Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Математический кружок

(5–6 классы)

Составители: А. Л. Канунников, С. Л. Кузнецов, И. И. Осипов

Москва, 2015

Математический кружок (5–6 классы). / Универсальная методическая разработка по решению нестандартных задач для элективных курсов в средних общеобразовательных организациях // Сост. А. Л. Канунников, С. Л. Кузнецов, И. И. Осипов. — М.: МГУ, 2015.

Брошюра разработана в рамках совместной программы «Развитие интеллектуальных способностей математически одарённых школьников и повышение качества математического образования» МГУ и Департамента образования города Москвы. В основу брошюры легли задачи, предлагавшиеся на Малом мехмате МГУ, а также на математических кружках в Центре образования № 548 «Царицыно».

Содержание

Предисловие

Эта брошюра призвана помочь организовать *математический кружок* для школьников «младшего кружкового возраста». Условно этот возраст соответствует 5 или 6 классу средней школы, однако собранные здесь задачи можно с успехом решать с умными 4-классниками, а также предлагать (в рамках «ликвидации безграмотности») старшеклассникам, которым не довелось в должное время поучаствовать в математических кружках.

Каждый раздел брошюры соответствует одному занятию кружка и состоит из двух частей — листка с задачами для выдачи ученикам и комментария для преподавателя. Для удобства оригинал-макеты листков также выделены в отдельный файл.

Занятие с использованием листочка обыкновенно проводится примерно **по следующей схеме:**

- *До занятия* руководитель кружка решает сам все задачи и, если необходимо, читает комментарии.

- *В начале занятия* каждый школьник получает листок с условиями задач и начинает *самостоятельно* их решать. На первом занятии школьникам нужно объявить: задачи можно решать в любом порядке; как только задача (по мнению школьника) решена, нужно поднять руку и приготовиться обсуждать решение с преподавателем *устно*. Кружок — это не письменная олимпиада. Как правило, **не нужно** в начале занятия «рассказывать теорию»: задачи подобраны так, чтобы решающий сам додумался до ключевых идей листочка. Иногда в начале занятия, до раздачи новых листков, разбираются решения некоторых задач предыдущего занятия.

- *Во время занятия* школьники решают задачи и время от времени пытаются их «сдать» преподавателям. Преподавателей на кружке может быть несколько, если учеников достаточно много. В идеале на каждого преподавателя должно приходиться 7–9 школьников. Решения задач обсуждаются *индивидуально* с каждым школьником.

- Если решение **верно,** школьника следует поздравить с решённой задачей и поставить «плюсик» в специальную таблицу (кондуит, или «плюсник»).
- Если решение **неверно,** школьнику предлагается продолжить размышления над задачей. Иногда можно давать небольшие подсказки.

Мы считаем, что **главная цель** математических кружков — приносить школьникам **радость** решения математических задач и через это развивать их смекалку и расширять кругозор. Поэтому мы **категорически не советуем** подменять эту главную цель целями побочными, в частности:

- не советуем ставить оценки «за работу на кружках», проводить на кружке контрольные работы и вообще делать участие в кружке обязательным для школьника;
- не советуем объяснять решения всех задач из брошюры (школьник получает радость только от собственного, а не от чужого решения);
- не считаем правильным задаваться целью подготовки к определённому виду олимпиад или других соревнований. (В то же время школьники, посещающие математические кружки, в среднем лучше выступают на олимпиадах.)

Мы полагаем, что если участник кружка за занятие самостоятельно решит 2–3 задачи и немного продвинется ещё в 1–2 задачах, то это уже хороший результат. Однако бывает, что задачи оказываются **слишком сложными** для школьников. В этом случае неправильно превращать занятие в разбор всех задач у доски. Вместо этого можно давать подсказки — как индивидуально, так и всем сразу. Представление о том, как подсказывать в конкретных задачах, можно извлечь из комментариев к листкам.

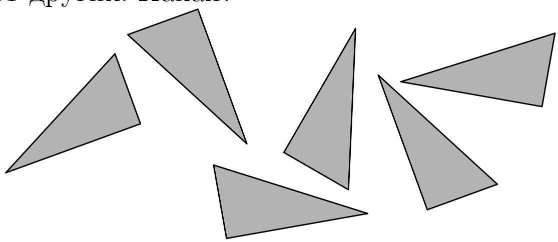
Если всё-таки наши листочки в целом оказались слишком сложными, мы советуем подбирать к каждому занятию аналогичные по тематике более простые задачи. Помните, что приводимая здесь подборка задач призвана *помочь* в организации кружка, но ни в коем случае не загнать его в жёсткие рамки. При выборе задач прежде всего руководствуйтесь **собственным вкусом и силами ваших учеников:** задачи должны нравиться преподавателям, быть интересны и посильны ученикам.

Удачи!

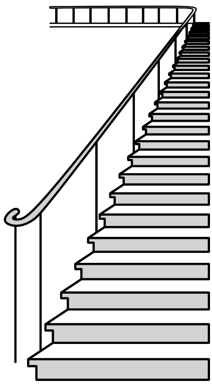
Листок 1

$\boxed{1}$ Можно ли расставить вдоль стен прямоугольной комнаты **а)** 8; **б)** 10; **в)** 12 табуреток так, чтобы около каждой стены стояло по три табуретки?

$\boxed{2}$ Коллекционер Незнайка собирает наклейки и вклеивает их в альбом. Перед ним на столе лежит (см. рисунок) несколько треугольных наклеек, одинаковых по форме, но одна из них всё же отличается от других. Какая?

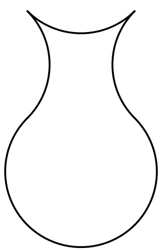


$\boxed{3}$ После семи стирок и длина, и ширина, и высота куска мыла уменьшились вдвое. На сколько стирок хватит оставшегося куска? (На каждую стирку расходуется одно и то же количество мыла.)



$\boxed{4}$ Подсчитайте *точно,* сколько ступенек у лестницы на рисунке справа.

$\boxed{5}$ Альпинист стоит на вершине отвесной скалы высотой 100 м с уступом на высоте 50 м. У него есть 77-метровая верёвка и нож. На вершине скалы и на уступе вбиты колышки, к которым можно привязать верёвку. Альпинист хочет успеть к обеду добраться до лагеря, находящегося у подножия скалы. Как ему спуститься со скалы (разумеется, не прыгая)?



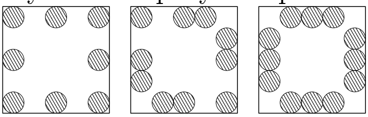
$\boxed{6}$ Ваза, изображённая на рисунке слева, составлена из шести одинаковых четвертинок окружностей.

а) Разрежьте её на части, из которых можно сложить квадрат.

б) Сделайте это, разрезав вазу не более, чем на три части.

Ответы и комментарии

$\boxed{\mathbf{1}}$ Заметьте, что ставить "лишние"табуретки в центр комнаты нельзя, в условии требуется расставить табуретки вдоль стен.



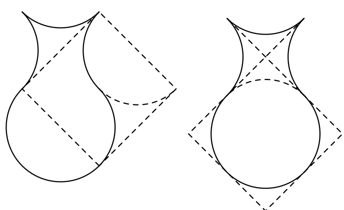
$\boxed{\mathbf{2}}$ Все наклейки действительно можно совместить, но для этого одну из них придётся перевернуть (в то время как остальные совмещаются вращением).

$\boxed{\mathbf{3}}$ Из условия следует, что объём куска мыла уменьшился в 8 раз, т. е. использовано $^7/_8$ мыла — в 7 раз больше, чем осталось. Значит, оставшегося куска хватит на одну стирку.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Ступеньки в верхней части лестницы слабо различимы (так нарисовано специально) и сосчитать их невозможно. Однако можно заметить, что на каждой четвёртой ступеньке (точнее говоря, на 1-й, 5-й, 9-й и т. д.) есть балясина (опора перил). Балясины же посчитать легко — их семь штук, причём седьмая приходится на последнюю ступень, которая тем самым имеет номер $1+4\cdot(7-1) = 25$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Здесь главная проблема в том, что, спустившись на уступ, нужно суметь забрать себе как можно бо́льшую часть верёвки (чтобы её хватило на оставшиеся 50 м пути). Сделать это можно так: отрезать от верёвки 25-метровый кусок, привязать его на вершине горы, а на другом конце связать петлю. Спустившись на 25 м, продёрнуть оставшуюся 52-метровую верёвку через петлю и спуститься по двойной верёвке до уступа. После этого можно выдернуть верёвку из петли, и в нашем распоряжении оказывается верёвка достаточной длины, чтобы дойти до подножья. («Лишние» два метра добавлены, чтобы учесть расход верёвки на узлы.)

$\boxed{\mathbf{6}}$ Решение пункта «б» показано на рисунке слева. Оно, разумеется, годится и для пункта «а», однако для него школьники могут предлагать более простые решения, например, как на рисунке справа.



Листок 2. Логические задачи

1 Учёные планеты Сигма-Альфа обнаружили, что все лямбдоиды имеют дельтовый цвет.

а) В их лабораторию пришёл образец дельтового цвета. Правда ли, что это лямбдоид?

б) В их лабораторию пришёл образец эпсилонового цвета. Правда ли, что это не лямбдоид?

2 Мальчик Костя говорит: „Позавчера мне было 10 лет, а в следующем году мне исполнится 13". Мальчик Костя кристально честен. Как такое может быть?

Несколько следующих задачах — о рыцарях и лжецах. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут.

3 Однажды путешественник задал рыцарю дважды один и тот же странный вопрос. В первый раз рыцарь ответил «нет», а во второй — «да». Что это мог быть за вопрос?

4 В город, населённый рыцарями и лжецами, приехал барон Мюнхгаузен. Первым делом он нанял себе проводника, однако не смог выяснить, рыцарь он или лжец. Поэтому, увидев подозрительного незнакомца, он попросил проводника выяснить, кто этот человек. Проводник вернулся и сказал: „Он назвался лжецом". **а)** Знает ли теперь барон, кем был незнакомец? **б)** А кто проводник?

5 У подводного царя служат осьминоги с шестью, семью и восемью ногами. Те, у кого семь ног, всегда лгут, а у кого шесть или восемь ног, всегда говорят правду. Встретились четыре осьминога. Синий сказал: „Вместе у нас 28 ног", зелёный: „Вместе у нас 27 ног", жёлтый: „Вместе у нас 26 ног", красный: „Вместе у нас 25 ног". У кого сколько ног?

6 Однажды на главной площади города, где живут рыцари и лжецы, собрались шестеро горожан.

— Среди нас ровно один рыцарь, — сказал первый.
— Я тоже так считаю, — ответил второй.
— Нет, рыцарей среди нас ровно два! — заявил третий.
— А я считаю, что рыцарей здесь трое, — сказал четвёртый.

— Ну, по крайней мере один рыцарь среди нас есть, — заметил пятый.
— И всё-таки рыцарей здесь только два, — уверенно произнёс шестой.
Сколько же было среди них рыцарей на самом деле?

7 Однажды у капитана пиратского корабля пропала карта сокровищ. Он собрал своих трёх помощников и спросил, кто из них взял карту.
— Карту взял Джо, — отозвался первый помощник.
— Дрейк не брал карту, — сказал второй помощник.
— Я карту не брал, — заявил третий.
Капитан сразу понял, что Джо соврал, а Дрейк сказал правду. А кто же всё-таки взял карту?

Ответы и комментарии

$\boxed{\mathbf{1}}$ В этой задаче у школьников могут вызвать затрудения странные термины[1] (это сделано намеренно, чтобы нельзя было пользоваться собственными знаниями о том, что какого цвета бывает). Главное, школьники должны понять, что если из А следует Б, то не факт, что из Б следует А.

В задачах такого типа нужно требовать: если ответ отрицательный, то привести контрпример; если ответ положительный, то обосновать это.

Эту задачу, например, можно решать так:

а) Нет, не обязательно, потому что образец может быть не лямбдоидом и при этом иметь дельтовый цвет.

б) Да, значит. Предположим, что образец — лямбдоид, тогда он имеет дельтовый цвет. Но этого быть не может, так как он эпсилонового цвета.

Будьте готовы, что школьники будут предлагать неожиданные решения, например, что в обоих пунктах ответ «нет», потому что учёные ошиблись. Не нужно сразу отметать эти решения, постарайтесь указать на ошибку или уточнить условие, например — „Да, в физике бывает, что гипотеза опровергается, но в этой задаче предполагается, что установленный учёными факт верен“.

$\boxed{\mathbf{2}}$ В этой задаче школьники могут пытаться доказывать, что такого не может быть. В этом случае можно указать на то, что в условии неявно утверждается, что такое возможно, а для решения требуется определить, в какой день у мальчика день рождения (31 декабря).

