

УДК 373.5.016:514.113

ББК 74.262.215

С13

Серия основана в 2002 году

Савченко, В. И.

С13 **Стереометрия на готовых чертежах и макетах / В. И. Савченко, М.В. Крылович. – Минск: Сэр-Вит, 2014. – 96 с. – (Мастерская учителя).**

ISBN 978-985-419-767-8.

Пособие содержит стереометрические задачи, представленные на готовых рисунках и макетах, а также краткие справочные материалы, охватывающие все темы школьного курса стереометрии. В целях экономии времени учебного занятия, в пособии приведены шаблоны стереометрических фигур. Материалы пособия можно использовать при изучении текущего программного материала, при организации итогового повторения, а также при подготовке к вступительным испытаниям в форме централизованного тестирования.

Рекомендуется учащимся, абитуриентам, а также учителям математики.

УДК 373.5.016:514.113

ББК 74.262.215

ISBN 978-985-419-767-8

© Савченко В.И., Крылович М.В., 2014

© Оформление. ООО «Сэр-Вит», 2014

От авторов

Цель данного пособия – ускорить темп работы при решении стереометрических задач, что будет способствовать эффективному усвоению и закреплению учебного материала на практике.

Задачи в пособии структурированы по темам школьного курса стереометрии и представлены блоками в виде таблиц. Каждый блок содержит справочный теоретический материал. Это минимум, необходимый для решения задач. К задачам кратко сформулировано задание.

Если в таблице представлена одна и та же геометрическая фигура, либо задание дается общее для всех задач, то это указано в «шапке» таблицы. В случае необходимости, рядом с чертежом записана остальная информация по условию задачи. Такая форма подачи материала позволяет наглядно представить изучаемый материал и быстро найти необходимые теоретические сведения для выполнения задания.

Некоторые задачи пособия содержат макеты и дополнительные выносные рисунки. По мнению авторов, они помогут ученику переложить условие задачи на пространственное представление стереометрической фигуры. Кроме того, с помощью выносных рисунков даются пошаговые подсказки для решения задачи.

Зачастую ученики тратят много времени на оформление рисунка задачи. Шаблоны стереометрических фигур, приведенные в конце книги, помогут сэкономить время, необходимое для оформления рисунка задачи.

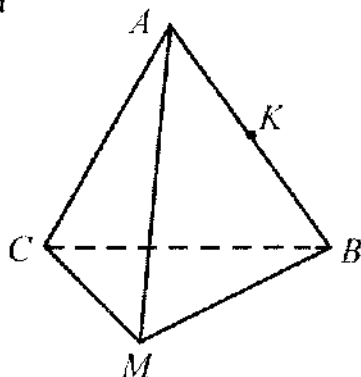
Желаем успехов в работе!

Аксиомы стереометрии (1)

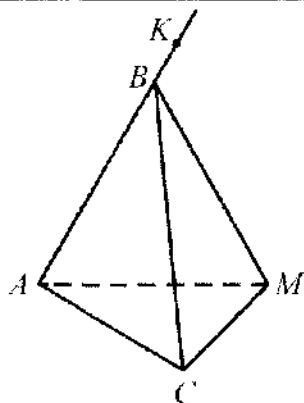
1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом единственная.
2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки этой прямой лежат в данной плоскости.
3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, содержащую данную точку.

На рисунках 1, а, б, в, г изображен тетраэдр $MABC$. Точка K лежит на прямой AB . Укажите плоскости, которым принадлежит точка K .

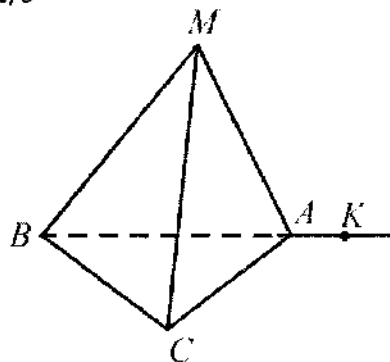
1, а



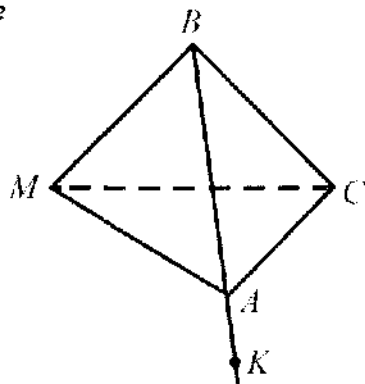
1, б



1, в



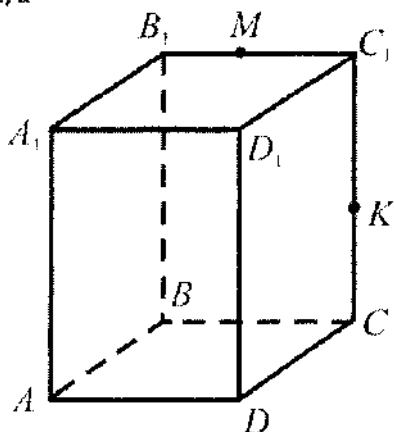
1, г



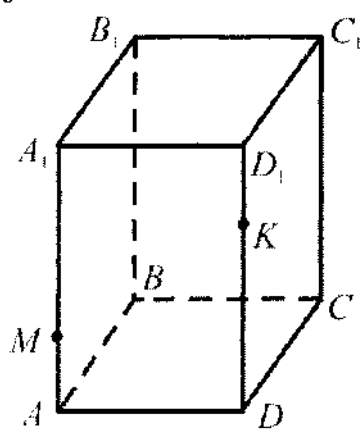
Аксиомы стереометрии (2)

На рисунках 2, а, б, в, г изображен прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Постройте точку пересечения прямой MK с плоскостью ABC .

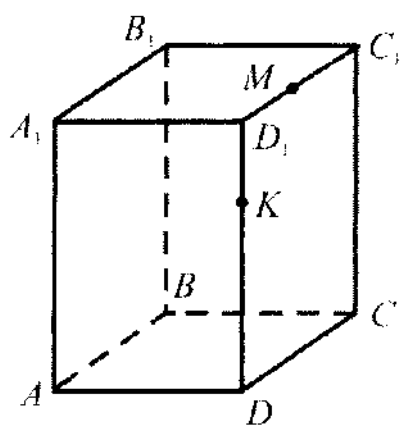
2, а



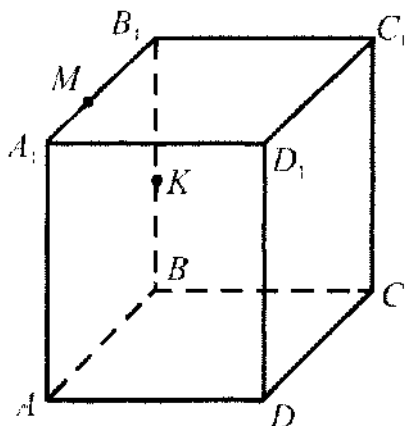
2, б



2, в



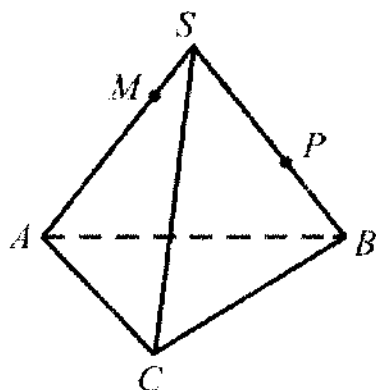
2, г



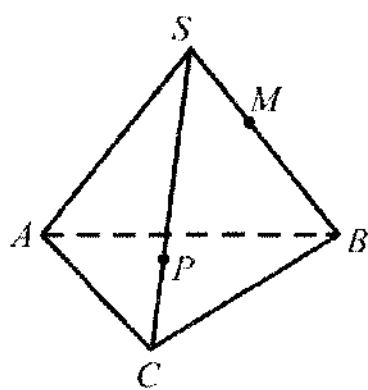
Аксиомы стереометрии (3)

На рисунках 3, а, б, в, г изображен тетраэдр $SABC$. Постройте точку пересечения прямой MP с плоскостью ABC .

