Уравнения и неравенства

Лекции В. В. Шеломовского

Рассматриваем разные методы решения уравнений. Предполагаем, что корни уравнений вещественные. Уравнениям с целыми корнями посвящена другая лекция. Как правило, каждый из рассмотренных методов «заточен» для небольшого количества видов уравнений. Представлять разные методы полезно. Это развивает мышление. Число разобранных задач постоянно растёт.

Оглавление

1 Полезные сведения.....	3
1.1 Задание.....	4
2 Обоснованное угадывание.....	5
2.1 Корни высоких степеней.....	5
2.2 Показательное уравнение.....	5
2.3 Трансцендентные числа.....	6
2.4 Уравнение третьей степени.....	6
2.5 Логарифм.....	6
2.6 Степени и корни.....	6
2.7 Степень в степени.....	7
2.7.а Степень в степени.....	7
2.8 Уравнение шестой степени.....	7
3 Использование особенностей ОДЗ.....	9
3.1 Особая точка.....	9
3.1.а Особая точка.....	9
3.2 Особая точка.....	9
4 Метод скрытого множителя (степени).....	10
4.1 Разложение линейного выражения.....	10
4.1.а Разложение линейного выражения.....	10
4.2 Извлечение корней.....	10
4.3 Квадрат под знаком корня.....	10
4.4 Связь подкоренных выражений.....	11
4.4.а Связь подкоренных выражений.....	11
4.5 Выделение полного квадрата.....	11
4.6 Задание.....	12
5 Использование обозначений.....	13
5.1 Четвёрка корней.....	13
5.1.а Четвёрка корней.....	13
5.2 Корни под знаком корня.....	13
5.2.а Корни под знаком корня.....	14
5.2.б Корни под знаком корня.....	14
5.2.с Корни под знаком корня.....	14
5.3 Три кубических корня.....	14
5.3.а Три кубических корня.....	14
5.3.б Три кубических корня.....	15
6 Метод интерпретации.....	16
6.1 Коллинеарные векторы.....	16
6.2 Модуль и скалярное произведение.....	16

6.3 Сумма проекций.....	16
6.4 Векторы под углом 30°	17
6.5 Векторы под углом 120°	18
6.5.a Векторы под углом 120°	18
6.6 Длина отрезка.....	19
6.7 Модуль и скалярное произведение.....	19
6.8 Скалярное и векторное произведения.....	19
6.9 Длина отрезка.....	20
6.9.a Длина отрезка.....	20
6.10 Система.....	21
7 Часто употребляемые замены.....	22
7.1 Возвратное уравнение.....	22
7.2 Спрятанное выражение.....	22
7.3 Куб суммы.....	22
7.4 Разложение дроби на простейшие.....	22
7.5 Уравнение кубическое с корнем.....	23
7.5.a Уравнение кубическое с корнем.....	23
7.6 Скрытый синус.....	23
7.7 Скрытый косинус.....	24
7.8 Скрытое уравнение.....	24
7.9 Гиперболическая замена.....	24
8 Использование однородности и симметрии.....	26
8.1 Симметричная замена.....	26
8.2 Простейшие дроби.....	26
8.3 Поиск однородности.....	27
8.4 Переход к системе уравнений.....	27
8.5 Симметрия слагаемых.....	27
8.6 Симметрия множителей.....	28
8.7 Симметрия слагаемых.....	28
9 Экстремальные уравнения.....	29
9.1 Одно экстремальное уравнение.....	29
9.1.a Одно экстремальное уравнение.....	29
9.1.b Одно экстремальное уравнение.....	29
9.2 Переход к системе уравнений.....	29
9.3 Подбор ответа.....	30
9.4 Тригонометрия.....	30
9.4.a Тригонометрия.....	30
9.5 Использование неравенств между средними значениями.....	31
9.5.a Группировка по типу слагаемых.....	32
9.5.b Группировка по типу слагаемых.....	32
9.5.c Дважды используем стандартное неравенство.....	33
9.5.d Симметризирующая замена.....	33
9.5.e Три числа.....	34
9.6 Уравнения «страшного» вида.....	34
9.6.a Показательные выражения и корни.....	34
9.6.b Показательные выражения и степени.....	34
9.6.c Высокая степень.....	34
9.6.d Однородность слагаемых.....	35
9.7 Неравенство с «хитринкой».....	35
9.7.a Одно слагаемое – константа.....	35

9.7.b Цепочка слагаемых.....	35
9.7.c Упрощение вида слагаемых.....	36
9.7.d Специфическое равенство.....	36
9.8 Неравенство Коши – Буняковского.....	37
9.8.a Сокращение неравенства.....	37
9.9 Система в положительных числах.....	38
10 Использование свойств функций.....	39
10.1 Уравнения вида: $f(x) = f(y)$	39
10.1.a Монотонная функция.....	39
10.1.b Монотонная функция.....	39
10.1.c Монотонная функция.....	39
10.2 Логарифмирование уравнения.....	39
10.2.a Потенцирование уравнения.....	40
10.2.b Логарифмирование.....	40
11 Уравнения вида: $x = f(f(x))$	41
11.1 Вложенные корни.....	41
11.2 Вложенные квадраты.....	41
11.3 Система сводящаяся к стандартному виду.....	41
11.4 Куб и кубический корень.....	42
11.5 Симметрия.....	42
11.6 Функциональное уравнение.....	42
11.7 Вычислить значение функции.....	43
12 Уравнения вида: $f(f(x)) = 0$	44
12.1 Поиск вида функции.....	44
12.2 Число корней (2001/02 – 3 – 11).....	44
13 Целые и дробные части.....	45
13.1 Уравнение.....	45
14 Составление уравнений.....	46
14.1 Задание.....	46
14.2 Задание.....	46
15 Рядом с уравнениями.....	47
15.1 Корень на промежутке.....	47
15.2 Все буквы.....	47
15.3 Функциональное уравнение.....	47
15.4 Переменная как параметр.....	47

1 Полезные сведения

Решение уравнений сводится к тождественным преобразованиям выражений, стоящих слева и справа от знака равенства. Преобразования считаются тождественными и между последовательно расположенными уравнениями ставится знак эквивалентности $U_1 \Leftrightarrow U_2$ тогда и только тогда, когда все корни уравнения U_1 являются корнями уравнения U_2 и, наоборот, все корни уравнения U_2 являются корнями U_1 . Тождественными преобразованиями являются операции сложения, вычитания, умножения или деления на не равное нулю число, возведение в нечётную степень. Если все преобразования эквивалентны и решение сопровождают (обосновано!) символы $\Leftrightarrow$, то решение уравнения не требует проверки. Любопытно, что все уравнения, у которых нет корней (то есть число корней равно нулю), эквивалентны между собой:

$$x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 2.$$

Знак следования $U_1 \Rightarrow U_2$, то есть из U_1 следует U_2 , но из U_2 не обязательно следует U_1 .

В записи решения он используется для обозначения того факта, что все корни выражения Y_1 являются корнями выражения Y_2 , но корнями выражения Y_2 могут быть также числа, которые не являются корнями Y_1 . Этот знак сопровождается, например, возведение в квадрат обеих частей уравнения, если про знаки левой или правой части нет достоверных сведений. Или взятие синуса от обеих частей уравнения. Если при записи решения появился хотя бы один такой знак, ответы необходимо проверять подстановкой в исходное уравнение.

Знак системы, например, $\begin{cases} x=2, \\ x>1, \end{cases}$ применяется для того, чтобы указать, что выполняются одновременно все указанные соотношения, то есть в примере $x = 2$. Знак объединения $\begin{cases} x=2, \\ x>1, \end{cases}$ свидетельствует о том, что выполняется хотя бы одно из выражений, в примере $x > 1$. Использование этих знаков достаточно рискованно. При недостатке опыта лучше пользоваться словами.

ОДЗ – область допустимых значений переменных в выражениях, составляющих уравнение. **ОВР** – область возможных решений, то есть та часть **ОДЗ**, в которой решение может существовать. Например, в уравнении $\sqrt{2x+6}=9-x$, **ОДЗ** $x \in [-3; +\infty)$, а **ОВР** $x \in [-3; 9]$, так как при больших значениях x выражения существуют, но знаки частей разные и равенство невозможно. В **ОВР** операция возведения в квадрат становится эквивалентным преобразованием.

$\emptyset$ – пустое множество, знак того, что уравнение не имеет корней.

При записи решения полезен метод «дележа пирога» в котором **ОДЗ** разбивается на удобные части и каждая исследуется отдельно. Например, решаем уравнение $|x-3|=2$. Надо рассмотреть случаи $x \geq 3$ и $x < 3$. В момент перехода в работах учеников встречаются неверные записи вида: « $|x-3| < 0 \dots$ », когда решающий подразумевает, что $x-3 < 0$. Удобно записать: «Пусть $x < 3$ » и далее выполнить все преобразования именно при таком иксе. Правила математики это разрешают.

Полезно начиная решение оговорить **ОДЗ**. Дело в том, что вне **ОДЗ** многие преобразования оказываются бессмысленными. Например, преобразовывать уравнение, содержащее выражение $\sqrt{\frac{a-x}{x-2a}}$ при $a = 0$ бессмысленно, так как не существует ни одного решения уравнения, содержащее это выражение. Запись $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+2}$ не верна при $x = -3$.

Разберём методы решения на примере простейшей задачи. Каждое из приведенных решений является математически корректным, но только первое требует обязательной проверки.

1.1 Задание

Решить уравнение $\sqrt{2x+6}=9-x$.

Решение: Способ 1. **ОДЗ** уравнения $x \in [-3; +\infty)$. Возведём уравнение в квадрат: $\sqrt{2x+6}=9-x \Rightarrow 2x+6=x^2-18x+81 \Leftrightarrow x^2-20x+75=0 \Leftrightarrow (x-5) \cdot (x-15)=0$. Проверка для $x=5$: $\sqrt{2 \cdot 5+6}=4=9-5$. Проверка для $x=15$: $\sqrt{2 \cdot 15+6}=6 \neq 9-15$.

Ответ: 5.

Способ 2. **ОДЗ** уравнения $x \in [-3; +\infty)$. **ОВР** (область возможных решений): $9-x \geq 0$. Далее рассматриваем только $x \in [-3; +9]$. Возведём уравнение в квадрат: $\sqrt{2x+6}=9-x \Leftrightarrow 2x+6=x^2-18x+81 \Leftrightarrow x^2-20x+75=0 \Leftrightarrow (x-5) \cdot (x-15)=0 \Leftrightarrow x-5=0$. Все преобразования эквивалентны – проверка не требуется.

Ответ: 5.

Способ 3. **ОДЗ** уравнения $x \in [-3; +\infty)$. Всюду в **ОДЗ** выражение, стоящее в левой части

возрастает, выражение, стоящее в правой – убывает. Значит количество корней не более, чем один. Подбором устанавливаем, что $x = 5$ – корень уравнения.

Ответ: 5.

Способ 4. ОДЗ уравнения $x \in [-3; +\infty)$. Пусть $t = \sqrt{2x+6} \geq 0$. Тогда $t^2 = 2x + 6$, $2x = t^2 - 6$.
 $\sqrt{2x+6} = 9 - x \Leftrightarrow 2\sqrt{2x+6} = 18 - 2x \Leftrightarrow 2t = 18 - (t^2 - 6) = 24 - t^2 \Leftrightarrow (t + 6) \cdot (t - 4) = 0 \Leftrightarrow t = 4 \Leftrightarrow 2x = 16 - 6 = 10 \Leftrightarrow x = 5$. Все преобразования эквивалентны – проверка не требуется.

Ответ: 5.

2 Обоснованное угадывание

Уравнение считают решенным, если найдены все его корни или доказано, что корней нет. Поэтому разрешено угадывать корни уравнения и решение считается корректным и правильным, если выполнены два условия:

- корни угаданы и проверены;
- доказано, что других корней нет.

Для того, чтобы обосновывать число корней необходимо знать следующее.

Теорема 1. Пусть дано степенное уравнение в котором старшая степень равна n , причём коэффициент при этой степени не равен нулю, то уравнение имеет не более, чем n корней.

Теорема 2. Пусть функция $y = f(x)$ монотонная на некотором промежутке. Тогда уравнение $f(x) = a$ имеет на этом промежутке не более одного корня.

Теорема 3. Пусть функция $y = f(x)$ монотонная на некотором промежутке. Тогда уравнение $f(x) = f(a)$ имеет на этом промежутке единственный корень $x = a$. Иными словами: Равенство значений функции эквивалентно равенству аргументов.

Теорема 4: Пусть функция $y = f(x)$ монотонно возрастающая на некотором промежутке, а функция $g(x)$ на этом промежутке нигде не возрастает (или убывает). Тогда уравнение $f(x) = g(x)$ имеет на этом промежутке не более одного корня.

Школьный термин «монотонная функция» эквивалентен математическому термину «непрерывная строго возрастающая или строго убывающая функция». Все функции, изучаемые в школе кроме функции $y = a$, удовлетворяют этому определению на некотором промежутке.

2.1 Корни высоких степеней

Решите уравнение: $\sqrt[8]{x-1} + \sqrt[4]{x^3+8} = 3$.

Решение: ОДЗ: $x \geq 1$. Левая часть уравнения для любого x из ОДЗ монотонно возрастающая функция, так как она состоит из суммы двух возрастающих функций. Правая часть – константа. По теореме о единственности значения монотонной функции, уравнение имеет в ОДЗ не более одного корня. Поскольку $x = 2$ – корень, это единственный корень.

Ответ: 2.

2.2 Показательное уравнение

Решите уравнение: $2^x + 3^x = 5$.

Решение: По свойству показательной функции a^x при $a > 1$, левая часть – монотонно возрастающая функция. По теореме о единственности значения монотонной функции, уравнение имеет не более одного корня. Поскольку $x = 1$ – корень, это единственный корень.

Ответ: 1.

2.3 Трансцендентные числа

Решите уравнение: $(5-\pi)^x + (5+\pi)^x = 10^x$.

Исследование: Заметим, что π , это постоянная величина, близкая к 3.14.

Полагаем, что очевидный корень $x=1$ является единственным. В обеих частях возрастающие функции. В этом случае нет теоремы единственности. Чтобы воспользоваться теоремой единственности необходимо сделать одну из частей постоянной.

Решение: Разделим обе части на $10^x > 0$. Уравнение примет вид $\left(\frac{5-\pi}{10}\right)^x + \left(\frac{5+\pi}{10}\right)^x = 1$.

Заметим, что $0 < \frac{5 \pm \pi}{10} < 1$. По свойству показательной функции a^x при $a \in (0, 1)$, левая часть – монотонно убывающая функция. По теореме о единственности значения монотонной функции, уравнение имеет не более одного корня. Поскольку $x = 1$ – корень, это единственный корень.

Ответ: 1.

2.4 Уравнение третьей степени

Решите уравнение: $\frac{x^2}{4} + 1 = \frac{4}{x}$.

Решение: ОДЗ: $x \neq 0$. Если $x < 0$, то левая часть положительная, правая – отрицательная, корней нет.

Если $x > 0$, то левая часть монотонно возрастающая функция, правая – монотонно убывающая. Значит, уравнение имеет не более одного корня.

Очевидный корень $x = 2$.

Ответ: 2.

2.5 Логарифм

Решите уравнение: $\log_2(12x - 9x^2) = 6 - 12x + 9x^2$.

Решение: ОДЗ: $t = 12x - 9x^2 > 0$.

Выполним замену и в ОДЗ уравнение принимает вид: $\log_2 t + t = 6$. Его решение $t = 4$.

Функция в левой части монотонно возрастающая, в правой – постоянная величина.

Уравнение имеет не более, чем один корень, значит, $t = 4 = 12x - 9x^2$, $x = 2/3$.

Ответ: 2/3.

2.6 Степени и корни

Решите уравнение: $x^2 \cdot 2^{a\sqrt{x}-x} = x^2 + \sqrt{x} - a$.

Размышляем: В задаче не удаётся сформировать монотонную функцию. Используем следующий приём. Угадываем корень. Доказываем, что как для больших значений аргумента, так и для меньших уравнение не имеет корней

Решение: ОДЗ: $x \geq 0$.

Пусть $a < 0$. Тогда $a\sqrt{x} - x < 0 \Rightarrow 2^{a\sqrt{x}-x} < 1$, левая часть меньше, чем правая. Корней нет.

Пусть $a \geq 0$. Обозначим $y = a - \sqrt{x}$.

Уравнение запишем в виде $f(x, y) = x^2 \cdot (2^{y\sqrt{x}} - 1) + y = 0$.

Очевидный корень $y = 0$, $x = a^2$.

Если $y < 0$, степень у двойки отрицательная, оба слагаемых отрицательные, корней нет.

Если $y > 0$, степень у двойки неотрицательная, первое слагаемое неотрицательное, второе положительное, корней нет.

Ответ: если $a < 0$, $x \in \emptyset$; если $a \geq 0$, $x = a^2$.

2.7 Степень в степени

При положительных x решите уравнение $x^x=4$.

Решение: Очевидный корень $x=2$.

Пусть $x \leq 1$. Тогда по свойству показательной функции, $x^x \leq 1$.

Пусть $x > 1$. Тогда функция $f(x)=x^x$ монотонно возрастающая. Корень единственный.

Ответ: 2.

2.7.a Степень в степени

При положительных x решите уравнение $x^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение: Очевидный корень $x = \frac{1}{2}$. Действительно, $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Рассмотрим функции $f(x)=x^x$, $\ln f(x)=x \ln x$ и $(\ln f(x))'=1+\ln x$. Последняя монотонно возрастает с ростом x от нуля и меняет знак с минуса на плюс.

Значит функция $\ln f(x)$ сначала убывает, затем возрастает. Она достигает минимума при $(\ln f(x))'=1+\ln x=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \approx 0.368 < \frac{1}{2}$. Функция непрерывная, значит, должен быть корень, меньший, чем $\frac{1}{e}$. Пробуя степени двойки, найдём $x = \frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.

2.8 Уравнение шестой степени

Решите уравнение: $\frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2} = \frac{(a^2-a+1)^3}{a^2(a-1)^2}$.