$\boxed{\mathbf{3}}$ У этой задачи есть много разных решений. Самый изысканный из вопросов, подходящих под условие, такой: „Задавал ли я вам уже этот вопрос?“ Обязательно расскажите о нём школьникам, сдавшим задачу, если они придумали что-то другое — например, подойдёт заданный за несколько секунд до полудня и повторённый ровно в полдень вопрос: „Правда ли, что сейчас ровно полдень?“

[1]Произошедшие от греческих букв: α – альфа, δ – дельта, ε – эпсилон, λ – лямбда, σ – сигма.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Самый простой способ объяснить, почему барон не сможет по имеющейся информации определить, лжецом или рыцарем был незнакомец, — это заметить, что, кем бы он ни был, он никогда сам не скажет, что он лжец. Действительно, если он рыцарь, то он честно ответит, что он рыцарь; а если он лжец, то он тоже скажет, что он рыцарь, и, тем самым, солжёт.

Это наблюдение сразу же позволяет решить и второй пункт задачи. Раз незнакомец не мог представиться лжецом, то проводник врёт, а значит, он — лжец. Впрочем, это не значит, что барону нужно менять проводника — просто теперь нужно на всё, что он утверждает, «навешивать» отрицание.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Заметим, что сказать правду мог не более чем один осьминог (при этом важно помнить, что все они могли солгать). Если солгали все, то у них по семь ног, всего — 28, а значит, синий сказал правду. Противоречие, этот вариант не подходит.

Если солгали все кроме одного, то у троих по семь ног, а у одного — шесть или восемь. Значит, всего ног может быть 27 или 29. Но если ног 29, то все осьминоги солгали — этот вариант тоже отбрасывается. В последнем оставшемся случае шестиногим оказывается зелёный осьминог.

В решении этой задачи важно не упустить все возможные варианты — просто угадать ответ недостаточно, нужно доказать, что это — единственный возможный вариант. Если школьники считают, что раз они нашли ответ, то задача уже решена, можно спросить: „А вдруг ответов несколько?“ Если же школьник даёт неправильный ответ, всё равно выслушайте решение и постарайтесь найти ошибку.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Здесь проще всего построить вот такую таблицу:

Количество рыцарей:	0	1	2	3	4	5	6
Первый горожанин	–	+	–	–	–	–	–
Второй горожанин	–	+	–	–	–	–	–
Третий горожанин	–	–	+	–	–	–	–
Четвёртый горожанин	–	–	–	+	–	–	–
Пятый горожанин	–	+	+	+	+	+	+
Шестой горожанин	–	–	+	–	–	–	–
Сказавших правду:	0	3	3	2	1	1	1

Впрочем, заставлять школьников рисовать таблицы вовсе не обязательно. Решать можно иначе — например, поочередно рассматривать все случаи.

В этой задаче школьники обычно очень долго не могут догадаться, что рыцарей среди горожан могло вообще не быть, постарайтесь им об этом не подсказывать.

$\boxed{7}$ В этой задаче можно рассуждать так. Определим, кто из помощников — Джо. Это не первый помощник, так как он не стал бы называть себя по имени. Предположим, что Джо — это второй помощник. Джо соврал, а значит карту взял Дрейк. Но кем бы ни был Дрейк — первым или третьим помощником, это приводит к противоречию (в одном из случаев выходит, что карту взяли двое, а в другом — что Дрейк не брал карту). Значит, Джо — третий помощник. Он соврал, что не брал карту. Поэтому карту взял он.

Конечно, решения могут очень сильно отличаться от приведённого выше. Принимать решения по этой задаче очень непросто. Важно разобраться в каждом решении, которое вам сдают, и, если оно неправильное, указать на то место, где была допущена ошибка в рассуждениях. Ни в коем случае не отсекайте решения из-за того, что ответ неверный. Лучше даже вовсе не сообщать, верный ответ или нет, пока решение не рассказано полностью.

Листок 3. Семь раз отмерь — один раз отрежь

$\boxed{\mathbf{1}}$ Есть два ведра: одно ёмкостью 4 л, другое — 9 л. Можно ли только с их помощью набрать из реки ровно 6 л воды?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Три вора украли у чародея колбу с 24 унциями волшебного зелья. Спешно унося ноги, они встретили в лесу продавца стеклянной посуды, у которого приобрели три сосуда. Найдя укромное местечко, воры решили разделить добычу, но тут обнаружили, что вместимость их сосудов 5, 11 и 13 унций. Как им разделить между собой зелье поровну? (В отличие от воды, зелье нельзя выливать.)

$\boxed{\mathbf{3}}$ Есть два бикфордовых шнура. Шнуры при поджигании горят неравномерно, но каждый полностью сгорает за одну минуту. Как с помощью этих шнуров отмерить 45 секунд?

$\boxed{\mathbf{4}}$ На поджаривание котлеты с одной стороны уходит две минуты. На сковородке помещаются две котлеты. За какое наименьшее время можно поджарить три котлеты с обеих сторон?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Можно ли разлить 50 л бензина по трём бакам так, чтобы в первом баке было на 10 литров больше, чем во втором, а во втором на 21 литр больше, чем в третьем?

$\boxed{\mathbf{6}}$ Есть двое песочных часов: на 7 мин и на 11 мин. Каша варится 15 мин. Как с помощью этих часов отмерить нужное время?

Ответы и комментарии

1 В подобных этой задачах на *переливания* предполагается, что не существует надёжного способа, скажем, заполнить ведро ровно наполовину или на треть. Допускается либо доливать ведро до краёв — из реки или из другого ведра (в этом случае во втором ведре может остаться вода, и её объём нам будет в точности известен), либо выливать всю воду из какого-то ведра в реку или в другое ведро. Полезно подсказать школьникам, что решение лучше записывать в виде таблицы, каждая строчка которой соответствует одной манипуляции с водой:

4-литровое ведро	*9-литровое ведро*	
0	0	изначально вёдра пусты
0	9	набрали воды в большое ведро
4	5	перелили из большого в маленькое
0	5	вылили воду из маленького ведра
4	1	
0	1	
1	0	
1	9	
4	6	*В большом ведре требуемые 6 л.*

2 Поскольку $24/3 = 8$, каждый вор получит 8 унций зелья. А так как 8 унций в самый маленький сосуд не влезают, значит, один из воров должен унести полученное зелье в колбе. Теперь заметим, что $5 + 11 = 16$, что позволяет с помощью двух маленьких сосудов выделить 8 унций из 24. Кроме того, $13 - 5 = 8$, за счёт чего можно получить ещё 8 унций.

Эти соображения подводят нас к следующему решению задачи:

5-унц. сосуд	*11-унц. сосуд*	*13-унц. сосуд*	*24-унц. колба*
0	0	0	24

Продолжение на след. странице

(продолжение)

5	0	0	19
5	11	0	8
5	0	11	8
3	0	13	8
0	3	13	8
5	3	8	8
0	8	8	8

$\boxed{\mathbf{3}}$ Основной трюк в этой задаче — если шнур поджечь одновременно с обеих сторон, он сгорит в два раза быстрее. Так можно отмерить 30 секунд. (Заметим: поскольку шнуры неоднородны, для этого нельзя просто отрезать половину шнура.)

Чтобы отмерить 45 секунд, нужно применить этот приём дважды. Сначала поджигаем один шнур с обеих сторон, а второй — только с одной стороны. Когда первый шнур догорит, второму останется гореть 30 секунд. В этот момент подожжём и второй шнур с другого конца, и он догорит в 2 раза быстрее — за 15 секунд. В сумме получится как раз 45.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Типичная ошибка в этой задаче — школьник объясняет, как поджарить котлеты за 8 минут (сначала с двух сторон жарим две котлеты, затем столько же времени третью), и говорит, что меньше времени „никак не получается“.

Между тем, котлеты можно пожарить за 6 минут следующим образом. Первые две минуты жарим две котлеты с одной стороны. Потом убираем одну котлету, переворачиваем вторую и кладём рядом третью (которую ещё не начинали жарить). После этого вторая котлета изжарена полностью, а первая и третья — только с одной стороны. В третий заход дожариваем первую и третью котлеты.

Въедливый преподаватель может и здесь спросить, нельзя ли ещё ускориться. На это можно ответить так: за две минуты мы жарим не более двух сторон котлет, а всего у трёх котлет 6 сторон. Значит, меньше, чем 6 минутами, не обойтись. Будьте внимательны: это рассуждение доказывает, что 6 минут *необходимо,* чтобы зажарить котлеты, но не является доказательством того, что 6 минут *достаточно* для этого. Чтобы обосновать последнее, нужно явно указать, как мы собираемся жарить котлеты.

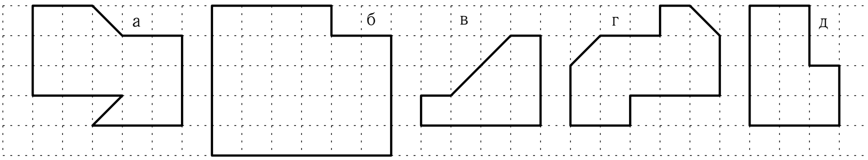
$\boxed{\mathbf{5}}$ По условию, во втором баке должно оказаться как минимум 21 л бензина, а в первом — не меньше, чем $21 + 10 = 31$ л. Но тогда общее количество бензина — как минимум 52 л. С другой стороны, бензина дано только 50 л. Мы обнаружили *противоречие* — значит, разлить бензин с соблюдением условий невозможно.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Заметим, что $15 = 11 \cdot 2 - 7$. Значит, нужное время можно отмерить так: запустить одновременно часы на 7 и на 11 минут, и когда в первых песок пересыпется, начать варить кашу. Через 4 минуты остановятся и вторые часы, и тогда их можно перевернуть и отсчитать оставшиеся 11 минут.

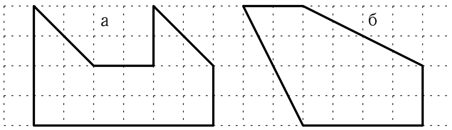
Листок 4. Разрезания

Две фигуры считаются равными, если они одинаковы по форме и по размеру (их можно совместить наложением, если вырезать из бумаги).

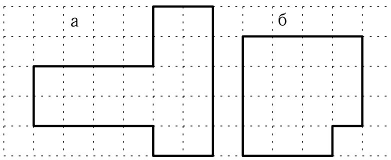
1 Разрежьте фигуры на **2** равные части.



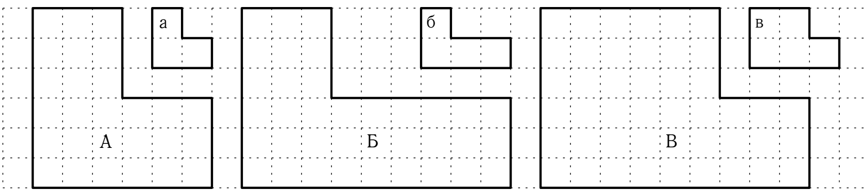
2 Можно ли разрезать эти фигуры на **2** равные части?



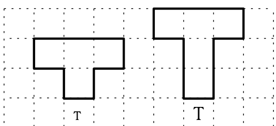
3 Как разрезать эти фигуры на **3** равные части?



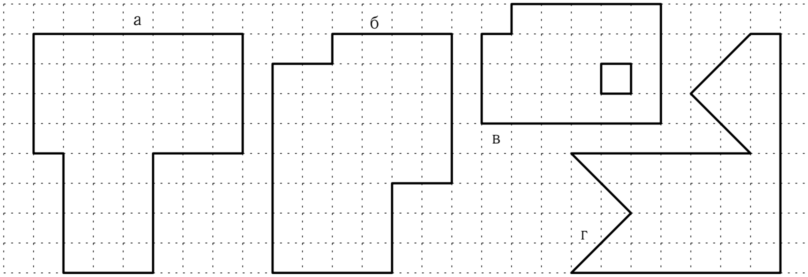
4 Разрежьте фигуру *А* на фигуры *а*, фигуру *Б* на фигуры *б*, а фигуру *В* на фигуры *в*.



5 Нарисуйте фигуру, которую можно сложить из пяти фигурок *т*, а потом разрезать на четыре фигурки *Т*.



6 Попробуйте разрезать эти фигуры на **2** равные части.

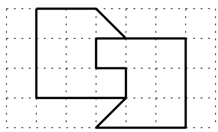


Ответы и комментарии

Во всех задачах этого листка фигуры можно переворачивать, а разрезы можно вести не по клеточкам.

Не запрещайте школьникам рисовать решения на листках — так будет удобнее и им, и вам. Если детей очень много и вы не успеваете подробно разбираться с каждым из-за количества пунктов, можно объявить, что первую и четвёртую задачи можно сдавать, только если есть решения по каждому из пунктов.

