Министерство образования и науки **Российской** Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение дополнительного образования детей «Заочная физико-техническая школа Московского физико-технического института (государственного университета)»

МАТЕМАТИКА

Последовательности. Пределы

Задание №2 для 10-х классов

(2012 – 2013 учебный год)

г. Долгопрудный, 2012

Составитель: Е.Ю. Редкозубова, ассистент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №2 для 10-х классов (2012 – 2013 учебный год), 2012, 32 с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 30 ноября 2012г.

Составитель:
Редкозубова Елена Юрьевна

Подписано 25.09.12. Формат 60×90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,0.
Уч.- изд. л. 1,77. Тираж 750. Заказ №14-з.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(государственного университета)
ООО «Печатный салон ШАНС»

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Москов. обл., 141700,
ЗФТШ, тел./факс (495) 408-5145 – **заочное отделение**
тел./факс (498) 744-6351 – **очно-заочное отделение**
тел. (499) 755-5580 – **очное отделение**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru
Наш сайт: www.school.mipt.ru

§1. Бесконечные числовые последовательности

Определение. *Бесконечной числовой последовательностью* (или просто *последовательностью*) называется числовая функция $x = x(n)$, определённая на множестве N натуральных чисел.

Аргумент n этой функции записывается в виде индекса, т. е. вместо записи $x(n)$ используют запись x_n, а саму последовательность часто обозначают (x_n). Число x_n называют n-м (читается: энным) членом последовательности (x_n). Приведём примеры.

(1) $1; 1; 1; \ldots$ (т. е. $x_n = 1$ для всех $n \in N$);

(2) $1^2; 2^2; 3^2; \ldots$ (т. е. $x_n = n^2$ для всех $n \in N$);

(3) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots$ (т. е. $x_n = \frac{1}{n}$ для всех $n \in N$);

(4) последовательность, n-й член которой равен n-му знаку после запятой в десятичной записи числа $\frac{8}{33}$;

(5) последовательность, n-й член которой равен количеству простых чисел, не превосходящих n;

(6) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ для всех $n \geq 3$ (последовательность Фибоначчи).

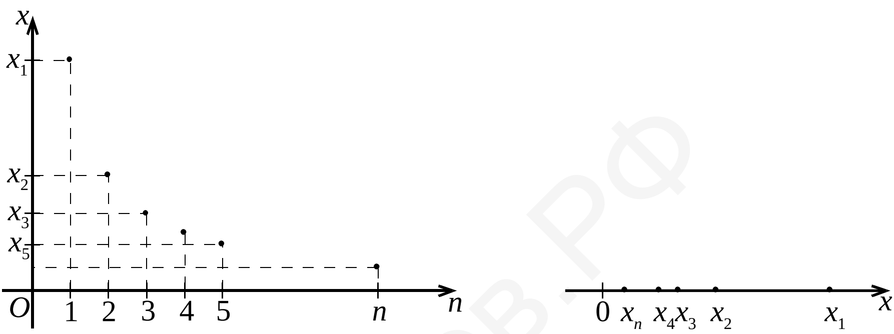
Как видим, последовательности задаются различными способами. Например, указывается формула n-го члена (примеры (1) – (3)). Закон соответствия между номером n и членом x_n может быть описан словесно (примеры (4) – (5)). Последовательность может быть также задана *рекуррентным соотношением*: даны несколько первых членов последовательности и формула, выражающая следующие члены последовательности через предыдущие (пример (6)).

Легко убедиться, что в примере (4) $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$, $x_4 = 4$ и т. д., т. е. $x_n = 3 + (-1)^n$. В примере (6) формулу n-го члена найти сложнее:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

А вот явную формулу n-го члена последовательности (5) написать невозможно. Тем не менее, многие её свойства установлены и без формулы.

Скажем несколько слов о геометрическом изображении последовательности. Поскольку последовательность (x_n) является функцией, то геометрически её можно изобразить графиком (рис. 1 а). Однако чаще всего члены последовательности изображаются точками координатной прямой, снабжёнными соответствующими пометками (рис. 1 б).



а) **б)**

Рис. 1

Вопрос. Каким общим свойством обладают последовательности (1), (2), (5) и (6)?

Ответ. Каждый их член, начиная со второго, не меньше предыдущего.

Определение. Последовательность (x_n) называется *строго возрастающей*, если каждый её член, начиная со второго, больше предыдущего, т. е. $x_{n+1} > x_n$ для любого $n \in N$. Последовательность (x_n) называется *строго убывающей*, если $x_{n+1} < x_n$ для любого $n \in N$. Последовательность (x_n) называется *нестрого убывающей*, если $x_{n+1} \leq x_n$ для любого $n \in N$. Последовательность (x_n) называется *нестрого возрастающей*, если $x_{n+1} \geq x_n$ для любого $n \in N$.

Все такие последовательности (строго возрастающие, строго убывающие, нестрого убывающие, нестрого возрастающие) называются *монотонными*.

Пример 1.1. Выяснить, является ли монотонной последовательность $x_n = \dfrac{3n}{n+2}$.

Решение. Уточним, чему равен x_{n+1}. Для этого вместо n в $x_n = \dfrac{3n}{n+2}$ подставим $n+1$, т. е. $x_{n+1} = \dfrac{3(n+1)}{n+3}$. Рассмотрим разность

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3(n+1)}{n+3} - \frac{3n}{n+2} = \frac{3[(n+1)(n+2) - n(n+3)]}{(n+2)(n+3)} =$$

$$= \frac{6}{(n+2)(n+3)} > 0,$$

значит, $x_{n+1} > x_n$ для любого $n \in N$. По определению последовательность (x_n) является строго возрастающей.

Приведённые рассуждения являются стандартными при доказательстве монотонности последовательности. Используя особенности последовательности (x_n), можно установить её возрастание более простым способом. Запишем x_n в виде $x_n = \dfrac{3n+6-6}{n+2} = 3 - \dfrac{6}{n+2}$, тогда

$$x_{n+1} = 3 - \frac{6}{n+3} > 3 - \frac{6}{n+2} = x_n.$$

Пример 1.2. Выяснить, является ли монотонной последовательность $x_n = 3 + (-1)^n$.

Решение. Последовательность не является монотонной, поскольку $x_{2m-1} = 2 < 4 = x_{2m}$ и $x_{2m} = 4 > 2 = x_{2m+1}$ для всех натуральных m.

Вопрос. Каким общим свойством обладают последовательности (1), (3) и (4)?

Ответ. Все их члены лежат на отрезке [0; 4].

Определение. Последовательность (x_n) называется *ограниченной*, если существует число $C > 0$ такое, что для любого натурального n выполняется неравенство $|x_n| \le C$.

