь $a = 1$, $b = 1$, $\operatorname{tg} \varphi = 1$, $|z| = \sqrt{2}$. Следовательно, в тригонометрической форме $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$. По формуле (1)

$$z_k = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{4}\right) =$$

$$= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi + 8\pi k}{16} + i\sin\frac{\pi + 8\pi k}{16}\right),$$

где $k = 0, 1, 2, 3$. Отсюда найдем корни уравнения

$$z_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right),$$

$$z_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i\sin\frac{9\pi}{16}\right), \quad z_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i\sin\frac{17\pi}{16}\right),$$

$$z_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i\sin\frac{25}{16}\right).$$

76. 2) Пусть $z^4 = t$, тогда уравнение примет вид $36t^2 - 13t + 1 = 0$, откуда $t_1 = \dfrac{1}{4}$, $t_2 = \dfrac{1}{9}$. Следовательно, $z^4 = \dfrac{1}{4}$ или $z^4 = \dfrac{1}{9}$. Решим первое уравнение $z^4 = \dfrac{1}{4} + i0$. Здесь $a = \dfrac{1}{4}$, $b = 0$, $\varphi = 0$, $\left|\dfrac{1}{4}\right| = \dfrac{1}{4}$. Найдем корни уравнения, применяя формулу (1). Получим

$$z_0 = \sqrt[4]{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{2\pi\cdot 0}{4} + i\sin\frac{2\pi\cdot 0}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$z_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = i\sqrt{\frac{1}{2}},\ \ z_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}(\cos\pi + i\sin\pi) = -\sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$z_3 = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -i\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Уравнение $z^4 = \frac{1}{9}$ решаем аналогично.

3) Число 1 является делителем свободного члена, и при $x = 1$ значение многочлена, стоящего в правой части, равно 0. Следовательно, $x = 1$ — корень уравнения. Понизим степень уравнения, разделим на $x - 1$. Многочлен частного также делится на $x - 1$ без остатка, причем теперь в частном получим двучлен $z^2 + 1$, который имеет корни $\pm i$. Таким образом, уравнение имеет 4 корня $z_1 = z_2 = 1$, $z_{3,\,4} = \pm i$.

Урок обобщения и систематизации знаний (0/1 ч)

На этом уроке учащимся предстоит еще раз осмыслить расширение понятия числа. Учащиеся должны увидеть, что любое число (от натурального до комплексного) можно представить как в алгебраической, так и в тригонометрической форме. Желательно вернуться к геометрическому смыслу модуля числа. С помощью изображенных на готовых рисунках комплексной плоскости чисел показать модуль и аргумент каждого из чисел. Рекомендуется обсудить общее и различное в арифметических действиях над действительными и комплексными числами. В результате учащиеся убеждаются в том, что каждое из известных им множеств чисел от натуральных до иррациональных является подмножеством множества комплексных чисел.

На уроке (в **профильных** классах) рекомендуется решить упражнения типа **85**, **83**, **78**, **87**, **80—82**, **91**, **92**. С учащимися, **интересующимися математикой**, можно обсудить упражнения **96**, **101**, **102**, **105**, которые позволят показать применение комплексных чисел и в алгебре, и в геометрии, и в тригонометрии.

Решение упражнений

96. 2) Представим число $z = \sqrt{3} - i$ в тригонометрической форме. Так как $a = \sqrt{3}$, $b = -1$, то $|z| = 2$, значит, $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\varphi = -\frac{\pi}{6}$. Следовательно, $z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$, откуда $z^6 = \left(2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)^6 = 64\,(\cos\pi + i\sin\pi) = -64.$

97. 1) Запишем z_1 и z_2 в виде $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. По определению равенства комплексных чисел получим систему четырех уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ y_1 + 2y_2 = 1, \\ 3x_1 - y_2 = 2, \\ 3y_1 + x_2 = -3. \end{cases}$ Выразив из первого уравнения $x_1 = 1 - 2x_2$, из второго $y_1 = 1 - 2y_2$, и подставив в четвертое и третье уравнения системы, получим

$$\begin{cases} 3(1-2x_2) - y_2 = 2, \\ 3(1-2y_2) + x_2 = -3; \end{cases} \quad \begin{cases} 6x_2 + y_2 = 1, \\ x_2 - 6y_2 = -6. \end{cases}$$

Решая систему сложением уравнений, получим $x_2 = 0$, $x_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_1 = -1$, откуда $z_1 = 1 - i$, $z_2 = i$.

101. Пусть $z^5 = t$. Решим уравнение $t^2 - t - 992 = 0$. Получим корни $t_1 = 32$, $t_2 = -31$. Решая уравнение $z^5 = 32$, получим пять корней, применяя формулу $z_5 = \sqrt[5]{32}\left(\cos\frac{0 + 2\pi k}{5} + i\sin\frac{0 + 2\pi k}{5}\right)$, откуда

$$z_0 = 2\ (\cos 0 + i \sin 0) = 2; \quad z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right);$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}\right); \quad z_3 = 2\left(\cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}\right);$$

$$z_4 = 2\left(\cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}\right).$$

Здесь z_2 и z_3 удовлетворяют требованию задачи, так как косинус во второй и третьей четвертях отрицателен. Аналогично, решая уравнение $z^5 = -31$, получим формулу $z_5 = \sqrt[5]{31}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{5} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{5}\right)$, по которой найдем остальные корни исходного уравнения. Удовлетворять требованию задачи будут корни $z_1 = \sqrt[5]{31}\left(\cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}\right)$, $z_2 = \sqrt[5]{31}(\cos\pi + i\sin\pi)$, $z_3 = \sqrt[5]{31}\left(\cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5}\right)$. В первой и четвертой четвертях значения косинуса положительны, следовательно, z_0 и z_4 не соответствуют условию задачи.

102. Пусть K — точка пересечения медиан треугольника ABC (рис. 44), M — середина отрезка AB, т. е. ее координаты равны полусумме координат концов отрезка. На комплексной плоскости координата точки M соответствует комплексному числу z_M, которое равно $\frac{z_A + z_B}{2}$. Координата вектора MC равна разности координат векторов OC и OM, т. е. $z_C - z_M = z_C - \frac{z_A + z_B}{2}$. Но вектор MK составляет $\frac{1}{3}$ вектора MC, т. е. $z_K - z_M = \frac{1}{3}\left(z_C - \frac{z_A + z_B}{2}\right)$, откуда

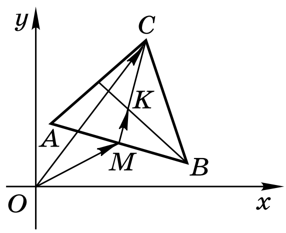


Рис. 44

$z_K = z_M + \frac{1}{3}\left(z_C - \frac{z_A + z_B}{2}\right)$, следовательно, $z_K = \frac{z_A + z_B}{2} + \frac{1}{3} z_C -$
$- \frac{1}{3} \cdot \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$.