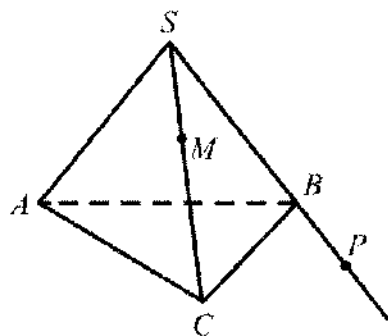
3, а



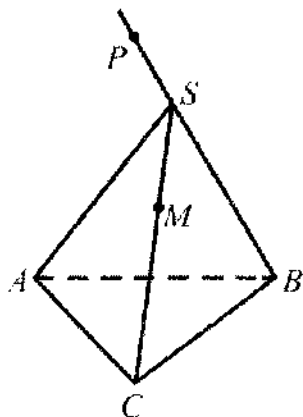
3, б



3, в



3, г

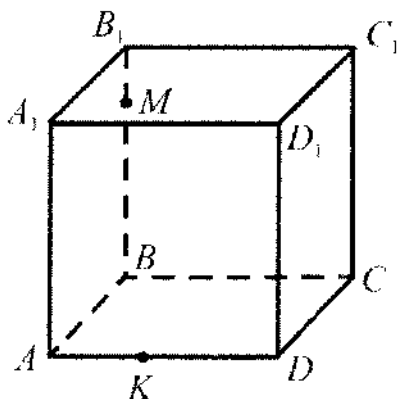


Построение сечений многогранников плоскостью (1)

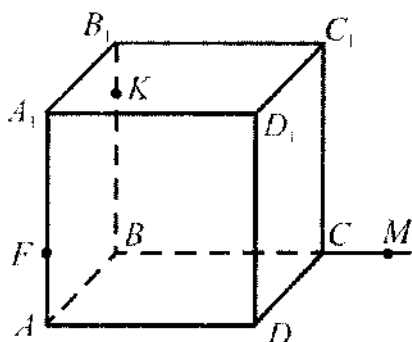
На рисунках 4, а, б, в, г изображен куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через:

- 1) вершину C и точки M и K (рис. 4, а);
- 2) точки F , M и K (рис. 4, б);
- 3) точки F , M и P (рис. 4, в);
- 4) точки P , M и K (рис. 4, г).

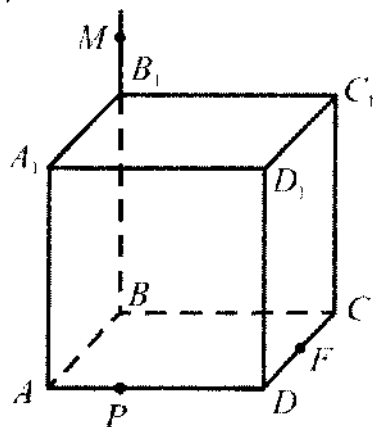
4, а



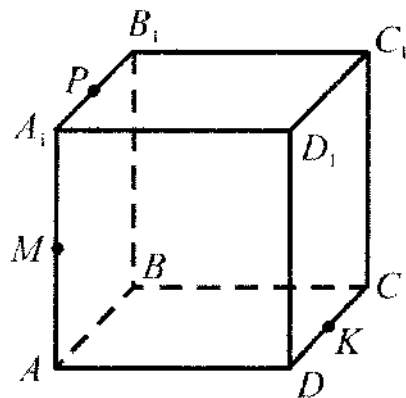
4, б



4, в



4, г

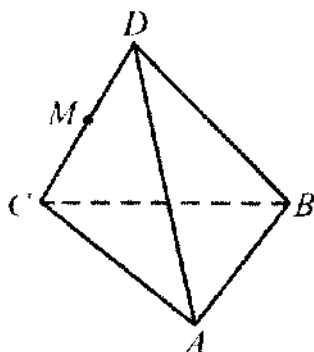


Построение сечений многогранников плоскостью (2)

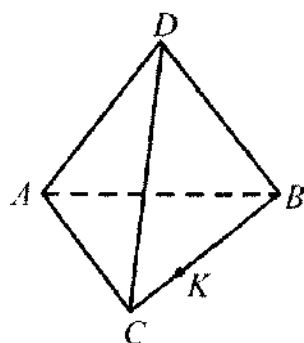
На рисунках 5, а, б, в, г изображена пирамида. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через:

- 1) ребро AB и точку M (рис. 5, а);
- 2) ребро AD и точку K (рис. 5, б);
- 3) ребро AS и точку F , где $F \in SCD$ (рис. 5, в);
- 4) точки F , P и Q (рис. 5, г).

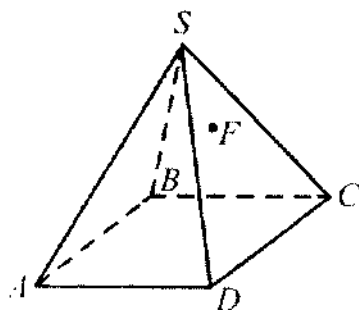
5, а



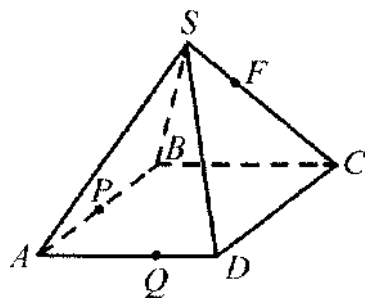
5, б



5, в



5, г



Параллельные прямые в пространстве

Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

1. Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной прямой.

2. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

3. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой.

4. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

На рисунках 6, а, б, в, г изображена правильная призма. Назовите прямые, параллельные прямой:

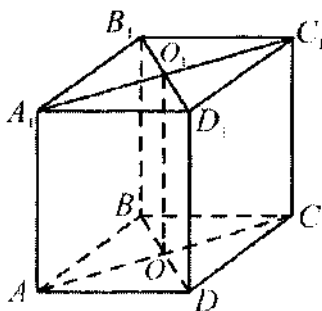
1) AA_1 (рис. 6, а);

3) B_1C_1 (рис. 6, б);

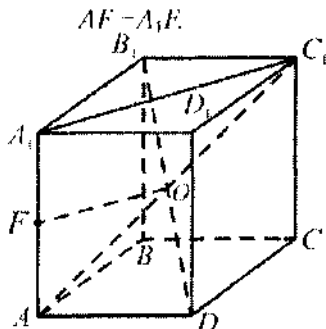
2) A_1C_1 (рис. 6, б);

4) B_1H (рис. 6, г).

6, а

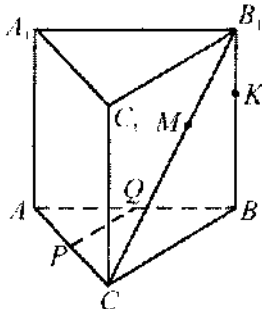


6, б



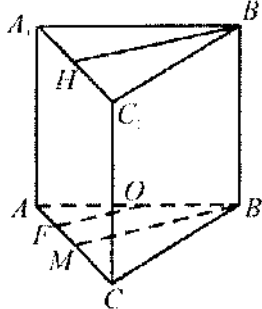
6, в

$B_1M = 6$; $CM = 9$; $B_1K = 2,8$;
 $BK = 4,2$; $AP = PC$; $AQ = QB$.