Размышляем: уравнение имеет очевидный корень $x=a$, поэтому возникает желание подобрать нужное число корней.

Чтобы найти степень уравнения, умножим обе части на знаменатель левой части. Левая часть содержит шестую степень, правая – четвёртую. Уравнение шестой степени. Значит, подобрать осталось всего пять корней.

Пусть $u = 1 - x$. Тогда $x^2 - x + 1 = x(x-1) = (1-u) \cdot (-u) = u^2 - u$.

Уравнение примет вид: $\frac{(u^2-u+1)^3}{u^2(u-1)^2} = \frac{(a^2-a+1)^3}{a^2(a-1)^2} \Rightarrow u=a \Rightarrow x=1-a$.

Пусть $v = \frac{1}{x}$. Тогда $\frac{(x^2-x+1)^3 : x^6}{x^2(x-1)^2 : x^6} = \frac{(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})^3}{\frac{1}{x^2}(1-\frac{1}{x})^2} = \frac{(v^2-v+1)^3}{v^2(v-1)^2}$.

Уравнение примет вид: $\frac{(v^2-v+1)^3}{v^2(v-1)^2} = \frac{(a^2-a+1)^3}{a^2(a-1)^2} \Rightarrow v=a \Rightarrow x = \frac{1}{a}$.

Итак, известны три корня уравнения. Рассмотрим суперпозицию корней, то есть выражения полученные комбинированием найденных $\frac{1}{1-a}, 1-\frac{1}{a} = \frac{a-1}{a}, 1-\frac{1}{1-a} = \frac{a}{a-1}$.

Это тоже корни. Например, $w = 1 - \frac{1}{x}, w^2(1-w)^2 = (1 - \frac{1}{x})^2 \cdot \frac{1}{x^2}$.

$$w^2 - w + 1 = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - 1 + \frac{1}{x} + 1 = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1. \quad \text{Тогда } \frac{(w^2 - w + 1)^3}{w^2(w-1)^2} = \frac{\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^3}{\frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} = \frac{(a^2 - a + 1)^3}{a^2(a-1)^2}.$$

$$w = 1 - \frac{1}{x} = a, \quad x = \frac{1}{1-a}.$$

Решение: Обозначим правую часть уравнения A и запишем его в виде:

$$\frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x-1)^2} = A, \quad (x^2 - x + 1)^3 = Ax^2(x-1)^2.$$

Получено уравнение шестой степени. Оно имеет не более, чем шесть корней.

Число $x = a$ является очевидным корнем уравнения.

$$\text{Число } x = \frac{1}{a} \text{ является корнем уравнения, так как } \frac{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a} + 1\right)^3}{\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a} - 1\right)^2} = \frac{(1-a+a^2)^3}{a^2(a^2-1)^2} = A.$$

$$\text{Число } x = 1-a \text{ является корнем уравнения, так как } \frac{\left((1-a)^2 - (1-a) + 1\right)^3}{(1-a)^2(1-a-1)^2} = \frac{(1-a+a^2)^3}{a^2(a^2-1)^2} = A.$$

Аналогично подстановкой можно доказать, что числа $x = \frac{1}{1-a}$, $x = 1 - \frac{1}{1-a} = \frac{a}{1-a}$,

$x = \left(\frac{a}{1-a}\right)^{-1} = \frac{1-a}{a}$ также корни. Шесть корней найдены.

Ответ: $a, \frac{1}{a}, 1-a, \frac{1}{1-a}, \frac{a-1}{a}, \frac{a}{a-1}, a \neq 0, a \neq 1$.

Способ 2. Пусть $f(x) = \frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x-1)^2}$. Перепишем уравнение $f(x) = f(a)$ в виде:

$$\frac{[4(x-0,5)^2 + 3]^3}{4[4(x-0,5)^2 - 1]^2} = \frac{[4(a-0,5)^2 + 3]^3}{4[4(a-0,5)^2 - 1]^2}. \quad \text{Если } x - 0,5 = \pm(a - 0,5), \text{ то } x = a \text{ или } x = 1 - a.$$

$$\text{Перепишем уравнение } f(x) = f(a) \text{ в виде: } \frac{\left(x - 1 + \frac{1}{x}\right)^3}{x - 2 + \frac{1}{x}} = \frac{\left(a - 1 + \frac{1}{a}\right)^3}{a - 2 + \frac{1}{a}}. \quad \text{Уравнение}$$

$x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$ имеет корень, $x = a^{-1}$.

Суперпозиция решений даёт ещё три корня: $\frac{1}{1-a}, \frac{a-1}{a}, \frac{a}{a-1}$.

3 Использование особенностей ОДЗ

В некоторых задачах ОДЗ имеет особенность – оно содержит одну отдельную точку и удалённый от неё отрезок или луч. Решение задачи может сводиться к проверке значения икса в указанной отдельной точке в качестве корня уравнения и оценке левой и правой части уравнения в остальной области, где они не могут быть равны.

3.1 Особая точка

Решите уравнение: $2\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x} = \sqrt{1-2x} + \sqrt{2x(1+2x)}$.

Решение: ОДЗ уравнения определяем из условий:

$$1 + 2x \geq 0; \quad 1 - 2x \geq 0; \quad x(1 + 2x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \{-0,5\} \cup [0; 0,5].$$

Число $x = -0,5$ является корнем уравнения.

Пусть $2x \in [0; 1]$. Тогда левая часть уравнения не меньше двух:

$$2\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x} \geq 2 + 0 = 2.$$

Правая часть меньше двух, так как квадрат правой части меньше трёх:

$$1 - 2x \leq 1, \quad \sqrt{2x(1+2x)} \leq \sqrt{1+1}.$$

$$1 - 2x + \sqrt{2x(1+2x)} \leq 1 + \sqrt{1+1} < 3. \text{ Равенство невозможно, корней нет.}$$

Ответ: $-0,5$.

3.1.a Особая точка

Решите уравнение: $2\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} = \sqrt{2-x} + \sqrt{x(2+x)}$.

Решение: ОДЗ уравнения определяем из условий:

$$x + 2 \geq 0; \quad 2 - x \geq 0; \quad x(2 + x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \{-2\} \cup [0; 2].$$

Легко проверить, что $x = -2$ является корнем уравнения.

Пусть $x \in [0; 2]$. Тогда левая часть уравнения не меньше четырёх:

$$2\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} \geq 2 \cdot 2 + 0 = 4.$$

Правая часть меньше трёх, так как её квадрат меньше пяти:

$$2 - x + \sqrt{x(2+x)} \leq 2 + \sqrt{2(2+2)} < 5. \text{ Равенство невозможно, корней нет.}$$

Ответ: -2 .

3.2 Особая точка

Решите уравнение: $\sqrt[6]{3x-27x^2} + 3 \cdot \sqrt{9x^2-2x+1} = \sqrt{8}$.

Решение: ОДЗ: $x \in [0; 1/9]$.

Пусть $x = 1/9$. Подстановкой убеждаемся, что это корень.

Пусть $x \neq 1/9$. Тогда $\sqrt[6]{3x-27x^2} \geq 0$.

$$3\sqrt{9x^2-2x+1} = \sqrt{81x^2-18x+9} = \sqrt{(9x-1)^2+8} > \sqrt{8}.$$

Сумма в левой части строго больше правой части. Противоречие – уравнение не имеет таких корней.

Ответ: $1/9$.

4 Метод скрытого множителя (степени)

4.1 Разложение линейного выражения

Решите уравнение: $x-2=(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{2x+2}-1)$.

Размышления: Важно увидеть, что $x-2=x+2-4=(\sqrt{x+2})^2-2^2=(\sqrt{x+2}-2)\cdot(\sqrt{x+2}+2)$. Целесообразно отдельно рассмотреть случай $x=2$, так как разложение нуля на сомножители это не эквивалентная операция.

Решение: ОДЗ: $x \geq -1$ (следует из последнего корня).

Пусть $x=2$. Правая часть не равна левой, $x=2$ не корень.

Пусть $x \neq 2$ разложим $x-2$ в произведение:

$$x-2=x+2-4=(\sqrt{x+2})^2-2^2=(\sqrt{x+2}-2)\cdot(\sqrt{x+2}+2).$$

Запишем уравнение в форме:

$$(\sqrt{x+2}-2)\cdot(\sqrt{x+2}+2)=(\sqrt{x+2}+2)\cdot(\sqrt{2x+2}-1).$$

Сократим на положительный множитель $\sqrt{x+2}+2$. Получим

$$\sqrt{x+2}-2=\sqrt{2x+2}-1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=\sqrt{2x+2}+1.$$

Выражения с обеих сторон от знака равенства положительные, поэтому возводим уравнение в квадрат. Получаем: $-x-1=2\sqrt{2x+2}$.

В ОДЗ левая часть не отрицательна только при $x=-1$. Это корень. Других нет.

Ответ: -1 .

4.1.a Разложение линейного выражения

Решите уравнение: $4x+3=(2\sqrt{x+1}-1)\cdot(2\sqrt{x+1}+x^2+|x|-5)$.

Решение: ОДЗ: $x \geq -1$.

Если $4x+3=0$, то $x=-0,75$. Это корень уравнения.

Если $4x+3 \neq 0$, то разложим $4x+3 \neq 0$ в произведение:

$$(2\sqrt{x+1}-1)\cdot(2\sqrt{x+1}+1)=(2\sqrt{x+1}-1)\cdot(2\sqrt{x+1}+x^2+|x|-5).$$

После сокращения на неравный нулю первый множитель получаем:

$$2\sqrt{x+1}+1=2\sqrt{x+1}+x^2+|x|-5 \Leftrightarrow x^2+|x|-5=1 \Leftrightarrow$$

$$(|x|-2)(|x|+3)=0 \Leftrightarrow |x|-2=0. \text{ С учётом ОДЗ, } x=2.$$

Ответ: $-0,75, 2$.

4.2 Извлечение корней

Решите уравнение: $x-4=\frac{(x+14)^2}{(3+\sqrt{23+x})^2}$.

Решение: ОДЗ: $x \geq -23$. Решение возможно при (ОВР): $x > 4$.

В ОВР извлекаем корень из обеих частей уравнения и умножаем на знаменатель:

$$\sqrt{x-4}\cdot(\sqrt{x+23}+3)=x+14.$$

Число $x=-14$ не корень, поэтому раскладываем $x+14 \neq 0$ в произведение:

$$x+14=(\sqrt{x+23}-3)\cdot(\sqrt{x+23}+3).$$

Записываем уравнение в виде $(\sqrt{x+23}-3)\cdot(\sqrt{x+23}+3)=\sqrt{x-4}\cdot(\sqrt{x+23}+3)$.

$$\sqrt{x-4}+3=\sqrt{x+23} \Leftrightarrow 6\sqrt{x-4}=18 \Leftrightarrow x=13.$$

Ответ: 13 .

4.3 Квадрат под знаком корня

Решите уравнение: $\sqrt{x-2}\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}\sqrt{x-1}=x-1$.

Размышления: Важно увидеть особенность подкоренных выражений повторяется выражение $\sqrt{x-1}$. Если ввести переменную $t=\sqrt{x-1}$, $x=t^2+1$, то уравнение примет вид:

$\sqrt{t^2+1-2t}+\sqrt{t^2+1+2t}=t^2$. Под знаками корней находятся квадраты.

Решение: ОДЗ: $x \in [1; +\infty)$.

Заметим, что под знаками корней находятся квадраты:

$$x-2\sqrt{x-1}=(x-1)-2\sqrt{x-1}+1=(\sqrt{x-1})^2-2\sqrt{x-1}+1=(\sqrt{x-1}-1)^2.$$

Выносим квадраты из под корней и преобразуем уравнение к виду:

$$|\sqrt{x-1}-1|+\sqrt{x-1}+1=x-1.$$

Пусть $x \geq 2$, $\sqrt{x-1} \geq 1$. Эквивалентное уравнение $2\sqrt{x-1}=x-1 \Leftrightarrow 2=\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x=5$.

Пусть $x \in [1; 2)$, $\sqrt{x-1} < 1$. Тогда $2 = x - 1$, корней нет.

Ответ: 5.

4.4 Связь подкоренных выражений

Решите уравнение: $\sqrt[3]{(3x+\sqrt{1+x^2})^2}+3\sqrt[3]{8x^2-1}+2\sqrt[3]{(3x-\sqrt{1+x^2})^2}=0$.

Размышления: Важно увидеть особенность подкоренных выражений:

$$(3x+\sqrt{1+x^2}) \cdot (3x-\sqrt{1+x^2}) = (3x)^2 - (1+x^2) = 8x^2 - 1.$$

Эту особенность используем, заменив второй корень произведением первого и третьего.

Решение: Обозначим: $u = \sqrt[3]{3x+\sqrt{1+x^2}}$, $v = \sqrt[3]{3x-\sqrt{1+x^2}}$.

Заметим: $uv = \sqrt[3]{3x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \sqrt[3]{3x-\sqrt{1+x^2}} = \sqrt[3]{(3x)^2 - (1+x^2)} = \sqrt[3]{8x^2-1}$.

Уравнение запишем в эквивалентном виде:

$$u^2 + 3uv + 2v^2 = 0 \Leftrightarrow (u+v) \cdot (u+2v) = 0.$$

Если $u = -v$, $u^3 = -v^3$, $3x + 3x = 0$, $x = 0$.

Если $u = -2v$, то $u^3 + 8v^3 = 0$, для положительных иксов:

$$3x + \sqrt{1+x^2} + 24x - 8\sqrt{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow 27x = 7\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow 680x^2 = 7^2.$$

Ответ: $(0, \frac{7}{2\sqrt{170}})$.

4.4.a Связь подкоренных выражений

Решите уравнение: $\sqrt[3]{\frac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}} = 13$.

Решение: ОДЗ: $|x| \geq 2$. Заметим, что:

$$(x+\sqrt{x^2-4})^3 = x^3 + 3x^2\sqrt{x^2-4} + 3x(\sqrt{x^2-4})^2 + (\sqrt{x^2-4})^3 = 4(x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}).$$

$$\text{Значит, } \sqrt[3]{\frac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}} = \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}, \quad \sqrt[3]{\frac{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}} = \frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}.$$

Уравнение перепишем в эквивалентном виде:

$$\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2} + \frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2} = 13, x = 13.$$

Ответ: 13.

4.5 Выделение полного квадрата

Решите уравнение: $x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} + 4 = 42 \frac{1}{4}$.

Исследование: в задаче встроена подсказка. Из правой части перенесена в левую четвёрка. Благодаря этому видны два квадрата: $\frac{4x^2}{(x+2)^2} = \left(\frac{2x}{x+2}\right)^2$, $42 \frac{1}{4} = \left(\frac{13}{2}\right)^2$. То, что осталось, это x^2+4 . Здесь нужно догадаться до соотношений $x^2+4 = (x+2)^2 - 4x$ и

$$2 \cdot \frac{2x}{x+2} \cdot (x+2) = 4x.$$

Решение: ОДЗ: $x \neq -2$. Учитывая, что $2 \cdot \frac{2x}{x+2} \cdot (x+2) = 4x$, выделим полный квадрат:

$$(x^2 + 4x + 4) - 4x + \left(\frac{2x}{x+2}\right)^2 = 42 \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(x+2 - \frac{2x}{x+2}\right)^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2.$$

Если $x+2 - \frac{2x}{x+2} = \frac{13}{2}$, то $(x+1,5) \cdot (x-6) = 0$.

Если $x+2 - \frac{2x}{x+2} = -\frac{13}{2}$, то $\left(x + \frac{17}{4}\right)^2 = \frac{17}{16}$.

Ответ: $6, -\frac{3}{2}, \frac{\pm\sqrt{17}-17}{4}$.

4.6 Задание

Для каждого неотрицательного числа a рассмотрим уравнение: $x^3 + ax - a^3 - 29 = 0$. Пусть x_0 – положительный корень этого уравнения. Каково наименьшее значение величины x_0 ?

Размышляем: Если $a=0$, то x чуть больше, чем три. Если a большое, уравнение близко к $x^3 - a^3 = 0$. Его единственный корень возрастает при увеличении a . Возможное решение $x_0=3$. Подставив его в уравнение получим $27 + 3a - a^3 - 29 = 0$, $a^3 - 3a + 2 = 0$, $a=1$. Возникает предположение о возможности разложения на множители, так как уравнение может иметь вид $(x-3) \cdot (\dots) = (a-1) \cdot (\dots)$.

Делим $x^3 + ax$ на $x-3$ так, чтобы в остатке были только члены, содержащие a и константы. Получаем $x^3 + ax = (x-3) \cdot (x^2 + 3x + a + 9) + 3a + 27$. Значит, уравнение имеет вид $(x-3) \cdot (x^2 + 3x + a + 9) + 3a + 27 - a^3 - 29 = 0$. Переносим члены, содержащие a , вправо. $(x-3) \cdot (x^2 + 3x + a + 9) = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2 \cdot (a+2)$. Этот вид уравнения даёт обоснование записи решения.

Решение: преобразуем выражение $x^3 + ax = a^3 + 29$ к эквивалентному виду:

$$(x-3) \cdot (x^2 + 3x + a + 9) = (a-1)^2 \cdot (a+2).$$

Если $a=1$, то $x_0=3$. Меньшего корня уравнение иметь не может, так как правая часть при $a \neq 1$ положительная, а левая при $x < 3$ отрицательная.

Ответ: $x_0=3$.

5 Использование обозначений

5.1 Четвёрка корней

Решите уравнение: $\sqrt{x+13} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x+6} + \sqrt{x+7}$.

Размышляем: Множество слагаемых не позволяет увидеть суть. Если заменить слагаемые обозначениями, то разности квадратов слагаемых – это числа. разность квадратов делится на сумму, что позволит получать простые связи между новыми переменными.