105. Запишем комплексное число $z = \cos 15° + i \sin 15°$, тогда $z^2 = (\cos 15° + i \sin 15°)^2 = \cos 30° + i \sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$. Пусть $\cos 15° = x$, $\sin 15° = y$, тогда $(\cos 15° + i \sin 15°)^2 = (x + iy)^2 =$ $= x^2 + 2ixy + i^2y^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$. По определению равенства комплексных чисел имеем $\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ 2xy = \frac{1}{2}. \end{cases}$ Из второго уравнения $y = \frac{1}{4x}$, откуда $x^2 - \frac{1}{16x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Получим уравнение $16x^4 - 8\sqrt{3}x^2 - 1 = 0$, пусть $x^2 = t$, тогда уравнение примет вид $16t^2 - 8\sqrt{3}t^2 - 1 = 0$, $t_{1,2} = \frac{4\sqrt{3} \pm 8}{16} =$ $= \frac{2\sqrt{3} \pm 4}{8}$. Выбираем положительный корень, тогда $t = \frac{2\sqrt{3} + 4}{8} =$ $= \frac{(1+\sqrt{3})^2}{8}$. Так как $x^2 = t$, то $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, тогда $y = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Следовательно,

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \ \sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Контрольная работа № 7

1. Вычислить:
1) $(3 - 2i)(4 + i) - (7 - 5i)$ $[(4 - 5i) - (2 + i)(1 - 3i)]$;
2) $\frac{1+i}{2-3i} + \left(\frac{3}{5} - i\right) : 2{,}6$ $\left[\frac{2-i}{1+3i} - \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}i\right) \cdot 1{,}4\right]$.

2. Выполнить действия $i^5 + i^3 + i^2$ $[i^4 + i^5 + i^3]$ и результат представить в тригонометрической форме.

3. Представить в тригонометрической форме число:
1) 5 $[-3]$; 2) $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ $\left[\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right]$.

4. Выполнить действия:
1) $2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right) \cdot 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
$\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \cdot \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]$;

2) $\dfrac{\sqrt{14}(\cos 18^\circ + i\sin 18^\circ)}{\sqrt{7}(\cos 36^\circ + i\sin 36^\circ)}$ $\left[\dfrac{3(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)}{5(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)}\right]$.

5. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию: 1) $|z| = 2$ $[|z| = 5]$; 2) $|z - 1| < 3$ $[|z + 2| < 2]$.

---

6. Решить уравнение:

1) $z^2 - 4z + 7 = 0$ $[z^2 - 2z + 6 = 0]$; 2) $z^3 = -27$ $[z^4 = 8i]$.

Глава VIII Уравнения и неравенства с двумя переменными

Изображение множества точек, являющегося решением уравнения первой степени с двумя неизвестными, не ново для учащихся старших классов. Решение систем уравнений с помощью графика знакомо школьникам с основной школы. Теперь им предстоит углубить знания, полученные ранее, и ознакомиться с решением неравенств с двумя переменными и их систем.

Этот материал входил в программу основной школы в семидесятых годах прошлого века. В течение всего четырех уроков учащиеся получали представления о существовании и некоторых методах решения неравенств, не только линейных, но и нелинейных, содержащих вторую степень переменой. Таким образом закреплялись и углублялись знания учащихся об уравнениях, неравенствах и функциях.

В старших классах средней школы традиционно решаются самые разные неравенства с одной переменной. Однако на языке неравенств (и не обязательно с одной переменной) нередко формулируются задачи во многих приложениях математики. К исследованию систем неравенств с достаточно большим числом переменных сводятся многие экономические задачи. Это, например, задачи о нахождении наиболее выгодных вариантов перевозок, наиболее выгодных способах раскроя материала, об оптимальном выборе кормов, о наиболее эффективных режимах работы предприятий и др. Такие задачи решаются с помощью линейного программирования. Рассмотрим простой пример.

Задача. С поля на овощную базу перевозят овощи на машинах грузоподъемностью 5 т и 10 т. За 1 ч база может принять не более 10 машин, при этом не более 8 машин грузоподъемностью 5 т, не более 6 машин грузоподъемностью 10 т. Сколько машин грузоподъемностью 5 т и 10 т нужно отправлять с поля на базу за 1 ч, чтобы в этих условиях перевозилось наибольшее количество овощей?

Если ввести обозначения x и y, принимая за x количество машин по 5 т, а за y — по 10 т, то условие запишется в виде $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 8, \\ 0 \leqslant y \leqslant 6, \\ x + y \leqslant 10, \end{cases}$ что можно изобразить на рисунке многоугольником (рис. 45). Задача сводится к отысканию точки этого многоугольника, в которой линейная функция $S(x, y) = 5x + 10y$ принимает наибольшее значение. В данном случае это одна из вершин многоугольника. Вычисляя значение функции в каждой вершине, находим наибольшее значение.

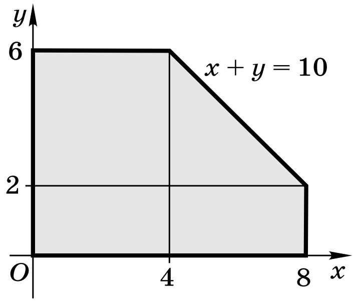


Рис. 45

Рассмотренная задача демонстрирует общий подход к задачам линейного программирования с двумя переменными и небольшим числом условий, заданных в виде неравенств. На практике число переменных и число ограничений, заданных в виде линейных неравенств, может быть очень большим. По существу, способ решения таких задач одинаков. Но вместо многоугольника на плоскости приходится рассматривать многогранники в многомерных пространствах. Отыскание оптимальных решений в этих случаях становится очень сложным. Для их нахождения постоянно изобретаются новые методы.