6, г

$B_1H \perp A_1C_1$; $AM = MC$;
 $\angle AFO = \angle FMB$.



Параллельность прямой и плоскости

Прямая и плоскость называются **параллельными**, если они не имеют общих точек.

1. Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.

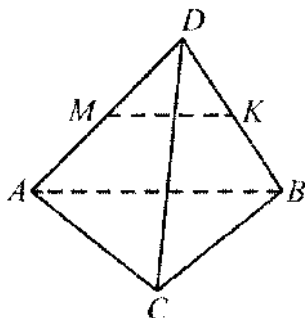
2. Если плоскость содержит прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

На рисунках 7, а, б, в, г изображена пирамида.

7, а

$\angle ABC = \angle ACB = 60^\circ$;
 $MK \parallel ABC$; $AM = MD$;
 $AC = 6\sqrt{2}$.

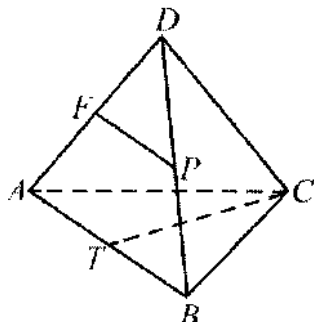
$MK = ?$



7, б

$AF = FD$; $FP \parallel ABC$;
 $\angle ACB = 90^\circ$; $AT = BT$;
 $CT = 9$.

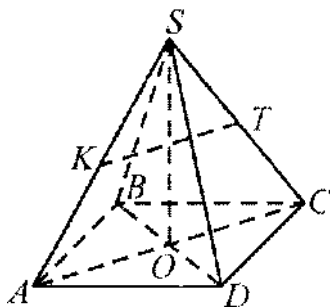
$FP = ?$



7, в

$KT \parallel ABC$; $CT = ST$;
 $ABCD$ — ромб; $AD = 15$;
 $BD : AC = 3 : 4$.

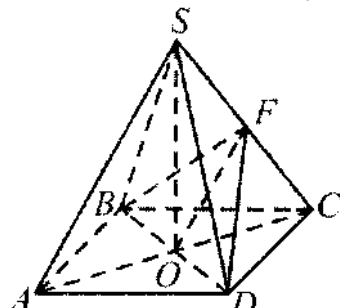
$KT = ?$



7, г

$AS \parallel BFD$; $ABCD$ — квадрат; $AB = 6$; $AS = 8$.

$S_{BFD} = ?$



Скрещивающиеся прямые

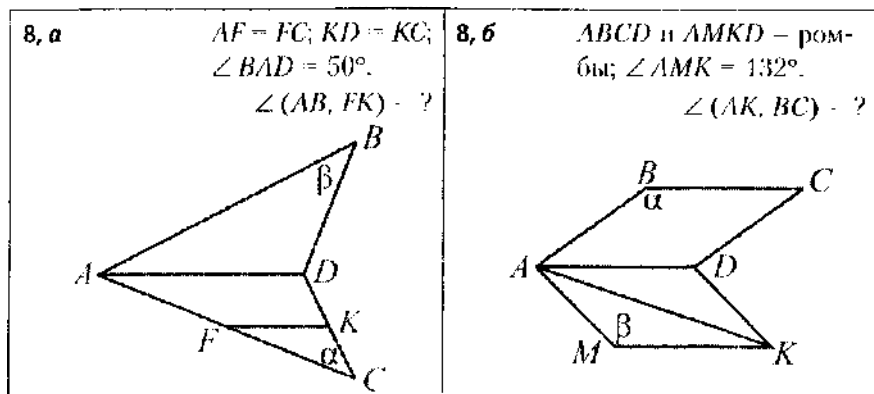
Две прямые называются **скрещивающимися**, если не существует плоскость, которой они обе принадлежат.

1. Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на данной прямой, то эти прямые скрещивающиеся.

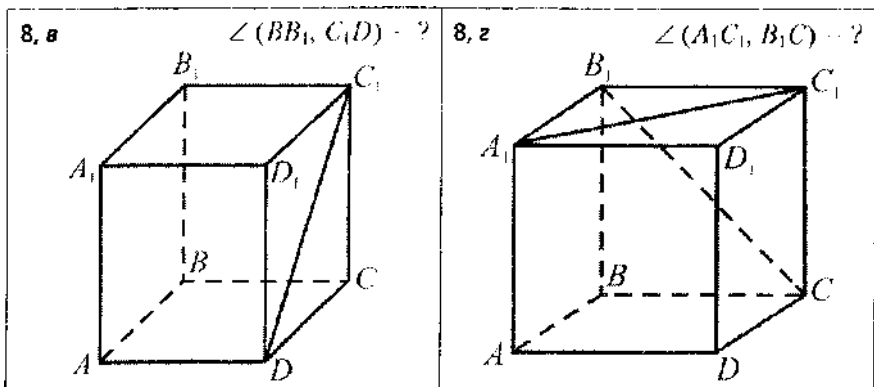
2. Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит единственная плоскость, параллельная другой прямой.

3. Углом между скрещивающимися прямыми a и b называется угол между построенными пересекающимися прямыми a_1 и b_1 , где $a_1 \parallel a, b_1 \parallel b$.

На рисунках 8, а, б плоскости α и β пересекаются по прямой AD .



На рисунках 8, в, з изображен куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.



Параллельность плоскостей (1)

Две плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются.

1. Если две пересекающиеся прямые, принадлежащие одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым, принадлежащим другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

2. Противоположные грани параллелепипеда лежат в параллельных плоскостях.

3. Если две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, то линии их пересечения параллельны между собой.

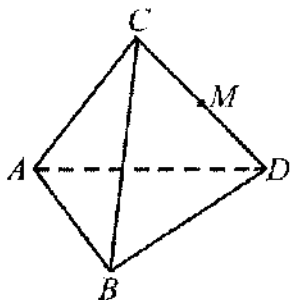
4. Отрезки параллельных прямых, расположенные между параллельными плоскостями, равны между собой.

5. Через точку, не лежащую в плоскости, проходит единственная плоскость, параллельная данной плоскости.

На рисунках 9, а, б изображен правильный тетраэдр $ABCD$, длина ребра которого равно 8. Проведите плоскость, проходящую через точку M параллельно плоскости ABC . Найдите периметр полученного сечения.

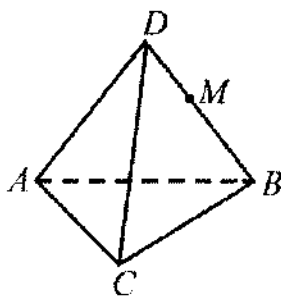
9, а

$$CM = MD.$$



9, б

$$DM : BM = 3 : 5.$$

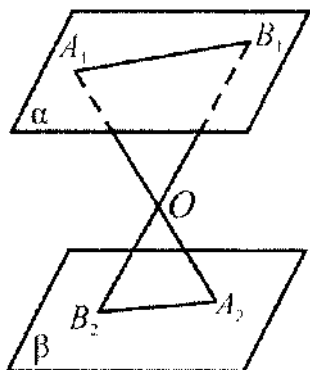


Параллельность плоскостей (2)

На рисунках 10, а, б, в, г плоскости α и β параллельны; $A_1 \in \alpha, A_2 \in \beta, B_1 \in \alpha, B_2 \in \beta$; $A_1A_2 \cap B_1B_2 = O$.