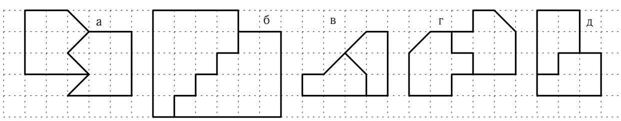
Проверка задач в этом листке не должна вызвать особых сложностей, но всегда внимательно проверяйте, действительно ли фигуры равны. И если нет, постарайтесь объяснить школьнику, почему они не наложатся друг на друга, если их вырезать из бумаги. Вот пример неправильного решения задачи *1а*, которое часто сдают:



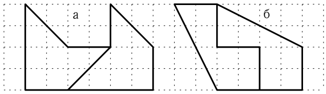
Чтобы фигуры совпали, повернём одну из них и совместим «квадратные» концы. Но тогда «острые» концы не будут смотреть в одну и ту же сторону. Значит, эти фигуры не равны, а решение — неправильное.

Шестую задачу лучше всего использовать как дополнительную и выдавать её условие только тем, кто решил все или почти все предыдущие.

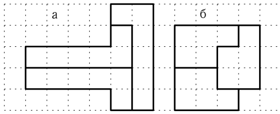
1 Во всех пунктах в этом номере есть только одно решение.



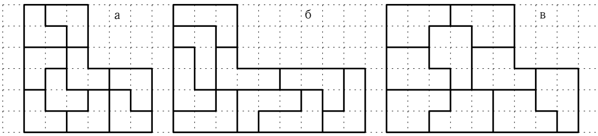
2 В обоих случаях ответ — можно. Если школьники будут утверждать, что нельзя, предложите им это доказать. Если они будут пытаться доказывать, постарайтесь найти в их доказательстве ошибку.



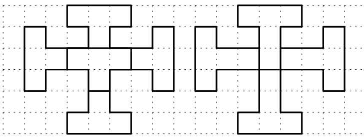
3 Иногда школьники не замечают, что в этой задаче нужно разрезать фигуры уже не на две, а на три части.



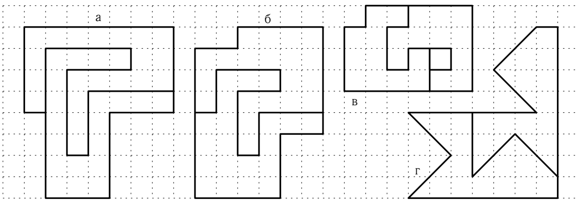
4 Некоторые из маленьких фигур могут быть перевёрнутыми.



5 У этой задачи есть несколько решений, вот одно из них.



6 Квадратик внутри фигуры в пункте *в* — это дырка в фигуре.



Листок 5

1 Медленно-медленно ползёт улитка по склону горы Фудзияма. За день она поднимается на 4 метра, а за ночь сползает на 3 метра вниз. Когда она доползёт до вершины, если утром в понедельник она была уже в 10 метрах от неё?

2 Если бы Иван Никифорович отдал Ивану Ивановичу половину своих гусей, то Ивана Ивановича стало бы на десять гусей больше, чем у Ивана Никифоровича. Сколько гусей было у Ивана Ивановича?

3 Двое часов начали и закончили бить одновременно. Первые бьют через каждые две секунды, вторые — через каждые три секунды. Всего можно было услышать 13 ударов (совпавшие удары считаются за один). Сколько времени прошло между первым и последним ударами?

4 Ковбой решил купить патроны для револьвера. Оказалось, что 10 патронов стоят больше 11 долларов, а 9 патронов стоят меньше 10 долларов. Сколько центов стоит один патрон?

5 На лужайке росли жёлтые и белые одуванчики — всего 35 штук. После того как 8 белых облетели, а 2 жёлтых побелели, жёлтых одуванчиков стало вдвое больше, чем белых. Сколько белых и сколько жёлтых одуванчиков росло на лужайке в начале?

6 Чтобы не заснуть, глядя на поплавки, рыбак начал рассуждать над теоретическими вопросами:

а) Если 3 карася тяжелее 4 окуней, значит ли это, что 4 карася тяжелее 5 окуней?

б) Если 4 окуня тяжелее 3 лещей, значит ли это, что 5 окуней тяжелее 4 лещей?

Пока он думал, рыба уплыла вместе с его удочками. А какие же правильные ответы на эти вопросы? (Все рыбы одного вида весят одинаково.)

Ответы и комментарии

1 В этой задаче очень полезно нарисовать, что происходит, на бумаге. Школьники, наверняка, попадутся и будут пытаться решить задачу тем способом, которым привыкли решать обычные школьные задачи — посчитают, на сколько метров улитка в сумме поднимается за сутки, а затем разделят длину пути на это расстояние. Однако, на самом деле улитка окажется на вершине раньше — вечером в воскресенье. За первые шесть суток она в сумме поднимется на 6 метров, а в воскресенье днём поднимется ещё на 4 метра.

2 У Ивана Ивановича было 10 гусей. А вот про то, сколько гусей было у Ивана Никифоровича, точно утверждать нельзя. Поэтому любое решение, которое „позволяет“ узнать, сколько же у него было гусей, — неверное. Чаще всего в таком неправильном решении в какой-то момент предполагается, что количество гусей у Ивана Никифоровича известно. Постарайтесь найти это место в решении и объяснить школьнику, сдающему задачу, почему рассмотреть только один случай недостаточно — в формулировке задачи, конечно, есть намёк на то, что ответ один, но вообще говоря, вполне может быть так, что ответов несколько, поэтому придётся доказывать, что ответ одинаковый, каким бы ни было количество гусей у Ивана Никифоровича.

Чтобы решить эту задачу аккуратно, заметим, что, после того как Иван Никифорович отдал гусей, у него осталась половина тех гусей, что у него были, а у Ивана Ивановича оказалась другая половина плюс все те гуси, которые у него были раньше. А значит, у него гусей больше ровно на то количество, которое было у него изначально.

3 Проще всего решить эту задачу, нарисовав картинку наподобие этой.

Как вариант, можно сосчитать число ударов за первые шесть секунд, а затем вычислить, сколько должно было быть таких интервалов по шесть секунд. Впрочем, в этих вычислениях легко ошибиться. Если у школьника получается ответ, который не делится на 6, стоит обратить внимание на то, что часы начали и закончили бить одновременно.

$\boxed{4}$ Так же, как и со второй задачей в этом листке, главная проблема здесь — объяснить, что просто угадать ответ недостаточно. Можете даже изменить постановку вопроса на: “Сколько центов *мог* стоить один патрон?”. Второе, на что стоит обратить внимание — неравенства в задаче строгие, то есть патрон не может стоить доллар десять центов, потому что тогда 10 патронов стоят ровно 11 долларов, а это не больше 11 долларов, как требует условие. Когда ответ найден, нетрудно показать, что если ответ был бы хотя бы на один цент больше или меньше, одно из условий не выполнялось бы.

$\boxed{5}$ Для начала определим, сколько всего жёлтых и белых одуванчиков осталось после того, как белые облетели, а жёлтые побелели. Заметим, что от того, что часть жёлтых побелела, общее количество жёлтых и белых одуванчиков не изменилось, а вот облетевшие — уже и не жёлтые, и не белые. А значит, в сумме их осталось $35 - 8 = 27$ штук. Жёлтых в два раза больше, чем белых, значит жёлтых — 18, а белых — 9. Теперь остаётся произвести все изменения в обратном порядке — сначала сделать два белых одуванчика жёлтыми, а затем добавить 8 белых одуванчиков.

$\boxed{6}$ В задачах такого типа нужно требовать: если ответ отрицательный, то привести контрпример; если ответ положительный, то обосновать это.

В первом пункте задачи ответ положительный. Покажем, что если 3 карася тяжелее 4 окуней, то 4 карася тяжелее 5 окуней. Заметим, что карась тяжелее окуня (так как 3 карася тяжелее 4 и тем более 3 окуней). Представим, что на левой чаше весов лежит 3 карася, а на правой — 4 окуня. Если мы добавим на левую чашу карася, а на правую — окуня, разность весов станет ещё больше. Значит, 4 карася тяжелее 5 окуней.

Во втором пункте аналогичное рассуждение нельзя провести (это кстати, хороший способ указать на наличие ошибки в рассуждениях — если в разных пунктах ответы разные, а доказательство «подходит» в обоих случаях, значит, что-то здесь не так), потому что из того, что 4 окуня тяжелее 3-х лещей, нельзя сделать вывод о том, какая из рыб весит больше.

Приведём контрпример. Пусть окунь весит 7 кг, а лещ — 9 кг. Тогда 4 окуня тяжелее 3 лещей, но при этом 5 окуней уже легче 4 лещей.

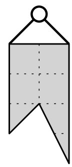
Листок 6

1 На какое наибольшее количество частей можно разрезать головку сыра тремя разрезами?

2 У хозяйки был круглый торт с розочками из крема. Она разрезала его на части так, чтобы в каждой части была ровно одна розочка. Всего она сделала три разреза. Сколько розочек могло быть на торте?

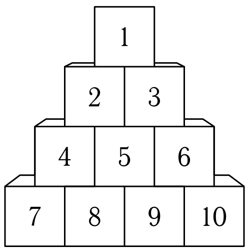
3 На глобусе проведены 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделена поверхность глобуса? (Меридиан — дуга, соединяющая Северный полюс с Южным. Параллель — это окружность, параллельная экватору.)

4 В стене имеется маленькая (точечная) дырочка. У хозяина есть флажок, изображённый на рисунке. Покажите все точки, в которые можно вбить гвоздь так, чтобы флажок закрывал дырку.



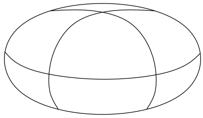
5 Можно ли из квадрата со стороной 10 см вырезать несколько кругов, сумма диаметров которых больше 5 м?

6 Из 10 кубиков собрали пирамидку, изображённую на рисунке. Переложите кубики так, чтобы форма пирамидки осталась прежней, но ни один кубик не соприкасался с кубиками, с которыми соприкасался до перекладывания.



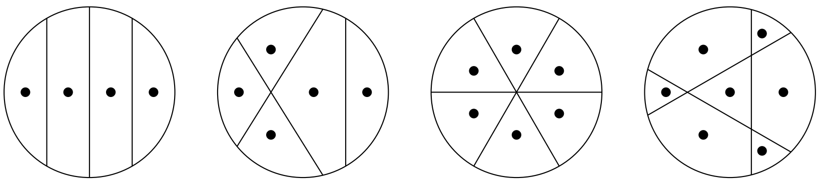
Ответы и комментарии

$\boxed{\textbf{1}}$ Каждый разрез может увеличить число кусков не более, чем вдвое, так что после трёх разрезов получится не больше 8 кусков. Чтобы получить ровно 8, нужно, чтобы каждый разрез проходил через все куски, полученные при предыдущих разрезах.

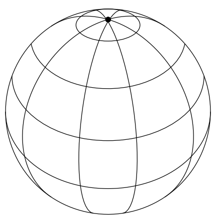


$\boxed{\textbf{2}}$ В отличие от предыдущей задачи, все части должно быть видно сверху, так как розочки на тортах находятся именно сверху. С одной стороны, каждый новый разрез добавляет хотя бы один кусок, поэтому розочек не меньше четырёх. С другой стороны, второй разрез может добавить не больше двух кусков, а третий — не больше трёх, даже если пересекает и первый, и второй разрезы. Значит, число розочек не больше, чем $1 + 1 + 2 + 3 = 7$.

Все случаи от 4 до 7 действительно возможны:

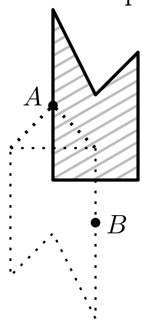


$\boxed{\textbf{3}}$ 17 параллелей разбивают поверхность глобуса на 18 частей (две полярные «шапки» и 16 поясов между параллелями). Каждую из этих частей 24 меридиана, в свою очередь, разбивают на 24 кусочка. Значит, общее число частей равно $18 \cdot 24 = 432$.



Задача несложная, но школьники часто путаются, где нужно прибавлять (или вычитать?) единицу, а где нет.

4 Для того, чтобы догадаться, какая фигура получится в ответе, полезно начать с того, что найти несколько её границ — пограничные случаи будут появляться, когда дырка оказывается на самом краю флажка. В результате становится понятно, что фигура будет иметь такую же форму, как и флажок, но только вверх ногами. Впрочем, аккуратное объяснение потребует чуть больше усилий.

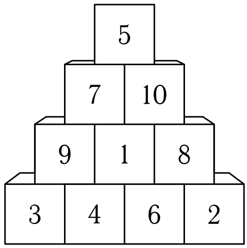


Пусть флажок подвешен в точке A, а дырка находится в точке B. Заметим, что если повернуть картинку так, чтобы точки A и B поменялись местами, то один флажок перейдёт в другой. Таким образом, утверждение, что точка B лежит в флажке, прикреплённом к A, превращается при таком повороте в условие, что точка A лежит в перевёрнутом флажке, прикреплённом к точке B.