Составление неравенства, изображение множества его решений на координатной плоскости (в нашем курсе), интерпретация решения ведут не только к более глубокому знанию математики, но и к осознанному применению этих знаний при решении практических задач. Учебный материал главы построен так, что учащиеся постигают его в ходе решения конкретных задач, а затем обобщения изученных примеров. Сначала рассматриваются уравнения с двумя переменными, линейные или нелинейные, затем неравенства и, наконец, системы уравнений и неравенств. Наиболее трудные задачи предназначены учащимся, **интересующимся математикой**.

Изучением этой главы подводится итог известным учащимся методам решения уравнений и неравенств. Рассматриваются методы, с которыми они ранее знакомы не были, но знания, которые при этом приходится применять, хорошо известны и предстают с новой для учащихся стороны. Бóльшая часть учебного материала предназначена для учащихся **профильных** классов, однако и для общеобразовательных классов найдется посильный и интересный материал.

В результате изучения главы **все** учащиеся должны уметь решать упражнения типа **36**, **37** и из рубрики «Проверь себя!», а также уметь отвечать на вопросы **1—5** к главе. Учащиеся **профильных** классов, кроме того, должны уметь решать упражнения типа **38**, **41**, **43** и отвечать на все вопросы к главе.

§ 1. Линейные уравнения и неравенства с двумя переменными (2/3 ч)

Цель изучения параграфа — научить учащихся изображать на координатной плоскости множество решений линейных неравенств и систем линейных неравенств с двумя переменными.

Учащиеся умеют строить график линейной функции и знают, что графиком является прямая. При изучении систем уравнений первой степени с двумя неизвестными школьники знакомились с линейным уравнением $Ax + By + C = 0$, которое является уравнением прямой. Простыми преобразованиями показывается, что это уравнение можно представить в виде знакомой учащимся линейной функции $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ при $B \neq 0$. Если $B = 0$, то получаем уравнение $x = -\frac{C}{A}$, которое, как известно учащимся, является уравнением прямой, параллельной оси Oy. Когда предлагается записать уравнение прямой, проходящей через две точки с заданными координатами, учащиеся могут применять известный им метод, подставляя в уравнение $y = kx + b$ значения x и y и решая систему уравнений. Затем записать уравнение в виде $Ax + By + C = 0$.

Учащимся **профильных** классов, прежде чем выполнять упражнение 1, полезно решить задачу.

Даны точки $A\,(x_1;\,y_1)$ и $B\,(x_2;\,y_2)$. Записать уравнение прямой, проходящей через эти точки.

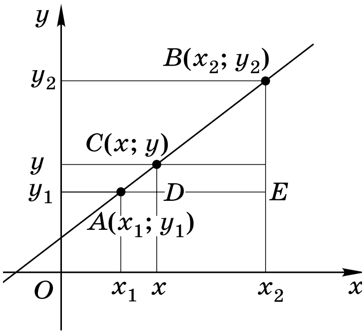


Рис. 46

Решение. Пусть $C\,(x;\,y)$ — некоторая точка прямой AB (рис. 46). Рассмотрим подобные треугольники ACD и ABE. Следовательно, равны отношения катетов $\frac{AD}{AE} = \frac{CD}{BE}$. Но длина катета AD равна разности длин отрезков Ox и Ox_1, т. е. $AD = x - x_1$.

Аналогично $AE = x_2 - x_1$, $CD = y - y_1$, $BE = y_2 - y_1$. Уравнение прямой можно записать в виде $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Рекомендуется напомнить учащимся, что они знакомы с решением систем линейных уравнений, повторить способы подстановки и сложения, решить три системы графически. Например, такие:

$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0, \\ x - 2y - 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2y - 1 = 0, \\ 6x + 4y + 3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 0{,}5x + y - 7 = 0, \\ x + 2y - 14 = 0. \end{cases}$$

На этих же примерах можно повторить, как по отношению коэффициентов можно выяснить наличие или отсутствие решений.

На примере задачи **1** и упражнения **2 все** учащиеся знакомятся с решением линейных неравенств с двумя переменными. Для учащихся **общеобразовательных** классов достаточно, чтобы они на практике могли указать полуплоскость, соответствующую множеству решений неравенства. Полезно выполнять и обратную задачу: по данному уравнению прямой и закрашенной на рисунке области, которую эта прямая ограничивает, записать неравенство, множеством решений которого являются точки указанной полуплоскости. Такие задачи могут быть сформулированы с использованием рисунков 115, 118—122 учебника и указанием на них разных полуплоскостей, которые представляют собой решение какого-то неравенства. Выявляя, какое именно неравенство соответствует данной части плоскости, учащиеся одновременно учатся и решению прямой задачи.

Желательно, чтобы учащиеся **профильных** классов уверенно справлялись с задачами, аналогичными задаче **1**, так как это послужит хорошей базой для осознанного восприятия решения задачи **3**.

Решение систем линейных неравенств для учащихся **общеобразовательных** классов ограничивается задачей **2** и упражнениями **3** и **4**. При решении упражнения **4** важно аккуратно построить графики (рис. 47) и во внутренней области увидеть точку с натуральными координатами.

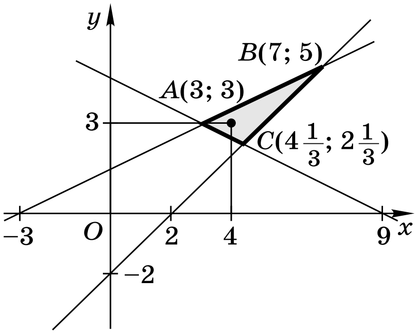


Рис. 47

4. 1) Строим график уравнения $x - y - 2 = 0$. Решением неравенства $x - y - 2 < 0$ является множество точек полуплоскости, расположенной выше прямой $x - y - 2 = 0$. Решением неравенства $x + 2y - 9 > 0$ являются пары чисел, расположенные выше прямой $x + 2y - 9 = 0$. Наконец, точки, для которых справедливо неравенство $x - 2y + 3 > 0$, расположены ниже прямой $x - 2y + 3 = 0$. Прямые $x - y - 2 = 0$ и $x + 2y - 9 = 0$ пересекаются в точке $\left(4\frac{1}{3};\ 2\frac{1}{3}\right)$, прямые $x - y - 2 = 0$ и $x - 2y + 3 = 0$ пересекаются в точке (7; 5), для прямых $x - 2y + 3 = 0$ и $x + 2y - 9 = 0$ точкой пересечения является точка (3; 3). Точки легко определить, решая соответствующие системы уравнений. Из всех пар натуральных чисел, удовлетворяющих условиям $3 < x < 7$, $2\frac{1}{3} < y < 5$, только пара (4; 3) входит в множество решений каждого неравенства системы.