Пример 1.3. Доказать, что последовательность (x_n) является ограниченной тогда и только тогда, когда все её члены лежат на некотором отрезке.

Решение. Пусть последовательность (x_n) ограничена. Тогда существует число $C>0$ такое, что $|x_n|\le C$ для любого $n\in N$. Последнее неравенство можно переписать в виде $-C\le x_n\le C$, т. е. $x_n\in[-C;C]$. Обратно, пусть все члены (x_n) лежат на некотором отрезке $[m;M]$. Выберем симметричный отрезок $[-C;C]$, содержащий $[m;M]$, тогда $-C\le x_n\le C$ и, следовательно, $|x_n|\le C$. В качестве такого C можно взять, например, $max\{|m|,|M|\}$.

Пример 1.4. Выяснить, является ли ограниченной последовательность $x_n=\dfrac{10(-1)^n n}{n^2+1}$.

Решение. Рассмотрим $|x_n|=\dfrac{10n}{n^2+1}$. Поскольку при уменьшении знаменателя положительной дроби значение дроби увеличивается, имеем:

$$|x_n|=\frac{10n}{n^2+1}<\frac{10n}{n^2}=\frac{10}{n}\le 10.$$

Значит, $|x_n|\le 10$ для любого $n\in N$. По определению последовательность (x_n) является ограниченной.

Пример 1.5. Выяснить, является ли ограниченной последовательность $x_n=n^2$.

Решение. Предположим, что последовательность (x_n) является ограниченной. Это означает, что существует такое число $C>0$, что при всех n выполняется неравенство $|n^2|\le C$. Однако при $n>\sqrt{C+1}$ неравенство не выполняется. Следовательно, предположение неверно, т. е. последовательность (x_n) не является ограниченной.

§2. Арифметические и геометрические прогрессии

Рассмотрим подробнее два важных класса числовых последовательностей.

Определение. Последовательность (x_n), каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d, называется *арифметической прогрессией*. Число d – *разность прогрессии*.

Таким образом, арифметическая прогрессия есть последовательность, заданная рекуррентно равенством $x_{n+1} = x_n + d$ и первым членом x_1.

Перечислим основные свойства арифметической прогрессии.

1) Формула n-го члена арифметической прогрессии:

$$x_n = x_1 + (n-1)d, \quad n \in N. \tag{2.1}$$

2) Для конечной арифметической прогрессии $x_1, x_2, \ldots, x_n$ суммы членов, равноотстоящих от концов, равны:

$$x_1 + x_n = x_2 + x_{n-1} = x_3 + x_{n-2} = \ldots =$$
$$= x_k + x_{n-k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.2}$$

3) Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{x_1 + x_n}{2} n, \tag{2.3}$$

или, учитывая 1),

$$S_n = \frac{2x_1 + (n-1)d}{2} n. \tag{2.3`}$$

Приведём ещё *характеристическое свойство* арифметической прогрессии.

4) Последовательность (x_n) является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый член последовательности, начиная со второго, равен среднему арифметическому соседних членов:

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2}, \quad n \geq 2. \tag{2.4}$$

В 9 классе свойства 1) – 3) были доказаны, поэтому приведём доказательство лишь свойства 4). Пусть дана арифметическая прогрессия (x_n), тогда при $n \geq 2$ имеем $x_n = x_{n-1} + d$ и $x_n = x_{n+1} - d$. Складывая почленно эти равенства, получаем $2x_n = x_{n-1} + x_{n+1}$. Обратно, пусть для n-го члена (x_n), $n \geq 2$, выполнено равенство (2.4), тогда $2x_n = x_{n-1} + x_{n+1}$ или $x_{n+1} - x_n = x_n - x_{n-1}$. Отсюда получаем, что $x_{n+1} - x_n = x_2 - x_1$, т. е. любые два соседних члена последовательности отличаются на одно и то же число $d = x_2 - x_1$. По определению последовательность (x_n) является арифметической прогрессией. □

Пример 2.1. Найти сумму первых 10 членов арифметической прогрессии, если $x_5 + x_6 = 4$.

Решение. По формуле (2.3) $S_{10} = \frac{x_1 + x_{10}}{2} 10$. Заметим, что члены x_5 и x_6 равноотстоят от x_1 и x_{10} соответственно. По (2.2) $x_1 + x_{10} = x_5 + x_6$, следовательно, $S_{10} = \frac{4}{2} \cdot 10 = 20$.

Ответ. 20.

Определение. Последовательность (x_n), первый член которой отличен от нуля и каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же отличное от нуля число q, называется *геометрической прогрессией*. Число q – *знаменатель прогрессии*.

Таким образом, геометрическая прогрессия есть последовательность, заданная рекуррентно равенством $x_{n+1} = x_n q$, первым членом $x_1 \neq 0$ и знаменателем $q \neq 0$.

Перечислим основные свойства геометрической прогрессии.

1) Формула n-го члена геометрической прогрессии имеет вид

$$x_n = x_1 q^{n-1}, \; n \in N. \tag{2.5}$$

2) Для конечной геометрической прогрессии $x_1, x_2, \ldots, x_n$ произведения членов, равноотстоящих от концов, равны:

$$x_1 \cdot x_n = x_2 \cdot x_{n-1} = x_3 \cdot x_{n-2} = \ldots = \\ = x_k \cdot x_{n-k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.6}$$

3) Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии:

$$S_n = x_1 \frac{1-q^n}{1-q} \text{ при } q \neq 1 \text{ и } S_n = n \cdot x_1 \text{ при } q = 1.$$

Приведём ещё *характеристическое свойство* геометрической прогрессии.

4) Числовая последовательность (x_n) ненулевых членов является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда модуль каж-

дого её члена, начиная со второго, равен среднему геометрическому соседних членов:

$$|x_n| = \sqrt{x_{n-1} \cdot x_{n+1}}, \quad n \geq 2, \tag{2.8}$$

или

$$(x_n)^2 = x_{n-1} \cdot x_{n+1}, \quad n \geq 2. \tag{2.8`}$$

Докажем свойство 4). Пусть последовательность (x_n) является геометрической прогрессией, тогда $x_n^2 = (x_1 q^{n-1})^2 = x_1 q^{n-2} \cdot x_1 q^n = x_{n-1} \cdot x_{n+1}$. Обратно, пусть все члены последовательности (x_n) отличны от нуля и для n-го её члена, $n \geq 2$, выполнено $x_n^2 = x_{n-1} \cdot x_{n+1}$, тогда $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_n}{x_{n-1}}$. Следовательно, $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_2}{x_1}$, или $x_{n+1} = x_n q$, где $q = \frac{x_2}{x_1}$. По определению последовательность (x_n) является геометрической прогрессией. □

Пример 2.2. Известно, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – геометрическая прогрессия. Известны числа $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ и $T = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}$. Найти $P = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$.