5 Как ни странно, можно получить сколь угодно большую сумму диаметров, если сделать кружочки очень маленькими. Например, квадрат можно разрезать на 2500 одинаковых квадратиков (50×50) и поместить в каждый из них круг диаметром 2 мм. Суммарный диаметр этих кругов равен 500 см = 5 м.

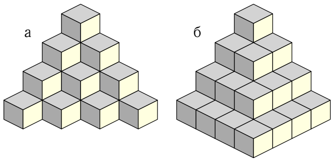
6 Здесь очень важен первый шаг — нужно заметить, что число 5 должно находится в одном из угловых кубиков. Иначе число его новых соседей будет не меньше четырёх, а значит кто-то из них будет одним из 6 кубиков, с которыми пятёрка соседствовала ранее. Аналогично, на её место должен встать один из угловых кубиков. Такие же соображения или просто перебор случаев позволяют расставить остальные кубики.

У этой задачи несколько различных решений, поэтому нельзя просто сравнивать решение с ответом, нужно внимательно следить, что условие соблюдено. Пример правильного решения приведён ниже:



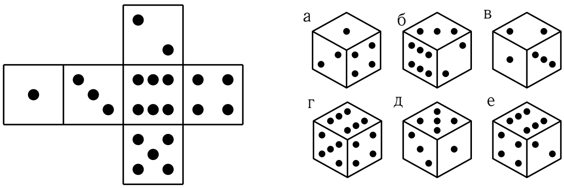
Листок 7. Кубики

1 Сколько кубиков в каждой из этих пирамидок?

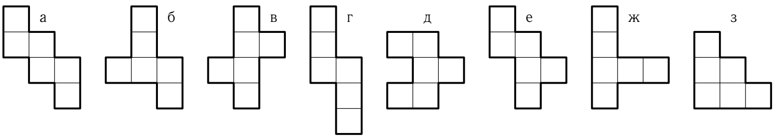


2 А сколько кубиков станет в этих пирамидках, если сделать их на этаж выше (не меняя принципа, по которому они построены)?

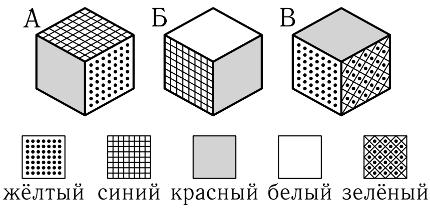
3 Какие из этих кубиков можно сложить из развёртки, изображённой на рисунке, а какие — нет?



4 Из каких из этих фигур можно сложить куб, а из каких нельзя?



5 На рисунках А, Б и В изображён один и тот же кубик. Какой цвет имеет грань, расположенная напротив красной?



6 Как из квадрата 3×3 сложить куб $1 \times 1 \times 1$, предварительно сделав всего два надреза?

Ответы и комментарии

В этом листке много задач с большим числом пунктов. Если школьников очень много и вы не успеваете подробно разбираться с каждым из-за количества пунктов, можно объявить, что задачи можно сдавать, только если решены все (или почти все) пункты. То, что школьники не будут тянуть руку, решив всего один пункт, да и тот с ошибкой, уже очень сильно ускорит процесс.

1 Ответ: 20; 30; 40.

Обязательно узнайте, как дети пересчитывали кубики, даже если они сосчитали их неправильно.

2 Ответ: 35; 55; 60 или 75.

В последнем пункте ответ зависит от того, что имеется в виду под принципом, по которому построена пирамидка.

3 Ответ: нельзя; нельзя; нельзя; нельзя; можно; можно.

Если школьникам удастся справиться с задачей в уме, это заслуживает уважения. Однако, ни в коем случае не запрещайте им вырезать и склеивать кубики, чтобы решить эту задачу. В пунктах, где ответ «нет», обязательно требуйте объяснений, что именно мешает сложить такой кубик из развёртки.

Если школьники будут пытаться играть в угадайку, вы можете потребовать, чтобы были названы сразу все пункты, в которых ответ «да», прежде чем сообщать, правильный ответ был дан или нет.

4 Ответ: можно; можно; можно; можно; нельзя; можно; нельзя; нельзя.

В пунктах, где ответ «нет», требуйте объяснений, почему сложить кубик невозможно. Самый простой способ это объяснить — указать грани, которые непременно наложатся друг на друга, — из-за них развёртки не хватит, чтобы покрыть весь куб.

5 Аккуратно провести доказательство в этой задаче довольно трудно, поэтому если у школьников будут возникать проблемы при попытке изложить свои мысли, постарайтесь им помочь добиться необходимой строгости решения. Часто школьники попадаются в ловушку, когда явно или неявно предполагают, что грани одного цвета на разных рисунках — это одна и та же грань.

Мы проведём доказательство, заодно выяснив, на каких рисунках грани одного цвета разные.

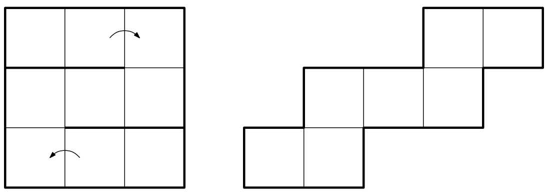
Предположим, что красная грань на всех трёх рисунках — одна и та же. Как видим, с ней граничат грани все четырёх цветов, а потому — каждая по разу (ведь всего у любой грани четыре соседа). Тогда синяя грань на рисунках А и Б — одна и та же. Поэтому совместить эти два рисунка можно только одним способом — по красной и синей граням. Но тогда, как легко видеть, жёлтая грань на рисунке А совместится с белой гранью на рисунке Б — противоречие.

Значит, красных граней две, а граней остальных цветов — по одной, причём на рисунках А и Б — разные красные грани. Аналогично на рисунках А и В разные красные грани, иначе при единственно возможном совмещении этих рисунков — по красной и жёлтой граням — синяя грань на рисунке А совместится с зелёной гранью на рисунке В, чего быть не может.

Следовательно, на рисунках Б и В одна и та же красная грань, и у неё есть соседи всех четырёх цветов. Значит, вторая красная грань напротив неё.

6 Хорошей подсказкой в этой задаче является то, что квадрат 3×3 состоит из 9 клеточек, а у кубика всего 6 граней.

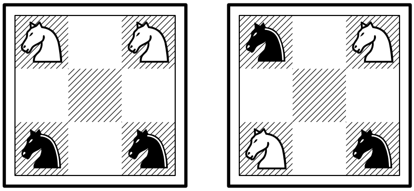
Сделайте надрезы, как показано на рисунке и сложите получившуюся «ленту» так, чтобы клетки на противоположных концах соединились.



Листок 8. Графы

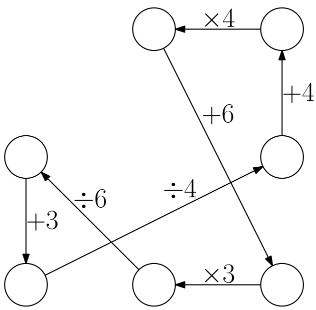
$\boxed{\mathbf{1}}$ Между планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля — Меркурий, Сатурн — Венера, Земля — Сатурн, Сатурн — Меркурий, Меркурий — Венера, Уран — Нептун, Юпитер — Марс, Марс — Уран и Нептун — Юпитер. Можно ли добраться с Земли до Марса?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Можно ли сделать несколько ходов конями так, чтобы они из положения, изображенного на левом рисунке, перешли в положение на правом рисунке?



$\boxed{\mathbf{3}}$ На день рождения к Андрею пришли Вася, Глеб, Даша, Митя, Петя, Соня и Тимур. Покажите, как восьмерых ребят можно рассадить за круглый стол, чтобы у любых двух рядом сидящих встречались одинаковые буквы в именах.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Впишите в кружки числа так, чтобы каждое следующее в направлении стрелок число получалось из предыдущего при помощи указанного действия.



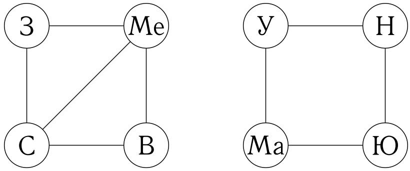
$\boxed{\textbf{5}}$ В стране Семёрка 15 городов, и каждый из них соединён дорогами не менее, чем с семью другими. Докажите, что из любого города можно проехать в любой (возможно, проезжая транзитом через другие города).

$\boxed{\textbf{6}}$ Группа островов соединена мостами так, что от каждого острова можно добраться до любого другого. Турист обошёл все острова, пройдя по каждому мосту ровно один раз. На острове A турист побывал трижды. Сколько мостов ведёт с острова A, если турист **а)** не с него начал и не на нём закончил; **б)** с него начал, но не на нём закончил; **в)** с него начал и на нём закончил?

$\boxed{\textbf{7}}$ Докажите, что число людей, когда-либо живших на Земле и сделавших нечётное число рукопожатий, чётно.

Ответы и комментарии

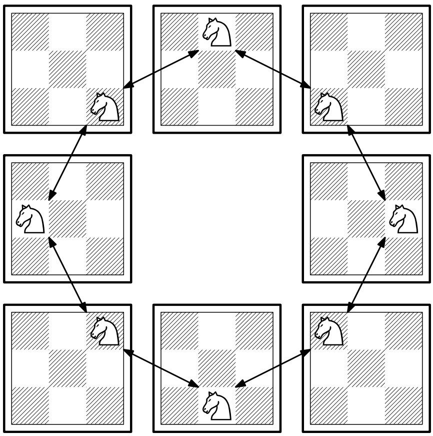
$\boxed{\mathbf{1}}$ Эта задача на знакомство с графами. Надо просто нарисовать картинку, из которой ясно, откуда куда можно долететь.



Говорят, что граф планет состоит из двух *компонент связности.*

$\boxed{\mathbf{2}}$ Обычно школьники, походив туда-сюда, заключают, что это невозможно. И как обычно, преподаватели задают «занудные» вопросы „А почему?“, „Все ли возможности испробованы? Их же очень много“ и т. п.

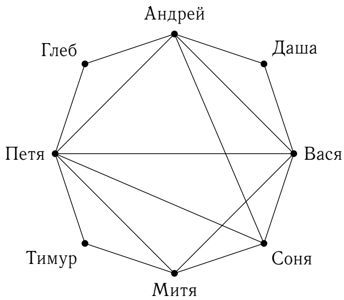
Эта задача очень хорошо показывает, как здорово могут помочь графы. Основная трудность состоит в том, что кони могут ходить, на первый взгляд, хаотично, по разным замысловатым траекториям — поди тут разберись. Но давайте проследим траекторию одного коня на пустой доске. Как видим, из каждой клетки он может сделать только два хода, поэтому он ходит по замкнутому маршруту:



По этому круговому маршруту ходят все четыре коня, причём они не могут перепрыгивать друг через друга. Поскольку в начальной позиции кони стоят парами — два белых рядом и два чёрных рядом, то они не могут перейти в позицию, где бы они чередовались.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Конечно, можно пробовать сажать детей последовательно — авось, всё сойдётся. Но может не повезти: если, к примеру, посадить Петю рядом с Андреем, то не получится посадить Глеба (это станет ясно из грамотного решения, приведённого ниже). Также нельзя сажать Васю с Андреем и Петю с Митей.

Изобразим граф, в котором вершины — восьмерых детей — будем соединять линией, если в их именах есть хоть одна общая буква. Найдём в этом графе *цикл* — замкнутый путь без самопересечений:



Обратите внимание школьников, как помог граф: во-первых, решение найдено автоматически (не надо пробовать, гадать), а во-вторых, из картинки ясно, что решение единственно (Даша, Глеб и Тимур однозначно определяют цепочку ВДАГПТМ, для Сони остаётся единственное место). Это замечание будет особенно полезно школьникам, действовавшим наугад.

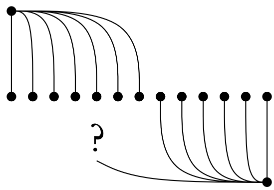
$\boxed{\mathbf{4}}$ Задачу нетрудно решить, обозначив число в одном из кружков (скажем, в левом верхнем) буквой x, обойдя цикл и составив уравнение:

$$\frac{x+6}{2} + 19 = x, \text{ откуда } x = 44.$$

Однако владеть алгеброй для решения вовсе не обязательно.

Можно посмотреть на действия, идущие подряд, и попробовать их объединить. Например, шаги $\times 3$ и $\div 6$, идущие подряд, можно заменить на один шаг $\div 2$. А шаги $\div 4$, $+4$ и $\times 4$ можно “сократить” до $+16$, а потом $+3$, $+16$ и $+6$ превратить в $+25$. После этого в цикле остаются всего два шага: $+25$ и $\div 2$. А значит, 25 — половина от числа, находящегося в правом нижнем углу, т. е. там стоит число 50. Зная это, нетрудно расставить числа в остальных кружках.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Это полезная задача на культуру рассуждений. Что надо доказать? Что-то про *любые два* города. Значит, решение следует начать с фразы „Возьмём любые два города A и B ...". Если между A и B нет дороги, то возьмём семь городов, в которые ведут дороги из A, и семь городов, в которые ведут дороги из B. Эти две семёрки городов обязательно содержат общий город (ведь их общее число $15 - 2 < 7 + 7$) — через него-то мы и попадём из A в B.