Прежде чем переходить к решению задачи **3**, с учащимися **профильных** классов необходимо поработать над рисунком 120 учебника. Учащиеся должны осознать, что решением неравенства, левая часть которого представляет собой произведение уравнений двух прямых, является объединение пары вертикальных углов. Для этого прежде всего школьники должны понять, что решением уравнения $(A_1x + B_1y + C_1)\,(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ является объединение двух прямых l_1 и l_2. Действительно, произведение равно 0 тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен 0. Далее, вспоминая решение задачи **1**, приходим к выводу, что так как каждая прямая делит плоскость на две полуплоскости, координаты точек которых удовлетворяют либо неравенству, например, $A_1x + B_1y + C_1 < 0$, либо неравенству $A_1x + B_1y + C_1 > 0$ (для обеих прямых), то решение исходного неравенства — пары углов, координаты точек которых обращают произведение $(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2)$ либо в положительное число, либо в отрицательное.

Очень важной для осознанного восприятия материала следующего параграфа является задача **5**. Учащиеся должны не только построить каждую прямую по ее уравнению, но и точно определить точки их пересечения, что важно для выявления множества точек, являющихся решением системы неравенств.

В **профильных** классах на третьем уроке можно решить самостоятельную работу.

1. Изобразить на плоскости множество точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ x - y + 2 \geqslant 0, \\ x + y - 4 \leqslant 0 \end{cases} \qquad \left[\begin{cases} x < 0, \\ y > 0, \\ y - x - 5 < 0, \\ 2y + x - 4 < 0 \end{cases}\right].$$

2. Изобразить на координатной плоскости множество точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$(3x - y + 4)(x - 2y - 2) > 0 \qquad [(x - 3y - 1)(2x + y - 14) < 0].$$

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 1, пп. 1, 2	1, 2	1 (3)	
2	§ 1, п. 3, задача 2	3, 4	3 (2)	Задача 5

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 1, пп. 1—3, задачи 1, 2	1, 2, 3	3 (3)	
2	§ 1, задачи 3, 4	4, 5	5 (2)	Задача 7
3	§ 1, задачи 5, 6	6—7	В тексте	8

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны уметь выполнять упражнения типа **2** и **3**. Учащиеся **профильных** классов, кроме того, должны уметь решать упражнения типа **4** и **5**.

Решение упражнений

8. 1) Сложим неравенства одинакового смысла (первое и третье), прежде умножив третье неравенство на 3. Решив систему $\begin{cases} 9x - 3y > 3, \\ -5x + 3y > 16, \end{cases}$ получим $x > 4{,}75$. Умножим второе неравенство на -1 и сложим с первым неравенством того же смысла, получим $\begin{cases} 3y - 5x > 16, \\ -3y + x > -44, \end{cases}$ откуда $x < 7$. Таким образом, число x может быть либо 5, либо 6. Подставим $x = 5$ в первое, а затем в третье неравенство. Получим неравенство $13\frac{2}{3} < y < 14$, не имеющее целых решений. При $x = 6$ в результате подстановки в первое неравенство получим $y > 15\frac{1}{3}$, при подстановке в третье неравенство получим $y < 17$.

Целое значение одно: $y = 16$. Ответ. $x = 6$, $y = 16$.

§ 2. Нелинейные уравнения и неравенства с двумя переменными (3/3 ч)

Цель изучения параграфа — ознакомить учащихся с различными методами решения нелинейных уравнений и неравенств, систем нелинейных уравнений и неравенств.

Теоретический материал параграфа рассчитан в основном на учащихся **профильных** классов. Для учащихся **общеобразовательных** классов задания желательно адаптировать: предлагать решения задач с уже явно заданными уравнениями прямых и кривых. Необходимость выполнения предварительных преобразований уводит от сути решения, которая на данном этапе состоит в выявлении на координатной плоскости изображения множества точек, являющихся решением поставленной задачи.

С учащимися **общеобразовательных** классов достаточно рассмотреть задачи **1**, **2**, **5**, **7**, **8**, **11** и выполнить упражнения **9**, **12** (1, 2), **14** (2, 3), **16** (1, 2).

Изучив детально задачу **1**, можно решить упражнение **9**. Перед каждым заданием необходимо провести анализ условия, чтобы ученики видели, какие выражения они могут получить в результате преобразования. Нужно выяснить, можно ли выделить полный квадрат (задания **3**, **4**, **5**), либо можно разложить это выражение на линейные множители (задания **1**, **2**, **6**), либо нужно применить определение модуля (задания **7**, **8**). Если учащимся трудно выполнить преобразования, учитель может дать готовые результаты, а ученики должны сами интерпретировать ответ. Например, в упражнении **9** (2) данное выражение нужно представить в виде $(2x - y + 1)(x + 3y) = 0$; в упражнении **9** (3, 4, 5) соответственно представить в виде $2(x + 1)^2 + 3(y - 2)^2 = 0$, $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = \frac{5}{3}$, $(x - y)^2 + (y - 2)^2 = 0$. Учащимся останется объяснить, что же является множеством решений того или иного уравнения.

После ознакомления с решением задачи **5** можно решить упражнение **12**, но тоже предварительно записать, например, задание **1** в виде $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 > 9$. Упражнение **12** (2) обсудить вместе и убедиться в том, что для $y \geqslant 0$ получаем неравенство $x^2 + (y - 2)^2 < 4$, для $y < 0$ — неравенство $x^2 + (y + 2)^2 < 4$. Важно, чтобы все поняли, что решением является объединение кругов с центрами в точках $(0; 2)$ и $(0; -2)$ и радиусами, равными 2.

Упражнение **14** (2, 3), после анализа задач **7** и **8** параграфа можно выполнить с учащимися полностью. В обоих заданиях достаточно просто выделяются полные квадраты, построить параболу и окружность во втором задании, две окружности в третьем не составит труда.

Решение систем нелинейных неравенств достаточно рассмотреть на примере задачи **11** и при выполнении упражнения **16** (1, 2): учащимся предстоит построить окружность заданного радиуса и учесть, что значения x в одном задании, значения y в другом больше или равны некоторым числам. Здесь важно, чтобы учащиеся правильно выделили фигуру, площадь которой нужно найти.