Решение: ОДЗ: $x \geq -3$. Обозначим слагаемые $A = \sqrt{x+13}$, $B = \sqrt{x+3}$, $C = \sqrt{x+6}$, $D = \sqrt{x+7}$. Уравнение примет вид $A+B=C+D$. Группируя квадраты слагаемых, получим, что $A^2 - B^2 = (x+13) - (x+3) = 10$, $C^2 - D^2 = -1$.

$$\text{Значит, } A+B = \frac{A^2 - B^2}{A-B} = \frac{C^2 - D^2}{C-D} \Leftrightarrow \frac{10}{A-B} + \frac{1}{C-D} = 0 \Rightarrow 10C - 10D + A - B = 0.$$

$$\text{Аналогично, } A-D = C-B \Rightarrow \frac{A^2 - D^2}{A+D} = \frac{C^2 - B^2}{C+B} \Leftrightarrow \frac{6}{A+D} = \frac{3}{C+B} = 0 \Rightarrow 2C + 2B = A + D.$$

Из полученной системы трёх уравнений удалим две переменных. Получим

$$35C = 31B \Leftrightarrow 35\sqrt{x+6} = 31\sqrt{x+7} \Leftrightarrow 35^2(x+6) = 31^2(x+7) \Leftrightarrow x = -\frac{623}{264}.$$

Ответ: $x = -\frac{623}{264}$.

5.1.a Четвёрка корней

Решите уравнение: $\sqrt{2x-1} + \sqrt{4x-3} = \sqrt{6x-7} + \sqrt{7x-\frac{15}{2}}$.

Исследование: Обозначим слагаемые $A = \sqrt{2x-1}$, $B = \sqrt{4x-3}$, $C = \sqrt{6x-7}$, $D = \sqrt{7x-7.5}$. Уравнение примет вид $A+B=C+D$. Группируя квадраты слагаемых, получим, что $C^2 - A^2 = 4x - 6 = 4(x - \frac{3}{2})$, $D^2 - B^2 = 3x - 4.5 = 3(x - \frac{3}{2})$. Таким образом, $3(C^2 - A^2) = 4(D^2 - B^2) = 12x - 18$. Для переменных A, B, C, D найдено второе уравнение.

Решение: ОДЗ: $x \geq \frac{15}{14}$. Обозначим: $A = \sqrt{2x-1} \geq 0$, $B = \sqrt{4x-3} \geq 0$, $C = \sqrt{6x-7} \geq 0$, $D = \sqrt{7x-7.5} \geq 0$. Уравнение примет вид $A+B=C+D$. Заметим, что $3(C^2 - A^2) = 12x - 18$, $4(D^2 - B^2) = 12x - 18$. Поэтому из уравнения следует система
$$\begin{cases} 3(C^2 - A^2) = 4(D^2 - B^2), \\ C - A = B - D. \end{cases}$$

Если $A=C$, то $\sqrt{2x-1} = \sqrt{6x-7}$, $x = \frac{3}{2}$. Проверка показывает, уравнение выполнено.

Если $A \neq C$, то разделив первое уравнение на второе, получим $3(C+A) = -4(D+B)$, что не возможно, так как слева положительное число, а справа отрицательное.

Ответ: $x = \frac{3}{2}$.

5.2 Корни под знаком корня

Решите уравнение: $\sqrt{4+\sqrt{16-x}} + \sqrt{4-\sqrt{16-x}} = \sqrt{8+2\sqrt{x}} + \sqrt{32-2x}$.

Решение: ОДЗ уравнения $16 \geq x \geq 0$.

Обозначим $A = \sqrt{4+\sqrt{16-x}}$, $B = \sqrt{4-\sqrt{16-x}}$. Тогда $A^2 + B^2 = 8$;

$$A^2 B^2 = 4^2 - (16-x) = x. \text{ Следовательно } A+B = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB} = \sqrt{8+2\sqrt{x}}.$$

Уравнение свелось к $\sqrt{32-2x} = 0$.

Ответ: 16.

5.2.a Корни под знаком корня

Решите уравнение: $\sqrt{x-4} + \sqrt{x-2} - \sqrt{x-3} - \sqrt{x-2} = 1$.

Решение: Обозначим выражения $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{x-2}$, $B = \sqrt{x-3} - \sqrt{x-2}$.

Уравнение сводится к системе:
$$\begin{cases} A - B = 1, \\ A^2 - B^2 = 2\sqrt{x-2} - 1. \end{cases} \quad \begin{cases} A - B = 1, \\ A + B = 2\sqrt{x-2} - 1. \end{cases}$$

Складывая левые и правые части исходного и последнего уравнений, получим:

$$A = \sqrt{x-2}. \quad A^2 = x - 2 = x - 4 + \sqrt{x-2}. \quad \sqrt{x-2} = 2 \Leftrightarrow x = 6.$$

Ответ: 6.

5.2.b Корни под знаком корня

Решите уравнение: $\sqrt{x+2}\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}\sqrt{x-1} = (x-1)^2$.

Решение: ОДЗ уравнения $x \geq 1$.

$$\sqrt{x \pm 2}\sqrt{x-1} = \sqrt{(x-1) \pm 2}\sqrt{x-1} = \sqrt{\sqrt{x-1} \pm 1} = |\sqrt{x-1} \pm 1|.$$

Уравнение переписывается в виде: $\sqrt{x-1} + 1 + |\sqrt{x-1} - 1| = (x-1)^2$. (*)

Пусть $x \geq 2$. Тогда (*) переписываем в виде $2\sqrt{x-1} = (x-1)^2$.

Ясно, что $x = 1$ не корень, так как $x \geq 2$, значит, $(x-1)^3 = 4$, $x = \sqrt[3]{4} + 1$.

Пусть $x < 2$. Тогда (*) переписываем в виде $2 = (x-1)^2$, корней нет.

Ответ: $x = \sqrt[3]{4} + 1$.

5.2.c Корни под знаком корня

Решите уравнение: $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x-5} + \sqrt{x+2} + 3\sqrt{2x-5} = 7\sqrt{2}$.

Решение: ОДЗ уравнения $x \geq 2,5$. Умножим обе части уравнения на $\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-5} + 2\sqrt{2x-5} + 1 + \sqrt{2x-5} + 6\sqrt{2x-5} + 9 &= 14. \Rightarrow \\ \sqrt{(\sqrt{2x-5} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{2x-5} + 3)^2} &= 14. \Rightarrow \\ \sqrt{2x-5} + 1 + \sqrt{2x-5} + 3 &= 14. \Rightarrow \\ \sqrt{2x-5} = 5 = 5 &\Rightarrow x = 15. \end{aligned}$$

5.3 Три кубических корня

Решите уравнение: $\sqrt[3]{5-2x} + \sqrt[3]{3-2x} = \sqrt[3]{8-4x}$.

Решение: Пусть $x = 2$. Проверка показывает, что это корень уравнения.

Пусть $x \neq 2$. Тогда делим обе части на $\sqrt[3]{8-4x}$: $\sqrt[3]{\frac{5-2x}{8-4x}} + \sqrt[3]{\frac{3-2x}{8-4x}} = 1$.

Обозначим: $A = \sqrt[3]{\frac{5-2x}{8-4x}}$, $B = \sqrt[3]{\frac{3-2x}{8-4x}}$.

Тогда уравнение сводится к системе:
$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A^3 + B^3 = 1 \end{cases}$$

Известно, что: $A^3 + B^3 + 3AB(A+B) = (A+B)^3 \Rightarrow AB = 0$.

Если $A = 0$, то $5 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2,5$; если $B = 0$, то $3 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1,5$.

Ответ: 1,5; 2; 2,5.

5.3.a Три кубических корня

Решите уравнение: $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$.

Решение: Обозначим слагаемые $A = \sqrt[3]{x+5}$, $B = \sqrt[3]{x+6}$. Поскольку $A^3 + B^3 = 2x + 11$, уравнение переписывается в виде: $(A+B)^3 = A^3 + B^3 \Rightarrow 3AB(A+B) = 0$. Здесь использовано тождество $(A+B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B)$.

Если $A = \sqrt[3]{x+5} = 0$, то $x = -5$.

Если $B = \sqrt[3]{x+6} = 0$, то $x = -6$.

Если $A + B = 0$, то $\sqrt[3]{2x+11}=0$ и $x = -5,5$.

Ответ: $-5; -5,5; -6$.

5.3.б Три кубических корня

Решите уравнение: $\sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{2x-2} = \sqrt[3]{2n(2x-1)}$, $n=6$.

Решение: Легко проверить, что $x = 0,5$ – корень уравнения.

Пусть $x \neq 0,5$. Разделим обе части уравнения на $\sqrt[3]{2(2x-1)}$:

$$\sqrt[3]{\frac{2x}{2(2x-1)}} + \sqrt[3]{\frac{2x-2}{2(2x-1)}} = \sqrt[3]{n}.$$

Обозначим $A = \sqrt[3]{\frac{2x}{2(2x-1)}}$, $B = \sqrt[3]{\frac{2x-2}{2(2x-1)}}$.

Уравнение сводится к системе:

$$\begin{cases} A+B = \sqrt[3]{n}, \\ A^3+B^3 = 1. \end{cases}$$

$$(A+B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B) \Rightarrow AB = \frac{n-1}{3\sqrt[3]{n}}.$$

Корни существуют тогда и только тогда, когда:

$$(A+B)^2 \geq 4AB \Rightarrow \sqrt[3]{n^2} \geq 4 \frac{n-1}{3\sqrt[3]{n}}. \Rightarrow n \leq 4. \text{ При } n=6 \text{ корней нет.}$$

Ответ: $0,5$.

6 Метод интерпретации

Идея данной группы методов – решение задачи из одной области знаний методами другой. При этом объекты данной области требуется заменить на эквивалентные в некотором смысле объекты из другой области знаний. Часто применяется приём замены алгебраического выражения его геометрическим аналогом. Далее используются известные свойства геометрии, например, тот факт, что длина ломаной не меньше, чем длина отрезка, соединяющего её концы.

6.1 Коллинеарные векторы

Решите неравенство: $\sqrt{a_x^2+a_y^2}+\sqrt{b_x^2+b_y^2}+\sqrt{c_x^2+c_y^2}\leq\sqrt{(a_x+b_x+c_x)^2+(a_y+b_y+c_y)^2}$, считая известными и не равными нулю a_x, a_y, b_y и c_y .

Решение: Рассмотрим векторы $\vec{a}=(a_x, a_y), |\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}, \vec{b}=(b_x, b_y), \vec{c}=(c_x, c_y)$, и вектор их суммы $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(a_x+b_x+c_x, a_y+b_y+c_y), |\vec{s}|=\sqrt{(a_x+b_x+c_x)^2+(a_y+b_y+c_y)^2}$. Трактуем левую часть, как сумму длин этих векторов, правую часть – как длину вектора суммы этих векторов. Известно, что длина ломаной не меньше, чем длина отрезка, соединяющего концы ломаной. Значит, в рассматриваемой задаче возможно только равенство левой и правой части. Длина ломаной равна длине отрезка только в случае, если её звенья лежат на одной прямой и не имеют общих точек. Алгебраически для $a_y \neq 0$ это означает, что:

Ответ: $\frac{a_x}{a_y}=\frac{b_x}{b_y}=\frac{c_x}{c_y}$.

6.2 Модуль и скалярное произведение

Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=2\sqrt{x+y-2}. \end{cases}$$

Размышления: Замечаем, что $x-1+y-1=x+y-2$, то есть сумма квадратов правых множителей в левой части второго уравнения равна квадрату правого множителя. Из первого уравнения следует, что аналогичное равенство у левых множителей. Это приводит к идее использования векторов.

Решение: ОДЗ: $x \geq 1, y \geq 1$. Пусть $\vec{a}=(x, y), \vec{b}=(\sqrt{y-1}, \sqrt{x-1})$.

Из первого уравнения $|\vec{a}|=2$. Модуль вектора $|\vec{b}|=\sqrt{x+y-2}$.

Второе уравнение переписываем в виде $\vec{a} \cdot \vec{b}=|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Скалярное произведение векторов равно произведению их модулей, значит, векторы коллинеарны. Их компоненты пропорциональны: $\frac{x}{\sqrt{y-1}}=\frac{y}{\sqrt{x-1}}$.

Следовательно, $x \cdot \sqrt{x-1}=y \cdot \sqrt{y-1}$. В ОДЗ при $x \geq 1$ функция $f(x)=x \cdot \sqrt{x-1}$ монотонная, значит, из уравнения следует, что $x=y$.

Ответ: $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

6.3 Сумма проекций

Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x+y+z+t=12, \\ \sqrt{1-x^2}+\sqrt{4-y^2}+\sqrt{16-z^2}+\sqrt{36-t^2}=5. \end{cases}$$

Размышляем: Уравнений два, переменных четыре, значит, имеет место некоторый экстремум. Особенности чисел, входящих в уравнение таковы: $5^2+12^2=13^2, 1+2+4+6=13$, квадраты этих чисел стоят под корнями.

Рассмотрим четыре вектора. Первый $\vec{a}=(a_x, a_y)$ имеет проекции на две перпендикулярные оси $a_x=x, a_y=\sqrt{1-x^2}$. Его длина $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=1$. Остальные

$$\vec{b}=(b_x, b_y), b_x=y, b_y=\sqrt{4-y^2}, |\vec{b}|=2. \quad \vec{c}=(c_x, c_y), c_x=z, c_y=\sqrt{16-z^2}, |\vec{c}|=4.$$

$\vec{d}=(d_x, d_y), d_x=t, d_y=\sqrt{36-t^2}, |\vec{d}|=6.$ Образую из них ломаную, пристыковав начало каждого следующего вектора к концу предыдущего.

Суммарная длина ломаной $1+2+3+4=13$. Ее проекции на взаимно перпендикулярные оси $x+y+z+t=12$ и $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{4-y^2}+\sqrt{16-z^2}+\sqrt{36-t^2}=5$.

Расстояние между концами ломаной $\sqrt{5^2+12^2}=13$.

Суммарная длина ломаной равна расстоянию между её концами только тогда, когда отрезки ломаной коллинеарны. Алгебраически это запишем в виде неравенства:

$$\left(\sqrt{a_x^2+a_y^2}+\sqrt{b_x^2+b_y^2}+\sqrt{c_x^2+c_y^2}+\sqrt{d_x^2+d_y^2}\right)^2 \geq (a_x+b_x+c_x+d_x)^2+(a_y+b_y+c_y+d_y)^2.$$

Неравенство превращается в равенство, если компоненты слагаемых пропорциональны.

Решение: Пусть $a_x=x, a_y=\sqrt{1-x^2}$. Тогда $\sqrt{a_x^2+a_y^2}=1$. Аналогично

$$b_x=y, b_y=\sqrt{4-y^2}, \quad \sqrt{b_x^2+b_y^2}=2. \quad \text{И так далее.}$$

Известно, что длина ломаной не меньше длины отрезка, соединяющего её концы:

$$\sqrt{a_x^2+a_y^2}+\sqrt{b_x^2+b_y^2}+\sqrt{c_x^2+c_y^2}+\sqrt{d_x^2+d_y^2} \geq \sqrt{(a_x+b_x+c_x+d_x)^2+(a_y+b_y+c_y+d_y)^2}.$$

Пользуясь этим неравенством, получим, что:

$$13=1+2+4+6=\sqrt{x^2+(1-x^2)}+\sqrt{y^2+(4-y^2)}+\sqrt{z^2+(16-z^2)}+\sqrt{t^2+(36-t^2)} \geq \sqrt{(x+y+z+t)^2+(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{4-y^2}+\sqrt{16-z^2}+\sqrt{36-t^2})^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13.$$

Равенство возможно, только если все векторы коллинеарны, отрезки ломаной лежат на одной прямой и их проекции пропорциональны:

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{y}{\sqrt{4-y^2}}=\frac{z}{\sqrt{16-z^2}}=\frac{t}{\sqrt{36-t^2}}=\frac{x+y+z+t}{\sqrt{1-x^2}+\dots+\sqrt{36-t^2}}=\frac{12}{5}.$$

Отсюда находим: $x=12/13; y=24/13; z=48/13; t=72/13$.

Ответ: (12/13, 24/13, 48/13, 72/13).

6.4 Векторы под углом 30°

Решите неравенство: $\sqrt{a^2-ax\sqrt{3}+x^2}+\sqrt{b^2-by\sqrt{3}+y^2}+\sqrt{x^2-xy\sqrt{3}+y^2} \leq \sqrt{a^2+b^2}, a>0, b>0$.

Размышляем: В левой части имеем три по сути одинаковых выражения, которые аналогичны выражению теоремы косинусов для угла 30° . Если стороны, содержащие угол, равны x и y , то квадрат противолежащей стороны: $L^2=x^2+y^2-2xy\cos 30^\circ=x^2+y^2-xy\sqrt{3}$.

Если сложить в одной точке три треугольника с углами при вершине 30° так, что их боковые стороны совпадают по направлению, крайние стороны образуют угол 90° .

Если совмещённые пары сторон равны, то основания треугольников формируют ломаную, которая замыкает концы крайних сторон, угол между которыми прямой. Длина этой ломаной не меньше, чем длина гипотенузы возникшего прямоугольного треугольника.

Решение: Пусть даны три треугольника со сторонами равными a и x для первого треугольника, x и y для второго треугольника, y и b для третьего треугольника.

Пусть углы между указанными сторонами равны 30° . Тогда длины третьих сторон равны $\sqrt{a^2-ax\sqrt{3}+x^2}, \sqrt{x^2-xy\sqrt{3}+y^2}, \sqrt{b^2-by\sqrt{3}+y^2}$.

Сложим треугольники так, чтобы вершины углов 30° совпали, стороны x и x и y и y разных треугольников совпали и треугольники не имели общих внутренних точек.

Крайние стороны a и b образуют угол 90° и расстояние между их несовпадающими концами равно $\sqrt{a^2+b^2}$.

Третьи стороны образуют ломаную длина отрезков которой $\sqrt{a^2-ax\sqrt{3}+x^2}, \sqrt{x^2-xy\sqrt{3}+y^2}, \sqrt{b^2-by\sqrt{3}+y^2}$. Их сумма не меньше, чем расстояние между концами, а по условию, она не больше этого расстояния.

Значит, ломаная совпадает с гипотенузой. Длины отрезков x и y проще всего найти по

теореме синусов: $\frac{a}{\sin(\varphi + 30^\circ)} = \frac{x}{\sin \varphi} \Leftrightarrow x = \frac{2a}{\operatorname{ctg} \varphi + \sqrt{3}}, \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$.