Решение. Обозначим знаменатель прогрессии через q. Преобразуем искомую величину

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = x_1 \cdot x_1 q \cdot \ldots \cdot x_1 q^{n-1} = x_1^n q^{1+2+\ldots+n-1} =$$

$$= x_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = (x_1^2 q^{n-1})^{\frac{n}{2}}.$$

Пусть $q \neq 1$, тогда $S = x_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$. Последовательность $1/x_1,\ 1/x_2,\ \ldots,\ 1/x_n$ является геометрической прогрессией со знаменателем $1/q$. Следовательно, $T = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1-q^{-n}}{1-q^{-1}}$, т. е. $T = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{q^n - 1}{q^{n-1}(q-1)}$. Отсюда заключаем, что $S/T = x_1^2 q^{n-1}$. Последнее равенство, очевидно, справедливо и при $q = 1$. Следовательно, $P = \sqrt{S^n / T^n}$.

Ответ. $\sqrt{S^n / T^n}$.

Пример 2.3. Три положительных числа образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Если среднее из них уменьшить на 40%, то получится геометрическая прогрессия, сумма членов которой равна 39. Найти эти числа.

Решение. Обозначим данные числа $x_1,\ x_2,\ x_3$. По условию сумма $x_1+0{,}6x_2+x_3$ равна 39. По характеристическому свойству арифметической прогрессии $2x_2=x_1+x_3$ и, следовательно, $x_1+0{,}6x_2+x_3=2{,}6x_2$. Отсюда получаем, что $x_2=15$. По характеристическому свойству геометрической прогрессии $(0{,}6x_2)^2=x_1\cdot x_3$. Итак, $x_1+x_3=30$ и $x_1\cdot x_3=81$, т. е. по обратной теореме Виета x_1 и x_3 являются корнями уравнения $x^2-30x+81=0$. Корни этого уравнения равны 3 и 27, следовательно, $x_1=3$ и $x_3=27$, поскольку последовательность $x_1,\ x_2,\ x_3$ по условию является возрастающей.

Ответ. 3, 15 и 27.

Пример 2.4. Найти формулу n-го члена последовательности, заданной рекуррентно: $x_1=\dfrac{1}{2};\ x_{n+1}=2x_n+1,\ n\in N.$

Решение. Рассмотрим вспомогательную последовательность $y_n=x_n+a$, где число a подбирается так, чтобы последовательность y_n была геометрической прогрессией. Подставляя $x_n=y_n-a$ и $x_{n+1}=y_{n+1}-a$ в рекуррентное соотношение, имеем $y_{n+1}-a=2(y_n-a)+1$, т. е. $y_{n+1}=2y_n+(1-a)$. Последовательность y_n будет геометрической прогрессией, если $1-a=0$, т. е. $a=1$. Поскольку $y_1=x_1+a=\dfrac{3}{2}$, формула общего члена геометрической прогрессии y_n запишется так: $y_n=\dfrac{3}{2}2^{n-1}$ $\left(y_1=\dfrac{3}{2},\ q=2\right)$. Тогда $x_n=y_n-a=3\cdot 2^{n-2}-1,\ n\geq 2.$

Ответ. $x_n=3\cdot 2^{n-2}-1,\ n\geq 2.$

§3. Предел последовательности

При увеличении n члены последовательности $x_n = 1/n$ становятся сколь угодно малыми, неограниченно приближаются (стремятся) к нулю. Логично считать, что ноль – предел последовательности (x_n). Однако такого интуитивного понимания в более сложной ситуации может оказаться недостаточно. Мы должны точно сформулировать, что означает слово «предел» на языке чисел. Строгое определение предела было сформулировано довольно поздно – только в середине XIX века. Дело в том, что в отличие от используемых ранее «назывных» определений (типа определения равнобедренного треугольника) здесь описывается *процесс* изменения величины: пробегая по ряду натуральных чисел $1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n, \ldots,$ мы наблюдаем за поведением x_n. Такие понятия плохо формализуются.

Попытаемся понять, что следует предпринять, чтобы проконтролировать утверждение «x_n стремится к a». Изобразим члены последовательности на числовой оси и отметим на ней точку a. Представим ситуацию образно: будем делать фотографии a каждый раз с новым оптическим увеличением. Число a будет пределом последовательности x_n, если a – «друг» x_n: на любой такой фотографии окажутся все x_n, начиная с некоторого номера.

Проиллюстрируем сказанное на примере последовательности $x_n = 1/n$. В качестве «фотографии» $a = 0$ можно взять симметричный интервал $(-\varepsilon, \varepsilon)$[1]. Оптическому увеличению соответствует уменьшение ε. Пусть $k = 1/\varepsilon$, тогда $1/n < \varepsilon$ при $n > k$ и, следовательно, член x_n попадает на «фотографию», т. е. $-\varepsilon < x_n < \varepsilon$. Например, при $\varepsilon = 1/100$ все члены $x_{101}, x_{102}, \ldots,$ окажутся в интервале $(-1/100, 1/100)$, при $\varepsilon = 1/1000$ уже только члены $x_{1001},\ x_{1002}, \ldots,$ окажутся в интервале $(-1/1000, 1/1000)$ и т. д.

Определение. Число a называется *пределом* последовательности (x_n), если для любого положительного числа ε найдётся такое действительное число k, что при всех $n > k$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \qquad (3.1)$$

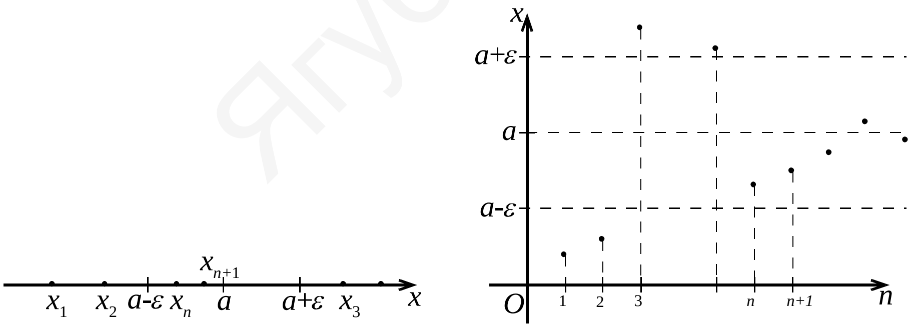
[1] ε – греческая буква «эпсилон».

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (читается: предел x_n при n, стремящемся к бесконечности, равен a). Последовательность, имеющая конечный предел, называется *сходящейся*, в противном случае – *расходящейся*.