Учащимся **профильных** классов желательно решить все упражнения, о которых говорилось выше, и, кроме того, решить задачи, не помеченные буквой M. В этих классах изучение материала параграфа можно провести в форме практикума, предоставив учащимся право после совместного обсуждения задач из учебника самостоятельно решать все задачи из учебника. Учитель может выделить некоторый минимум обязательных заданий (для конкретного класса), решение которых будет проверено (выборочно или всех подряд). Проверять можно в форме устного собеседования или проверки тетрадей. И в том и в другом случае к проверке полезно привлекать учащихся, **интересующихся математикой**.

Для учащихся **профильных** классов важными с точки зрения обобщения уже известных понятий являются задачи **3**, **4**, **6**, **9**, **10**, **12** (из § 2). Их решение позволяет повторить очень важные темы курса: и преобразования алгебраических выражений, и логарифмы, и иррациональность, и модуль числа, и вычисление площадей. Упражнения **19—22** решаются аналогично задачам **13—15**, разобранным в учебнике. Учащиеся, **интересующиеся математикой**, могут познакомиться с ними самостоятельно, если учитель не сочтет возможным изучить их на уроке.

Распределение материала параграфа по урокам отражено в таблицах.

Общеобразовательные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 2, п. 1, 3, задачи 1, 2, 7, 8	9 (2, 3, 4), 14 (2)	9 (1)	Задача 3
2	§ 2, п. 2, 4, задача 5; 11	12 (1), 16 (1)		Задача 9
3	§ 2	9 (5, 8), 12 (2), 14 (2), 16 (2)		Задача 12

Профильные классы

Номер урока	Теоретический материал	Упражнения		
		основные для работы в классе и дома	для самостоятельной работы в классе	дополнительные
1	§ 2, пп. 1,2	9, 10, 12, 13	9 (5), 12 (1)	11
2	§ 2, пп. 3, 4, задачи 7, 8, 9, 11	14, 16,	14 (2), 16 (1)	
3	§ 2, задачи 10, 12	15, 17, 18		

В результате изучения параграфа **все** учащиеся должны уметь находить множество точек координатной плоскости, заданных простейшими нелинейными уравнениями с двумя переменными при решении упражнений не сложнее, чем упражнения **9** (1, 2). Учащиеся **профильных** классов, кроме того, должны уметь решать нелинейные уравнения, неравенства, системы нелинейных уравнений и неравенств с двумя переменными при решении упражнений типа **12** (1), **14** (2), **16** (1).

§ 3. Уравнения и неравенства с двумя переменными, содержащие параметры (0/2 ч)

Материал данного параграфа **не является обязательным** для изучения всеми учащимися. Он может быть изучен школьниками, **интересующимися математикой**, во внеурочное время, в частности на факультативных или иных занятиях. Система упражнений построена так, что каждое из упражнений является аналогом задачи, разобранной в тексте параграфа. Задаче **1** текста соответствует упражнение **23**, задаче **2** — упражнение **24**, задаче **3** — упражнение **26**, задаче **4** — упражнение **28**, задаче **6** — упражнение **29**, задаче **7** — упражнение **25**, задаче **8** — упражнение **31**, задаче **9** — упражнение **32**, задаче **10** — упражнение **33**, задачам **11** и **12** соответственно упражнения **34** и **35**.

Со всеми учащимися **профильных** классов на двух уроках (при наличии времени) можно рассмотреть задачи **1, 3, 5, 9, 10** и соответственно упражнения к ним.

Урок обобщения и систематизации знаний (1/1 ч)

На уроке полезно повторить решение уравнений и неравенств с двумя переменными, которые изучали ранее и при изучении главы. Можно вспомнить решения уравнений в целых числах (учебник 10 класса, глава II) или рассмотреть задания из упражнений для итогового повторения. По готовым рисункам предложить указать множество точек координатной плоскости, являющееся решением заданного уравнения или неравенства, которое не должно быть сложным. Например, $y - x^2 = 0$, $y - 2x^2 > 0$, $y - x + 3 < 0$, $y + 2x - 3 = 0$ и т. д.

Далее можно обратиться к вопросам к главе и, отвечая на них, повторить и систематизировать изученный материал.

Учащимся **общеобразовательных** классов достаточно решить упражнения **36—38**. В **профильных** классах к этим упражнениям можно добавить **40, 41, 43, 46**. Упражнения **44—51** могут быть решены на уроках итогового повторения (при наличии времени) или предложены для самостоятельной работы учащихся. Эти упражнения являются аналогами задач, разобранных в § 2 и 3 главы II.

Контрольная работа № 8

Базовый уровень

1. Найти множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению:

1) $x - y + 2 = 0$ $\quad [x + y - 3 = 0]$;

2) $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$ $\quad [(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16]$.

2. Найти множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству:

1) $2x + y - 1 \leqslant 0$ $\quad [x - 2y + 3 \geqslant 0]$;

2) $x^2 + (y - 2)^2 < 4$ $\quad [(x + 3)^2 + y^2 > 1]$.

3. Изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} 2x - y + 4 \geqslant 0, \\ 5y - 2x - 4 \geqslant 0, \\ y + 2x - 8 \leqslant 0 \end{cases} \quad \left[\begin{cases} 2y + 3x \geqslant 0, \\ 3y - x - 11 \leqslant 0, \\ 4x - y - 11 \leqslant 0 \end{cases} \right].$$

Профильный уровень

1. Найти множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению
$x^2 + 4y^2 - 6x + 20y + 25 = 0 \quad [9x^2 + y^2 - 12x + 4y - 8 = 0]$.
2. Найти множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству $|x + 1| + |y| \leqslant 2 \quad [|x| + |y - 1| \leqslant 2]$.
3. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ (x + y + 2)(y - x + 2) \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{cases} (x + 1)^2 + y^2 \leqslant 4, \\ (y + x - 1)(y - x + 1) \leqslant 0 \end{cases} \right].$$

---

4. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x| + 2|y| + |2x - 3y| = 12, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

$$\left[\begin{cases} 3|x| + |y| + |x + 3y| = 11, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases} \right]$$

имеет ровно два решения.

Замечание. Последнее задание может быть выполнено на отдельную оценку.