Ответ: $(x, y) = \left(\frac{2ab}{a+b\sqrt{3}}, \frac{2ab}{a\sqrt{3}+b} \right)$.

6.5 Векторы под углом 120°

Положительные числа x, y и z таковы, что:
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 9, \\ y^2 + yz + z^2 = 16, \\ z^2 + zx + x^2 = 25. \end{cases}$$
 Найдите $(xy + yz + zx)^2$.

Размышляем: Каждое из трёх данных уравнений имеет одинаковый вид. Такой вид имеет формула косинусов в случае, если $-2\cos\alpha = 1$, то есть для угла $\alpha = 120^\circ$.

Особенность чисел: $9 + 16 = 25$, то есть корни из выражений, стоящих в правых частях уравнений, могут быть сторонами египетского треугольника (3,4,5).

Произведения, входящие в искомое выражение, можно трактовать, как числа, пропорциональные площади треугольников с равными углами при вершине.

Решение: Пусть числа x, y и z суть длины трёх отрезков OA, OB и OC с общей вершиной O и углами между ними, равными 120° . По теореме косинусов находим длину отрезка AB :

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 OA \cdot OB \cos 120^\circ = x^2 + y^2 + xy, AB = 3.$$

Аналогично, $BC = 4$ и $CA = 5$. Причём, $AB^2 + BC^2 = 9 + 16 = 25 = AC^2$.

Треугольник ABC – прямоугольный с катетами 3 и 4 и площадью 6.

Произведение $x \cdot y$ пропорционально площади треугольника OAB :

$$S_{AOB} = \frac{OA \cdot OB \cdot \sin 120^\circ}{2} = \frac{x y \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow xy = \frac{4 S_{AOB}}{\sqrt{3}}.$$

Значит, искомая величина:

$$(xy + yz + zx)^2 = \left(\frac{4(S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA})}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{16 S_{ABC}^2}{3} = 192.$$

Ответ: 192.

6.5.a Векторы под углом 120°

Найдите квадрат суммы положительных чисел x, y и z , удовлетворяющих системе:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a^2, \\ x^2 + xz + z^2 = b^2, \\ z^2 + zy + y^2 = a^2 + b^2. \end{cases}$$

Размышление: В левых частях имеем три по сути одинаковых выражения, которые аналогичны выражению теоремы косинусов для угла 120° . Рассмотрим треугольник с основанием a , боковыми сторонами, содержащими угол 120° , равными x и y . Тогда:

$$a^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 120^\circ = x^2 + y^2 + xy.$$

Сложим треугольники так, чтобы вершины углов 120° совпали, стороны x и x, y и y, z и z разных треугольников совпали. Сумма углов в совпавших вершинах равна 360° .

Третьи стороны объединённых треугольников формируют прямоугольный треугольник со сторонами $a, b, \sqrt{a^2 + b^2}$.

Геометрическая аналогия системы – это прямоугольный треугольник с катетами a и b , вершины которого удалены на расстояния x, y и z от некоторой точки и видны из неё под углами 120° .

Известно что вершины треугольника видны под углами 120° из точки Торричелли. Искомая сумма есть минимальная сумма расстояний от точки внутри треугольника до его вершин.

Чтобы найти эту сумму, любую сторону поворачиваем на угол 60° во внешнюю сторону и ищем расстояние от конца этой стороны до противоположной вершины.

Удобно повернуть катет, тогда возникнет треугольник с углом 150° и боковыми сторонами a и b . Квадрат длины третьей стороны этого треугольника :

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos 150^\circ = a^2 + b^2 + ab\sqrt{3}.$$

Ответ: $a^2 + b^2 + ab\sqrt{3}$.

6.6 Длина отрезка

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 14x - 10y + 58 = 0, \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 16x - 12y + 100} + \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 20y + 104} = 2\sqrt{29}. \end{cases}$$

Размышление: Каждый из корней имеет одинаковую структуру $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$. То есть равен расстоянию между точками (x, y) и (a, b) . В первом корне $(a, b) = (8, 6)$, во втором $(a, b) = (-2, 10)$. Заметим, что расстояние между этими точками $\sqrt{(8+2)^2 + (6-10)^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$.

Решение: Второе уравнение системы запишем в виде:

$$\sqrt{(x-8)^2 + (y-6)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (y-10)^2} = 2\sqrt{29} = \sqrt{(8+2)^2 + (6-10)^2}.$$

Первый корень равен длине отрезка AC , где точка $A(8, 6)$, точка $C(x, y)$, второй корень равен длине отрезка BC , где точка $B(-2, 10)$. Ясно, что длина AB равна $2\sqrt{29}$. Следовательно, точка $C(x, y)$ лежит на отрезке AB . Поэтому, второе уравнение можно заменить на

эквивалентное : $\frac{x-8}{-2-8} = \frac{y-6}{10-6}$, $x \in [-2, 8]$. Значит, $2x + 5y = 46$. Подставив в первое уравнение, получим ответ.

Ответ: $(x, y) = \left(\frac{217 - 5\sqrt{415}}{29}, \frac{180 + 2\sqrt{415}}{29} \right)$.

6.7 Модуль и скалярное произведение

Решите систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + u \geq 13, \\ u^2 + v^2 = 144, \\ xv + yu \geq 60. \end{cases}$$

Решение: Выполним замену: $x = 5\sin \varphi$, $y = 5\cos \varphi$, $u = 12\sin \theta$, $v = 12\cos \theta$.

Тогда $xv + yu = 60\sin(\varphi + \theta) \geq 60$. Значит, $\sin(\varphi + \theta) = 1$, $\varphi + \theta = (0,5 + 2n)\pi$, $\sin \theta = \cos \varphi$.

$x + u = 5\sin \varphi + 12\sin \theta = 5\sin \varphi + 12\cos \varphi \leq \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.

$$\sin \varphi = \frac{5}{13}, \cos \varphi = \sin \alpha = \frac{12}{13}. \text{ Следовательно, } (x, y, u, v) = \left(\frac{25}{13}, \frac{60}{13}, \frac{144}{13}, \frac{60}{13} \right).$$

Ответ: $\left(\frac{25}{13}, \frac{60}{13}, \frac{144}{13}, \frac{60}{13} \right)$.

6.8 Скалярное и векторное произведения

Решите систему уравнений в натуральных числах:

$$\begin{cases} xv - yu = 19, \\ xu + yv = 34. \end{cases}$$

Размышления: Замечаем, что второе уравнение похоже на скалярное произведение векторов с компонентами (x, y) и (u, v) . Для этих векторов первое уравнение – это модуль векторного произведения.

Решение: Пусть $\vec{a} = (x, y)$, $|\vec{a}| = a$; $\vec{b} = (u, v)$, $|\vec{b}| = b$.

Из первого уравнения $(\vec{a} \times \vec{b})_z = ab \sin \varphi = 19$.

Из второго уравнения $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \varphi = 34$.

Произведение квадратов модулей: $|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 = a^2 b^2 \sin^2 \varphi + a^2 b^2 \cos^2 \varphi = 19^2 + 34^2 = 1517$.

Это произведение равно $|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 = (x^2 + y^2) \cdot (u^2 + v^2)$.

Разлагаем найденное произведение на множители: $1517 = 37 \cdot 41 = (6^2 + 1^2) \cdot (5^2 + 4^2)$.

Отбираем решения, удовлетворяющие исходным уравнениям.

Ответ: $\{x; y; u; v\} = \{6; 1; 5; 4\} \cup \{4; 5; 1; 6\}$.

6.9 Длина отрезка

Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x^2 + x + 1 = 4y, \\ \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-4)^2} = 5. \end{cases}$$

Решение: Слагаемые (корни) во втором уравнении можно трактовать, как длины отрезков AB и BC , где точки A , B и C имеют координаты:

$$A(1; 1), B(x; y), C(5; 4). \text{ При этом } \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}.$$

Заметим, что длина отрезка AC удовлетворяет условию:

$$AC^2 = (5-1)^2 + (4-1)^2 = 25, AC = 5.$$

Поэтому второе уравнение имеет вид: $|\vec{AB}| + |\vec{BC}| = |\vec{AC}|$. В левой части длина ломаной $AB + BC$, в правой длина отрезка AC , замыкающего её концы. Значит, точка B лежит на отрезке AC .

Для того, чтобы точки $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ и $C(x_C; y_C)$ располагались на одной прямой,

необходимо, чтобы $\frac{x_A - x_B}{x_A - x_C} = \frac{y_A - y_B}{y_A - y_C}$, а условие, что B расположена на отрезке A и C имеет

вид $x_A \leq x_B \leq x_C$. Значит: $\frac{x-1}{5-1} = \frac{y-1}{4-1} \Leftrightarrow 3x+1=4y$, $x \in [1; 5]$ и система принимает вид:

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 = 4y, \\ 3x + 1 = 4y. \end{cases} \Leftrightarrow x = 2; y = 1,75.$$

Ответ: $(2; 1,75)$.

6.9.a Длина отрезка

Решите уравнение: $f(x) = \frac{8x-5}{\sqrt{x^2+2x+5} - \sqrt{x^2-6x+10}} = a$, где a – минимальное значение $f(x)$.

Размышления: Особенность уравнения в том, что разность подкоренных выражений знаменателя равна числителю, то есть дробь сократима, если числитель не равен нулю. Знаменатель – это скрытый множитель числителя.

Решение: ОДЗ: $8x \neq 5$: Заметим:

$$8x-5 = (\sqrt{x^2+2x+5} - \sqrt{x^2-6x+10}) \cdot (\sqrt{x^2+2x+5} + \sqrt{x^2-6x+10}).$$

Выполнив сокращения, найдём:

$$f(x) = \sqrt{x^2+2x+5} + \sqrt{x^2-6x+10} = \sqrt{(x+1)^2+2^2} + \sqrt{(x-3)^2+1^2}.$$

Слагаемые (корни) можно трактовать, как длины отрезков AB и BC , где точки A , B и C имеют координаты:

$$A(-1; 2), B(x; 0), C(3; -1).$$

Поскольку $AB + BC \geq AC$, то при минимуме $f(x)$ точка B лежит на отрезке AC :

$$\frac{3-x}{3-(-1)} = \frac{-1-0}{-1-2} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}.$$

Ответ: $5/3$.

6.10 Система

Для положительных x, y, z, k решите систему
$$\begin{cases} xyz(x+y+z)=k^2, \\ (x+y)(x+z)\leq 2k. \end{cases}$$

Размышляем. Число k – параметр, то есть заданное. Неизвестных три, уравнений два. Нужно искать экстремум. Вид первого выражения очень «геометрический».

Решение: Пусть x, y, z – отрезки от точек касания вписанной окружности до вершин некоторого треугольника со сторонами $a = x+y, b = y+z, c = x+z$.

Тогда первое выражение соответствует формуле Герона для квадрата площади треугольника $S = k$.

Второе выражение это произведение длин двух сторон треугольника $ac/2 \leq S = k$.

Площадь треугольника $k = S = \frac{ac \sin \beta}{2} \leq \frac{ac}{2} \leq k$.

Значит, неравенство суть равенство, угол между сторонами a и c прямой.

Используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, получаем:

$$(x+y)(x+z) = x^2 + xy + yz + xz = (x+y+z)x + yz \geq 2\sqrt{x(x+y+z)} \cdot yz = 2a.$$

Равенство возможно только если $(x+y+z)x = yz$.

Из первого уравнения $yz = a = (x+y+z)x$.

7 Часто употребляемые замены

Возвратным называют уравнение вида: $a(x^{2n} + 1) + b(x^{2n-2} + x^2) + \dots + cx^n = 0$.

Для его решения применяется замена:

$$t = x \pm x^{-1} \Rightarrow t^2 = x^2 + x^{-2} \pm 2; t^3 = x^3 \pm x^{-3} \pm 3t; \dots$$

7.1 Возвратное уравнение

Решить уравнение: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ при $a \neq 0$.

Решение: $x = 0$ не корень, значит можно делить на x^2 :

$$a(x^2 + x^{-2}) + b(x + x^{-1}) + c = 0 \Leftrightarrow a(x^2 + 2 + x^{-2}) + b(x + x^{-1}) + c - 2a = 0$$

Введем новую переменную: $t = x + x^{-1}$. Уравнение примет вид: $at^2 + bt + c - 2a = 0$.

Дальнейшее очевидно.

7.2 Спрятанное выражение

Решите уравнение: $(x^2 + x + 3) \cdot (x^2 + 3x + 3) = 3x^2$.

Решение: $x = 0$ не корень. ОВР: $x \neq 0$. Делим уравнение на x^2 :

$$(x^2 + x + 3) \cdot (x^2 + 3x + 3) = 3x^2 \Leftrightarrow (x + 1 + \frac{3}{x}) \cdot (x + 3 + \frac{3}{x}) = 3 \text{ заменяем } t = x + 2 + \frac{3}{x}.$$

$$(t + 1)(t - 1) = 3 \Leftrightarrow t^2 = 4 \Leftrightarrow x = -1 \text{ или } x = -3.$$

Ответ: $-1; -3$.

7.3 Куб суммы

Решите уравнение: $x^3 - 3x = 64 + 1/64$.

Размышляем: Известно: $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ или $(a + b)^3 - 3ab(a + b) = a^3 + b^3$.

Поэтому замена $x = t + 1/t$, приводит к $x^3 - 3x = (t + 1/t)^3 - 3 \cdot t \cdot (1/t) \cdot (t + 1/t) = t^3 + t^{-3}$.

Заметим, что из равенства $t^3 + t^{-3} = 4^3 + (1/4)^3$ не следует очевидное (казалось бы) равенство $t = 4$, так как функция $t + 1/t$ не является монотонной. Поэтому, не смотря на верный ответ, запись решения будет признана существенно ошибочной.

Решение: $x = 0$ не корень. ОВР: $x \neq 0$.

Выполним замену: $x = t + 1/t$. Уравнение переписываем в виде:

$$x^3 - 3x = (t + 1/t)^3 - 3 \cdot t \cdot (1/t) \cdot (t + 1/t) = t^3 + t^{-3}.$$

$$x^3 - 3x = t^3 + \frac{1}{t^3} = 4^3 + \frac{1}{4^3} \Leftrightarrow (t^3 - 4^3) \cdot (1 - \frac{1}{4^3}) = 0.$$

В силу однозначности функции t^3 либо $t = 4$ либо $t = 0,25$. В обоих случаях $x = 4,25$.

Ответ: 4,25.

7.4 Разложение дроби на простейшие

Решите уравнение: $\frac{x}{2x^2 - 3x - 4} + \frac{2x}{2x^2 - 5x - 4} = \frac{5}{4}$.

Решение: ОДЗ: $2x^2 - 3x - 4 \neq 0$; $2x^2 - 5x - 4 \neq 0$; $x = 0$ не корень.

Пусть $x \neq 0$. Тогда: $\frac{x}{2x^2 - 3x - 4} + \frac{2x}{2x^2 - 5x - 4} = \frac{1}{2x - 3 - \frac{4}{x}} + \frac{2}{2x - 5 - \frac{4}{x}} = \frac{5}{4}$.

Обозначим: $A = 2x - \frac{4}{x} - 4$. Уравнение переписываем в виде:

$$\frac{1}{A + 1} + \frac{2}{A - 1} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow A^2 - 2,4A - 1,8 = 0 \Leftrightarrow$$

$A = -0,6$ ($x = -0,8$ или $x = 2,5$) либо $A = 3$ ($x = -0,5$ или $x = 4$).

Все значения удовлетворяют ОДЗ. Проверка не требуется.

Ответ: $\{-0,8; -0,5; 2,5; 4\}$.

7.5 Уравнение кубическое с корнем

Решите уравнение: $x^3 + 9x = 12\sqrt{3}$.

Размышления: Особенность этого уравнения, степени нечётные, а свободный член содержит коэффициент с корнем. Если увеличить x в $\sqrt{3}$ раз, то корень сократится.

Решение: Выполним замену: $x = t\sqrt{3}$. Уравнение переписываем в виде:

$$x^3 + 9x = 3\sqrt{3}t^3 + 9t\sqrt{3} = 12\sqrt{3}. \Leftrightarrow t^3 + 3t = 4 \Leftrightarrow (t-1) \cdot (t^2 + t + 4) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}.$$

Ответ: $\sqrt{3}$.

7.5.a Уравнение кубическое с корнем

Решите уравнение: $x^3 + 2x^2 - 31x + 8\sqrt{3} = 0$.

Размышления: Особенность этого уравнения в том, что свободный член содержит коэффициент с корнем. Гипотеза, что $x = t\sqrt{3}$ не даёт результата. Предполагаем, что существует решение в виде $x = a\sqrt{3} + b$. Уравнение переписываем в виде системы:

$$3a^2(3b+2) + b^3 + 2b^2 - 31b = 0, \quad 3a^3 + a(3b^2 + 4b - 31) + 8 = 0.$$

$$\text{Из первого } a^2 = \frac{b(31 - b^2 + 2b)}{3(3b+2)}. \text{ Из второго } (3b+2)^2 = 97 - 9a^2 - \frac{24}{a}.$$

Подбираем «хорошую» пару. Пользуемся вторым уравнением. Если $a = \pm 1$, то b «плохое».

Если $a = 2$, то $b = -3$. Значит, один из корней $x = 2\sqrt{3} - 3$. Выполнив деление на $x - 2\sqrt{3} + 3$, получим уравнение в удобном виде.

$$\text{Решение: } x^3 + 2x^2 - 31x + 8\sqrt{3} = (x - 2\sqrt{3} + 3) \cdot (x^2 - (2\sqrt{3} - 1)x - 8\sqrt{3} - 16) = 0.$$

$$\text{Ответ: } 2\sqrt{3} - 3, \frac{1 - 2\sqrt{3} \pm \sqrt{77 + 28\sqrt{3}}}{2}.$$

7.6 Скрытый синус

Решите уравнение: $\frac{|3x + \sqrt{1 - 9x^2}|}{\sqrt{2}} = 1 - 18x^2$.