Выясним геометрический смысл понятия предела. Для положительного числа ε интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ называется ε- *окрестностью* точки a. Неравенство (3.1) равносильно двойному неравенству $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или

$$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon. \qquad (3.2)$$

Неравенство (3.2) показывает, что все члены последовательности (x_n) с номерами $n > k$ попадают в $\varepsilon-$окрестность точки a. В определении предела число ε может быть любым (сколь угодно малым), поэтому произвольная (сколь угодно малая) окрестность точки a содержит все члены (x_n) за исключением, быть может, конечного числа (рис. 2а). На уровне графика последовательности это означает, что вне сколь угодно узкой полосы между прямыми $x = a-\varepsilon$ и $x = a+\varepsilon$ может оказаться лишь конечное число точек графика (x_n) (рис. 2б).



а) **б)**

Рис. 2

Замечание. В определении предела выбор числа k, вообще говоря, зависит от ε. Чтобы подчеркнуть это, иногда пишут $k = k(\varepsilon)$. Доказать, что последовательность (x_n) имеет предел, фактически означает найти функциональную зависимость k от ε. Вообще, определение предела по виду напоминает нескончаемую дискуссию между двумя лицами A и $B: A$ задаёт точность приближения $\varepsilon,$ в ответ B указывает число $k,$ с которого эта точность достигается, т. е. выполняется неравенство (3.1) при всех $n > k$; A уменьшает точность, $B -$ указывает новое k и т. д.

Пример 3.1. Пусть $x_n = c -$ постоянная последовательность. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c.$

Решение. Пусть выбрано произвольное $\varepsilon > 0.$ Нам нужно найти такое число $k,$ что при всех $n > k$ выполнялось бы неравенство $|x_n - c| < \varepsilon.$ Но это неравенство равносильно следующему: $|c - c| < \varepsilon,$ или $0 < \varepsilon,$ что выполняется для всех номеров $n.$ Это означает, что в качестве k можно выбрать любое число, например, $k = 0.$ Тогда для любого $n > k$ имеет место неравенство $|x_n - c| < \varepsilon.$ По определению $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c.$

Замечание. В разобранном примере число k удалось выбрать так, чтобы оно годилось сразу для всех $\varepsilon.$. Такой случай не типичен.

Пример 3.2. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Решение. Пусть фиксировано произвольное $\varepsilon > 0.$ Нам нужно найти такое число $k,$ что при всех $n > k$ выполнялось бы неравенство $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon,$ или $n > 1/\varepsilon.$ Выберем $k = 1/\varepsilon.$. Тогда при $n > k$ имеем:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{k} = \varepsilon.$$

По определению $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Вопрос. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,$ $\varepsilon > 0$ и число k такое что $x_n \in (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ при $n > k.$ Можно ли утверждать, что в интервале $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$ нет ни одного из чисел $x_n,$ $n \le k$?

Ответ. Нет. Приведём соответствующий пример. Определим

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{при } n \text{ чётном;} \\ 0 & \text{при } n \text{ нечётном.} \end{cases}$$

Последовательность (x_n) имеет предел, равный нулю. Пусть $\varepsilon = 0{,}01$, тогда все члены с номерами $n > 100$ попадают в интервал $(-\varepsilon;\ \varepsilon)$, а, например, член $x_{100} = 0{,}01$ уже не попадает в него. Однако члены x_1, x_3, …, x_{99} с нечётными номерами тоже лежат в $(-\varepsilon;\ \varepsilon)$.

Наглядное представление о пределе можно получить, считая, что x_n – какие-то физические величины, которые мы можем измерять с определённой точностью, допускаемой приборами. Пусть ε есть точность прибора, тогда неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ означает, что мы не сможем отличить x_n от a. Таким образом, условие $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ означает, что при любой точности измерения последовательность (x_n), начиная с некоторого номера, не отличается от постоянной последовательности a, a, a, ...

Вопрос. Могут ли два разных числа быть пределами одной и той же последовательности?

Ответ. Нет. Предположим, что два разных числа a и b являются пределами одной и той же последовательности (x_n) и пусть, например, $b > a$. Положим $\varepsilon = (b-a)/3.$, тогда ε-окрестности точек a и b не пересекаются (сделать чертёж!). Ввиду условия найдутся такие числа k_1 и k_2, что при всяком $n > k_1$ член x_n лежит в ε-окрестности точки a и при всяком $n > k_2$ член x_n лежит в ε-окрестности точки b. Если теперь взять какое-нибудь $n > \max\{k_1, k_2\}$, то окажется, что x_n лежит одновременно в ε-окрестности точки a и в ε-окрестности точки b, а это невозможно, поскольку окрестности не пересекаются.

Пример 3.3. Доказать, что если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Решение. Если $q = 0$, то $q^n = 0$ при любом n, в этом случае утверждение очевидно.

Для случая $q \neq 0$ предварительно установим одно вспомогательное неравенство. По условию $|q|<1,$ тогда $\frac{1}{|q|}>1$ и, значит, $\frac{1}{|q|}=1+\alpha$ для некоторого $\alpha>0.$ Возводя обе части последнего неравенства в степень n, получим $\frac{1}{|q|^n}=(1+\alpha)^n.$ Поскольку $\alpha>0,$ то все слагаемые, которые получаются после раскрытия скобок и приведения подобных членов в $(1+\alpha)^n$, являются положительными. Одним из слагаемых является[2] $n\alpha$, поэтому справедливо $\frac{1}{|q|^n}=(1+\alpha)^n>n\alpha$ и, значит,

$$|q|^n<\frac{1}{n\alpha}. \qquad (3.3)$$

С помощью полученного неравенства докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0.$

Мы должны показать, что для любого $\varepsilon>0$ существует число k, такое что при всех $n>k$ выполняется неравенство $|q^n-0|=|q|^n<\varepsilon.$ Выберем $k=\frac{1}{\alpha\varepsilon}$, тогда при $n>k$

$$n>\frac{1}{\alpha\varepsilon} \Leftrightarrow n\alpha>\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{n\alpha}<\varepsilon$$

и в силу (3.3) $|q^n-0|=|q|^n<\frac{1}{n\alpha}<\varepsilon,$ что и требовалось доказать. Отметим, что в параграфе 4 (пример 4.1) будет дано другое доказательство.

---

[2] Действительно, $(1+\alpha)^n$ – это произведение n сомножителей $1+\alpha$:

$$(1+\alpha)(1+\alpha)\cdot\ldots\cdot(1+\alpha).$$

Член α получается только в случае, когда из одной скобки мы берем $\alpha,$ а из остальных - 1. Поскольку у нас всего n скобок, то после перемножения мы получим n слагаемых вида $1^{n-1}\cdot\alpha,$ т. е. коэффициент пе-ред α равен $n.$

Вопрос. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \varepsilon > 0.$ Можно ли утверждать, что найдётся такое число k, что $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ при всех $n > k$?