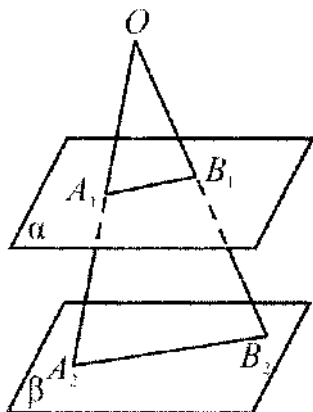
10, а $A_1O = 5; A_2O = 3; A_2B_2 = 3.$

$A_1B_1 = ?$



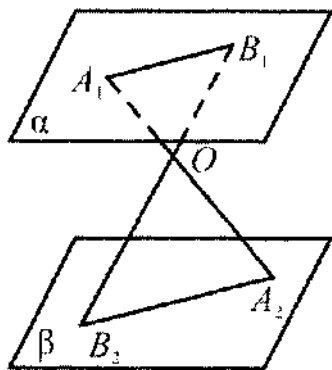
10, б $B_1O : B_1B_2 = 5 : 8; A_1B_1 = 6.$

$A_2B_2 = ?$



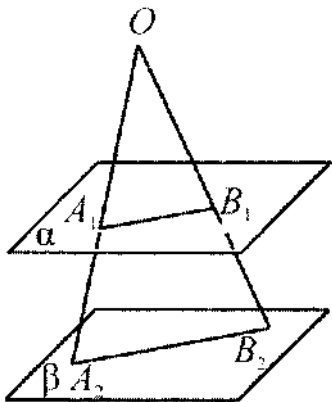
10, в $A_1A_2 = 14; B_1O : B_2O = 3 : 4.$

$A_1O = ?$



10, г $A_1A_2 = 3; B_1O : B_2O = 3 : 5.$

$A_1O = ?$

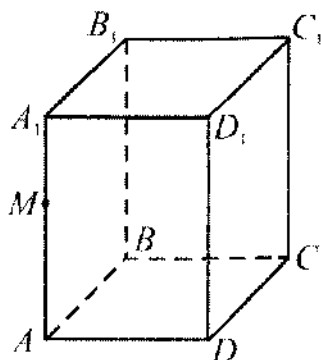


Построение сечений многогранников плоскостью (3)

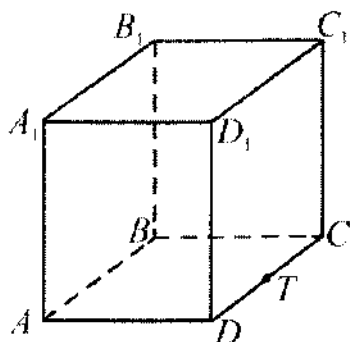
На рисунках 11, а, б, в, г изображен прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки:

- 1) M, B_1, C (рис. 11, а);
- 2) B, B_1, T (рис. 11, б);
- 3) C, D, P (рис. 11, в);
- 4) A, K, O (рис. 11, г).

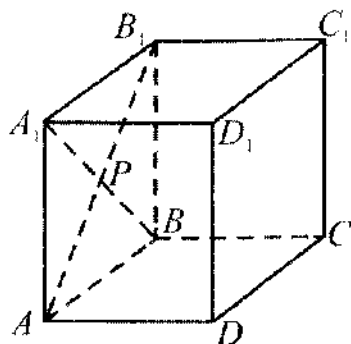
11, а



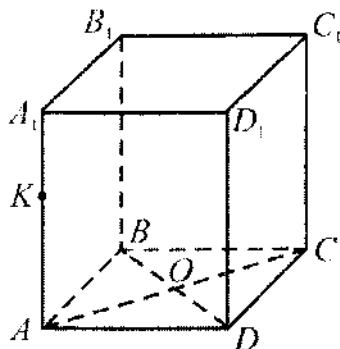
11, б



11, в



11, г

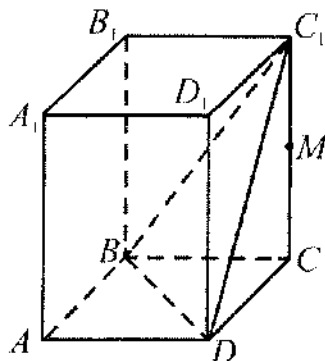


Построение сечений многогранников плоскостью (4)

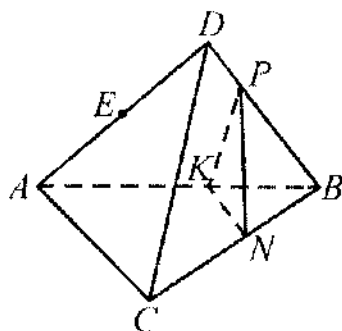
На рисунках 12, а, б, в, г изображены правильные многогранники. Постройте сечение многогранника плоскостью, проходящей через точку:

- 1) M , параллельно плоскости BDC_1 (рис. 12, а);
- 2) E , параллельно плоскости KNP (рис. 12, б);
- 3) F , параллельно плоскости AB_1C (рис. 12, в);
- 4) K , параллельно плоскости ACT (рис. 12, г).

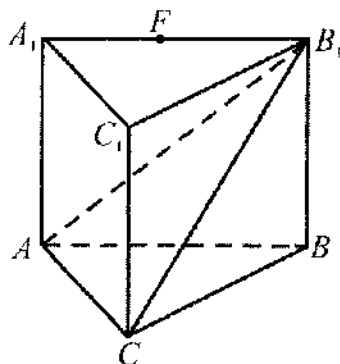
12, а



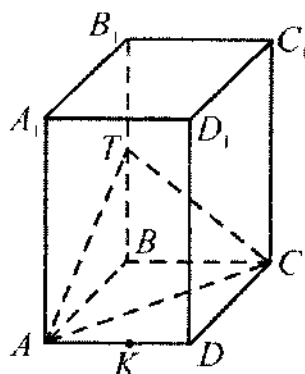
12, б



12, в



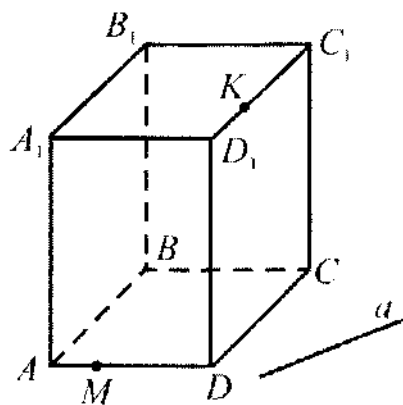
12, г



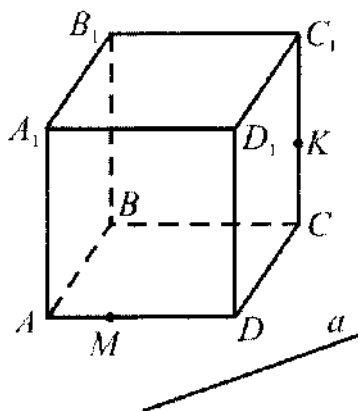
Построение сечений многогранников плоскостью (5)

На рисунках 13, а, б, в, г изображен прямой параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Прямая a лежит в плоскости ABC . Точки M и K лежат на ребрах параллелепипеда. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки M и K параллельно прямой a .