Размышление: В уравнении есть $3x$ и $\sqrt{1 - 9x^2}$. Это подсказывает замену переменной. Целесообразно обеспечить однозначную связь между переменными всюду в ОДЗ. Тригонометрическая подстановка синус или косинус применяется к величинам, по модулю меньшим, чем 1. К неограниченным применяют тангенс или котангенс, если величина по модулю превышает единицу, то косеканс или секанс:

$$\sin \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = \cos \alpha \cdot \operatorname{sec} \alpha = 1.$$

Решение: ОДЗ: $|3x| \leq 1$. Выполним замену переменной, обеспечивающую однозначную связь между x и α всюду в ОДЗ: $3x = \sin \alpha$, $\alpha \in [-\pi/2; \pi/2]$. Тогда $\sqrt{1 - 9x^2} = \cos \alpha \geq 0$. Уравнение примет вид:

$$\frac{|\sin \alpha + \cos \alpha|}{\sqrt{2}} = 1 - 2\sin^2 \alpha \Leftrightarrow |\cos(\alpha - \pi/4)| = \cos(2\alpha).$$

Если $\alpha \in [-\pi/2; -\pi/4)$, то $\cos 2\alpha < 0$, и корней нет.

Если $\alpha \in [-\pi/4; \pi/2]$, то $\cos(\alpha - \pi/4) \geq 0$. При этом:

$$\cos(2\alpha) - \cos(\alpha - \pi/4) = 0 \Leftrightarrow 2\sin(\alpha/2 + \pi/8) \cdot \sin(\pi/8 - 1,5\alpha) = 0.$$

Учитывая, что $\alpha \in [-\pi/4; \pi/2]$, получаем приравнивая нулю первый множитель:

$$\alpha/2 + \pi/8 = k\pi \Leftrightarrow \alpha = -\pi/4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

$$\text{Из второго множителя: } \pi/8 - 1,5\alpha = k\pi \Leftrightarrow \alpha = \pi/12 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{12}.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{12}.$$

7.7 Скрытый косинус

Решите уравнение: $\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}}=x$.

Размышление: В уравнении есть $\sqrt{2+x}$ и понятно, что $4 \geq x$. Это подсказывает замену переменной.

Решение: ОДЗ: $x+2 \geq 0, 2-\sqrt{2+x} \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 2$.

Выполним замену переменной, обеспечивающую однозначную связь между x и α :

$$\begin{aligned} x &= 2\cos 8\alpha, \text{ где } 8\alpha \in [0; \pi]. \text{ Тогда:} \\ \sqrt{2+x} &= \sqrt{2+2\cos 8\alpha} = 2\cos 4\alpha \geq 0, \\ \sqrt{2-\sqrt{2+x}} &= \sqrt{2-2\cos 4\alpha} = 2\sin 2\alpha \geq 0. \\ \sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}} &= \sqrt{2+2\sin 2\alpha} = \sqrt{2 \cdot 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)} = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Уравнение примет вид: $2\cos(\pi/4 - \alpha) = 2\cos 8\alpha$.

Для $8\alpha \in [0; \pi]$ левая часть является монотонно убывающей функцией, правая – монотонно возрастающей, значит, число корней не более одного.

Одно из решений $\pi/4 - \alpha = 8\alpha \Leftrightarrow \alpha = \pi/36 \in [0; \pi/8] \Leftrightarrow x = 2\cos \frac{2\pi}{9}$.

Ответ: $2\cos \frac{2\pi}{9}$.

7.8 Скрытое уравнение

Решите уравнение: $\operatorname{arctg}\left(\frac{ax}{2} - \frac{1}{2ax}\right)^2 - \operatorname{arctg}\left(\frac{ax}{2} + \frac{1}{2ax}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$.

Решение: Для положительных чисел u и v :

$$\operatorname{arctg} u - \operatorname{arctg} v = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} u\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} v\right) = \operatorname{arctg} v - \operatorname{arctg} u = \operatorname{arctg} \frac{v-u}{1+u \cdot v}.$$

Введём обозначения $v = \left(\frac{ax}{2} + \frac{1}{2ax}\right)^2 \geq 2\sqrt{\frac{ax}{2} \cdot \frac{1}{2ax}} = 1, u = \left(\frac{ax}{2} - \frac{1}{2ax}\right)^2 \geq 0$.

Заметим, что $v - u = \left(\frac{ax}{2} + \frac{1}{2ax}\right)^2 - \left(\frac{ax}{2} - \frac{1}{2ax}\right)^2 = \frac{ax \cdot 1}{ax} = 1$.

Уравнение примет вид: $\operatorname{arctg} u - \operatorname{arctg} v = \operatorname{arctg} \frac{v-u}{1+u \cdot v} = \frac{\pi}{4}$,

$$\frac{v-u}{1+u \cdot v} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

$$\frac{1}{1+u \cdot v} = 1 \Leftrightarrow uv = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

На последнем шаге учтено, что $v > 0$. Следовательно, $\frac{ax}{2} = \frac{1}{2ax}, x = \pm \frac{1}{a}$.

Ответ: $\pm 1/a$.

7.9 Гиперболическая замена

Решите систему уравнений $\frac{x+y}{1+xy} = \frac{1-2y}{2-y}, \frac{x-y}{1-xy} = \frac{1-3x}{3-x}$.

Решение: Замена $x = \frac{u-1}{u+1}, y = \frac{v-1}{v+1}$.

$$x+y = \frac{u-1}{u+1} + \frac{v-1}{v+1} = \frac{uv+u-v-1+uv-u+v-1}{(u+1)(v+1)} = \frac{2(uv-1)}{(u+1)(v+1)}.$$

$$1+xy = 1 + \frac{u-1}{u+1} \cdot \frac{v-1}{v+1} = \frac{uv+u+v+1+uv-u-v+1}{(u+1)(v+1)} = \frac{2(uv+1)}{(u+1)(v+1)}. \quad \frac{x+y}{1+xy} = \frac{uv-1}{uv+1}.$$

Аналогично, $\frac{x-y}{1-xy} = \frac{u-v}{u+v}, \quad \frac{1-2y}{2-y} = \frac{3-v}{3+v}, \quad \frac{1-3x}{3-x} = \frac{2-u}{2+u}.$

Первое уравнение $\frac{uv-1}{uv+1} = \frac{3-v}{3+v}, uv^2 = 3.$

Второе уравнение $\frac{uv-1}{uv+1} = \frac{3-v}{3+v}, uv^2 = 3. \quad \frac{u-v}{u+v} = \frac{2-u}{2+u}, u^2 = 2v.$

Умножая первое уравнение на квадрат второго получим $u^5 = 12$. Наконец, $2v^5 = 9$.

Ответ: $x = \frac{\sqrt[5]{12}-1}{\sqrt[5]{12}+1}, y = \frac{\sqrt[5]{4.5}-1}{\sqrt[5]{4.5}+1}.$

ЯГубов.РФ

8 Использование однородности и симметрии

Симметризация уравнения способна заметно снизить его степень. Пример симметричной замены для квадратного уравнения: в уравнении $x^2 - 2ax + b = 0$ переходим к неизвестной $t = x - a$. Уравнение приобретает вид $t^2 = a^2 - b$, то есть оно стало линейным по переменной t^2 . Как правило, симметрия снижает степень уравнения вдвое.

8.1 Симметричная замена

Решите уравнение: $(6 - x) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) \cdot (x + 9) = 24x^2$.

Размышляем. Особенность чисел, входящих в уравнение $6 \cdot 3 = 2 \cdot 9$.

Пары $(6 - x) \cdot (x + 3) = -x^2 + 3x + 18$ и $(x - 2) \cdot (x + 9) = x^2 + 7x - 18$ имеют похожий вид.

Можно сделать симметричную замену $t = x^2 + 2x - 18$.

Тогда $x^2 + 7x - 18 = t + 5x$, $-x^2 + 3x + 18 = 5x - t$.

Решение: Группируем чётные и нечётные множители:

$$(6 - x) \cdot (x + 3) \cdot (x - 2) \cdot (x + 9) = 24x^2 \Leftrightarrow (-x^2 + 3x + 18) \cdot (x^2 + 7x - 18) = 24x^2.$$

Выполним замену $t = x^2 + 2x - 18$ (Егор ...). Уравнение примет вид:

$$(-t + 5x) \cdot (t + 5x) = 24x^2 \Rightarrow t^2 = x^2 \Rightarrow t = \pm x \Rightarrow x^2 + 2x - 18 = \pm x.$$

Если $x^2 + 2x - 18 = -x$, то $x = -6$ или 3 .

Если $x^2 + 2x - 18 = x$, то $x = \frac{\pm\sqrt{73} - 1}{2}$.

Ответ: $-6, 3, \frac{\pm\sqrt{73} - 1}{2}$.

8.2 Простейшие дроби

Решите уравнение: $\frac{x+2}{x^2+4x+3} + \frac{x+7}{x^2+14x+48} = \frac{x+3}{x^2+6x+8} + \frac{x+6}{x^2+12x+35}$.

Размышляем. Рациональные дроби удобно разлагать на простейшие дроби вида $\frac{a}{x+b}$.

Преобразуем уравнение: $\frac{x+2}{(x+1) \cdot (x+3)} + \frac{x+7}{(x+8) \cdot (x+6)} = \frac{x+3}{(x+2) \cdot (x+4)} + \frac{x+6}{(x+5) \cdot (x+7)}$.

Очевидно тождество: $\frac{a+b}{a \cdot b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ или $\frac{2x+a+b}{x^2+(a+b)x+a \cdot b} = \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b}$. Оно упрощает

переход к восьми простым дробям.

Заметим, что если для нескольких слагаемых $\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b}$ сумма $a + b$ одинакова, то после сложения окажутся равны как числители сумм, так и части знаменателей, содержащие переменную $\frac{2x+a+b}{x^2+(a+b)x+a \cdot b}$. Это подсказывает, как далее группировать слагаемые.

Решение: ОДЗ: $x + 1 \neq 0; \dots; x + 8 \neq 0$. Разлагаем знаменатели в произведение и умножим все дроби на 2: $\frac{2(x+2)}{(x+1) \cdot (x+3)} + \frac{2(x+7)}{(x+8) \cdot (x+6)} = \frac{2(x+3)}{(x+2) \cdot (x+4)} + \frac{2(x+6)}{(x+5) \cdot (x+7)}$.

Сумма множителей знаменателя каждой дроби равна числителю. Пользуемся равенством $\frac{a+b}{a \cdot b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ и преобразуем уравнение к виду:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+8} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+7}.$$

Группируя средние и крайние члены каждой части уравнения, получаем:

$$\frac{2x+9}{(x+1) \cdot (x+8)} + \frac{2x+9}{(x+3) \cdot (x+6)} = \frac{2x+9}{(x+2) \cdot (x+7)} + \frac{2x+9}{(x+4) \cdot (x+5)}.$$

Число $x = -4,5$, которое обращает в нули все числители, — это корень.

Пусть $x \neq -4.5$. Тогда:

$$\frac{1}{x^2+9x+8} + \frac{1}{x^2+9x+18} = \frac{1}{x^2+9x+14} + \frac{1}{x^2+9x+20}.$$

Обозначим: $t = x^2 + 9x + 20.25 = (x + 4.5)^2 > 0$. Уравнение переписываем в виде:

$\frac{1}{t-12.25} + \frac{1}{t-2.25} = \frac{1}{t-6.25} + \frac{1}{t-0.25}$. Это уравнение преобразуем к квадратному, которое не имеет положительных корней.

Ответ: -4.5 .

8.3 Поиск однородности

Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x^2 + 2xy = 3, \\ y^3 + x^2y - 2x^3 = 0. \end{cases}$$

Размышления: Особенность данной системы состоит в том, что степени всех слагаемых во втором уравнении одна и та же. Такие уравнения называются однородными и метод их решения стандартный – делить на одну из неизвестных в степени, равной степени уравнения. Далее необходимо переходить к новой переменной – отношению «старых» переменных.

Решение: $x = 0$ не корень.

Пусть $x \neq 0$. Делим второе уравнение на x^3 и вводим новую переменную $A = y/x$. Уравнение примет вид:

$$A^3 + A - 2 = 0 \Leftrightarrow (A - 1) \cdot (A^2 + A + 2) = 0 \Leftrightarrow A = 1 \Leftrightarrow y = x$$

Подставляя в первое уравнение, найдём: $3x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm 1 = y$.

Ответ: $(-1; -1), (1; 1)$.

8.4 Переход к системе уравнений

Решите уравнение: $\sqrt[4]{10+x^2-x} + \sqrt[4]{7-x^2+x} = 3$.

Размышления: Особенность уравнения в том, что сумма подкоренных выражений это число. Заметим, что решать уравнения для ОДЗ не обязательно.

Решение: ОДЗ: $10 + x^2 - x \geq 0$; $7 - x^2 + x \geq 0$.

Обозначим: $a = \sqrt[4]{10+x^2-x}$, $b = \sqrt[4]{7-x^2+x} = 3$.

Тогда уравнение преобразуем в систему уравнений:

$$a^4 + b^4 = 10 + 7 = 17, \quad a + b = 3.$$

Поскольку $(a + b)^4 = a^4 + b^4 + 4ab(a + b)^2 - 2a^2b^2$, находим:

$$3^4 = a^4 + b^4 + 4ab \cdot 3^2 - 2a^2b^2 \Leftrightarrow 81 = 17 + 36ab - 2a^2b^2 \Leftrightarrow ab = 2 \text{ или } ab = 16.$$

Если $ab = 2$, то $a = 1$; $b = 2$ или $a = 2$; $b = 1$.

Если $ab = 16$, решения нет.

Из $a^4 = 16 = 10 + x^2 - x$ находим корни $x = 3$ и $x = -2$, которые удовлетворяют ОДЗ.

В случае $a^4 = 1 = 10 + x^2 - x$ корней нет.

Ответ: $-2, 3$.

8.5 Симметрия слагаемых

Решите уравнение: $(x - 1)^5 + (x + 3)^5 = 242(x + 1)$.

Размышления: Особенность уравнения в том, что числа слева расположены симметрично относительно числа в правой части.

Решение: Обозначим: $t = x + 1$; $x = t - 1$.

Тогда: $(t - 2)^5 + (t + 2)^5 = 242t$.

При раскрытии скобок с использованием бинома Ньютона коэффициенты при нечётных степени удвоятся, а чётные степени сократятся. Разделив выражение на два, найдём:

$$t^5 + 40t^3 + 80t = 121t \Leftrightarrow t(t^4 + 40t^2 - 41) = 0 \Leftrightarrow$$

$$t(t^2 - 1)(t^2 + 41) = 0 \Leftrightarrow t = 0; \quad t = \pm 1 \Leftrightarrow x = -2; -1; 0.$$

Ответ: $-2; -1; 0$.

8.6 Симметрия множителей

Решите уравнение: $(x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x + 5) \cdot (x + 7) = 297$.

Размышления: Особенность уравнения в том, что числа в левой части расположены симметрично относительно числа 2. Другими словами, функция суть симметричный полином с корнями 1, 3, -5 и -7. Среднее арифметическое корней равно -2, причём корни расположены симметрично относительно точки $x = -2$. Замена уменьшает степень уравнения вдвое.

Решение: Обозначим: $y = x + 2 \Leftrightarrow y - 2 = x$. Тогда:

$$(y - 3) \cdot (y - 5) \cdot (y + 3) \cdot (y + 5) = 297.$$

Раскрывая скобки в полученном биквадратном уравнении, находим:

$$(y^2 - 3^2) \cdot (y^2 - 5^2) = 297 \Leftrightarrow y^4 - 34y^2 - 72 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(y^2 - 6^2)(y^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow y^2 = 36 \Leftrightarrow y = \pm 6 \Leftrightarrow x = 4 \text{ или } -8.$$

Ответ: -8, 4.

8.7 Симметрия слагаемых

Решите уравнение: $(x + 2)^4 + x^4 = 82$.

Решение: Обозначим: $y = x + 1 \Leftrightarrow y - 1 = x$.

Уравнение примет вид: $(y - 1)^4 + (y + 1)^4 = 82$.

Нечетные слагаемые в формуле бинома Ньютона сокращаются, чётные удваиваются:

$$y^4 + 6y^2 + 1 = 41 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2 \Leftrightarrow x = -3; x = 1.$$

Ответ: -3, 1.

9 Экстремальные уравнения

Особенность уравнений данного раздела в том, что число переменных, как правило, больше числа уравнений. Поэтому можно ожидать, что решение будет найдено в точке экстремума функций, стоящих в левой и правой частях уравнения. Например

Опорная задача. Решить уравнение: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 0$.

Ответ: $(x, y, z) = (a, b, c)$.

9.1 Одно экстремальное уравнение

Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 6(x - y) + 18 = 0, \\ z^2 + xz + yz = 16. \end{cases}$$

Решение: Перепишем первое уравнение в виде:

$$(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -3; \quad y = 3.$$

Подставляем во второе уравнение: $z^2 + 3z - 3z - 16 = 0 \Leftrightarrow z = \pm 4$.

Ответ: $(x, y, z) = (-3, 3, 4) \cup (-3, 3, -4)$.

«Экстремальное уравнение» часто возникает при решении уравнений сложного вида, если уравнение можно разбить на две независимые части и минимум одной совпадает с максимумом другой. Например, правая часть не может превышать a , а левая не может быть меньше, чем a . Тогда обе части должны быть равны a и вместо одного уравнения получаем систему из двух уравнений с общими корнями. В полученной системе решаем более лёгкое из уравнений, а в более сложное подставляем найденный корень.

9.1.a Одно экстремальное уравнение

Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 4 = 0, \\ 2x^2 - 7xy + 3y^2 + 6x + 2y - 8 = 0. \end{cases}$$

Решение: Преобразуем первое уравнение системы:

$$(x - y)^2 + (y - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \text{и} \quad y = 2.$$

Подставляя во второе уравнение, убеждаемся, что оно выполнено.

Ответ: $(2, 2)$.

9.1.b Одно экстремальное уравнение

Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 4 = 0, \\ \sin^5(\pi x^2) + 5\sqrt[4]{8^{x-2}y+2} + 15 = 10. \end{cases}$$

Ответ: $(2, 2)$.