$\boxed{\mathbf{6}}$ Это простая вводная задача на обходы графов. В пункте а) турист заходит на остров три раза и столько же раз уходит с него, причём каждый раз по новому мосту. Значит, всего с этого острова ведёт 6 мостов. Аналогично в пункте б) ответ 5, а в пункте в) — 4.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Это классическое утверждение, часто называемое *леммой о рукопожатиях.*

Выпишем всех людей, когда-либо живших на Земле, и будем вести учёт всех рукопожатий. (Не пугайтесь — понарошку, конечно.) Если два человека пожали друг другу руки, поставим напротив каждого из них галочку. Ясно, что галочки заносятся в Великую перепись рукопожатий *парами*, а потому общее число галочек чётно. Теперь разобьём всех людей на две группы — у кого чётное число галочек (рукопожатий) и у кого нечётное. Так как общая сумма галочек чётна, то в нечётной группе чётное число людей (сумма нечётного числа нечётных слагаемых нечётна).

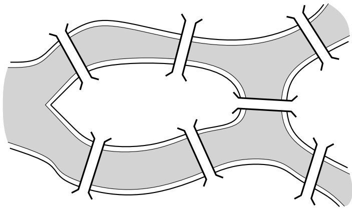
Это утверждение встречается очень часто, и для произвольного графа формулируется так:

число нечётных вершин в любом графе чётно.

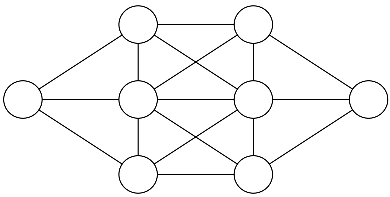
Листок 9. Графы 2

$\boxed{1}$ Пешеход обошёл несколько улиц одного города, пройдя каждую ровно два раза, но не смог обойти их, пройдя каждую лишь раз. Могло ли такое быть?

$\boxed{2}$ **Задача о кёнигсбергских мостах.** Город Кёнигсберг (ныне Калининград) был расположен на берегах реки Прегель (ныне Преголя) и двух островах, которые соединены семью мостами (см. рисунок). Можно ли было прогуляться по городу, пройдя по каждому мосту ровно один раз?



$\boxed{3}$ Расставьте в кружочках числа 1, 2, 3, ..., 8 так, чтобы ни в каких двух соединённых отрезком кружочках не оказались бы соседние (то есть отличающиеся на 1) натуральные числа.



$\boxed{4}$ В турнире участвовало девять шахматистов. Мог ли каждый сыграть по три партии?

$\boxed{5}$ Могут ли степени вершин в графе быть равны:

а) 8, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2;

б) 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 1;

в) 6, 6, 5, 5, 4, 3, 2, 2?

$\boxed{6}$ В Тридевятом царстве лишь один вид транспорта — ковёр-самолет. Из столицы выходит 21 ковролиния, из города Дальний — одна, а из всех остальных городов — по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно, с пересадками).

Ответы и комментарии

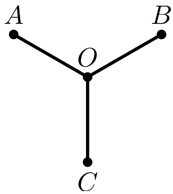
В детстве многие встречались с такой задачей: можно ли нарисовать заданный граф, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя одну линию более одного раза? Если можно, то граф называется *эйлеровым* в честь знаменитого математика Леонарда Эйлера по случаю решения им известной задачи *о кёнигсбергских мостах.* Прежде чем к ней переходить, вспомним задачу про туриста из первого листка по графам. Обязательно разберите её в начале занятия (а если уже разобрали, то напомните о ней школьникам). Её решение подсказывает, в каких случаях связный граф является эйлеровым. Предположим, что нам удалось найти требуемый маршрут, и рассмотрим два случая:

1) если стартовая и финишная вершины совпадают, то степени всех вершин графа чётны, т. к. в каждую вершину мы входим столько же раз, сколько и выходим из неё;

2) если же стартовая и финишная вершины разные, то их степени нечётны, а степени остальных вершины — чётны.

Таким образом, в эйлеровом графе не может быть более двух нечётных вершин. Можно показать, что верно и обратное: если в связном графе не более двух нечётных вершин, то он эйлеров.

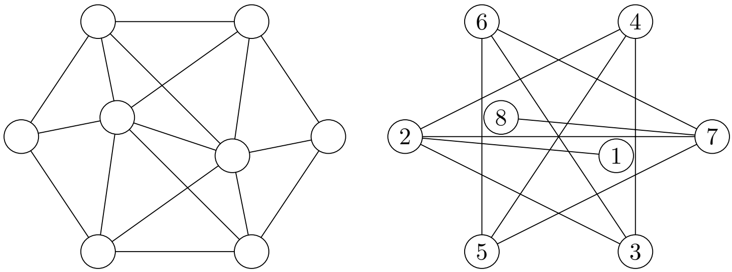
1 Да, могло. Простейший пример: три дороги, выходящие из одной точки (см. рисунок); двойной обход: $AOBOCOA$.



2 В этой задаче вершины графа — площади города, а рёбра — соединяющих их мосты. Посчитаем степени всех вершин: $3, 3, 3, 5$ — четыре нечётных вершины. Но чтобы граф был эйлеровым, нечётных вершин должно быть не больше двух. Поэтому ответ: нет, нельзя.

3 Для данного графа рассмотрим т. н. *дополнительный граф* —

вершины у него те же, а рёбрами соединяются в точности те вершины, которые не были соединены в исходном графе. Очевидно, достаточно расставить в новом графе числа так, чтобы соседние числа стояли в соединённых кружочках. Вот пример:



4 Это задача на применение леммы о рукопожатиях (последняя задача из первого листка по графам). Вершины — шахматисты; если шахматисты сыграли между собой, соединяем их ребром. Тогда вопрос переформулируется так: может ли каждая из девяти вершин графа иметь степень три? Как мы знаем, нет: нечётных вершин всегда чётное число.

Но полезно провести и непосредственное рассуждение. Посчитаем число партий в таком турнире. Так как каждый из девяти шахматистов сыграл по три партии, то, казалось бы, партий $9 \cdot 3$. Но на самом деле в этом произведении каждая партия посчитана дважды (для каждого из соперников). Значит, общее число партий $9 \cdot 3/2$. Минуточку! Это же число не целое! Получено вопиющее противоречие!

5 Во всех пунктах у графа 8 вершин. Если у школьников возникнут вопросы, напомните, что степень вершины — это количество вершин, с которыми она соединена рёбрами.

а) Ясно, что вершины степени 8 быть не может — степени всех вершин не больше семи.

б) Вершины степени 7 соединены со всеми остальными. Раз их две, то степени остальных вершин не меньше двух. Значит, вершины степени 1 быть не может.

в) Здесь три нечётных вершины, а такого быть не может.

6 Ещё одна задача на ту же лемму о рукопожатиях, но здесь эта идея спрятана глубже.

Рассмотрим граф, состоящий из городов, до которых можно добраться из Столицы, быть может, с пересадками (говоря по-научному, рассмотрим компоненту связности Столицы). Предположим, что в этом графе нет города Дальнего. Но тогда в нём всего одна нечётная вершина — Столица. Противоречие с леммой о рукопожатиях.

Листок 10. Логические задачи 2

$\boxed{\mathbf{1}}$ Встретились три рыцаря: Красный, Белый и Чёрный. У них были белый, красный и чёрный щиты. Рыцарь с белым щитом сказал Чёрному рыцарю: „Интересно, что цвет щита у каждого из нас не соответствует имени“. Какого цвета щит у каждого рыцаря?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Есть три попугая — Гоша, Кеша и Рома. Один из попугаев всегда говорит правду, другой всегда врёт, а третий — хитрец: иногда говорит правду, иногда врёт. На вопрос „Кеша кто?“ они ответили:

Гоша: — Лжец.

Кеша: — Я хитрец!

Рома: — Абсолютно честный попугай.

Кто из попугаев лжец, а кто хитрец?

$\boxed{\mathbf{3}}$ В городе Глупове живут только полицейские, воры и обыватели. Полицейские всегда врут обывателям, воры — полицейским, а обыватели — ворам. Во всех остальных случаях жители Глупова говорят правду. Однажды несколько глуповцев водили хоровод, и каждый сказал своему соседу справа: „Я полицейский“. Сколько обывателей было в этом хороводе?

$\boxed{\mathbf{4}}$ Илье Муромцу, Добрыне Никитичу и Алёше Поповичу за верную службу дали 6 монет: 3 золотых и 3 серебряных. Каждому досталось по две монеты. Илья Муромец не знает, какие монеты достались Добрыне, а какие Алёше, но знает, какие монеты достались ему самому. Придумайте вопрос, на который Илья Муромец ответит «да», «нет» или «не знаю», и по ответу на который вы сможете понять, какие монеты ему достались.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Король позвал к себе двух придворных мудрецов и объявил им: „Через 15 минут я посажу вас в две комнаты, разделённые звуконепроницаемым стеклом, вы закроете глаза, и на каждого из вас я надену колпак — белый или чёрный. После этого вы можете открыть глаза, и каждый из вас должен будет угадать цвет колпака, который я надел на него. Сейчас вы можете договориться о чём хотите, но помните — если ни один из вас не отгадает, вы оба будете уволены“. Как действовать мудрецам, чтобы наверняка остаться на королевской службе?

$\boxed{\mathbf{6}}$ Король позвал к себе других двух мудрецов, показал им три колпака и назвал их цвета — красный, синий и жёлтый. После чего он попросил мудрецов закрыть глаза и надел на каждого из них по колпаку, третий же, сняв корону, надел сам. Казалось бы, видя колпаки на голове своего коллеги и на голове короля, каждый мудрец легко догадается о цвете своего колпака, однако у этих мудрецов проблемы со зрением: первый не отличает синего от жёлтого, второй — красного от синего. Поэтому, когда король спросил последовательно первого и второго мудрецов, знают ли они свои колпаки, оба ответили „не знаю". Какого цвета колпак король надел на первого мудреца?

Ответы и комментарии

В начале занятия полезно вспомнить предыдущий листок с логическими задачами.

$\boxed{\mathbf{1}}$ В этой задаче удобно составить табличку, в которой отметить знаком «$-$» заведомо невозможные ситуации:

	Белый рыцарь	Чёрный рыцарь	Красный рыцарь
белый щит	$-$	$-$	
чёрный щит		$-$	
красный щит			$-$

Действительно, по словам Чёрного рыцаря (а рыцари никогда не обманывают!) у каждого цвет щита не соответствует имени; кроме того, Чёрный рыцарь говорил с обладателем белого щита — значит, это разные люди. Следовательно, белый щит был у Красного рыцаря, и дальше таблица заполняется автоматически (знак «$+$» в каждой строке и каждом столбце должен быть ровно один):

	Белый рыцарь	Чёрный рыцарь	Красный рыцарь
белый щит	$-$	$-$	$+$
чёрный щит	$+$	$-$	$-$
красный щит	$-$	$+$	$-$

Школьники могут рассказывать это рассуждение и словесно, без таблицы. Раз у Красного рыцаря щит белый, то чёрный щит не может быть ни у Красного, ни у Чёрного. Значит, чёрным щитом владеет Белый рыцарь. Наконец, Чёрному рыцарю остаётся красный щит.

$\boxed{\mathbf{2}}$ В этой задаче тоже разумно нарисовать табличку. Для этого заметим, что честный попугай ровно один, и не может назвать честным другого попугая. Кроме того, честный попугай также не станет называть себя хитрецом.

	лжец	хитрец	честный
Гоша			
Кеша			–
Рома			–

Теперь мы знаем, что честный попугай — Гоша. Значит, Кеша — лжец, а хитрецом остаётся быть Роме.

3 Сначала заметим, что вор мог сказать „Я полицейский" только полицейскому, а полицейский — только вору или другому полицейскому (поскольку сказать правду обывателю полицейский не может). Значит, справа от любого вора или полицейского могут быть далее только воры или полицейские. Если где-то в хороводе окажется обыватель, то следующий справа за ним — вор (потому что обыватель своему правому соседу соврал), и дальше идут только воры и полицейские. Но тогда *левый* сосед этого обывателя — тоже вор или полицейский. С другой стороны, ни вор, ни полицейский никогда не скажут „Я полицейский" обывателю. Это противоречие показывает, что обывателей в хороводе нет.