Ответ. да. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,$ то по определению предела для *любого* положительного числа $\alpha,$ а следовательно, и для $\alpha = \varepsilon / 2,$ найдётся число $k,$ такое что $|x_n - a| < \alpha$ при всех $n > k.$

Сформулируем необходимое условие существования предела, доказательство которого приводится в следующем параграфе.

Теорема 3.1. *Если последовательность имеет предел, то она ограничена.*

Пример 3.4. Доказать, что последовательность $x_n = n^2$ не имеет предела.

Решение. В примере 1.5 было показано, что данная последовательность не является ограниченной. По теореме 3.1 заключаем, что последовательность (x_n) расходится.

Следующий пример показывает, что ограниченная последовательность может и не иметь предела, т. е. обратное утверждение к теореме 3.1 неверно.

Пример 3.5. Доказать, что последовательность $x_n = (-1)^n$ не имеет предела.

Решение. Предположим противное, т. е. какое-то число a является пределом этой последовательности. Тогда для $\varepsilon = 1$ найдётся такое число k, что $|x_n - a| < 1$ при всех $n > k.$ Пусть номер $N > k,$ тогда $|x_{N+1} - a| < 1$ и $|x_{N+2} - a| < 1.$ Но одно из чисел x_{N+1} и x_{N+2} равно 1, а другое равно –1. Поэтому $|-1 - a| < 1$ и $|1 - a| < 1,$ т. е. одновременно $0 < a < 2$ и $-2 < a < 0$. Полученное противоречие показывает, что последовательность (x_n) расходится.

При вычислении пределов на практике редко пользуются определением. Обычно применяют стандартные предельные равенства (см. примеры 3.2 и 3.3) и следующую теорему об арифметических операциях с пределами.

Теорема 3.2. *Если последовательности* (x_n) *и* (y_n) *сходятся, то сходятся и последовательности* $(x_n + y_n)$, $(x_n \cdot y_n)$ *и* x_n / y_n *(в последнем случае предполагается* $y_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$*). При этом*

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} x_n)\cdot(\lim\limits_{n\to\infty} y_n)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

Доказательство теоремы 3.2 обсуждается в следующем параграфе.

Пример 3.6. Доказать, что постоянный множитель можно выносить за знак предела, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} cx_n = c\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ для любого $c \in R$.

Решение. В самом деле, рассмотрим последовательность $y_n = c$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$ (пример 3.1), то по теореме 3.2 2)

$$\lim_{n\to\infty} cx_n = \lim_{n\to\infty} c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = c\lim_{n\to\infty} x_n.$$

Пример 3.7. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2} = 0$.

Решение. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$, то по теореме 3.2 2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Замечание. Теорему 3.2 можно обобщить на произвольное (конечное) число слагаемых (сомножителей). В частности, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^m} = 0$ для любого $m \in N$.

Пример 3.8. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3 - n(n-1)^2}{n^2+11}$.

Решение. Обозначим дробь, стоящую под знаком предела, через x_n. В числителе и знаменателе x_n стоят последовательности, не являющиеся ограниченными (доказывается аналогично примеру 1.5).

По теореме 3.1 они не имеют предела и теорема о пределе частного (теорема 3.2 3)) «напрямую» здесь неприменима. Поступим следующим образом: поделим числитель и знаменатель на наибольшую степень n. По формулам сокращённого умножения $(n+2)^3 - n(n-1)^2 = 8n^2 + 11n + 8$, так что x_n можно переписать в виде:

$$x_n = \frac{8n^2 + 11n + 8}{n^2 + 11} = \frac{n^2(8 + \frac{11}{n} + \frac{8}{n^2})}{n^2(1 + \frac{11}{n^2})} = \frac{8 + \frac{11}{n} + \frac{8}{n^2}}{1 + \frac{11}{n^2}}.$$

Теперь в числителе и знаменателе x_n стоят сходящиеся последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\left(8 + \frac{11}{n} + \frac{8}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 8 + 11\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + 8\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 8,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{11}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + 11\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 1.$$

По теореме 3.2 3)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{8 + \frac{11}{n} + \frac{8}{n^2}}{1 + \frac{11}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(8 + \frac{11}{n} + \frac{8}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{11}{n^2}\right)} = \frac{8}{1} = 8.$$

Ответ. 8.

Определение. Геометрическая прогрессия (x_n) называется *бесконечно убывающей*, если $|q| < 1$, где q – знаменатель прогрессии. *Суммой* бесконечно убывающей геометрической прогрессии называется число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, где S_n – сумма её первых n членов.

Пример 3.9. Доказать, что если геометрическая прогрессия (x_n) с показателем q является бесконечно убывающей, то её сумма равна

$$\frac{x_1}{1-q}.$$

Решение. Так как $S_n = x_1\dfrac{q^n - 1}{q - 1} = \dfrac{x_1}{q-1}q^n + \dfrac{x_1}{1-q}$, то

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{x_1}{q-1}\lim_{n\to\infty}q^n+\lim_{n\to\infty}\frac{x_1}{1-q}=$$

$$=\frac{x_1}{q-1}\cdot 0+\frac{x_1}{1-q}=\frac{x_1}{1-q}.$$

Пример 3.10. Записать значение выражения $1{,}7(5)=1{,}7555\ldots$ в виде обыкновенной дроби.

Решение. Имеем

$$1{,}7(5)=1+\frac{7}{10}+\frac{5}{10^2}+\frac{5}{10^3}+\frac{5}{10^4}+\ldots=\frac{17}{10}+\frac{\frac{5}{10^2}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{17}{10}+\frac{1}{18}=\frac{79}{45}.$$

Ответ. 79/45.

Следующее полезное свойство пределов известно под названием *теоремы о «зажатой» последовательности*.

Теорема 3.3. Пусть (x_n), (y_n) и (z_n) – такие последовательности, что $x_n\le y_n\le z_n$ при всех $n\in N$ и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

Доказательство. Для данного $\varepsilon>0$ существует такое число k_1, что члены x_n лежат в интервале $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ при всех $n>k_1$, и существует такое число k_2, что члены z_n лежат в интервале $(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$ при всех $n>k_2$. Положим $k=max\{k_1,k_2\}$. Тогда при $n>k$ одновременно $x_n\in(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$ и $z_n\in(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$ и, следовательно, $a-\varepsilon<x_n\le y_n\le z_n<a+\varepsilon$, т. е. $y_n\in(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$, что и требовалось. □

Пример 3.11. Дана последовательность

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

Решение. Попробуем «зажать» x_n между членами последовательностей, сходящихся к одному и тому же числу, и применим теорему 3.3.