9.2 Переход к системе уравнений

Решите уравнение $\sqrt{x^2 + 4xy + 3y^2 + 9} + (4x^2 + 5xy - 6y^2)^2 = 0$.

Решение: Оба слагаемых неотрицательные, переходим к системе:

$$\begin{cases} x^2 + 4xy + 3y^2 + 9 = 0, \\ 4x^2 + 5xy - 6y^2 = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение однородное. Разложим в произведение: $4x^2 + 5xy - 6y^2 = (x + 2y) \cdot (4x - 3y)$.

Подставляя в первое уравнение $x = -2y$ найдём корни $(6; -3); (-6; 3)$.

Если подставить $4x = 3y$, корней нет.

Ответ: $(6, -3), (-6, 3)$.

9.3 Подбор ответа

Решите уравнение: $3(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + xz + yz) - 8y - 16z + 56 = 0$.

Размышления: Уравнение одно, переменных три, значит, решение в точке экстремума. То есть равны нулю все три частных производные. Это не стоит писать на беловике. Итак (черновик!) рассматриваем функцию:

$f(x, y, z) = 3(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + xz + yz) - 8y - 16z + 56$. Она имеет экстремум при $f'_x = 6x - 2y - 2z = 0$; $f'_y = 6y - 2x - 2z - 8 = 0$; $f'_z = 6z - 2y - 2x - 16 = 0$.

Выполнив преобразования, находим: $(x, y, z) = (3, 4, 5)$.

Чтобы оформить задачу, ищем линейные комбинации переменных, которые равны нулю и из которых можно сформировать левую часть уравнения. Рассмотрим комбинации с коэффициентами перед переменными плюс минус один и свободным членом, превращающим выражение в нуль: $x + y + z - 12$, $x + y - z - 2$, $x - y + z - 4$, $-x + y + z - 6$.

Сумма квадратов свободных членов равна 56, значит, первое выражение применить нельзя. Пользуемся правом математика не объяснять, как придумано преобразование, если оно очевидно в обратную сторону.

Способ 2. Ищем выражение в виде суммы квадратов, которая равна нулю. Переменных три, значит вероятно, что слагаемых тоже три.

Замечаем: $56 = 2^2 + 4^2 + 6^2$. Искомое выражение может содержать слагаемые ± 2 , ± 4 , ± 6 .

Коэффициенты при квадратах каждой переменной и при попарных произведениях переменных одинаковы, значит, стоит рассмотреть комбинации с одинаковыми (по модулю) коэффициентами перед переменными.

Коэффициенты при квадратах каждой переменной равны 3, значит, вероятны коэффициенты плюс минус один у каждой переменной.

Коэффициент при x равен 0, значит,

$$(x - 2\dots), (x - 4\dots), (x + 6\dots) \text{ или } (x + 2\dots), (x + 4\dots), (x - 6\dots).$$

Коэффициент при y равен -8 , значит,

$$(y - 2\dots), (y + 4\dots), (y - 6\dots) \text{ или } (-y + 2\dots), (-y - 4\dots), (-y + 6\dots).$$

Коэффициент при z равен -16 , значит,

$$(z + 2\dots), (z - 4\dots), (z - 6\dots) \text{ или } (-z - 2\dots), (-z + 4\dots), (-z + 6\dots)\dots$$

Решение: Заметим, что:

$$(x + y - z - 2)^2 + (x - y + z - 4)^2 + (x - y - z + 6)^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + xz + yz) - 8y - 16z + 56.$$

Каждое из слагаемых должно быть равно нулю, значит, уравнение эквивалентно

$$\text{системе } \begin{cases} x + y - z = 2, \\ x - y + z = 4, \\ -x + y + z = 6. \end{cases} \text{ Решая систему находим, } (x, y, z) = (3, 4, 5).$$

Ответ: $(x, y, z) = (3, 4, 5)$.

9.4 Тригонометрия

Решите уравнение: $\sin^2\beta + (\sin\alpha + \cos\beta)^2 = 0$.

Решение: Уравнение эквивалентно системе: $\sin\beta = 0$; $\sin\alpha + \cos\beta = 0$.

Из первого уравнения следует, что $\beta = n\pi$.

При этом: $\sin\alpha = -\cos\beta = (-1)^{n+1}$.

Для чётных значений $n = 2k$: $\beta = 2k\pi$; $\cos\beta = 1$; $\sin\alpha = -1$; $\alpha = -\pi/2 + 2m\pi$.

Для нечётных значений n : $\beta = (2k + 1)\pi$; $\cos\beta = -1$; $\sin\alpha = 1$; $\alpha = \pi/2 + 2m\pi$.

Ответ: $(\alpha, \beta) = (-\pi/2 + 2m\pi, 2k\pi) \cup (\pi/2 + 2m\pi, (2k + 1)\pi)$.

9.4.a Тригонометрия

Решить уравнение: $\cos(x - y) - 2\sin x + 2\sin y = 3$.

Размышления: Если заменить x на $\{-y\}$, а y на $\{-x\}$, то уравнение не изменится. В таких случаях рекомендуется симметричная замена: $x = \alpha + \beta$; $y = \alpha - \beta$.

Решение: Выполним замену:

$$x - y = 2\alpha; x + y = 2\beta \quad \Leftrightarrow \quad x = \alpha + \beta; y = \alpha - \beta.$$

Уравнение переписываем в виде: $\cos(2\alpha) - 4\sin\alpha \cos\beta = 3$.

Выполняем преобразования: $\cos^2\alpha - 2\sin\alpha \cos\beta = 2 \Leftrightarrow \sin^2\alpha + 2\sin\alpha \cos\beta + \sin^2\beta + \cos^2\beta = 0$

$$\Leftrightarrow \sin^2\beta + (\sin\alpha + \cos\beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \beta = n\pi; \sin\alpha = (-1)^n \Leftrightarrow$$

$$\alpha = (-1)^n \pi/2 + 2m\pi \Leftrightarrow x = -\pi/2 + 2n\pi; y = \pi/2 + 2m\pi.$$

Ответ: $(-\pi/2 + 2n\pi, \pi/2 + 2m\pi)$.

9.5 Использование неравенств между средними значениями

Во многих задачах поиска экстремума используется группа из трёх неравенств между средними квадратичным, арифметическим, геометрическим и гармоническим. Экстремум достигается при равенстве значений элементов среднего (слагаемых или множителей).

Введём следующие обозначения:

$$K = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \text{ – среднее квадратичное чисел } a_1, a_2, \dots, a_n.$$

$$M = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \text{ – среднее арифметическое чисел } a_1, a_2, \dots, a_n.$$

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \text{ – среднее геометрическое чисел } a_1, a_2, \dots, a_n.$$

$$H = \frac{n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}} \text{ – среднее гармоническое чисел } a_1, a_2, \dots, a_n.$$

Тогда для положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ выполняются неравенства:

$$K \geq M \geq G \geq H,$$

причём равенство возможно тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. Неравенство $K \geq M$ выполняется для любых чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Доказываем неравенство $K \geq M$. Если $a_1 + a_2 + \dots + a_n < 0$, неравенство выполнено. В противном случае положим в неравенстве Коши – Буняковского, что $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$. Тогда: $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n \cdot (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$. Уравнение в этом виде используется часто. Делим на n , извлекаем квадратный корень и находим, что $K \geq M$.

Доказываем неравенство $M \geq G$. Пользуемся методом математической индукции для доказательства вспомогательного утверждения:

Если произведение положительных чисел равно единице, то их сумма не меньше, чем их число: $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1 \Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$.

Для $n = 1$ $a_1 \geq a_1$ – неравенство выполнено. Предположим, что для n утверждение верно. Докажем, что если произведение $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1} = 1$, то: $a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} \geq n + 1$.

Перенумеруем числа в порядке возрастания: $b_1 = \min(a_i)$; $\dots$ $b_{n+1} = \max(a_i)$. Тогда:

$$b_1 \leq 1; b_{n+1} \geq 1 \Leftrightarrow (b_1 - 1)(b_{n+1} - 1) \leq 0 \Leftrightarrow b_1 b_{n+1} + 1 \leq b_1 + b_{n+1}. \text{ Значит:}$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + b_{n+1} \geq b_1 b_{n+1} + 1 + b_2 + \dots + b_n \geq n + 1,$$

так как для n чисел $(b_1 b_{n+1}), b_2, \dots, b_n$, произведение которых равно 1, по предположению, их сумма больше n .

Переходим от вспомогательного утверждения к доказываемому неравенству. Для произвольного набора положительных чисел $c_1; c_2; \dots; c_n$ рассмотрим числа $a_i = \frac{c_i}{\sqrt[n]{c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n}}$.

Они удовлетворяют вспомогательному утверждению (их произведение равно 1), то есть:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{\sqrt[n]{c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n}} \geq n \Leftrightarrow \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n} \geq \sqrt[n]{c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n}$$

Доказываем неравенство $G \geq H$. Выполним замену $b_i = a_i^{-1}$ и пользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим для чисел b :

$$\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \geq \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n} \Leftrightarrow \frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}}{n} \geq \sqrt[n]{a_1^{-1} \cdot a_2^{-1} \cdot \dots \cdot a_n^{-1}}$$

откуда следует $G \geq H$.

Если в ходе решения потребуется использовать любое из этих неравенств, допустимо ссылаться на них, как на известные.

В следующих задач применяем стандартные неравенства.

9.5.a Группировка по типу слагаемых

Решите уравнение: $\frac{36}{\sqrt{x-2}} + \frac{4}{\sqrt{y-1}} = 28 - 4\sqrt{x-2} - \sqrt{y-1}$.

Решение: ОДЗ: $x > 2$, $y > 1$. Группируем члены одного типа:

$$4\left(\frac{9}{\sqrt{x-2}} + \sqrt{x-2}\right) + \left(\frac{4}{\sqrt{y-1}} + \sqrt{y-1}\right) = 28.$$

Для положительных чисел среднее арифметическое не меньше, чем среднее геометрическое, причём знак равенства справедлив только при равенстве слагаемых.

Следовательно: $\frac{9}{\sqrt{x-2}} + \sqrt{x-2} \geq 2\sqrt{\frac{9}{\sqrt{x-2}} \cdot \sqrt{x-2}} = 6$.

$$\frac{4}{\sqrt{y-1}} + \sqrt{y-1} \geq 2\sqrt{\frac{4}{\sqrt{y-1}} \cdot \sqrt{y-1}} = 4.$$

$$28 = 4\left(\frac{9}{\sqrt{x-2}} + \sqrt{x-2}\right) + \left(\frac{4}{\sqrt{y-1}} + \sqrt{y-1}\right) \geq 4 \cdot 6 + 4 = 28.$$

Равенство достигается только при условиях:

$$\frac{9}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{x-2} \Leftrightarrow 9 = x-2 \Leftrightarrow x = 11.$$

$$\frac{4}{\sqrt{y-1}} = \sqrt{y-1} \Leftrightarrow 4 = y-1 \Leftrightarrow y = 5.$$

Ответ: (11, 5).

9.5.b Группировка по типу слагаемых

Решите уравнение: $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} + 6x = 11 + x^2$.

Размышления: Два выражения содержат корни и значимо отличны от трёх других, формирующих обычный квадратный трёхчлен.

Решение: ОДЗ: $x \in [2, 4]$. Группируем похожие члены:

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = (x-3)^2 + 2.$$

Правая часть не меньше, чем 2 и равна 2 только при $x = 3$.

Левую часть оценим, используя тот факт, что для любых чисел среднее арифметическое не больше, чем среднее квадратичное:

$$\frac{\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}}{2} \leq \sqrt{\frac{(\sqrt{x-2})^2 + (\sqrt{4-x})^2}{2}} = \sqrt{\frac{x-2 + 4-x}{2}} = 1.$$

Равенство возможно только, если обе части равны 2. При этом $x = 3$.

Ответ: 3.

9.5.c Дважды используем стандартное неравенство

Решите уравнение: $\sqrt[4]{13-x} + \sqrt[4]{19+x} = 4$.

Размышления: Подбираем корень $x = -3$.

Замечаем, что при этом значении икса корни равны.

Замечаем, что сумма четвёртых степеней слагаемых, то есть сумма подкоренных выражений, равна $32 = 2^5$. Возникает идея двукратного использования неравенства между средним арифметическим и средним квадратичным.

Решение: ОДЗ: $x \in [-19, 13]$.

Дважды пользуемся неравенством между средним арифметическим и средним квадратичным: $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \sqrt{\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}} = \sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}}$.

$$\text{Получаем: } 2 = \frac{\sqrt[4]{13-x} + \sqrt[4]{19+x}}{2} \leq \sqrt[4]{\frac{13-x+19+x}{2}} = \sqrt[4]{16} = 2.$$

Неравенство превратилось в равенство. Это возможно только при равенстве слагаемых.

$$\sqrt[4]{13-x} = \sqrt[4]{19+x} \Leftrightarrow 13-x = 19+x \Leftrightarrow x = -3.$$

Найденное значение принадлежит ОДЗ и проверяется подстановкой.

Ответ: -3 .

9.5.d Симметризирующая замена

Решите уравнение: $16\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{x} - \sqrt{xy} + \frac{1}{32} = 0$.

Решение: ОДЗ: $xy > 0$. При этом $\frac{x^3}{y} = \frac{x^4}{xy} > 0$, $\frac{y^3}{x} = \frac{y^4}{xy} > 0$. Симметризируем выражение заменой $z = 2x$. Разделим уравнение на 2. Тогда:

$$\frac{(2x)^3}{y} + \frac{y^3}{2x} - \sqrt{\frac{2xy}{8}} + \frac{1}{8^2} = 0 \text{ или } \frac{z^3}{y} + \frac{y^3}{z} - \sqrt{\frac{zy}{8}} + \frac{1}{8^2} = 0.$$

Пользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим

для положительных чисел $\frac{z^3}{y} + \frac{y^3}{z} \geq 2\sqrt{\frac{z^3 y^3}{yz}} = 2zy$.

$$0 = \frac{z^3}{y} + \frac{y^3}{z} - \sqrt{\frac{zy}{8}} + \frac{1}{8^2} \geq 2zy - \frac{\sqrt{2zy}}{4} + \frac{1}{8^2} = \left(\sqrt{2zy} - \frac{1}{8}\right)^2 \geq 0.$$

Левое неравенство превращается в равенство в случае, если $\frac{z^3}{y} = \frac{y^3}{z}$, то есть $z = y$.

Правое неравенство превращается в равенство (при $z = y$) в случае, если $\sqrt{2}y = \frac{1}{8}$.

Соответственно, $x = \frac{\sqrt{2}}{32}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{16}$.

Ответ: $x = \frac{\sqrt{2}}{32}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{16}$.

9.5.e Три числа

Положительные числа x, y, z таковы, что модуль разности любых двух из них меньше 2. Докажите, что $\sqrt{xy+1} + \sqrt{yz+1} + \sqrt{xz+1} > x + y + z$.

Размышляем: Сопоставим один из корней и соответствующую часть правой части:

$$\sqrt{xy+1} > \frac{x+y}{2} \Rightarrow 4xy+4 > (x+y)^2.$$

Решение: По условию $|x-y| < 2$. Выполним преобразования:

$$x^2 - 2xy + y^2 < 4 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 < 4 + 4xy \Leftrightarrow \frac{|x+y|}{2} = \frac{x+y}{2} = \sqrt{xy+1}.$$

Складывая три аналогичных неравенства получим искомое.

9.6 Уравнения «страшного» вида

9.6.a Показательные выражения и корни

Решите уравнение: $\sqrt{7+8x-16x^2} = 2^{\cos^2 \pi x} + 2^{\sin^2 \pi x}$.

Решение: Подкоренное выражение в левой части:

$$7 + 8x - 16x^2 = 8 - (1 - 4x)^2 \leq 8.$$

Применим неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным для оценки правой части:

$$2^{\cos^2 \pi x} + 2^{\sin^2 \pi x} \geq 2\sqrt{2^{\cos^2 \pi x} \cdot 2^{\sin^2 \pi x}} = 2\sqrt{2^{\cos^2 \pi x + \sin^2 \pi x}} = \sqrt{8}.$$

Значит, равенство возможно только при $1 - 4x = 0$.

Ответ: 0,25.

9.6.b Показательные выражения и степени

Решите уравнение: $x \cdot 2^{\frac{1}{x}} + \frac{2^x}{x} = 4$.

Решение: ОДЗ: $x \neq 0$; ОВР: $x > 0$. Дважды используем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$4 = x \cdot 2^{\frac{1}{x}} + \frac{2^x}{x} \geq 2\sqrt{2^{\frac{1}{x}} \cdot 2^x} = 2\sqrt{2^{\frac{1}{x}+x}} \geq 2\sqrt{2^2} = 4. \text{ Используем: } x + \frac{1}{x} \geq 2, x \cdot \frac{1}{x} = 1.$$

Неравенство превратилось в равенство. Это возможно только при равенстве слагаемых.

Ответ: 1.

9.6.c Высокая степень

Решите систему уравнений при всех допустимых значениях $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} a\sqrt{2x-a^2} + \sqrt{2y-1} = x+y, \\ x-y^{2013} = a. \end{cases}$$

Решение: ОДЗ: $2x \geq a^2, 2y \geq 1$. Используем неравенство $X^2 + Y^2 \geq 2XY$.

Заметим, что если $2x \geq a^2$: $2x = a^2 + (\sqrt{2x-a^2})^2 \geq 2|a|\sqrt{2x-a^2}$.

Аналогично если $2y \geq 1$, то: $2y = 1 + (\sqrt{2y-1})^2 \geq 2\sqrt{2y-1}$.

Значит, для всех допустимых значений переменных:

$$2x + 2y \geq 2a\sqrt{2x-a^2} + 2\sqrt{2y-1}.$$

Согласно первому уравнению системы, имеет место равенство.

Это возможно только в случае, когда: $a^2 = 2x - a^2 \Leftrightarrow a^2 = x; a \geq 0$.

$$1 = 2y - 1 \Leftrightarrow y = 1.$$

Теперь из второго уравнения получаем: $x = a + 1$.

Значит, $a^2 = a + 1$, $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Корень со знаком минус посторонний.

Ответ: если $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, то $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, иначе решений нет.