4 В этой задаче неявно предполагается (если у школьников возникнут вопросы, это следует пояснить), что Илья всегда говорит только правду, а также что он способен рассуждать логически — т. е. скажет «не знаю» только тогда, когда не только не видит правильного ответа явно, но и принципиально не может вывести его из своих знаний.

Поскольку возможных наборов монет у Ильи три (золотая и золотая, золотая и серебряная, серебряная и серебряная), то в какой-то из ситуаций должен возникнуть третий ответ «не знаю». Значит, нужно спрашивать про монеты, данные двум другим богатырям.

Один из вопросов, приводящих к успешному решению, таков: „Верно ли, что у одного из двух других богатырей две золотые монеты?"

Действительно, если у Ильи обе монеты золотые, то у оставшихся золотая монета только одна, и Илья знает, что двух золотых монет ни у Добрыни, ни у Алёши быть не может, и скажет «нет».

Наоборот, если обе монеты у Ильи серебряные, то одного из оставшихся богатырей серебряных монет нет. Илья это знает и скажет «да».

Наконец, если у Ильи одна золотая и одна серебряная монета, возможны разные случаи: либо князь разделил награду поровну, и у Добрыни и Алёши тоже по золотой и серебряной монете, либо у одного обе золотые, а у другого обе серебряные. В первом случае ответ на наш вопрос «нет», во втором — «да», и Илья не знает, какой из случаев имеет место на самом деле. Значит, он ответит «не знаю».

Итак, по ответу Ильи на этот вопрос мы можем узнать, какие у него монеты:

«да» — две серебряные;
«нет» — две золотые;
«не знаю» — золотая и серебряная.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Трудность этой задачи в том, что ни первый, ни второй мудрец по отдельности не могут гарантировать себе правильного угадывания. Однако вместе они могут договориться действовать следующим образом: первый называет тот же цвет, который видит, а второй — противоположный. Тогда если король надел на них одинаковые колпаки, угадает первый, а если разные — второй.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Каждый из мудрецов видит колпаки так: два будто бы одинакового цвета и один отличающийся. Значит, если он увидит у двух других персонажей неотличимые колпаки, он догадается о цвете своего колпака. Отсюда следует, что на первого мудреца король не мог надеть красный колпак, а на второго — жёлтый.

Покажем теперь, что колпак первого мудреца не может быть и синим. Действительно, в этом случае жёлтый колпак король надел на себя, и второй мудрец видит два колпака — один жёлтый и один непонятного сине-красного цвета. Однако второй мудрец уже знает, что первый ответил на вопрос о своём колпаке „не знаю“, и поэтому колпак первого не может быть красным. Значит, он синий, и тут второй мудрец понимает, что на него король надел красный колпак. Но второй мудрец тоже сказал „не знаю“, поэтому этот случай невозможен.

Остаётся последний случай, когда на первом мудреце жёлтый колпак. Заметим, кстати, что мы не можем узнать, какой колпак был надет на второго мудреца (а какой — на короля): оба варианта удовлетворяют условию задачи (проверьте!).

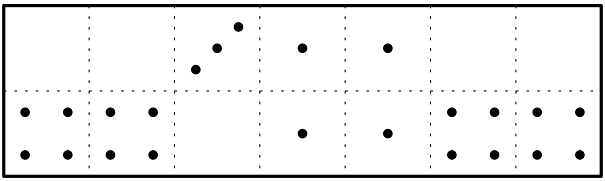
Листок 11. Перебор вариантов

1 Можно ли отсчитать без сдачи сумму в 27 фертингов, используя только монеты достоинством 6, 10 и 13 фертингов?

2 Четверо пятиклассников — Аня, Боря, Ваня и Галя — начали собирать марки. К концу четверти один из них собрал шесть марок, другой — четыре, третий — три, а четвёртый — только две. После того, как Боря подарил Ане на день рождения все свои марки, у неё стало в два раза больше марок, чем у Гали. Сколько марок собрала Галя?

3 В коробке лежат синие, красные и зелёные карандаши — всего 20 штук. Синих в 6 раз больше, чем зелёных, а красных меньше, чем синих. Сколько в коробке красных карандашей?

4 На рисунке показан вид сверху коробки, в которую уложен набор костяшек домино. Как разложены костяшки?



5 Однажды король собрал трёх мудрецов и потребовал, чтобы они угадали трёхзначное число, которое он задумал. Первый предположил, что это число — 542, второй — 946, а третий — 536. Король очень удивился, ведь каждый из мудрецов правильно отгадал ровно одну из трёх цифр. А какое число задумал король на самом деле?

6 Папе, маме, сыну и бабушке приспичило тёмной ночью перейти по хлипкому мостику через реку. Мостик может выдержать только двоих одновременно. К тому же на всех имеется только один фонарик, без которого нельзя сделать ни шагу. Папа может перейти через мостик в одну сторону за 1 минуту, мама — за 2 минуты, сын — за 5, а бабушка — за 10. За какое минимальное время все они смогут перебраться на другой берег? (Когда через мостик идут двое, они идут со скоростью того, кто ходит медленнее).

Ответы и комментарии

В задачах этого листка не обойтись без рассмотрения *(перебора)* нескольких случаев. Слушая решение школьника, нужно внимательно следить, чтобы все возможные случаи были разобраны; более того, школьник должен сам объяснить, почему других вариантов нет. Если он этого не делает, нужно спросить „А вдруг есть ещё случаи?“ независимо от того, упустил ли на самом деле школьник какой-то вариант, и верен ли его ответ.

С другой стороны, можно подсказывать школьникам, как *сокращать поле перебора,* группируя случаи или заранее отсекая заведомо невозможные. Если решение, предлагаемое школьником, верно, но неоптимально, может оказаться разумным — после того, как решение засчитано — рассказать эталонное решение.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Заметим, что 13-фертинговых монет не может быть больше двух: иначе общая сумма превысит 27. Не может их быть также две — тогда останется 1 фертинг, который невозможно заплатить без сдачи. С другой стороны, если 13-фертинговых монет нет, общая сумма будет чётной, т. е. опять же не может равняться 27.

Единственный оставшийся случай — когда 13-фертинговая монета одна, и остаётся отсчитать 14 фертингов 6- и 10-фертинговыми монетами. Однако и это невозможно: можно либо взять 10 фертингов — и останется 4, либо взять 6 — останется 8. Ни ту, ни другую сумму заплатить без сдачи нельзя.

Следовательно, ответ в задаче — *нельзя.*

$\boxed{\mathbf{2}}$ Можно решить эту задачу «в лоб», перебрав все возможные варианты[2]. Всего случаев будет $4! = 24$ — в общем-то, не астрономически много. Однако, как и в предыдущей задаче, сократить перебор помогает соображение *чётности.*

Нам достаточно знать только суммарное количество марок, собранных Борей и Аней. Из условия следует, что оно чётно. Значит, ни Боря, ни Аня не собрали 3 марки, и остаются три возможных случая: $2 + 4 = 6$, $2 + 6 = 8$, $4 + 6 = 10$. В первом случае у Гали 3

[2]В англоязычной литературе для полного перебора используется термин *brute force* — «грубая сила».

марки (у Вани 6, а у Бори и Ани 2 и 4 в любом порядке), во втором у Гали 4 (у Бори и Ани — 2 и 6, у Вани 3).

Заметим, что в этой задаче два ответа (строго говоря, верный ответ звучит так: «у Гали или 3, или 4 марки»; ответы «3» и «4» не являются правильными). Это показывает, что перебор нельзя прекращать, даже когда ответ вроде бы найден: может оказаться, что возможны ещё и другие случаи, дающие другие ответы.

$\boxed{\textbf{3}}$ Будем перебирать возможные количества зелёных карандашей.

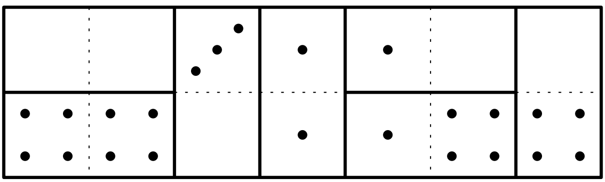
1. Зелёный карандаш один. Тогда синих — 6, а красных $20 - 6 - 1 = 13$. В этом случае красных карандашей больше, чем синих, что противоречит условию задачи.

2. Зелёных карандаша два. Тогда синих — 12, красных $20 - 12 - 2 = 6$. Этот случай полностью удовлетворяет условию.

3. Зелёных карандашей три или больше. Тогда синих карандашей не меньше 18, и общее число карандашей оказывается больше 20.

Значит, единственный возможный случай: зелёных 2, синих 12, красных 6.

$\boxed{\textbf{4}}$ Слева не может стоять вертикальная доминошка 04, иначе будет ещё одна такая же доминошка (с четвёркой — второй в нижнем ряду). Значит, слева две горизонтальные доминошки 00 и 44. Тогда справа — вертикальная доминошка 04, а перед ней — две горизонтальные 10 и 14. Оставшиеся две доминошки — вертикальные 30 и 11 (горизонтальные на их местах быть не могут, т. к. уже есть доминошка 10).



$\boxed{\textbf{5}}$ Посмотрим, какую цифру отгадал первый мудрец. Если он правильно угадал первую цифру, то эту же цифру правильно угадал и третий мудрец. Тогда второй мудрец угадал либо вторую, либо третью цифру. Однако в первом случае тогда ту же цифру правильно угадал первый, а во втором — третий мудрец. Получилось противоречие: один из мудрецов правильно угадал две цифры.

Аналогичное рассуждение (проверьте!) показывает, что первый мудрец не мог отгадать вторую цифру. Значит, он верно отгадал третью цифру, и это цифра 2. Два других мудреца эту цифру не отгадали.

Если второй мудрец правильно угадал вторую цифру, мы сразу приходим к противоречию, потому что тогда первый мудрец правильно угадал две цифры: вторую и третью. Значит, второй мудрец верно угадал первую цифру, и это цифра 9.

Наконец, третий мудрец не мог правильно отгадать ни третью, ни первую цифру (иначе её верно отгадал и один из двух других мудрецов). Значит, третий мудрец верно угадал вторую цифру.

Ответ: 932.

6 Ключевая идея в этой задаче — двое самых медленных (сын и бабушка) должны идти вместе. Решение, в котором они идут порознь, оказывается заведомо неоптимальным, и обычно школьники пытаются сдать такие решения, говоря, что „быстрее не получается“.

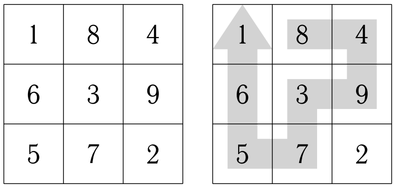
Вот так можно перейти реку за 17 минут: папа с мамой переходят на ту сторону (2 мин); папа возвращается с фонариком (1 мин); сын и бабушка переходят реку (10 мин); мама берёт фонарик и возвращается (2 мин); папа с мамой переходят ещё раз на ту сторону (2 мин).

Чтобы доказать, что быстрее нельзя, нужно аккуратно разобрать возможные случаи. Если сын идёт отдельно от бабушки, они уже тратят 15 мин, и легко видеть, что за оставшиеся 2 мин папа с мамой не успеют вовремя доставить фонарик и переправиться сами. Если же сын идёт вместе с бабушкой, необходимо, чтобы перед их переходом папа и мама находились на разных берегах реки. Действительно, если они оба находятся на том берегу, то при них находится и фонарик (иначе как бы они попали на тот берег?), и сын с бабушкой не могут идти. Если же они на этом берегу, то они не смогут перейти на другой берег, потому что сын с бабушкой унесут фонарик. Если на том берегу была мама, то, чтобы её перевести туда и вернуть фонарик, папе понадобится 3 мин, а потом, чтобы перевести папу, маме понадобится 4 мин. Случай, когда мама остаётся на этом берегу, симметричен и требует соответственно 4 мин до и 3 мин после перехода сына и бабушки.

Листок 12. Математические цепочки

1 Над цепью озёр летела стая гусей. На каждое озеро садилась половина стаи и ещё полгуся, а остальные летели дальше. Сколько всего было гусей в стае, если все они сели на семи озёрах?

2 Квадрат 3×3 заполнен цифрами так, как показано на рисунке. Разрешается ходить по клеткам этого квадрата, переходя из клетки в соседнюю по стороне, но ни в какую клетку не разрешается попадать дважды.

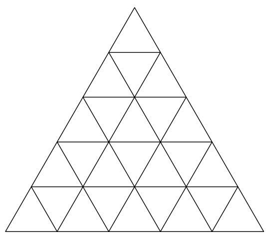


Петя прошел, как показано на рисунке справа, и выписал по порядку все цифры, встретившиеся по пути, — получилось число 84937561. Какое наибольшее число можно получить таким способом?

3 Из набора домино выкинули все доминошки, содержащие хотя бы на одном из концов шестёрку. Можно ли оставшиеся доминошки выложить в цепочку (в соответствии с правилами игры)?