Заметим, что $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ – наибольшая, а $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ – наименьшая дробь суммы x_n. Тогда верна оценка $n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le x_n\le n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.

Поскольку $n^2+n<n^2+2n+1$, тогда

$$\sqrt{n^2+n}<n+1\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\frac{1}{n+1}\Leftrightarrow\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}>\frac{n}{n+1}.$$

Учитывая $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}<\frac{n}{n}=1$, получаем:

$$\frac{n}{n+1}<\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le x_n\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}<1.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}1=1$, по теореме 3.4 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

§4*. Теоремы о пределах

Этот параграф посвящён доказательству основных теорем теории пределов. Формулировки некоторых из них были приведены в параграфе 3.

Доказательство теоремы 3.1. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. Покажем, что последовательность (x_n) ограничена. Согласно примеру 1.3 для этого достаточно показать, что все её члены лежат на некотором отрезке. Возьмём $\varepsilon=1$. Тогда по определению предела найдётся число k такое, что все члены (x_n) с номерами $n>k$ попадают в интервал $(a-1;\,a+1)$. За пределами этого интервала может оказаться лишь конечное число членов $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_N$, где N – наибольший из номеров $n\le k$. Добавим к этому набору числа $a-1$ и $a+1$ и из полученного набора чисел выберем наименьшее (обозначим его через m) и наибольшее (обозначим его через M). Тогда отрезок $[m;\,M]$ содержит уже все члены данной последовательности: $m\le x_n\le M$ для всех n. □

При доказательстве теоремы об арифметических операциях с пределами будем использовать определение предела и неравенство

$$|x+y| \le |x|+|y|. \qquad (4.1)$$

Доказательство теоремы 3.2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

I. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=a+b$. Пусть выбрано произвольное $\varepsilon>0$. Нам нужно показать, что найдётся такое число k, что $|x_n+y_n-a-b|<\varepsilon$ при всех $n>k$. По условию найдутся числа k_1 и k_2 такие, что $|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$, как только $n>k_1$, и $|y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}$ как только $n>k_2$. Положим $k=\max\{k_1, k_2\}$. Тогда по неравенству (4.1) при $n>k$ имеем:

$$|(x_n+y_n)-(a+b)|=|(x_n-a)+(y_n-b)|\le$$

$$\le|x_n-a|+|y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

что и требовалось.

II. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)=ab$. Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Нам нужно показать, что существует такое число k, что $|x_n y_n-ab|<\varepsilon$ при всех $n>k$. По теореме 3.1 последовательности (x_n) и (y_n) ограничены; тем самым найдётся такое $C>0$, что $|x_n|\le C$ и $|y_n|\le C$ при всех n, а также $|a|\le C$, $|b|\le C$. Заметим, что

$$|x_n y_n-ab|=|x_n y_n-x_n b+x_n b-ab|=|x_n(y_n-b)+b(x_n-a)|$$

и, следовательно, по неравенству (4.1)

$$|x_n y_n-ab|\le|x_n|\cdot|y_n-b|+|b|\cdot|x_n-a|.$$

Ввиду условия существует число k_1 такое, что $|x_n-a|<\varepsilon/2C$ для всех $n>k_1$, а также число k_2 такое, что $|y_n-b|<\varepsilon/2C$ для всех $n>k_2$. Если положить $k=\max\{k_1, k_2\}$, то при $n>k$ имеем:

$$|x_n y_n-ab|\le|x_n|\cdot|y_n-b|+|b|\cdot|x_n-a|<C\frac{\varepsilon}{2C}+C\frac{\varepsilon}{2C}=\varepsilon,$$

что и требовалось.

Для доказательства оставшегося пункта теоремы нам потребуется следующий факт.

Лемма 4.1. *Если* $y_n \neq 0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$, *то последовательность* $(1/y_n)$ *ограничена.*

Доказательство леммы 4.1. Положим в определении предела $\varepsilon = \dfrac{|b|}{2}$. Тогда существует такое число k, что $|y_n - b| < \dfrac{|b|}{2}$ при всех $n > k$. Из неравенства (4.1) вытекает, что $|y_n - b| \geq |b| - |y_n|$. Следовательно, при всех $n > k$ имеем

$$|y_n| \geq \frac{|b|}{2} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{y_n}\right| \leq \frac{2}{|b|}.$$

Пусть N – наибольший из номеров $n \leq k$. Добавим к членам $1/y_1$, $1/y_2$, …, $1/y_N$ числа $-2/b$ и $2/b$ и из полученного набора выберем наименьшее (обозначим его через m) и наибольшее (обозначим его через M). Тогда отрезок $[m; M]$ содержит все члены последовательности $(1/y_n)$, что и требовалось. □

Поскольку $x_n / y_n = x_n \cdot (1/y_n)$, пункт 3) теоремы 3.2 вытекает из леммы 4.1 и следующего утверждения, доказательство которого оставляем читателю в качестве самостоятельного упражнения.

Утверждение. Если $y_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{y_n} = \dfrac{1}{b}$.

В теории пределов важную роль играет следующий факт, доказательство которого не приводим.

Теорема 4.2. (Вейерштрасса). *Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.*

Эта теорема эквивалентна свойству полноты множества действительных чисел. Образно говоря, свойство полноты состоит в том, что на числовой оси нет «проколов» и «дырок».

Вопрос. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Имеет ли предел последовательность (x_{n+1})?

Пример 4.1. Используя теорему Вейерштрасса, доказать, что если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Решение. Для $q = 0$ утверждение очевидно. Пусть $q \in (0, 1)$, тогда

$$x_{n+1} = q \cdot x_n, \tag{4.2}$$

следовательно, $x_{n+1} < x_n$ при всех n, т. е. последовательность (x_n) является строго убывающей. В частности, $x_n < x_1$ при всех n. Кроме того, очевидно $x_n > 0$ при всех n, т. е. последовательность (x_n) ограничена. По теореме 4.2 существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Обозначим его через a. Тогда, переходя к пределу в равенстве (4.2), получаем $a = q \cdot a$, т. е. $a = 0$.

Пусть теперь $q \in (-1, 0)$, тогда справедливо неравенство

$$-|q|^n \le q^n \le |q|^n .$$

Поскольку $|q| \in (0, 1)$, то по доказанному выше $\lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = 0,$ тогда согласно примеру 3.6 и $\lim\limits_{n\to\infty}(-|q|^n) = 0.$ По теореме о «зажатой» последовательности (теорема 3.3) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0,$ что завершает доказательство.

Дадим обоснование одного способа приближённого извлечения квадратных корней, встречавшегося еще в древних вавилонских текстах.