Итоговое повторение курса алгебры и начал математического анализа (19/15 ч)

Уроки итогового повторения имеют своей целью не только восстановление в памяти учащихся основного материала, но и обобщение, уточнение и систематизацию знаний по алгебре и началам математического анализа за курс средней школы. Материал для этих уроков содержится в первой главе учебника 10 класса и в разделе «Упражнения для итогового повторения курса алгебры и начал математического анализа».

Система заданий итогового повторения построена так, чтобы учителю было удобно выбрать задания разного уровня. Пункты 1—7 содержат упражнения, сгруппированные по семи линиям. В каждом пункте содержатся задания из всех разделов курса, соответствующие заявленной линии. Например, в первом разделе предлагается выполнить задания на вычисления с числами от рациональных до комплексных. Преобразования выражений рассматриваются от преобразований рациональных выражений до тригонометрических. В пункт «Текстовые задачи», кроме привычных задач на движение, работу и др., включены задачи на прогрессии, по комбинаторике и основам теории вероятностей. Пункт «Функции и графики» содержит упражнения на исследование функций как методами элементарной математики, так и с помощью математического анализа. Последний пункт содержит упражнения для повторения вычисления производной и интеграла и их применения для решения простейших практических задач.

Тематическое планирование уроков итогового повторения может быть различным в зависимости от уровня математической подготовки класса и устремлений учителя. Приведем один из возможных вариантов распределения часов. Здесь повторение предполагается проводить по основным содержательно-методическим линиям. В соответствии с концепцией курса и повторение целесообразно выстроить в следующем порядке: вычисления и преобразования → уравнения и неравенства → функции, начала математического анализа.

При проведении итогового повторения предполагается широкое использование и комбинирование различных типов уроков (лекций, семинаров, практикумов, консультаций и т. д.) с целью быстрого охвата большого по объему материала. Необходимым элементом уроков итогового повторения должна быть самостоятельная работа учащихся. Она полезна как самим учащимся, так и учителю для осуществления обратной связи. Задания для самостоятельной проверочной работы должны быть и общими (по вариантам одного, например, обязательного уровня), и дифференцированными. Формы проведения работ тоже должны быть разнообразными: от традиционной работы с двумя, тремя заданиями до тестов и работ в форме рабочих тетрадей с заполнением пробелов в приведенных рассуждениях (что полезно для слабых учащихся).

Для составления итоговой контрольной работы и последующих уроков решения задач по результатам этой работы можно использовать упражнения из последнего раздела учебника. Дополнительно для учащихся, **интересующихся математикой** и собирающихся продолжить образование в высших учебных заведениях, где необходимы знания математики, целесообразно использовать задачи из раздела итогового повторения, номера которых выделены, как упражнения для интересующихся математикой.

Решение упражнений

137. $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Нужно найти целые корни уравнения $y = 0$. Это могут быть числа ± 1, ± 2, ± 3, ± 6. Проверкой убеждаемся в том, что $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ — корни уравнения $y = 0$ (а остальные числа не являются корнями).

196. 1) $\cos x \neq 0$, $\cos x + \sin x \geqslant 0$, уравнение $(\sin x + \cos x)^2 = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x}$ — следствие исходного.

а) $\sin x + \cos x = 0$, $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, — корни исходного уравнения.

б) $(\sin x + \cos x) \cos x = 1$, т. е. $\sin x \cos x = \sin^2 x$, откуда либо $\sin x = 0$, $x = \pi n$ (годится только $x = 2\pi k$), либо $\sin x - \cos x = 0$, т. е. $\operatorname{tg} x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Если $n = 2k$, то $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ (тогда $\sin x > 0$, $\cos x > 0$) — корни исходного уравнения. Если $n = 2k + 1$, то $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$ и тогда $\sin x < 0$, $\cos x < 0$.

Ответ. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2) $\sin x - \cos x \geqslant 0$. (1)

$5 \sin 2x - 2 = 1 - \sin 2x$, $\sin 2x = \frac{1}{2}$.

а) $2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$. Если $n = 2k$, т. е. $x = \frac{\pi}{12} + 2\pi k$, то $\cos x > \sin x$ — не выполняется условие (1). Если $n = 2k + 1$, то $x = \frac{13}{12}\pi + 2\pi k$ и выполняется условие (1).

б) $2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $x = \frac{5\pi}{12} + \pi n$. Если $n = 2k + 1$, то $x = \frac{17}{12}\pi + 2\pi k$ и условие (1) не выполняется.

Ответ. $x = \frac{13\pi}{12} + 2\pi k$, $x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

198. Область определения уравнения: $\cos x \neq 0$.

$\cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}(1 + \cos x) - 1 = 0$, откуда получим

$$\cos x\,(\cos^2 x + \sin^2 x) - \cos 2x = 0,$$

$$\cos x - \cos 2x = 0, \quad \sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2} = 0, \quad \sin\frac{3x}{2} = 0$$

(корни уравнения $\sin\frac{x}{2} = 0$ содержатся среди корней уравнения $\sin\frac{3x}{2} = 0$), откуда $x = \frac{2\pi n}{3}$.

Если $n = 3k$, то $x = 2\pi k$, и тогда $\operatorname{tg} x = 0$; б) если $n = 3k + 1$, то $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, и тогда $\operatorname{tg} x < 0$; в) если $n = 3k + 2$, то $x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$, и тогда $\operatorname{tg} x > 0$.

Ответ. $x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

199. $\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$,

$1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\sin 2x + \sin^2 2x = 1$,

$1 - \cos 2x + \sin 2x = 0$, $\quad 2\sin^2 x + 2\sin x \cos x = 0$.

а) $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\quad$ б) $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

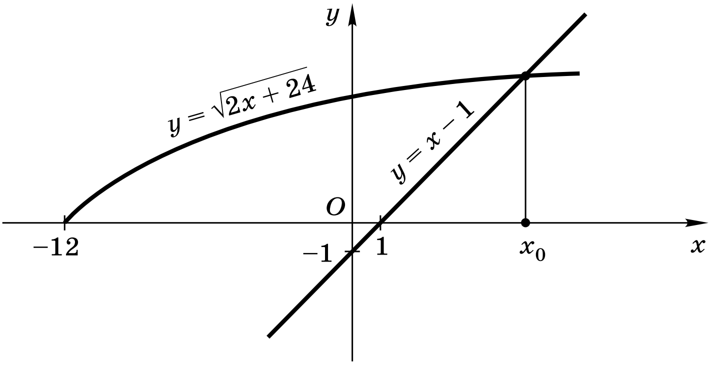


Рис. 48

Неравенство $\lg(x-\sqrt{2x+24})>0$ равносильно неравенству $x-1>\sqrt{2x+24}$ (рис. 48), которое справедливо при $x>x_0$, где x_0 — положительный корень уравнения $(x-1)^2=2x+24$. Здесь $x_0=2+3\sqrt{3}$, где $7{,}1<x_0<7{,}4$. Условию $x>x_0$ удовлетворяют корни $x=\pi n$ и $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n$ при $n\in \boldsymbol{N}$, $n\geqslant 3$.