4 Кусок сыра имеет форму кубика $3 \times 3 \times 3$, из которого вырезан центральный кубик. Мышь начинает грызть этот кусок сыра. Сначала она съедает некоторый кубик $1 \times 1 \times 1$. После того, как мышь съедает очередной кубик $1 \times 1 \times 1$, она приступает к съедению одного из соседних (по грани) кубиков с только что съеденным. Сможет ли мышь съесть весь кусок сыра?

5 Треугольник разбит на треугольнички (25 штук), как показано на рисунке. Жук может ходить по треугольнику, переходя между соседними (по стороне) треугольничками. Какое максимальное количество треугольничков может пройти жук, если в каждом он побывал не больше одного раза?



6 Некоторое число кончается на двойку. Если эту двойку перенести в начало числа, то оно удвоится. Приведите пример такого числа.

Ответы и комментарии

$\boxed{\textbf{1}}$ „Полгуся — это как?!" — часто недоумевают школьники. На это можете спросить: „Пусть в стае семь гусей. Тогда полстаи — это сколько?". В условии сказано «половина стая и ещё полгуся» — это значит 4 из 7, 11 из 21 и т. д.

Бывает, школьники решают задачу подбором: возьмут, скажем, сто гусей и посмотрят, много это или мало. Постепенно поймут, в каком диапазоне лежит ответ, а затем найдут и точное число гусей.

„Я решил! В стае было 127 гусей! — радостно заявляет школьник и показывает вам свою последнюю, успешную, проверку, — На первое озеро сели $(127+1)/2 = 64$ гуся, остальные 63 полетели дальше, на второе сели $(63 + 1)/2 = 32$ гуся, 31 — полетели дальше...". Это решение неполное — формально надо обосновать, почему нет других вариантов — да-да, несмотря на всю очевидность. Если бы гусей было больше 127, то на седьмое озеро село бы больше одного гуся, а если меньше 127, то до седьмого озера гуси бы не долетели. Почему? Да потому, что чем больше число N, тем больше числа $\dfrac{N+1}{2}$, $\dfrac{\frac{N+1}{2}+1}{2}$ и т. д. Проблема в том, что такого объяснения вы вряд ли дождётесь от школьника младших классов. Постарайтесь помочь ему довести решение до логического конца.

У решения подбором есть и другой недостаток: непонятно, как решать задачу, скажем, для ста озёр вместо семи. Обратите на это внимание школьника.

Между тем, разумное решение задачи — *с конца.* Сразу отметим, что гусей, садившихся на очередное озеро (полстаи плюс полгуся), на один больше, чем гусей, летевших дальше (полстаи минус полгуся). Так как дальше седьмого озера никто не полетел, то на него сел один гусь.[3] Это тот самый гусь, который полетел дальше, после того, как на шестое озеро сели $1 + 1 = 2$ гуся из $2 + 1 = 3$ летевших над ним. Значит, на пятое озеро сели $3 + 1 = 4$ гуся из $4 + 3 = 7$ летевших над ним. Аналогично над четвёртым озером летели $8 + 7 = 15$ гусей и т. д. Вообще, если над каким-то озером

[3]Можно ещё объяснить так. На седьмое озеро села, с одной стороны, вся оставшаяся стая, а с другой — полстаи + полгуся. Значит, полстаи = полгуся.

летели n гусей, то над предыдущим озером летели $2n + 1$ гусей. Отсюда несложно вывести, что в случае k озёр гусей было $2^k - 1$.

2 Это задача на тему «чётность». На оставшихся доминошках каждая из цифр от 0 до 5 написана по семь раз (нечётное число). Если бы доминошки удалось сложить в цепочку, то каждая из этих цифр была бы написана на одном из концов цепочки, но таких концов только два, — противоречие.

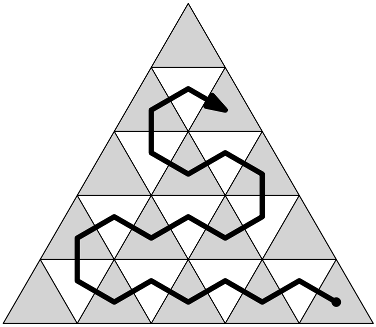
3 Очевидно, число должно быть девятизначное, а для этого начинать надо либо из угла, либо из центра (из соображений шахматной раскраски: чтобы обойти по разу все девять клеток — пять чёрных и четыре белых — меняя при этом каждым ходом цвет клетки, необходимо начать с чёрной клетки). Наибольшая цифра в этих клетках — 5 — с неё и начнём. Из неё можно пойти в 6 или 7. Чтобы получить число побольше, пойдём в 7. Затем — в 3 (а не в 2, что меньше). А вот теперь если «пожадничать», выбрав наибольшую цифру 9, то весь квадрат не обойти. Единственный способ продолжить маршрут после 573 такой: 618492.

4 Будьте готовы, что школьники могут не пройти проверку на умение читать условие и не заметить, что центральный кубик из сыра вырезан.

Многие школьники пытаются выдать свои неудачные попытки «обойти весь сыр» за доказательство того, что это невозможно. Такое решение можно принять только после полного перебора, а он довольно велик. Обычно у школьников не хватает ни терпения, ни культуры провести перебор аккуратно. Попытайтесь ненавязчиво отговорить школьника решать перебором и направить его на поиски идейного решения. Пусть вернётся к предыдущей задаче или вспомнит другой близкий сюжет с передвижением по соседним клеткам квадратного поля. Часто в таких задачах ключевую роль играет *шахматная раскраска* (не подсказывайте явно!).

Раскрасим куб $3\times3\times3$ в «трёхмерную шахматную раскраску» — будет 14 чёрных кубиков и 13 белых, включая центральный. Мышь каждым ходом меняет цвет, поэтому количества чёрных и белых съеденных ей кубиков не могут отличаться более чем на один, в то время, как всего их 14 и 12.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Здесь вряд ли обойтись без «треугольной шахматной раскраски» (см. рисунок). Каждым ходом мы меняем цвет треугольничка, поэтому количества чёрных и белых треугольных клеток в нашем маршруте отличаются не более чем на один. Но чёрных клеток 15, а белых — 10, значит, всего мы можем обойти не более $10 + 11 = 21$ клетки. Один из примеров показан на рисунке.



$\boxed{\mathbf{6}}$ Эту задачу можно решить, пожалуй, только одним способом, причём... из начальной школы! Составление уравнения типа $\overline{2x} = 2 \cdot \overline{x2}$ к успеху не приведёт — это станет ясно, если взглянуть на ответ.

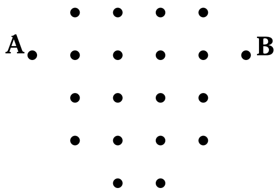
Составим пример на умножение в столбик, цифры в котором будем заполнять последовательно справа налево:

$$
\begin{array}{r}
{\scriptstyle 1\ 1\quad 1111\ 1\ \ 11\quad} \\
\times\ 105263157894736842 \\
2 \\
\hline
210526315789473684
\end{array}
$$

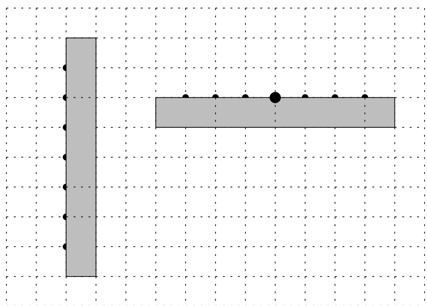
Отметим, что этот 18-значный ответ не единственный: составлять пример можно дальше. Все числа, удовлетворяющие условию, имеют вид A, $\overline{AA}$, $\overline{AAA}$ и т. д., где A — полученное выше число.

Листок 13. Кратчайший путь

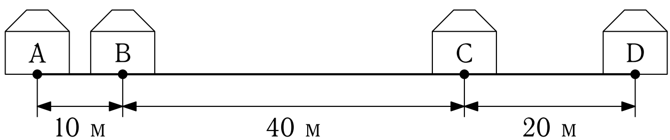
1 В доску вбито 20 гвоздиков, как показано на рисунке. Расстояние между любыми соседними равно 1 дюйму. Протяните от гвоздика A к гвоздику B нитку как можно меньшей длины так, чтобы она прошла через все остальные гвоздики.



2 Петя и Вася живут в соседних домах (см. план на рисунке). Вася живёт в четвёртом подъезде. Известно, что Пете, чтобы добежать до Васи кратчайшим путём (не обязательно идущим по сторонам клеток), безразлично, с какой стороны обегать свой дом. Определите, в каком подъезде живёт Петя.

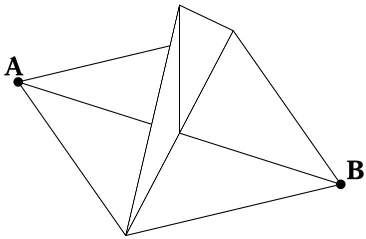


3 В деревне вдоль дороги расположены четыре дома. Расстояния между ними указаны на рисунке. В деревне решили поставить колодец. Где его нужно расположить, чтобы сумма расстояний до всех домов была как можно меньше?



$\boxed{\mathbf{4}}$ В поле стоит квадратный колодец размером 2×2 метра. К его углу верёвкою привязана коза. Какую форму имеет участок поля, внутри которого коза сможет съесть всю траву, если длина верёвки равна 4 метрам?

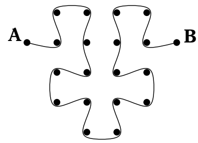
$\boxed{\mathbf{5}}$ В вершине A квадрата со стороной 10 см сидит муравей. Ему надо добраться до точки B, где находится вход в муравейник. Точки A и B разделяет треугольная стена, боковые стороны которой тоже равны 10 см. Найдите длину кратчайшего пути, который надо преодолеть муравью, чтобы попасть в муравейник.



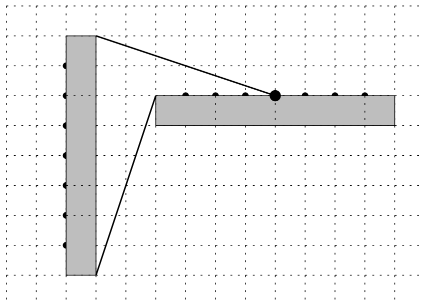
$\boxed{\mathbf{6}}$ В музее Гугенхайм в Нью-Йорке есть скульптура, имеющая форму куба. Жук, севший на одну из вершин, хочет как можно быстрее осмотреть скульптуру и перейти к другим экспонатам (для этого достаточно попасть в противоположную вершину куба). Какой путь ему выбрать?

Ответы и комментарии

$\boxed{\mathbf{1}}$ Наименьшее расстояние между гвоздиками — 1 дюйм, а обойти нужно 20 гвоздиков, значит длина нитки должна быть хотя бы 19 дюймов. Этой длины хватит, обходить гвоздики нужно так:



$\boxed{\mathbf{2}}$ Посмотрим, как Петя будет срезать углы на пути через верхний и через нижний угол дома.



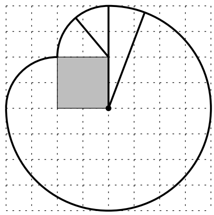
Заметим, что отрезки, изображенные на рисунке, равны. Теперь нетрудно заметить, что путь от верхнего угла дома короче на четыре клетки, чем путь от нижнего угла. остается с учетом этого правильно выбрать подъезд и узнать, что Петя живет в шестом подъезде (втором снизу).

$\boxed{\mathbf{3}}$ Как ни странно, ответ в этой задаче не зависит от расстояний между домами — об этом можно сообщать в качестве подсказки. Ещё в качестве подсказки можно предложить посмотреть, что было бы, будь домов не так много.

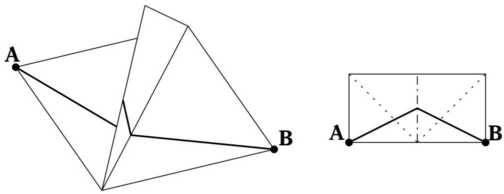
В качестве места для колодца подойдёт любая точка между домами B и C. В этом случае сумма расстояний до домов $AK+BK+KC+KD$ будет равна $AD+BC$. Остаётся заметить, что если колодец окажется вне отрезка BC, то сумма расстояний окажется больше, чем $AD+BC$ (так как тогда $AK+KD \geqslant AD$, а $BK+KC > BC$).

Если бы дома находились не на одной прямой, задача стала бы заметно сложнее, однако основная идея осталась бы прежней — использовать неравенство треугольника $AB+BC \geqslant AC$ и свойство, что равенство достигается только тогда, когда B лежит на AC.

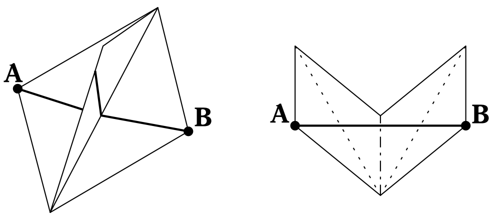
$\boxed{4}$ Из-за того, что веревка будет наматываться на колодец, получится вот такая фигура, составленная из трех дуг окружностей (см. рисунок).