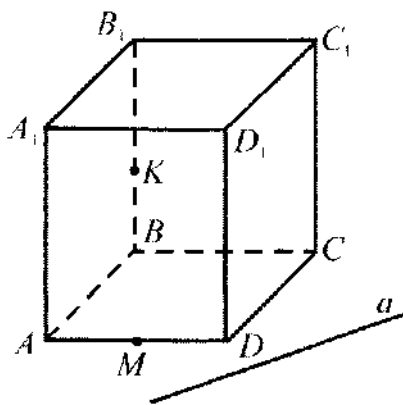
13, а



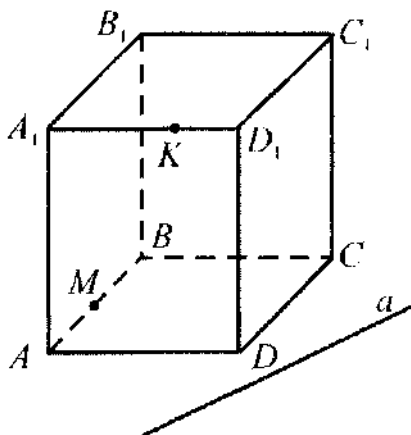
13, б



13, в



13, г

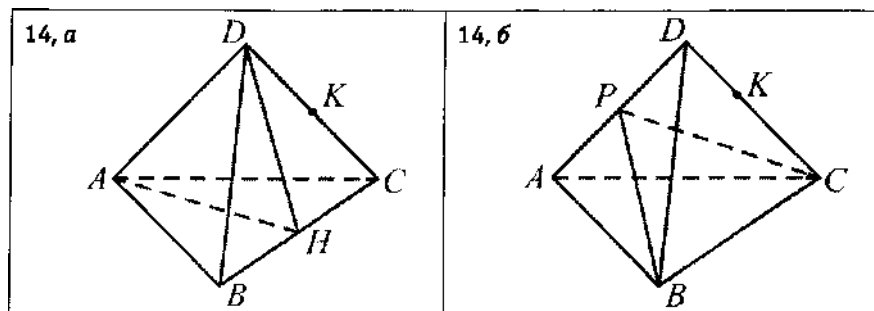


Построение сечений многогранников плоскостью (6)

На рисунках 14, а, б изображен правильный тетраэдр $ABCD$, длина ребра которого равна 16. Точка K лежит на ребре CD . Найдите площадь сечения, проведенного через точку K параллельно плоскости:

1) ADH (K – середина отрезка CD , H – середина отрезка BC) (рис. 14, а);

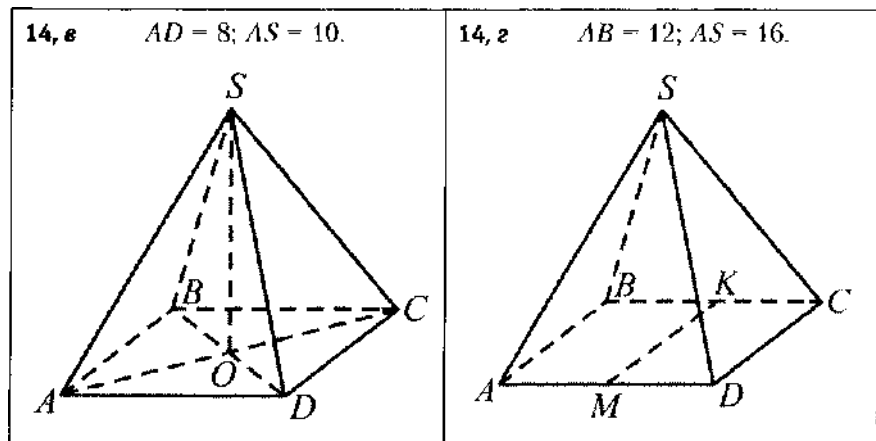
2) PBC ($CK : KD = 3 : 5$, P – середина отрезка AD) (рис. 14, б).



На рисунках 14, в, г изображена правильная пирамида $SABCD$. Найдите площадь сечения, проведенного через:

3) диагональ основания BD параллельно ребру AS (рис. 14, в);

4) точки M и K , где M и K – середины ребер AD и BC соответственно параллельно грани SCD (рис. 14, г).



Перпендикулярность прямой и плоскости

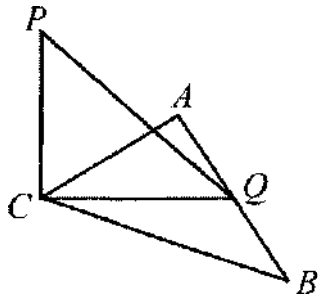
Прямая называется **перпендикулярной плоскости**, если она перпендикулярна каждой прямой, лежащей в этой плоскости.

1. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.

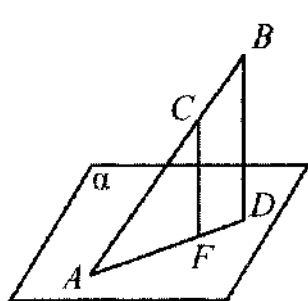
2. Если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то они параллельны.

3. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

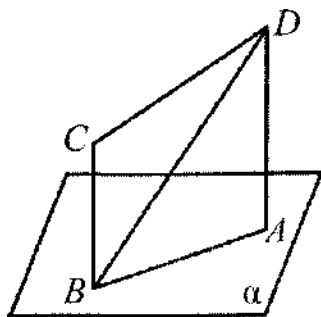
15, а $CP \perp ABC$; $\angle ACB = 90^\circ$;
 $AQ = QB$; $AB = 4$; $PQ = 3$.
 $CP = ?$



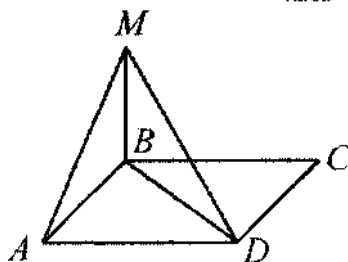
15, б $AD \in \alpha$; $BD \perp \alpha$; $CF \perp \alpha$;
 $\frac{AF}{FD} = \frac{7}{3}$; $BD = 6$.
 $CF = ?$



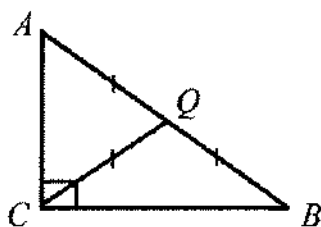
15, в $AB \in \alpha$; $BC \parallel AD$; $BC \perp \alpha$;
 $AB = BC = 3$; $BD = 5$.
 $S_{ABCD} = ?$



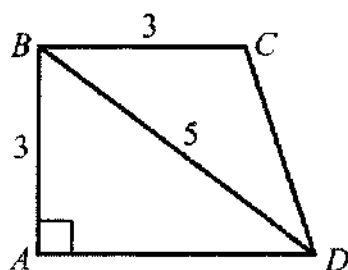
15, г $BM \perp BC$; $BM \perp AB$;
 $ABCD$ – прямоугольник;
 $DM = 8$; $\angle BDM = 30^\circ$;
 $\angle MAB = 45^\circ$.
 $P_{ABCD} = ?$



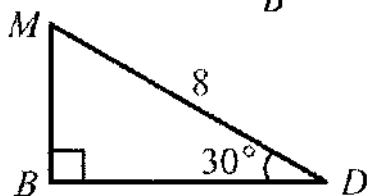
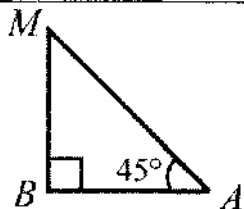
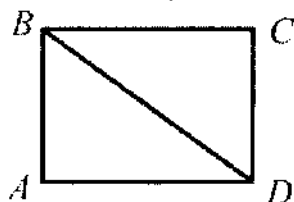
Выносной рисунок к задаче 15, а



Выносной рисунок к задаче 15, в



Выносные рисунки к задаче 15, г



Свойства диагоналей прямоугольного параллелепипеда

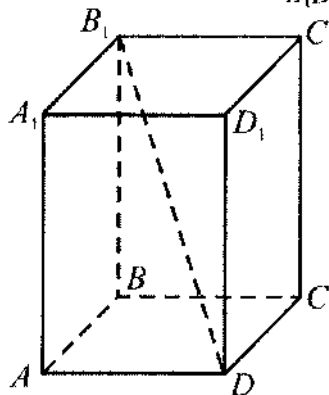
1. Квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов длин трех его измерений: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

2. Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

На рисунках 16, а, б, в, г изображен прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

16, а $AB = 4; AD = 3; AA_1 = 2\sqrt{6}.$

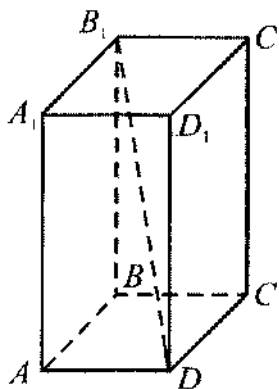
$B_1 D = ?$



16, б $AB : BC : AA_1 = 2 : 3 : 4;$

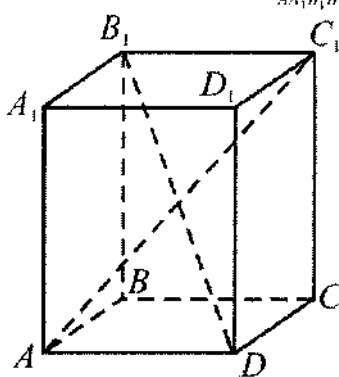
$B_1 D = 5\sqrt{29}.$

$S_{ABCD} = ?$



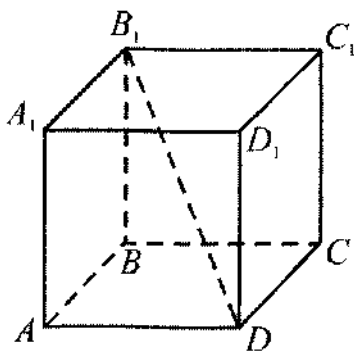
16, в $AB = AD = 6;$
 $B_1 D + AC_1 = 12\sqrt{5}.$

$S_{AA_1 B_1 B} = ?$



16, г $AB = AD = AA_1; B_1 D = 4\sqrt{3}.$

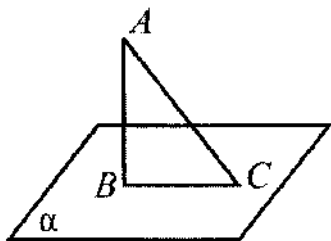
$P_{ABCD} = ?$



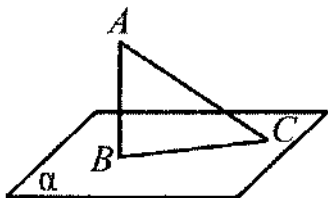
Перпендикуляр и наклонная

На рисунках 17, а, б из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AB и наклонная AC ; BC – проекция наклонной AC на плоскость α .

17, а $AB - BC = 2$; $AC = \sqrt{74}$.
 $AB - ?$

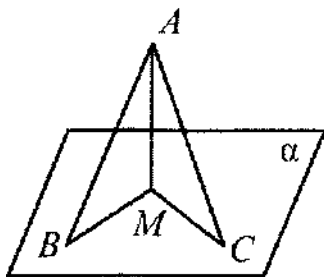


17, б $AB = \frac{2}{3} AC$; $BC = \sqrt{20}$.
 $AB - ?$

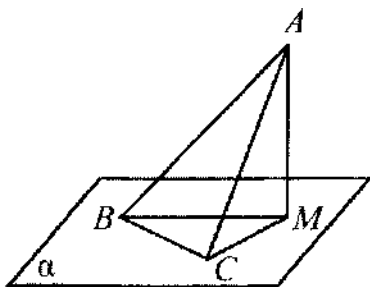


На рисунках 17, в, г из точки A к плоскости α проведены наклонные AB и AC ; $AM \perp \alpha$.

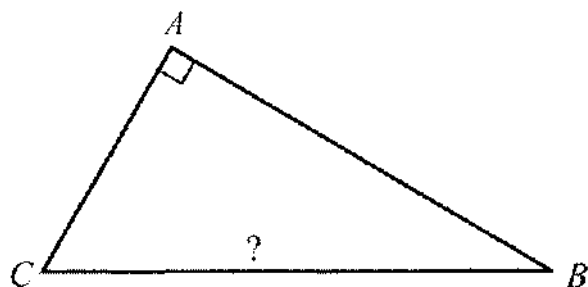
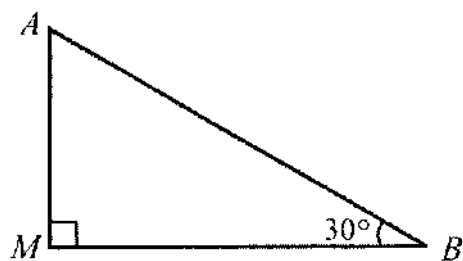
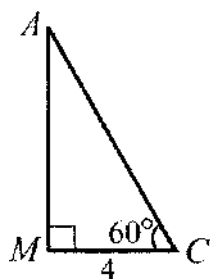
17, в $AB : AC = 4 : 3$; $BM = 16$;
 $CM = 9$.
 $AM - ?$



17, г $CM = 4$; $\angle ACM = 60^\circ$;
 $\angle ABM = 30^\circ$; $\angle BAC = 90^\circ$.
 $BC - ?$



Выносные рисунки к задаче 17, з



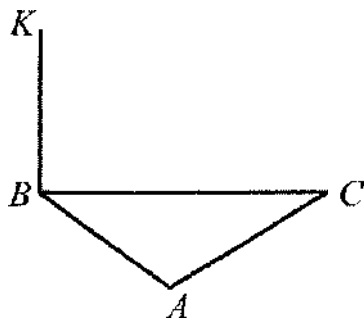
Теорема о трех перпендикулярах

1. Прямая, проведенная в плоскости и перпендикулярная проекции наклонной на эту плоскость, перпендикулярна и самой наклонной. (теорема о трех перпендикулярах).

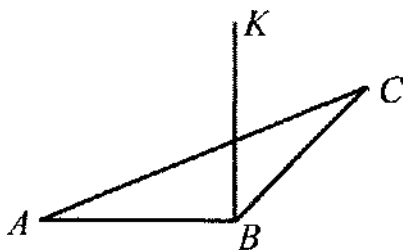
2. Прямая, проведенная в плоскости перпендикулярно наклонной, перпендикулярна и проекции наклонной на эту плоскость.

На рисунках 18, а, б, в, г отрезок BK перпендикулярен плоскости ABC . Найдите расстояние от точки K до прямой AC .

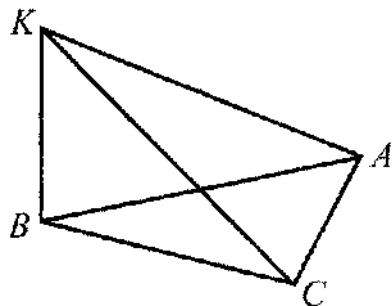
18, а $AB = BC = AC = 6$; $BK = 5$.



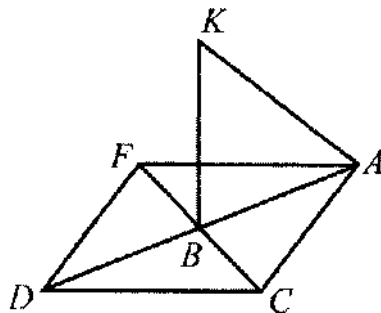
18, б $\angle ABC = 90^\circ$; $AB = 15$;
 $BC = 20$; $BK = 9$.