О т в е т. $x=\pi n$, $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{N}$, $n\geqslant 3$.

200. $\sin 5x = 2\sin x\cos 2x$,
$\sin 4x\cos x+\cos 4x\sin x = 2\sin x\cos 2x$.
а) $\sin x=0$, $x=\pi n$, $x_0=0$, $x_0\in\left(-\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$;
б) $4\cos^2 x\cos 2x+\cos 4x = 2\cos 2x$,
$2(1+\cos 2x)\cos 2x+2\cos^2 2x-1=2\cos 2x$,
$4\cos^2 2x=1$, $2(1+\cos 4x)=1$, $\cos 4x=-\dfrac{1}{2}$, $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{2}$.

Интервалу $\left(-\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ принадлежат только корни $x=\dfrac{\pi}{6}$ и $x=\dfrac{\pi}{3}$, из которых $\dfrac{\pi}{3}$ наибольший. О т в е т. $\dfrac{\pi}{3}$.

201. Воспользуемся равенством

$$\sin^8 x+\cos^8 x=\frac{1}{32}(\cos^2 4x+14\cos 4x+17).$$

Полагая $\cos 4x=t$, получаем уравнение

$$t^2+14t+17-32a=0 \qquad (1)$$

Исходное уравнение имеет корни тогда и только тогда, когда $D=14^2-4(17-32a)=128(a+1)\geqslant 0$, т. е. при $a\geqslant -1$, и по крайней мере один из корней уравнения (1) по абсолютной величине не превосходит единицы. Пусть t_1 и t_2 — корни уравнения (1), тогда $t_1=-7-4\sqrt{2(a+1)}<-1$, $t_2=4\sqrt{2(a+1)}-7$. Неравенство $-1\leqslant t_2\leqslant 1$ равносильно каждому из неравенств

$$-1\leqslant 4\sqrt{2(a+1)}-7\leqslant 1,\ 3\leqslant 2\sqrt{2(a+1)}\leqslant 4,\ 9\leqslant 8(a+1)\leqslant 16,$$

$1 \leqslant 8a \leqslant 8$, $\frac{1}{8} \leqslant a \leqslant 1$. Если неравенство $\frac{1}{8} \leqslant a \leqslant 1$ выполнено, то $\cos 4x = 4\sqrt{2(a+1)} - 7$.

Ответ. $\frac{1}{8} \leqslant a \leqslant 1$, $x = \pm\frac{1}{4}\arccos(4\sqrt{2(a+1)} - 7) + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

233. 2) $\log_{x^2} |3x+1| < \frac{1}{2}$ (1). Неравенство (1) равносильно неравенству $\log_{x^2} |3x+1| < \log_{x^2} |x|$ (2), а неравенство (2) равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} |x| > 1, \\ |3x+1| < |x|; \end{cases} \quad (3) \qquad \begin{cases} 0 < |x| < 1, \\ |3x+1| > |x|. \end{cases} \quad (4)$$

Для решения систем (3) и (4) нужно построить графики функций $y = |x|$ и $y = |3x + 1|$.

а) Если $|x| > 1$, то график функции $y = |3x + 1|$ лежит выше графика функции $y = |x|$, и поэтому система (3) не имеет решений.

б) Если $0 < |x| < 1$, то график функции $y = |3x + 1|$ лежит выше графика функции $y = |x|$ на интервале $\Delta_1 = (-1;\ x_2)$, $\Delta_2 = (x_1;\ 0)$, $\Delta_3 = (0;\ 1)$, где x_2 — корень уравнения $-3x - 1 = -x$, а x_1 — корень уравнения $3x + 1 = -x$. Следовательно, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_1 = -\frac{1}{4}$.

Ответ. $-1 < x < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4} < x < 0$, $0 < x < 1$.

277. 3) Возводим уравнения в квадрат и складываем: $2 = \sin^2 y + 3\cos^2 y$, откуда $\sin^2 y = \frac{1}{2}$, $\sin y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

а) Если $\sin y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то либо $y = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, тогда $\cos y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а система примет вид $\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$ откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

либо $y = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, тогда $\cos y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin x = \frac{1}{2}$, $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

б) Если $\sin y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, то либо $y = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, тогда $\cos y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin x = -\frac{1}{2}$, $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

либо $\quad y=-\frac{3\pi}{4}+2\pi n, \quad \cos y=-\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin x=-\frac{1}{2}, \quad \cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2},$
$x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k, \quad k\in \boldsymbol{Z}.$

О т в е т. $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right), \ \left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right),$
$\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ -\frac{\pi}{4}+2\pi n\right), \ \left(-\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ -\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right), \quad k\in \boldsymbol{Z}, \quad n\in \boldsymbol{Z}.$

4) $y=x+\frac{1}{3}, \quad \frac{1+\cos 2\pi x}{2}-\frac{1-\cos 2\pi\left(x+\frac{1}{3}\right)}{2}=\frac{1}{2},$
$\cos 2\pi x+\cos 2\pi\left(x+\frac{1}{3}\right)=1, 2\cos\left(2\pi x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}=1,$
$\cos\left(2\pi x+\frac{\pi}{3}\right)=1, \quad 2\pi x+\frac{\pi}{3}=2\pi n, \quad x=n-\frac{1}{6}, \quad y=n+\frac{1}{6}, \quad n\in \boldsymbol{Z}.$

О т в е т. $\left(-\frac{1}{6}+n; \frac{1}{6}+n\right), n\in \boldsymbol{Z}.$

5) Запишем систему в виде $\begin{cases}\sin(x+y)-\sin(x-y)=1,\\ \sin(x+y)\cos(x-y)=0.\end{cases}$

а) $\sin(x+y)=0$, тогда $\sin(x-y)=-1$,
$x+y=\pi n, \ x-y=-\frac{\pi}{2}+2\pi k.$

б) $\cos(x-y)=0$, тогда $x-y=\frac{\pi}{2}+\pi n.$

Если $n=2k$, то $\sin(x-y)=1$, и тогда $\sin(x+y)=2$ — нет решений.