Пример 4.2. Последовательность (x_n) задана рекуррентно

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \tag{4.3}$$

где $x_1 > 0,\ a > 0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}.$

Решение. Поскольку $x_1 > 0$ и $a > 0,$ все члены последовательности положительные. Применяя неравенство $(c+d)/2 \ge \sqrt{cd}$ для среднего арифметического и среднего геометрического, из (4.3) получаем:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \ge \sqrt{x_n \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a},$$

т. е. $x_n \ge \sqrt{a}$ для всех $n \ge 2$. Отсюда вытекает, что

$$x_{n+1} - x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n} \le 0,$$

т. е. последовательность (x_n) является нестрого убывающей при $n \ge 2$. Кроме того, (x_n) ограничена: $\sqrt{a} \le x_n \le x_2$ для всех $n \ge 2$. По теореме 4.2 существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ и по теореме 3.4 $b \ge \sqrt{a} > 0$.

Переходя в равенстве (4.3) к пределу, получаем $b = \frac{1}{2}(b + \frac{a}{b})$, откуда $b^2 = a$ и, значит, $b = \sqrt{a}$.

§5. Понятие о пределе функции. Непрерывность функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале, содержащем точку $a \in R$, за исключением, быть может, самой точки a.[3]

Определение. Число A называется *пределом* функции $y = f(x)$ в точке a, если для любой последовательности (x_n) из области её определения такой, что $x_n \ne a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

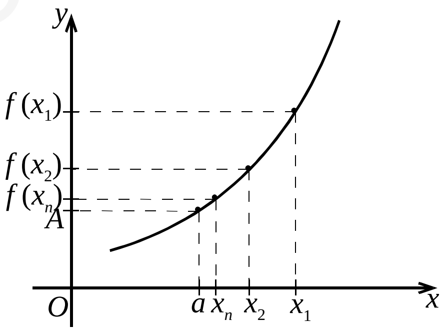


Рис. 3

Замечание. В определении предела рассматриваются значения x_n, не равные a, поэтому в самой точке a функция $y = f(x)$ может быть не определена; если значение $f(a)$ определено, то оно не обязано совпадать с A. К тому же, поскольку последовательность $(f(x_n))$

[3] Например, функция $y = \frac{\sin x}{x}$ определена на любом интервале, содержащем точку 0, кроме самой точки 0.

имеет не более одного предела, получаем, что если функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \to a,$ то этот предел единственный.

На рисунке изображена лишь одна последовательность $(x_n),$ которая к тому же является монотонной. Важно понимать, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ для любой последовательности (x_n) с условием $x_n \neq a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

Пример 5.1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to a} x = a.$

Решение. Очевидно функция $f(x) = x$ определена на любом интервале, содержащем a. Выберем произвольную последовательность (x_n) такую, что $x_n \neq a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$ Тогда $f(x_n) = x_n$ и, значит, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a.$

Пример 5.2. Доказать, что постоянный множитель можно выносить за знак предела, т. е. если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A,$ то $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = cA$ для любого $c \in R.$

Решение. Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале, содержащем $a.$ Выберем из этого интервала произвольную последовательность (x_n) такую, что $x_n \neq a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$ Тогда из примера 3.6 следует $\lim\limits_{n\to\infty} cf(x_n) = c\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = cA,$ что и требовалось.

Пример 5.3. Доказать, что при $a > 0$ $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}.$

Решение. Функция $f(x) = \sqrt{x}$ определена при $x \geq 0$ и, следовательно, определена на некотором интервале, содержащем $a.$ Выберем из этого интервала произвольную последовательность (x_n) такую, что $x_n \neq a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$ Нам нужно показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}..$ Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0,$ тогда найдётся такое число $k,$ что при $n > k$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon\sqrt{a}.$ Следовательно,

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| = \frac{|(\sqrt{x_n} - \sqrt{a})(\sqrt{x_n} + \sqrt{a})|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon,$$

что и требовалось.

Пример 5.4. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$

Решение. Функция $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ определена на любом интервале, содержащем $x=1$, кроме этой точки. Поскольку при $x\neq 1$ имеет место равенство $f(x)=x+1$, то для любой последовательности (x_n) такой, что $x_n\neq 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$ выполняется $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+1=2$.

При решении последних примеров мы повторяли одни и те же рассуждения. Их можно применить при доказательстве свойств пределов функций и в дальнейшем при вычислении уже пользоваться этими свойствами.

Теорема 5.1. *Пусть функции* $y=f(x)$, $y=g(x)$ *определены на некотором интервале, содержащем точку* $a\in R$, *за исключением, быть может, самой точки* a, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ *и* $\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$. *Тогда*

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=A+B$;

2) $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=AB$;

3) если дополнительно $g(x)\neq 0$ при $x\neq a$, $B\neq 0$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}.$$

Доказательство. Приведём доказательство лишь для свойства 2). Остальные свойства доказываются аналогично.

Пусть некоторая произвольная последовательность (x_n) из интервала, на котором определены функции, такова, что $x_n\neq a$ и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. Тогда по определению предела функции $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$ и $\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=B$. По теореме 3.2 2) $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)g(x_n)=AB$. В силу произвольности последовательности (x_n) и определения предела функции получаем, что $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=AB.$ □

Определение. Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной* в точке a, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$, т. е. если для любой последовательности (x_n)

из области определения функции такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$

Замечание. Отметим два обстоятельства, связанных с определением непрерывности. Во-первых, оговорка $x_n \neq a$ здесь не нужна, т. к. при $x_n = a$ соответствующие значения $f(x_n)$ равны $f(a).$ Во-вторых, важно понимать, что если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $a,$ то 1) она определена в точке $a;$ 2) существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и 3) $A = f(a).$ Если хотя бы один из пунктов 1) – 3) не выполнен, то функция не является непрерывной в точке a.

Пример 5.5. Функция $f(x) = x$ непрерывна в любой точке $a \in R.$ Это следует из примера 5.1 и определения непрерывности функции.

Замечание. Из теоремы 5.1 вытекает, что если функции $y = f(x),$ $y = g(x)$ непрерывны в точке $a,$ то функции $y = f(x) \pm g(x),$ $y = f(x)g(x),$ $y = f(x)/g(x)$ ($g(a) \neq 0$) также непрерывны в $a.$

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на интервале* (конечном или бесконечном), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Пример 5.6. Многочлен непрерывен на всей числовой прямой.