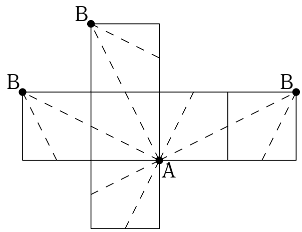
$\boxed{5}$ В этой задаче, как и в следующей, вычисления не нужны, а достаточно просто знать, что кратчайший путь между точками на плоскости — это путь по прямой. Для того, чтобы найти кратчайший путь, очень полезно сложить изображенную на рисунке фигуру из бумаги и посмотреть, как будут вести себя нарисованные на её поверхности пути при раскладывании сложенной фигуры.



Кратчайших путей будет два, и будут они, как ни удивительно, в обход, по самому краю листа (умный в гору не пойдёт, умный гору обойдёт). Заметьте, что если бы вместо квадрата у нас был бы ромб с достаточно острым углом (AB — меньшая диагональ), кратчайший путь начал бы постепенно залезать на край “холма”.



$\boxed{\mathbf{6}}$ В этой задаче тоже на помощь приходят развёртки. Если у школьников не будет получаться решить задачу, посоветуйте им сложить куб из бумаги. Кратчайших путей на этот раз будет шесть штук. Можете предложить решившим задачу найти их все и нарисовать их на поверхности куба разными цветами.



Листок 14. Его величество Куб

$\boxed{\mathbf{1}}$ Планета «Куб» имеет форму куба, каждой гранью которого правит либо правдивый, либо лживый король. Однажды каждый король заявил, что правители большинства сопредельных с его владениями граней лживы. Сколько было лживых королей на самом деле?

$\boxed{\mathbf{2}}$ На гранях кубика расставлены числа от 1 до 6. Кубик бросили два раза. В первый раз сумма чисел на четырёх боковых гранях оказалась равна 12, во второй — 15. Что написано на грани, противоположной той, где написана цифра 3?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Верно ли, что если все грани многогранника — квадраты, то этот многогранник — куб?

$\boxed{\mathbf{4}}$ Составьте куб $3 \times 3 \times 3$ из красных, жёлтых и зелёных кубиков $1 \times 1 \times 1$ так, чтобы в любом бруске $3 \times 1 \times 1$ были кубики всех трёх цветов.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Какое наибольшее число брусков размером $1 \times 2 \times 2$ можно разместить (без пересечений) в кубе $3 \times 3 \times 3$?

$\boxed{\mathbf{6}}$ Можно ли покрасить четыре вершины куба в красный цвет, а другие четыре — в синий так, чтобы каждая плоскость, проходящая через какие-то три точки одного цвета, содержала точку другого цвета?

Ответы и комментарии

$\boxed{\mathbf{1}}$ У каждого правителя — четыре соседа. Большинство из них — либо все четыре, либо трое. Далее рассуждаем по пунктам.

1. Ясно, что все короли лживыми быть не могут, иначе их заявления — чистая правда! Значит, есть хотя бы один правдивый король. Назовём его П.

2. Король П сказал правду, поэтому с ним граничат не менее трёх лживых. Среди этих трёх удобно взять центрального — назовём его Л: у него уже два лживых соседа (те же, что у П) и один правдивый (сам П).

3. Чтобы заявление короля Л было ложью, его четвёртый сосед (на грани, противоположной П), должен быть правдивым. Итак, на двух противоположных гранях — правдивые короли, а на трёх из остальных — лживые. Кто же на последней грани?

4. С этим некто граничат два лжеца и два правдивца. Ага! Значит, он солгал, говоря о большинстве!

Ответ: четыре лживых короля и два правдивых.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Сумма всех очков на кубике равна[4] $1 + \ldots + 6 = (1 + 6) \cdot 3 = 21$. Значит, сумма чисел на верхней и на нижних гранях после первого броска равна $21 - 12 = 9$, а после второго — $21 - 15 = 6$. Представим эти числа в виде суммы двух различных:

$$9 = 6 + 3 = 5 + 4, \qquad 6 = 5 + 1 = 4 + 2.$$

Как разобраться, какая именно пара чисел была сверху и снизу? Воспользуемся тем, что эти пары не имеют общих чисел! Значит, комбинация $4 + 5$ отпадает (в обоих представлениях шестёрки есть либо 4, либо 5). Поэтому напротив шестёрки — тройка.

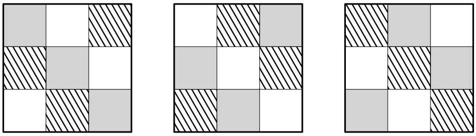
---

[4] Обратите внимание школьников на быстрый подсчёт суммы $1 + 2 + \ldots + n$: выпишем под ней ту же сумму в обратном порядке и сложим числа в каждом из n столбцов — везде будет $n + 1$. Значит, удвоенная сумма равна $n(n + 1)$, и

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

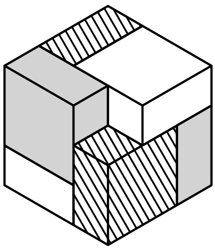
$\boxed{\mathbf{3}}$ Нет. Например, такую фигуру можно получить, взяв один кубик и приклеив к каждой его грани ещё по одному кубику.

$\boxed{\mathbf{4}}$ При раскраске трёхмерного куба на тетрадном листе могут возникнуть сложности — как нарисовать его так, чтобы можно было одновременно видеть все его клетки? Для этого довольно удобно смотреть не на весь куб целиком, а на его горизонтальные сечения.

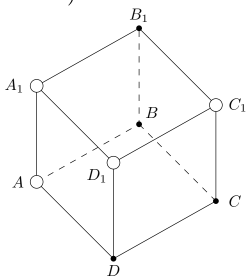


Если у школьники будут пытаться рисовать трёхмерный куб и раскрашивать его, посоветуйте им изобразить решение в виде трёх слоёв, так вам будет проще проверить раскраску на наличие ошибок.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Ясно, что из соображений объёма ответ не больше $3^3/2^2 = 27/4$, т. е. не больше 6. Укладка шести брусов показана на рисунке.



$\boxed{\mathbf{6}}$ См. рисунок («синие» точки изображены сплошными, а «красные» — полыми кружочками).



Заметьте, что решение, в котором цвета точек чередуются (A, C, B_1, D_1 — «красные», остальные — «синие») не подходит из-за плоскостей, проходящих ровно через три вершины (например, AB_1D_1).

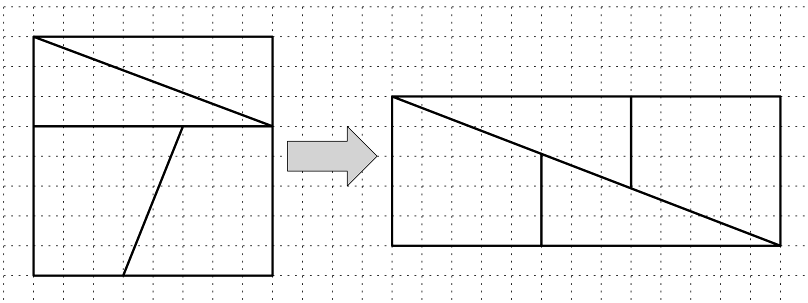
Листок 15. Математический фольклор

$\boxed{\mathbf{1}}$ Крестьянину нужно переправить через реку волка, козу и капусту. Но лодка такова, что в ней может поместиться только крестьянин, а с ним или только волк, или только коза, или только капуста. Но если оставить волка с козой без крестьянина, то волк съест козу, а если оставить козу с капустой, то коза съест капусту. Как быть?

$\boxed{\mathbf{2}}$ У Маши не хватало для покупки букваря семи копеек, а у Миши — одной копейки. Они сложились, чтобы купить один букварь на двоих, но денег всё равно не хватило. Сколько стоил букварь?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Охотник находится в 100 м к югу от медведя, проходит 100 м на восток, поворачивается лицом к северу, прицеливается и, выстрелив в направлении на север, убивает медведя. Какого цвета медвежья шкура?

$\boxed{\mathbf{4}}$ Квадрат 8×8 разрезали на четыре части и сложили из них прямоугольник 5×13. Не верите? Посмотрите на рисунок справа. Как вы это объясните?



$\boxed{\mathbf{5}}$ **а)** Сложите четыре треугольника, используя шесть одинаковых спичек. **б)** Добавьте ещё три такие же спички, чтобы образовалось ещё три треугольника.

$\boxed{\mathbf{6}}$ В одном стакане было молоко, а в другом — столько же кофе. Из стакана молока перелили одну ложку в стакан с кофе и небрежно размешали. Затем такую же ложку смеси перелили обратно в стакан с молоком. Чего теперь больше: кофе в стакане с молоком или молока в стакане с кофе?

Ответы и комментарии

$\boxed{\mathbf{1}}$ Обратите внимание школьников, что задача решается *по принципу неизбежности.* Лишь однажды у крестьянина появляется выбор из двух симметричных продолжений:

1) перевозим козу (очевидно, единственное);

2) возвращаемся (не везти же козу обратно);

3) везём, к примеру, волка (можно и капусту — другой вариант);

4) перевозим обратно козу (оригинальный и в то же время вынужденный ход);

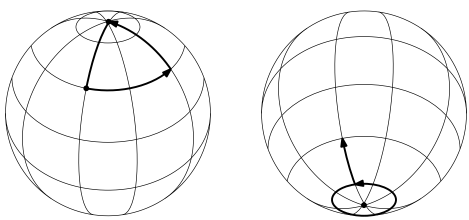
5)–7) дальнейшее ясно: перевозим капусту (либо волка, если в пункте 3) перевозили капусту), возвращаемся за козой и перевозим её.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Очевидно, у Маши денег не было (у Миши не хватало всего одной копейки и Маша не смогла ему помочь). Значит букварь стоил столько, сколько ей не хватило, т. е. 7 копеек.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Задача выглядит обескураживающей. Согласитесь, вопрос действительно нестандартный.

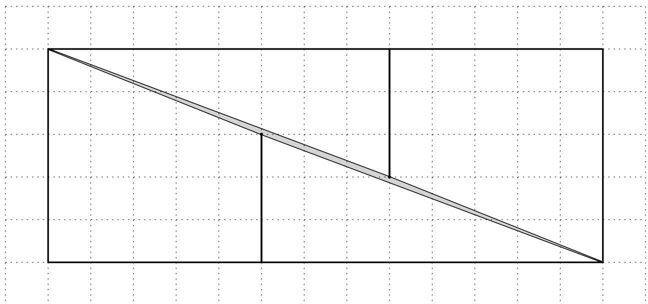
Если нарисовать всё произошедшее на плоскости, получится противоречие с условием: сначала охотник был «строго ниже» медведя, затем отошёл вправо и снова оказался строго ниже медведя. Как такое может быть, если медведь не двигался (что подразумевается)?..

Нетрудно догадаться, что цвет шкуры белый, потому что так странно ведёт себя координатная сетка только рядом с полюсами. Хотя от школьников требуется только найти случай с Северным полюсом (слева на рисунке), обязательно обратите внимание на то, что, вообще говоря, эта история могла произойти и на Южном полюсе тоже (правый рисунок).



Во втором случае охотник, пройдя всего 100 метров, должен сделать один или несколько оборотов вокруг Земли и оказаться на своей изначальной позиции. Впрочем, этот случай на ответ не влияет, потому что на Южном полюсе медведи не водятся.

4 Фокус в том, что угловые коэффициенты гипотенуз треугольников и боковых сторон трапеций разные (хотя и очень близкие: 3/8 и 2/5 соответственно, разница 1/40), а потому эти отрезки никак не могут слиться в одну линию — диагональ прямоугольника 5×13. На рисунке это не видно, поскольку линии на нём изображены нарочито жирно. Если же перерисовать его тонким карандашом в крупном масштабе (скажем, три тетрадные клетки на один квадратик), то по диагонали можно увидеть щель в форме параллелограмма. Его площадь как раз равна одной клетке (той самой лишней).



Вот важный и интересный факт, который можно предложить доказать школьникам постарше (он интересен и студентам, и имеет различные приложения). Параллелограмм с вершинами в узлах тетрадной сетки имеет площадь 1 тогда и только тогда, когда ни внутри него, ни на его границе нет других узлов сетки. Такие параллелограммы называются *примитивными* или *фундаментальными*.

5 На плоскости это сделать невозможно — выйдем в пространство. Ответ в пункте а) — правильный тетраэдр, в пункте б) — два правильных тетраэдра с общим основанием.

6 Кофе в первом стакане (с молоком), как и молоко во втором стакане (с кофе), дополняют молоко в первом стакане до объёма одного стакана. Поэтому ответ: поровну.