9.6.d Однородность слагаемых

Решите уравнение: $\sqrt{x_1 - 1^2} + 2\sqrt{x_2 - 2^2} + 3\sqrt{x_3 - 3^2} + \dots + n\sqrt{x_n - n^2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{2}$.

Решение: Пользуемся неравенством между средним геометрическим и средним квадратичным в виде: $m\sqrt{x_m - m^2} \leq \frac{m^2 + (x_m - m^2)}{2} = \frac{x_m}{2}$.

Левая часть уравнения не больше, чем правая.

Равенство имеет место только в единственном случае если для каждого m : $x_m - m^2 = m^2$.

Ответ: $x_m = 2m^2$.

9.7 Неравенство с «хитринкой».

При всех значениях параметра a , решите уравнение: $x^4 + y^4 + z^4 + a^4 = 4xyza$.

Решение: Если $a = 0$, то $x^4 + y^4 + z^4 = 0$, $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

Если $a > 0$, то значения или всех трёх неизвестных положительны, либо два неизвестных отрицательны, а третье положительно. Воспользовавшись неравенством между средними арифметическим и геометрическим, находим:

$$4xyza = x^4 + y^4 + z^4 + a^4 \geq 4|x||y||z||a| \geq 4xyza.$$

Значит $|x| = |y| = |z| = |a|$. Для положительных неизвестных $x = y = z = a$. В остальных случаях анализируем, когда второе неравенство превращается в равенство...

Ответ: Если $a = 0$, то $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Если $a > 0$, то $(x, y, z) = \{a; a; a\} \cup \{-a; -a; a\} \cup \{-a; a; -a\} \cup \{a; -a; -a\}$.

Если $a < 0$, то $(x, y, z) = \{-a; a; a\} \cup \{a; -a; a\} \cup \{a; a; -a\} \cup \{-a; -a; -a\}$.

9.7.a Одно слагаемое – константа

Решите уравнение: $x^4 + 2y^4 + 4z^4 = 8xyz - 2$.

Решение: Перепишем уравнение в виде: $\frac{x^4 + 2y^4 + 4z^4 + 2}{4} = 2xyz$.

Пользуемся неравенством между средними арифметическим и геометрическим:

$$\frac{x^4 + 2y^4 + 4z^4 + 2}{4} \geq \sqrt[4]{(x^4) \cdot (2y^4) \cdot (4z^4) \cdot 2} = 2|xyz| \geq 2xyz.$$

Равенство возможно только при выполнении условий:

$$x^4 = 2y^4 = 4z^4 = 2 \Leftrightarrow |x| = \sqrt[4]{2}; |y| = 1; |z| = \sqrt[4]{0,5}.$$

Либо все три корня положительные,

либо один корень положительный, а два других отрицательные.

Ответ: $(x, y, z) = (\sqrt[4]{2}, 1, \sqrt[4]{0,5}) \cup (-\sqrt[4]{2}, -1, \sqrt[4]{0,5}) \cup (-\sqrt[4]{2}, 1, -\sqrt[4]{0,5}) \cup (\sqrt[4]{2}, -1, -\sqrt[4]{0,5})$.

9.7.b Цепочка слагаемых

Решите уравнение: $4(3 - x)^2 + (2x + y)^2 + (y + z)^2 + (z - 2)^2 = 4$.

Размышления: Переменных три, уравнение одно, задача на поиск экстремума.

Первое слагаемое приведем к виду квадрата, по аналогии с остальными слагаемыми:

$$(6 - 2x)^2 + (2x + y)^2 + (y + z)^2 + (z - 2)^2 = 4.$$

Напрашивается применение неравенства между средним арифметическим и средним квадратичным. Но сумма выражений, стоящих в скобках

$$6 - 2x + 2x + y + y + z + z - 2 = 4 + 2y + 2z \text{ не соответствует экстремуму...}$$

Решение: Перепишем исходное уравнение в виде:

$$(6 - 2x)^2 + (2x + y)^2 + (-y - z)^2 + (z - 2)^2 = 4.$$

Применим неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным четырёх слагаемых возведенное в квадрат и умноженное на 4:

$$(6 - 2x)^2 + (2x + y)^2 + (-y - z)^2 + (z - 2)^2 \geq (6 - 2x + 2x + y - y - z + z - 2)^2 / 4 = 4,$$

$$\text{Значит, } 4(3 - x)^2 + (2x + y)^2 + (y + z)^2 + (z - 2)^2 \geq 4,$$

причём знак равенства возможен только при выполнении условий:

$$6 - 2x = 2x + y = -y - z = z - 2 = 1 \text{ (или } -1).$$

При значении 1 решаем систему и получаем ответ, при значении -1 нет решения.

Ответ: $(x, y, z) = (2, 5; -4; 3)$.

9.7.c Упрощение вида слагаемых

Решите уравнение: $\frac{(x-2)^2 + y^2}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{y+1}} = \frac{(x-2)^2}{1 + \sqrt{y+1}} + \frac{y^2}{1 + \sqrt{x}}$.

Решение: Пусть $a = (x - 2)^2$; $b = y^2$; $c = 1 + \sqrt{x}$, $d = 1 + \sqrt{y + 1}$. Тогда:

$$\frac{a+b}{c+d-1} = \frac{a}{d} + \frac{b}{c} \Leftrightarrow bd(d-1) + ac(c-1) = 0.$$

$$y^2 \sqrt{y+1} (\sqrt{y+1} + 1) + (x-2)^2 \sqrt{x} (\sqrt{x} + 1) = 0.$$

Все множители неотрицательны, значит, каждое слагаемое равно нулю.

Из равенства нулю первого слагаемого находим, что либо $y = -1$, либо $y = 0$.

Из равенства нулю второго слагаемого находим, что либо $x = 2$, либо $x = 0$.

Ответ: $(x, y) = (0, 0) \cup (2, 0) \cup (0, -1) \cup (2, -1)$.

9.7.d Специфическое равенство

Решите уравнение: $x^3 + y^3 + z^3 + 12 = (x + y + z)^2$ для $x, y, z > -1$.

Размышления: Переменных три, уравнение одно, задача на поиск экстремума.

Легко угадать корни $(x, y, z) = (2, 2, 2)$.

Гипотеза, что все корни равны, позволяет предположить, что можно использовать равенство $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2$.

Трудно объяснимая догадка, использовать равенство $x^3 - 3x^2 + 4 = (x - 2)^2(x + 1)$.

Решение: Выполним эквивалентные преобразования:

$$x^3 + y^3 + z^3 - (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz) + 12 = 0;$$

$$(x^3 - 3x^2 + 4) + (y^3 - 3y^2 + 4) + (z^3 - 3z^2 + 4) + (2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz) = 0;$$

$$(x-2)^2(x+1) + (y-2)^2(y+1) + (z-2)^2(z+1) + (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 = 0.$$

Все слагаемые – неотрицательные числа. Значит, все они равны нулю.

Ответ: $(x, y, z) = (2, 2, 2)$.

9.8 Неравенство Коши – Буняковского

Доказать неравенство Коши – Буняковского:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2),$$

считая, что среди чисел a нет равных нулю.

Доказательство удивительно красивое: Рассмотрим следующее уравнение:

$$(a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \dots + (a_nx - b_n)^2 = 0.$$

Перепишем левую часть уравнения в виде квадратного трёхчлена:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) = 0.$$

Его дискриминант:

$$D = (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

Уравнение разрешимо и равенство возможно только если $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \dots = \frac{b_n}{a_n} = const = x$.

При этом $D = 0$. В других случаях это уравнение для x решения не имеет. При этом $D < 0$. Значит, для любых чисел, таких, что среди чисел a нет равных нулю, выполняется неравенство Коши – Буняковского:

$$D = (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \leq 0.$$

В задачах на это неравенство часто указывает пропорциональность коэффициентов квадратам натуральных чисел.

9.8.a Сокращение неравенства

Группа туристов за два дня прошла четыре участка пути длиной 28,8 км, 20 км, 16,2 км и 12,8 км. Каждый участок проходил со своей постоянной скоростью, а на весь путь ушло время $t = 13$ часов. Если бы туристы шли с каждой из этих скоростей по одному часу, то они прошли бы расстояние $L = 23,4$ км. Какова была скорость туристов на каждом участке?

Размышления: Приняв, что скорость на n -ом участке длины L_n равна V_n , получим, что условие задачи сводится к двум уравнениям для четырёх неизвестных. Значит, задача содержит экстремальное решение.

Протяжённости участков пропорциональны квадратам 12^2 , 10^2 , 9^2 и 8^2 , значит, вероятно использование неравенства Коши – Буняковского.

Решение: Приняв, что скорость на n -ом участке длины L_n равна V_n , получим, что условие задачи сводится к двум уравнениям для четырёх неизвестных:

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = L, \quad \frac{L_1}{V_1} + \frac{L_2}{V_2} + \frac{L_3}{V_3} + \frac{L_4}{V_4} = t.$$

Пусть $a_i^2 = V_i$, $b_i^2 = \frac{L_i}{V_i} \Rightarrow a_i b_i = \sqrt{L_i}$. Воспользовавшись неравенством Коши –

Буняковского, получим, что:

$$Lt = (V_1 + V_2 + V_3 + V_4) \cdot \left(\frac{L_1}{V_1} + \frac{L_2}{V_2} + \frac{L_3}{V_3} + \frac{L_4}{V_4} \right) \geq (\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2} + \sqrt{L_3} + \sqrt{L_4})^2.$$

Подставив данные, получим, что и левая часть неравенства $Lt = 304,2$, и правая часть $304,2$. Неравенство вырождается в равенство, а это требует выполнения условий:

$$V_i : \frac{L_i}{V_i} = \frac{V_i^2}{L_i} = const \Rightarrow \frac{V_i}{\sqrt{L_i}} = const = \frac{V_1}{12} = \frac{V_2}{10} = \frac{V_3}{9} = \frac{V_4}{8}.$$

Теперь уравнений достаточно, чтобы найти каждую скорость.

Ответ: $V_1 = 7,2$; $V_2 = 6$; $V_3 = 5,4$; $V_4 = 4,8$ (км/час).

9.9 Система в положительных числах

Решите в положительных числах систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \frac{1}{x_2} = 4, \\ x_2 + \frac{1}{x_3} = 1, \\ x_3 + \frac{1}{x_4} = 4, \\ \dots \\ x_{99} + \frac{1}{x_{100}} = 4, \\ x_{100} + \frac{1}{x_1} = 1. \end{array} \right.$$

Размышляем. Симметричная операция суммирования всех уравнений и применение неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим не даёт результат:

$$x_1 + \frac{1}{x_1} + x_2 + \frac{1}{x_2} + x_3 + \frac{1}{x_3} + \dots + x_{100} + \frac{1}{x_{100}} = 5 \cdot 50 = 250 \geq 100 \cdot 2 = 200. \text{ Но если умножить}$$

чётные уравнения на 4, то получаем $x_1 + \frac{4}{x_1} + 4x_2 + \frac{1}{x_2} + x_3 + \frac{4}{x_3} + \dots + 4x_{100} + \frac{1}{x_{100}} = 400.$

Однако $x_1 + \frac{4}{x_1} \geq 2\sqrt{\frac{x_1 \cdot 4}{x_1}} = 4$, $4x_2 + \frac{1}{x_2} \geq 2\sqrt{4 \frac{x_2 \cdot 1}{x_2}} = 4$. Правая часть не меньше, 400.

Решение. Умножим чётные уравнения на 4 и сложим все уравнения:

$$x_1 + \frac{4}{x_1} + 4x_2 + \frac{1}{x_2} + x_3 + \frac{4}{x_3} + \dots + 4x_{100} + \frac{1}{x_{100}} = 400.$$

Применим к левой части неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим: $x_1 + \frac{4}{x_1} \geq 2\sqrt{\frac{x_1 \cdot 4}{x_1}} = 4$, $4x_2 + \frac{1}{x_2} \geq 2\sqrt{4 \frac{x_2 \cdot 1}{x_2}} = 4$.

Правая часть не меньше, чем 400 и равна 400 только если равны слагаемые в парах:

$$x_1 = \frac{4}{x_1} \rightarrow x_1 = 2, x_{2k+1} = 2.$$

$$4x_2 = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}, x_{2k} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $x_{2k+1} = 2, x_{2k} = \frac{1}{2}.$

10 Использование свойств функций

10.1 Уравнения вида: $f(x) = f(y)$

Считаем известной теорему о том, что для монотонно изменяющейся во всей области определения функции $f(x)$ эквивалентны уравнения:

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$$

Другими словами, равенство функций влечёт за собой равенство аргументов.

Для не монотонной функции, множество решений уравнения $f(x) = f(y)$ включает множество решений уравнения $x = y$, то есть существует корень $x = y$, но он не обязательно единственный.

10.1.a Монотонная функция

Решите уравнение $3x - 2|x - 2| = 3\sqrt{3x + 18} - 2|\sqrt{3x + 18} - 2|$.

Решение: ОДЗ: $x \geq -6$. Пусть $t = \sqrt{3x + 18}$.

Уравнение приобретает вид $3x - 2|x - 2| = 3t - 2|t - 2|$.

Функция $f(x) = 3x - 2|x - 2| = \begin{cases} x + 4, & x \geq 2, \\ 5x - 4, & x < 2. \end{cases}$ Она монотонная.

Равенство значений функции эквивалентно равенству аргументов. Значит,

$$f(x) = f(\sqrt{3x + 18}) \Leftrightarrow x = \sqrt{3x + 18} \Leftrightarrow x = 6.$$

Ответ: 6.

10.1.b Монотонная функция

Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 2x - 2y = \sin x - \sin y, \\ x + 2y = 9. \end{cases}$$

Решение: Рассмотрим функцию $g(x) = 2x - \sin x$. Её производная $g'(x) = 2 - \cos x > 0$. Значит, функция монотонно возрастает в области определения.

Из первого уравнения в форме: $2x - \sin x = 2y - \sin y$ следует, что $x = y$.

Из второго уравнения находим, что: $x + 2x = 9, x = 3$.

Ответ: (3; 3).

10.1.c Монотонная функция

Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x - y = \log_2 x - \log_2 y, \\ x^2 + y = 30. \end{cases}$$

Решение: Область определения $x \in (0; \infty), y \in (0; \infty)$.

Функция $f(x) = x + \log_2 x$ монотонно возрастает в области определения.

Из первого уравнения в форме: $x + \log_2 x = y + \log_2 y$ следует, что $x = y$.

Из второго уравнения $x^2 + x = 30, x = 5$.

Ответ: (5; 5).

10.2 Логарифмирование уравнения

Пусть число $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$. Замена уравнения $f(x) = g(x)$ на $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ называется логарифмированием уравнения. Операция эквивалентна только в той части ОДЗ, где обе части уравнения $f(x) = g(x)$ положительны. Так уравнение $x = x^5$ имеет корни $\{-1, 0, 1\}$, уравнение $\log_a x = \log_a x^5$ только корень $x = 1$. Число корней может уменьшиться, может произойти потеря корней.

Операция логарифмирования по непостоянному аргументу, например, по x , эквивалентна только в области, где обе части уравнения положительны и $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$. Так уравнение $\log_x x = \log_x x^5 \Leftrightarrow 1 = 5$, полученное из $x = x^5$ корней не имеет.

10.2.a Потенцирование уравнения

Пусть число $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$. Замена уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ на уравнение $f(x) = g(x)$ называется потенцированием уравнения. Операция эквивалентна только в той части ОДЗ, где обе части второго уравнения положительны. Так уравнение $\log_a (x^2 - 1) = \log_a (1 - x)$ имеет единственный корень $x = -2$, а полученное потенцированием уравнение $x^2 - 1 = 1 - x$ имеет два корня $\{-2; 1\}$. Число корней может увеличиться, то есть может появиться лишние корни. Практически удобно выполнить потенцирование, как не эквивалентную операцию, и затем проверить найденные корни подстановкой в исходное уравнение (или в уравнение до потенцирования, эквивалентное исходному).

10.2.b Логарифмирование

Решить уравнение $a^{ax^2+2x} \cdot 243^{4x} \cdot 9^{-8(2\sin^2 x + \cos 2x)} = 81^{(2a+5)x}$, при $a = 81$.

Решение: Заметим, что $3^4 = 81$, $3^5 = 243$, $2\sin^2 x + \cos 2x = 1$.

Упрощаем выражение:

$$a^{ax^2+2x} = 3^{4x(ax+2)}, \quad 243^{4x} = (3^5)^{4x} = 3^{20x}, \quad 9^{-8(2\sin^2 x + \cos 2x)} = 3^{-16},$$

$$a^{ax^2+2x} \cdot 243^{4x} \cdot 9^{-8(2\sin^2 x + \cos 2x)} = 3^{4x(ax+2)} \cdot 3^{20x-16} = 3^{4(2a+5)x}.$$

Уравнение принимает вид

$$3^{4x(ax+2)} = 3^{8(ax+2)}.$$

Логарифмируя по основанию 3, получаем эквивалентное уравнение:

$$4x(ax+2) = 8(ax+2) \Leftrightarrow x = \{2; -2/a\}.$$

Ответ: $\{-2/81, 2\}$.

11 Уравнения вида: $x = f(f(x))$

Считаем известной теорему о том, что для монотонно изменяющейся во всей области определения функции $f(x)$ эквивалентны уравнения:

$$x = f(f(\dots f(f(x))\dots)) \Leftrightarrow x = f(x).$$

Другими словами, уравнение упрощаем до единственной функции.

Если функция не монотонная, то множество решений уравнения $x = f(f(\dots f(f(x))\dots))$ включает множество решений уравнения $x = f(x)$, то есть корни последнего уравнения являются корнями исходного, но могут быть и другие корни.

11.1 Вложенные корни

Решите уравнение: $\sqrt{-\frac{3}{16} + \sqrt{-\frac{3}{16} + x}} = x$.

Решение: Обозначим $f(x) = \sqrt{-\frac{3}{16} + x}$. Эта функция монотонно возрастающая.

Уравнение имеет вид: $f(f(x)) = x$, причём функция $f(x)$ монотонная.

Эквивалентное уравнение $f(f(x)) = x \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x = \sqrt{-\frac{3}{16} + x}$.