Если $n=2k-1$, то $x-y=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $\sin(x-y)=-1$, откуда $\sin(x+y)=0$, $x+y=\pi m$, т. е.

$$\begin{cases}x-y=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\\ x+y=\pi m.\end{cases}$$

Получена та же серия решений.

О т в е т. $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}-\pi k\right), n\in \boldsymbol{Z}, \ k\in \boldsymbol{Z}.$

278. Положив $u=\sin x\cos y$, $v=\cos x\sin y$, получим

$\begin{cases}6u+2v=-3,\\ 5u-3v=1,\end{cases}$ откуда $u=-\frac{1}{4}, v=-\frac{3}{4}$, т. е. $\begin{cases}\sin x\cos y=-\frac{1}{4},\\ \cos x\sin y=-\frac{3}{4}.\end{cases}$

Складывая и вычитая уравнения этой системы, получаем
$\begin{cases}\sin(x+y)=-1,\\ \sin(x-y)=\frac{1}{2},\end{cases}$ откуда $x+y=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, \ x-y=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k.$

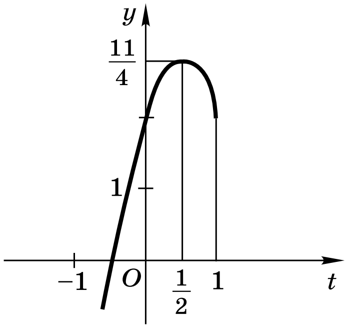


Рис. 49

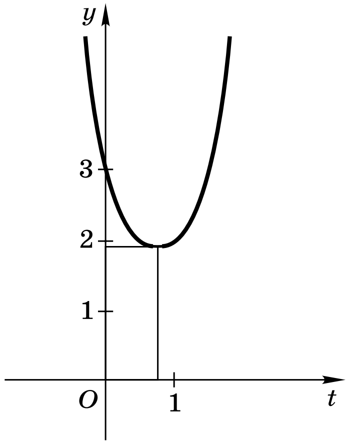


Рис. 50

Ответ. $\left(-\frac{\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{12}+\pi\left(n+\frac{k}{2}\right);\ -\frac{\pi}{4}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\pi\left(n-\frac{k}{2}\right)\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

354. $y = 6\cos^2 x + 6\sin x - 2$, $y = 6(1-\sin^2 x) + 6\sin x - 2 = -6\sin^2 x + 6\sin x + 4 = 2(-3\sin^2 x + 3\sin x + 2)$.

Рассмотрим функцию $g(t) = -3t^2 + 3t + 2$ на отрезке $[-1; 1]$ (рис. 49).

$g(t) = -3\left(t^2 - t + \frac{1}{4}\right) + \frac{11}{4} = -3\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$, $g\left(\frac{1}{2}\right)$ — наибольшее значение функции.

Если $t = \frac{1}{2}$, то $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

358. Пусть $\sin^2 x = t$, тогда $y = \frac{2(1-t)^2+t}{2t^2+3(1-t)} = \frac{2t^2-3t+2}{2t^2-3t+3} = 1 - \frac{1}{2t^2-3t+3}$, где $2t^2-3t+3 = 2\left(t-\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{15}{8}$.

Пусть $z(t) = 2\left(t-\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{15}{8}$ (рис. 50). Если $t \in [0; 1]$, то $z\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{15}{8}$, $z(0) = 3$, $\frac{15}{8} \leqslant z(1) \leqslant 3$, $\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{z} \leqslant \frac{8}{15}$, $-\frac{8}{15} \leqslant -\frac{1}{z} \leqslant -\frac{1}{3}$, но $y = 1 - \frac{1}{z}$, поэтому $1 - \frac{8}{15} \leqslant y \leqslant 1 - \frac{1}{3}$, т. е. $\frac{7}{15} \leqslant y \leqslant \frac{2}{3}$.

Ответ. $\frac{2}{3}$ и $\frac{7}{15}$.

431. Пусть C и B — точки пересечения прямой $x = 3$ с осью Ox и касательной, A — точка пересечения касательной с осью Ox, S — площадь треугольника ABC (рис. 51). Так как

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $y'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ — угловой коэффициент касательной, то уравнение касательной имеет вид $y - \sqrt{a} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}(x - a)$.

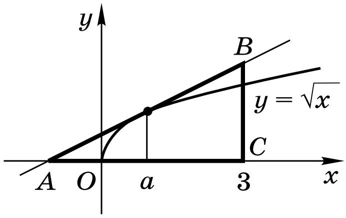


Рис. 51

Найдем абсциссу x_0 точки A, полагая в уравнении касательной $y = 0$. Получим $x_0 = -a$. Тогда $S = \dfrac{1}{2}(a+3)y_1$, где $y_1 = y(3) = $ $= \sqrt{a} + \dfrac{1}{2\sqrt{a}}(3 - a) = \dfrac{a+3}{2\sqrt{a}}$, а $y\,(3)$ — ордината касательной при $x = 3$. Следовательно, $S = f\,(a) = \dfrac{1}{4}\dfrac{(a+3)^2}{\sqrt{a}}$. Пусть $g(a) = \dfrac{(a+3)^2}{\sqrt{a}}$, тогда $g'(a) = \dfrac{2(a+3)^2}{\sqrt{a}} - \dfrac{1}{2a^{\frac{3}{2}}}(a+3)^2 = \dfrac{(a+3)}{2a^{\frac{3}{2}}}(4a - (a+3)) =$

$$= \frac{(a+3)\,3}{2a^{\frac{3}{2}}}(a-1).$$

Единственная стационарная точка функции $g\,(x)$, т. е. точка $a = 1$, — точка минимума ($g'\,(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку a).

Ответ. $S = 4$.

Содержание

Учебное издание

Федорова Надежда Евгеньевна
Ткачева Мария Владимировна

ИЗУЧЕНИЕ АЛГЕБРЫ
И НАЧАЛ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
В 11 КЛАССЕ

Книга для учителя

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. Н. Белоновская*
Младший редактор *Е. А. Андреенкова*
Художник *О. П. Богомолова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Технический редактор и верстальщик *Н. В. Лукина*
Корректор *Ю. Б. Григорьева*