Решение. Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ – многочлен степени $n,$ $a \in R.$ Нам нужно показать, что $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a).$

Поскольку функция $f(x) = x$ непрерывна в точке $a,$ то последовательно применяя пункт 2) теоремы 5.1, получаем, что $\lim\limits_{x\to a} x^m = a^m$ при любом натуральном $m.$ Далее, по теореме 5.1 1) получаем:

$$\lim_{x\to a} P(x) = \lim_{x\to a} a_n x^n + \lim_{x\to a} a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \lim_{x\to a} a_1 x + \lim_{x\to a} a_0 =$$

$$= a_n \lim_{x\to a} x^n + a_{n-1} \lim_{x\to a} x^{n-1} + \ldots + a_1 \lim_{x\to a} x + \lim_{x\to a} a_0 =$$

$$= a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \ldots + a_1 a + a_0 = P(a).$$

Обоснование переходов будет проще понять, читая последнюю цепочку равенств с конца.

Замечание. Вообще, все элементарные функции, изучаемые в школьном курсе, непрерывны в каждой точке, в окрестности которой эти функции определены. Например, из примера 5.2 вытекает, что функция $\sqrt{x}$ непрерывна на $(0;+\infty)$.

Пример 5.7. Найти $\lim\limits_{x\to 2}(x^3+\sqrt{(x-3)^2}+11)$.

Решение. Поскольку $\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|$ и $|x-3|=3-x$ при $x\le 3,$ то $f(x)=x^3+|x-3|+11=x^3-x+14$ при $x\le 3.$ Многочлен $P(x)=x^3-x+14$ непрерывен на всей числовой прямой, и в частности, в точке $x=2.$ Поэтому $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=P(2)=2^3-2+14=20.$

Ответ. 20.

Пример 5.8. Найти $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}.$

Решение. Обозначим дробь, стоящую под знаком предела, через $f(x).$ В числителе и знаменателе дроби $f(x)$ стоят функции, непрерывные в точке $x=5.$ Предел этих функций при $x\to 5$ равен их значению в точке $x=5,$ т. е. равен 0. В этом случае говорят, что имеет место неопределённость $\left(\dfrac{0}{0}\right).$ Для её «раскрытия» приходится прибегнуть к искусственному приёму – умножению числителя и знаменателя дроби $f(x)$ на «сопряжённое выражение» $\sqrt{x-1}+2$:

$$\lim_{x\to 5}f(x)=\lim_{x\to 5}\frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{\sqrt{5-1}+2}=\frac{1}{4}.$$

Предпоследнее равенство получено в силу непрерывности функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+2}$ в точке $x=5.$

Ответ. $1/4.$

Контрольные вопросы

1(2). Является ли последовательность $1;\ 1;\ 1;\ \ldots$ а) арифметической прогрессией? б) геометрической прогрессией? Ответ обосновать.

2(2). При каком условии на d арифметическая прогрессия (x_n) будет ограниченной? При каких условиях на q и на x_1 геометрическая прогрессия (x_n) будет возрастающей? Ответ обосновать.

3(1). Третий член арифметической прогрессии равен 7. Найти сумму первых пяти членов прогрессии.

4(1). Второй член геометрической прогрессии равен 2. Найти произведение первых трёх членов прогрессии.

5(1). Записать в виде обыкновенной дроби $0{,}3(18) = 0{,}3181818\ldots$.

6(1). Найти формулу n-го члена последовательности (x_n), заданной рекуррентно: $x_1 = 1,\ x_{n+1} = -x_n,\ n \in N$.

7(2). Найти $\lim\limits_{n\to\infty}(0{,}3)^n$. Указать такое число k (хотя бы одно!), чтобы при всех $n > k$ выполнялось неравенство $(0{,}3)^n < 0{,}01$.

8(4). Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

а)(1) Может ли член $x_3 = 1000$?

б)(1) Могут ли все члены последовательности быть отрицательными?

в)(2) Могут ли все члены последовательности быть больше $0{,}0001$?

9(3). Известно, что последовательность (x_n) имеет предел, а последовательность (y_n) – не имеет. Имеет ли предел последовательность $(x_n + y_n)$?

10(1). Найти ошибку в рассуждениях:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}(-1)^n = 0\cdot\lim_{n\to\infty}(-1)^n = 0.$$

11(2). У линейной функции $y = 2x+1$ изменили значение в точке $x = 1$ на 2, т. е. рассмотрели новую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & при \quad x \neq 1; \\ 2 & при \quad x = 1. \end{cases}$$

а)(1) Имеет ли функция $y = f(x)$ предел в точке $x = 1$?

б)(1) Является ли функция $y = f(x)$ непрерывной в точке $x = 1$? Ответ обосновать.

Задачи

1(6). Выяснить, является ли монотонной последовательность (x_n). Ответ обосновать.

а)(2) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$;

б)(2) $x_n = \frac{n+2}{3n-1}$;

в)*(2) $x_n = n + \frac{(-1)^n}{n}, \ n \geq 2.$

2(6). Выяснить, является ли ограниченной последовательность (x_n). Ответ обосновать.

а)(2) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$,

б)(2) $x_n = \frac{n+2}{3n-1}$,

в)*(2) $x_n = \frac{10 + (-1)^n n^2}{n^2 + n}$.

3(3). Первый, второй и третий члены геометрической прогрессии равны соответственно третьему, шестому и восьмому членам некоторой арифметической прогрессии, а их произведение равно 125. Найти первый член геометрической прогрессии.

4(3). У бесконечно убывающей геометрической прогрессии сумма квадратов первых n членов равна сумме ее первых $2n$ членов, а сумма кубов первых n членов в три раза меньше суммы первых $3n$ членов. Найти сумму этой бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

5(3). Найти формулу n-го члена последовательности, заданной рекуррентно:

$$x_1 = 9, \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n - 2, \quad n \in N.$$

6(2). Пусть $x_1 = 1, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 7, \quad x_n = 2, \ n > 3.$ Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2.$

7(3). Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$. Указать, какие k в определении предела подойдут для следующих значений ε:

а)(1) $\varepsilon=1$, б)(1) $\varepsilon=0{,}01$, в)(1) $\varepsilon=0{,}001$.

8(2). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ и $x_n\geq 0$ для любого n. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=0$.

9(3). Доказать, что последовательность (x_n), где $x_n=1+(-1)^n$, не имеет предела.

10(4). Найти: а)(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{(n+1)^3-(n-1)^3}$;

б)(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$.

11*(4). Найти предел последовательности

$$x_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$$

(n знаков квадратного корня).

12(5). Найти а)(3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$;

б)(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

13(3). Пусть $s(t)=\sqrt[3]{t}$ и $t\neq 0$. Найти $v(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$, где

$$\Delta s=s(t+\Delta t)-s(t).$$

14(4). Пусть

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x}+1 & \text{при} \quad x\leq -2;\\ x^2-2 & \text{при} \quad x>-2.\end{cases}$$

а)(2) Построить график функции $y=f(x)$.

б)(2) Выяснить, в каких точках функция $y=f(x)$ непрерывна.