ОДЗ: $16x \geq 3$. Возводим в квадрат уравнение и находим корни 0,25 и 0,75.

Ответ: 0,25; 0,75.

11.2 Вложенные квадраты

Решите уравнение: $(x^2 + 8x + 10\frac{11}{16})^2 + 8(x^2 + 8x + 10\frac{11}{16}) + 10\frac{11}{16} = x$.

Решение. Обозначим $y = f(x) = x^2 + ax + b$, $a = 8$; $b = 10\frac{11}{16}$.

Получим $x = f(f(x)) \Rightarrow x = f(x)$.

Запишем исходное уравнение в виде системы: $\begin{cases} y = x^2 + ax + b, \\ x = y^2 + ay + b. \end{cases}$

Вычитая, получим: $(x - y) \cdot (x + y + a + 1) = 0$.

Если $x = y$, то $x^2 + ax + b = x \Leftrightarrow x = f(x)$.

Отсюда при условии $(a - 1)^2 \geq 4b$ находим: $x = \frac{1 - a \pm \sqrt{(a - 1)^2 - 4b}}{2}$.

Если $y + x + a + 1 = 0$, то $x^2 + ax + b + x + a + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 - a \pm \sqrt{(a + 1)^2 - 4b - 4}}{2}$.

Ответ: $(-\frac{21}{4}, -\frac{19}{4}, -\frac{15}{4}, -\frac{9}{4})$.

11.3 Система сводящаяся к стандартному виду

Решите систему уравнений: $x = \frac{2z^2}{1+z^2}$, $y = \frac{2x^2}{1+x^2}$, $z = \frac{2y^2}{1+y^2}$.

Решение: Решения возможны только для $x \geq 0$; $y \geq 0$; $z \geq 0$ (ОВР).

Обозначим $f(t) = \frac{2t^2}{1+t^2} = 2 - \frac{2}{1+t^2}$. В ОВР функция монотонно убывающая.

Система уравнений имеет вид: $x = f(z)$; $y = f(x)$; $z = f(y)$.

Значит, $x = f(f(f(x)))$, причём функция $f(x)$ монотонно убывающая.
Это уравнение эквивалентно:

$$f(f(f(x))) = x \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x = \frac{2x^2}{1+x^2} \Leftrightarrow x = y = z = \{0, 1\}.$$

Ответ: (0; 0; 0); (1; 1; 1).

11.4 Куб и кубический корень

Решите уравнение: $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$.

Решение: Обозначим: $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$. Эта функция монотонно возрастающая.
Перенесём 1 вправо и извлечём кубический корень из обеих частей.

Уравнение приобретает вид $x = \sqrt[3]{2\sqrt[3]{2x-1}-1} = f(f(x))$.

Для монотонной функции, эквивалентное уравнение: $x = f(x)$:

$$x = \sqrt[3]{2x-1}, x^3 = 2x-1. \Leftrightarrow (x-1) \cdot (x^2+x-1) = 0 \Leftrightarrow x = x = \left(1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right).$$

Ответ: $x = \left(1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

11.5 Симметрия

Решите систему уравнений: $\frac{x+y}{x-y} = \frac{3xy}{2}, \frac{xy+1}{xy-1} = \frac{3x}{2y}$.

Решение: ОДЗ: $x \neq y; xy \neq 1, y \neq 0$.

Запишем уравнения в виде $xy = \frac{2}{3} \cdot \frac{x+y}{x-y} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{x}{y}+1}{\frac{x}{y}-1}, \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \cdot \frac{xy+1}{xy-1}$.

Обозначим $a = \frac{x}{y}, b = xy, f(z) = \frac{2}{3} \cdot \frac{z+1}{z-1}$. Эта функция монотонно убывающая.

Тогда $x^2 = ab, y = b/x$, система уравнений имеет вид: $\begin{cases} a = f(b), \\ b = f(a). \end{cases} \Leftrightarrow a = f(f(a))$.

Из уравнения $f(f(a)) = a$ получаем $f(a) = a, a = \frac{2(a+1)}{3(a-1)}, a = b = 2$ или $a = b = -1/3$.

Ответ: (2, 1); (-2, -1); (1/3; -1); (-1/3; 1).

11.6 Функциональное уравнение

Дана функция $f(x) = |4 - 4|x|| - 2$. Сколько решений имеет уравнение $f(f(x)) = x$?

Размышляем: Функция $y = f(x)$ чётная, $f(f(x))$ тоже.

$f(0) = f(2) = f(-2) = 2, f(1) = f(-1) = -2$. График функции $y = f(x)$ похож на букву W с осью симметрии, совпадающей с осью ординат, вершинами $(-2, 2), (-1, -2), (0, 2), (1, -2), (2, 2)$.

$f(x) = 0$ при $x = \pm 0.5$ и при $x = \pm 1.5, f(x) = 2$ при $x = 0$ и при $x = \pm 2, f(x) = -2$ при $x = \pm 1$.

$f(f(x)) = -2$ при $x = \pm 0.25 (f(x) = 1)$, при $x = \pm 0.75 (f(x) = -1)$, при $x = \pm 1.25 (f(x) = -1)$, при $x = \pm 1.75 (f(x) = 1)$. $f(f(x)) = 2$ при $x = \pm 0.5 (f(x) = 0)$, при $x = \pm 1 (f(x) = -2)$, при $x = \pm 1.5 (f(x) = 0)$, при $x = \pm 2 (f(x) = 2)$. График представляет собой ломаную с вершинами на прямых $y = \pm 2$.

Решение 1. Заметим, что $f(x) = 2$ в трёх точках $f(0) = f(2) = f(-2) = 2, f(x) = -2$ в двух точках $f(1) = f(-1) = -2$.

Заметим также, что $f(x) = 1$ в четырёх точках $f(\pm 0.25) = f(\pm 1.75) = 1, f(x) = -1$ в четырёх

точках $f(\pm 0.75) = f(\pm 1.25) = -1$, $f(x) = 0$ в четырёх точках $f(\pm 0.5) = f(\pm 1.5) = 0$.

График функции $y = f(f(x))$ линеен, значит, он состоит из отрезков или лучей, причём линейный член функции $\pm 16x$.

$$\begin{aligned} f(f(x)) = -2 & \quad \text{при } x = \pm 0.25 (f(x) = 1), \\ & \quad \text{при } x = \pm 0.75 (f(x) = -1), \\ & \quad \text{при } x = \pm 1.25 (f(x) = -1), \\ & \quad \text{при } x = \pm 1.75 (f(x) = 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(f(x)) = 2 & \quad \text{при } x = \pm 0.5 (f(x) = 0), \\ & \quad \text{при } x = \pm 1 (f(x) = -2), \\ & \quad \text{при } x = \pm 1.5 (f(x) = 0), \\ & \quad \text{при } x = \pm 2 (f(x) = 2). \end{aligned}$$

На каждом из промежутков $(n/4, n/4 + 0.25]$, где $n = -8..8$, функция $f(f(x))$ монотонно изменяется от -2 до 2 , уравнение $f(f(x)) = x$ имеет ровно один корень. Например, если $0.25 > x > 0$, то $2 > f(x) = 2 - 4x > 1$, $f(f(x)) = 4f(x) - 6 = 2 - 16x$, функция монотонно убывает от 2 до -2 , уравнение $f(f(x)) = x$ имеет один корень $x = 2/17$. Число корней на шестнадцати промежутках равно 16 .

Если $x > 2$, то $f(x) = 4x - 6$, $f(f(x)) = 16x - 30 > x$, корней нет. Аналогично при $x < -2$.

Идея решения 2. График обратной функции $x = f^{-1}(y)$ похож на букву W лежащую на правом боку. Уравнение $f(f(x)) = x$ эквивалентно $f(x) = f^{-1}(x)$. Каждый отрезок одного W пересекает четыре отрезка другого W. Значит, всего корней 16 . При записи решения требуется установить взаимно-однозначное соответствие точек пересечения графиков и решений данного уравнения.

Ответ: 16.

11.7 Вычислить значение функции

Дана функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$. Найдите $f(f(\dots f(f(15))))$, где символ f повторён 20 раз.

Решение.
$$f(f(x)) = f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}\right)^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-\frac{1}{1-x^3}}} = \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x} = \sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}.$$

$$f(f(f(x))) = f\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}\right)^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-1+\frac{1}{x^3}}} = x.$$

Значит, число $f(f(\dots f(f(15))))$, где символ f повторён 18 раз, равно 15 .

Число $f(f(\dots f(f(15))))$, где символ f повторён 20 раз, равно $f(f(15)) = \sqrt[3]{1-\frac{1}{15^3}}$.

Ответ: $\sqrt[3]{1-\frac{1}{15^3}}$.

12 Уравнения вида: $f(f(x))=0$

12.1 Поиск вида функции

Пусть $f(x) = x^2 + 12x + 30$. Решите уравнение $f(f(f(f(x))))=0$.

Решение: $f(x) = (x+6)^2 - 6$.

$$f(f(x)) = ((x+6)^2 - 6 + 6)^2 - 6 = (x+6)^4 - 6.$$

$$f(f(f(x))) = ((x+6)^4 - 6 + 6)^2 - 6 = (x+6)^8 - 6.$$

$$f(f(f(f(x)))) = ((x+6)^8 - 6 + 6)^2 - 6 = (x+6)^{16} - 6.$$

$$f(f(f(f(f(x)))))) = ((x+6)^{16} - 6 + 6)^2 - 6 = (x+6)^{32} - 6 = 0.$$

$$x+6 = \pm 6^{\frac{1}{32}} \Rightarrow x = \pm \sqrt[32]{6} - 6.$$

Ответ: $x = \pm \sqrt[32]{6} - 6$.

12.2 Число корней (2001/02 – 3 – 11)

Пусть $P(x)$ – многочлен нечетной степени. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет не меньше различных действительных корней, чем уравнение $P(x) = 0$.

Размышляем. Если x_1 это корень уравнения $P(x) = 0$, a_1 это корень уравнения $P(x) = x_1$, то $P(P(a_1)) = P(x_1) = 0$, то есть a_1 это корень уравнения $P(P(x)) = 0$.

Решение (Рубаненко Е.) Пусть $x_1, \dots, x_N$ – все различные корни уравнения $P(x) = 0$.

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_N)G(x), \text{ где } G(x) \text{ корней не имеет.}$$

Каждый из N первых множителей уравнения

$$P(P(x)) = (P(x) - x_1)(P(x) - x_2)\dots(P(x) - x_N)G(P(x)) = 0$$

имеет хотя бы один корень, так как $P(x)$ – многочлен нечетной степени.

Никакие два корня уравнения $P(P(x)) = 0$ из разных множителей не совпадают. Допустим обратное. Пусть a_1 это корень уравнения $P(x) = x_1$, a_2 корень уравнения $P(x) = x_2$, причём $a_1 = a_2$. Тогда $P(a_1) = x_1$ и $P(a_1) = x_2$, но числа x_1 и x_2 разные. Противоречие.

Значит, уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет не меньше, чем N различных корней.

13 Целые и дробные части

13.1 Уравнение

Решите уравнение $\{(x+1)^3\} = x^3$, где $\{z\}$ —дробная часть числа z , т. е. $\{z\} = z - [z]$.

Решение. Область значений функции $\{ \}$ суть $[0, 1)$, значит, $0 \leq x^3 < 1$, т.е. $0 \leq x < 1$.

Равенство $\{a + b\} = a$ выполняется тогда и только тогда, когда b —целое число.

Поэтому из равенства $\{x^3 + 3x^2 + 3x + 1\} = x^3$ следует, что $3x^2 + 3x = n$ — целое число.

Функция $y = 3x^2 + 3x$ возрастает на $[0, 1)$, $y(0) = 0$, $y(1) = 6$, поэтому $0 \leq n < 6$ и из корней уравнения $3x^2 + 3x - n = 0$ выбираем корни, лежащие в промежутке $[0, 1)$.

Ответ. $\sqrt{\frac{n}{3} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$, $n=0,1,2,3,4,5$.

Ягубов.РФ

14 Составление уравнений

14.1 Задание

Отрезок, соединяющий боковые стороны трапеции и параллельный её основаниям, равным a и b делит трапецию на равновеликие части. Найти длину этого отрезка.

Размышления: При составлении уравнения можно пытаться исходить из длины отрезка или из расстояний от него до сторон. Уравнения получаются «плохими». Разумно рассмотреть случаи треугольника с основанием a . Длина равна $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Для параллелограмма со стороной a : $x = a$. Вернёмся к геометрии.

Решение: Пусть a – меньшее основание трапеции, b – большее. Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения. Возникает треугольник с основанием b вершиной в точке пересечения, который параллельные линии (основания трапеции a и искомый отрезок x) делят на подобные треугольники.

Площадь каждого из подобных треугольников пропорциональна квадрату стороны. Пусть площадь треугольника с основанием a равна ka^2 . Тогда площадь треугольника с основанием b равна kb^2 , а треугольника с искомым основанием x равна kx^2 .

Приравняем разности площадей треугольников большее основание – искомый отрезок и искомый отрезок – меньшее основание: $ka^2 - kx^2 = kb^2 - kx^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$.

Ответ: $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

14.2 Задание

Из вершины прямого угла B треугольника ABC под углом 30° к BC во внешнюю для треугольника сторону проведен луч, пересекающий продолжение гипотенузы AC в точке D . Найдите AD , если $AB = CD = a$.

Решение: Пусть угол A равен α . Тогда $AD = \frac{a}{\cos \alpha}$, $AC = AD + CD = a + \frac{a}{\cos \alpha}$.

По теореме синусов для треугольника ABC с углами α , 120° , $60^\circ - \alpha$ найдём:

$$\frac{AC}{\sin 120^\circ} = \frac{AB}{\sin(60^\circ - \alpha)} \Leftrightarrow \frac{\frac{a}{\cos \alpha} + a}{\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sin 60^\circ \cos \alpha - \cos 60^\circ \sin \alpha},$$

$$\left(\frac{1}{\cos \alpha} + 1\right) \cdot \left(\cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{3}}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\sqrt{3}} = \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} \Leftrightarrow 1 - \cos^2 \alpha = \frac{3 \cos^4 \alpha}{(1 + \cos \alpha)^2}.$$

$$(1 - \cos \alpha) \cdot (1 + \cos \alpha)^3 = 3 \cos^4 \alpha \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{\cos \alpha} + 1\right)^3 = 3.$$

$$\frac{1}{\cos \alpha} = -2, \frac{1}{\cos^3 \alpha} = 2. \text{ Значит, } AC = \frac{a}{\cos \alpha} = a\sqrt[3]{2}.$$

Ответ: $a\sqrt[3]{2}$.

Об оранжевке задачи. Задача выглядит слишком просто, поэтому на экзамене она предлагается в «устрашённом» виде. Составители создают пирамиду $SABC$. Они дают иезуитскую формулировку того, что высота пирамиды это SD . Они заявляют, что SD перпендикулярен прямой Эйлера и прямой Одера треугольника ABC (или каким либо двум другим несовпадающим прямым). Утверждение о перпендикулярности AB и BC вновь подадут в трёхмерном виде, утверждая, что рёбра AB и SB перпендикулярны. Жаль, что после такого запугивания немало мыслящих детей, не готовых к тому, что простые вещи взрослые дяди подадут таким языком, просто не пытаются решать задачу.

15 Рядом с уравнениями

15.1 Корень на промежутке

Известно, что $2a + 3b + 6c = 0$. Докажите, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корень на интервале $(0,1)$.

Размышления: Пусть $c = 0$. Тогда $ax^2 + bx = ax(x - 2/3) = 0$. Это уравнение имеет корни 0 и $2/3$, второй на интервале $(0;1)$. Какие значения принимает функция $ax^2 + bx + c$ в этих точках?!!

Решение: Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. $f(0) = c$.

$$\frac{9}{2} f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{9}{2} \left(\frac{2^2 a}{3^2} + \frac{2b}{3} + c \right) = 2a + 3b + 6c - \frac{3}{2}c = -\frac{3}{2}c.$$

Если $c = 0$, то $ax^2 + bx = ax(x - 2/3) = 0$. Это уравнение имеет корни 0 и $2/3$, причём второй расположен на интервале $(0;1)$.

Если $c \neq 0$, то значения $f(x)$ на концах промежутка $[0, 2/3]$ разные. Значит, уравнение $f(x) = 0$, где $f(x)$ непрерывная функция, имеет корень на интервале $(0, 2/3)$. Действительно, на отрезке $[0;2/3]$ функция принимает все значения между $c = f(0)$ и $-1.5c = f(2/3)$, в частности, $f(x) = 0$.

15.2 Все буквы

Вычислите $\text{tg}\alpha * \text{tg}\beta * \dots * \text{tg}\omega$. В выражении участвуют все греческие буквы.

Решение: Среди греческих букв есть π , причём по умолчанию это число с известным значением, $\text{tg } \pi = 0$. Один множитель равен нулю.

Ответ: 0.

15.3 Функциональное уравнение

Найти значение $f(2013)$, если $f(7) = 5$ и для любых x и y выполнено неравенство:

$$f(x) - f(y) \leq (x - y)^2.$$

Решение: Пусть $f(x) \geq f(y)$ (иначе поменяем их местами) и $x \neq y$. Тогда неравенство эквивалентно $0 \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq |x - y|$. Поскольку для любого ϵ можно выбрать сколь угодно близкий к нему игрек, то модуль производной исследуемой функции во всех точках существует и меньше любого положительного числа, то есть он равен нулю. Значит, функция – постоянное число.

Ответ: 5.

15.4 Переменная как параметр

Найдите все x , при которых уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ (относительно z) имеет действительное решение при любом y .

Решение. Относительно z данное уравнение является квадратным:

$$z^2 + 2xyz + (x^2 + y^2 - 1) = 0.$$

Его дискриминант равен $D(x,y) = x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 1 = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$.

Если $x^2 - 1 > 0$, то $D(x,0) < 0$, если $x^2 - 1 < 0$, то $D(x,2) < 0$.

При $x = \pm 1$ и любом y имеем $D = 0$, поэтому уравнение имеет решение.

Ответ: ± 1 .