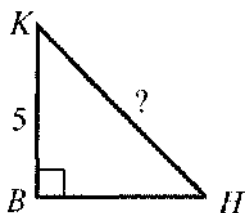
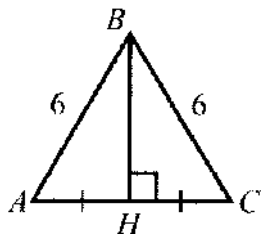
18, в $\angle ACB = 90^\circ$; $AC = 3$;
 $AB = 6$; $BK = 3$.



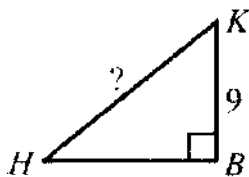
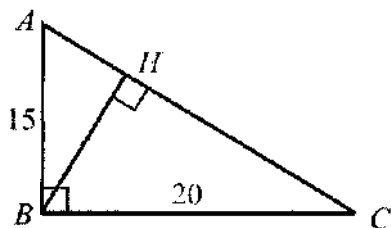
18, г $ACDF$ – квадрат; $AK = 4$;
 $\angle BAK = 60^\circ$.



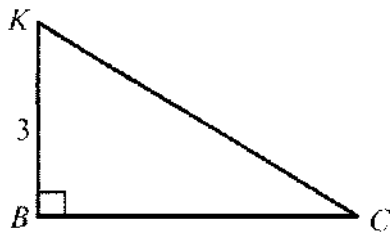
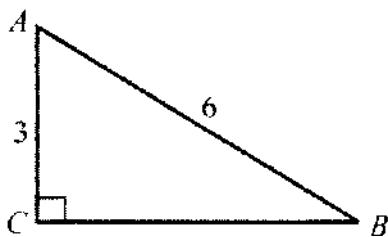
Выносные рисунки к задаче 18, а



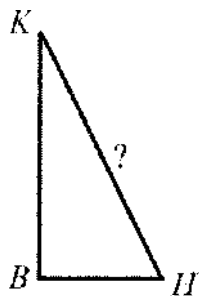
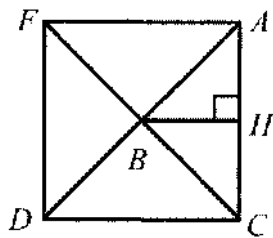
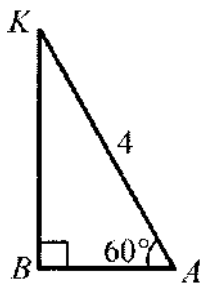
Выносные рисунки к задаче 18, б



Выносные рисунки к задаче 18, в



Выносные рисунки к задаче 18, г

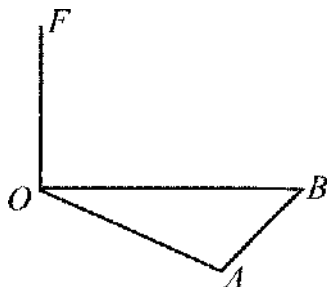


Расстояние от точки до плоскости (1)

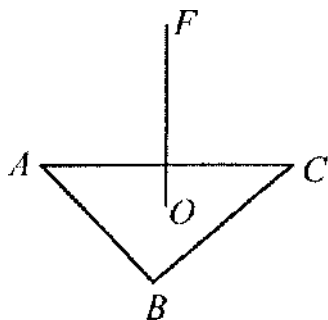
Расстоянием *от точки до плоскости* является длина перпендикуляра, проведенного из этой точки к данной плоскости.

На рисунках 19, а, б, в, г длина отрезка OF является расстоянием от точки F до плоскости ABC . Найдите расстояние от точки F до прямой AB .

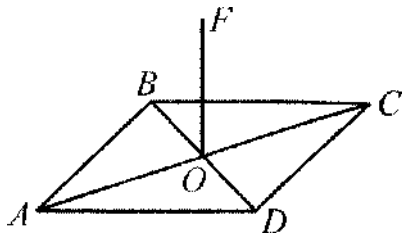
19, а $OF = 6$; $AB = 7$; $S_{AOB} = 21$.



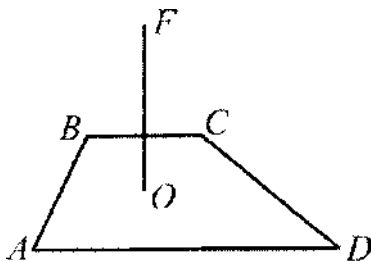
19, б $AB = AC = BC = 4\sqrt{3}$; $OF = 4$;
 O – центр окружности,
вписанной в треугольник
 ABC .



19, в $ABCD$ – ромб; $AD = 13$;
 $BD = 10$; $OF = \frac{20\sqrt{7}}{13}$.



19, г $ABCD$ – трапеция;
 $P_{ABCD} = 24$; $S_{ABCD} = 42$;
 $OF = 8.5$; O – центр ок-
ружности, вписанной в
трапецию $ABCD$.



Расстояние от точки до плоскости (2)

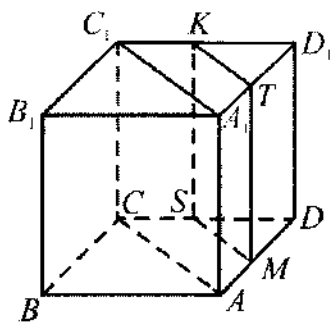
Расстоянием *между параллельными плоскостями* является расстояние от любой точки одной из плоскостей до другой плоскости.

Расстоянием *между прямой и параллельной ей плоскостью* называется расстояние от любой точки прямой до плоскости.

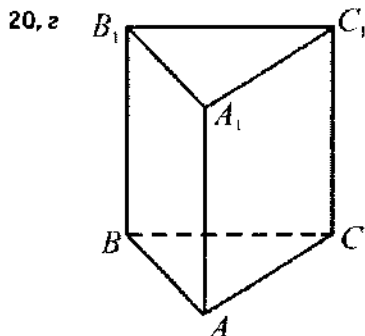
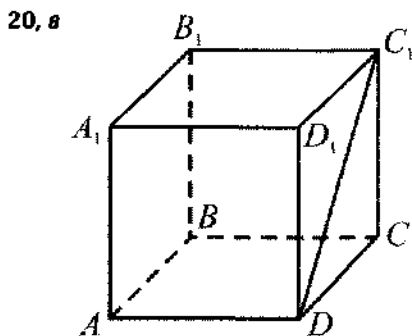
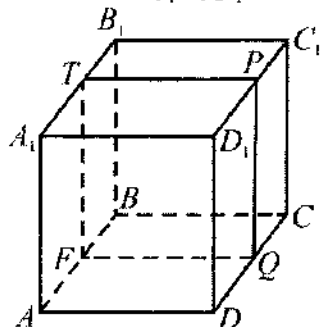
На рисунках 20, а, б, в, г изображен куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, длина ребра которого равна 12, а на рисунке 20, г – правильная призма $ABCA_1 B_1 C_1$, все ребра которой равны 10. Найдите расстояние между:

- 1) плоскостями $AA_1 C_1$ и MSK (рис. 20, а);
- 2) плоскостями $AA_1 D_1$ и FTP (рис. 20, б);
- 3) прямой $C_1 D$ и плоскостью $AA_1 B_1$ (рис. 20, в);
- 4) прямой CC_1 и плоскостью ABB_1 (рис. 20, г).

20, а $AM = DM$; $CS = DS$;
 $C_1 K = D_1 K$; $A_1 T = D_1 T$.



20, б $FTP \parallel BB_1 C_1$;
 $C_1 P : D_1 P = 2 : 3$.

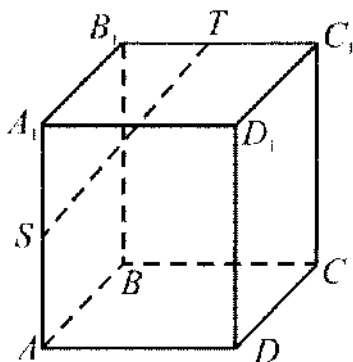


Построение ортогональных проекций

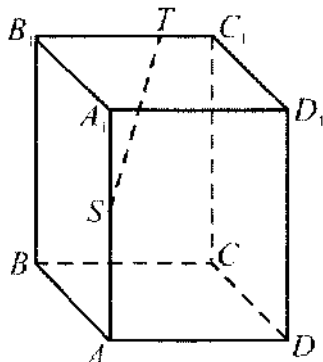
На рисунках 21, а, б, в, г изображена правильная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка S лежит на ребре AA_1 , а точка T – на ребре $B_1 C_1$. Постройте ортогональную проекцию отрезка ST на плоскость:

- 1) ABC (рис. 21, а);
- 2) $AA_1 B_1$ (рис. 21, б);
- 3) $A_1 B_1 C_1$ (рис. 21, в);
- 4) $BB_1 C_1$ (рис. 21, г).

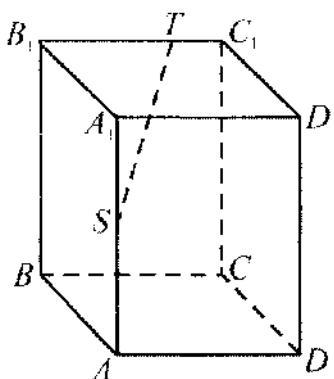
21, а



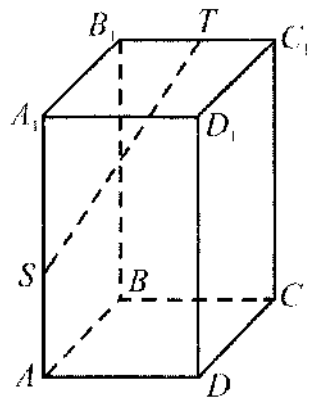
21, б



21, в



21, г



Расстояние между скрещивающимися прямыми

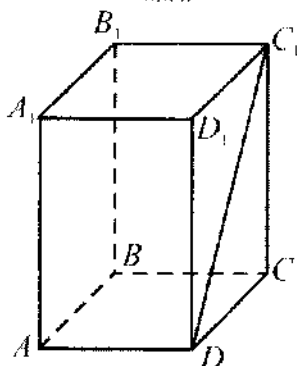
Расстоянием *между скрещивающимися прямыми* называется расстояние от одной из прямых до плоскости, проходящей через другую прямую и параллельной первой прямой.

На рисунке 22, а изображена правильная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, на 22, б – куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, на 22, в – правильная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, на 22, г – правильный тетраэдр. Найдите расстояние между прямыми:

- 1) $C_1 D$ и AB (рис. 22, а); 3) AA_1 и $B_1 C$ (рис. 22, в);
- 2) $B_1 D$ и AB (рис. 22, б); 4) AC и BD (рис. 22, г).

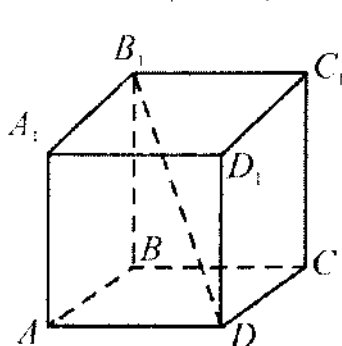
22, а

$$S_{ABCD} = 64.$$



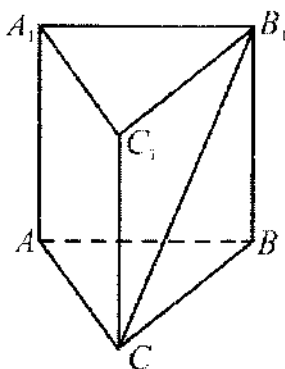
22, б

$$B_1 D = 12\sqrt{3}.$$



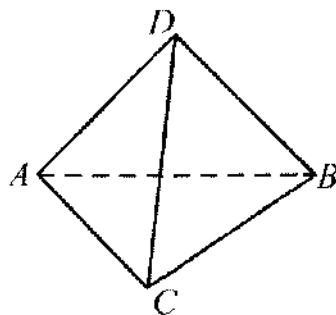
22, в

$$S_{ABC} = 9\sqrt{3}.$$



22, г

$$AC = 8.$$



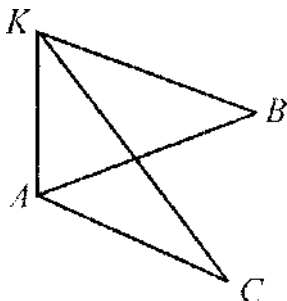
Угол между прямой и плоскостью (1)

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на данную плоскость.

На рисунках 23, а, б, в, г прямая AK перпендикулярна плоскости ABC . Найдите угол между прямой BK и плоскостью ABC .

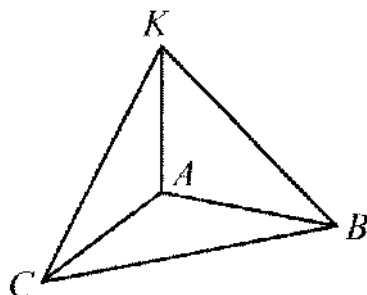
23, а

$$CK = 8; BK = 4\sqrt{2}; \\ \angle ACK = 30^\circ.$$



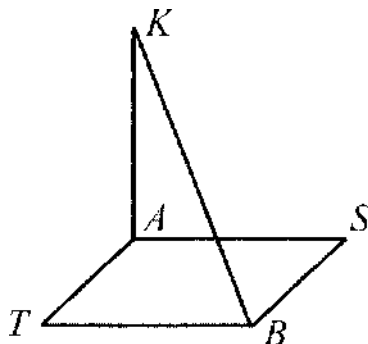
23, б

$$KC = 4; BC = 6; \\ AC = AB; \angle CAB = 120^\circ.$$



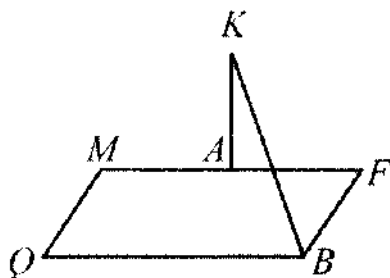
23, в

$$ASBT - \text{квадрат}; \\ AK = AT.$$

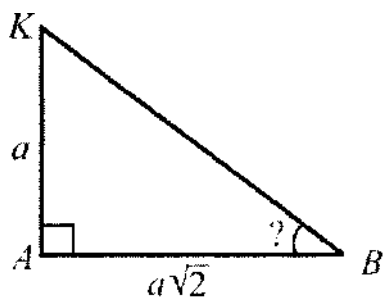
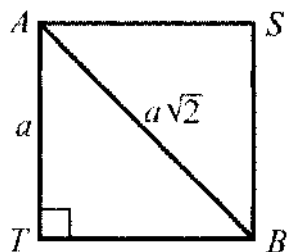


23, г

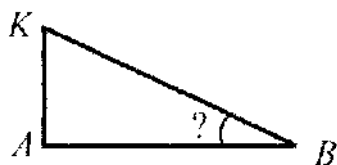
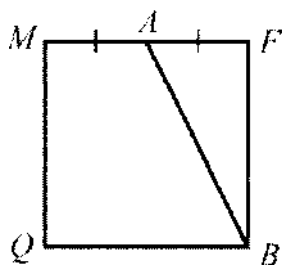
$$MFBQ - \text{квадрат}; \\ AM = AK = AF.$$



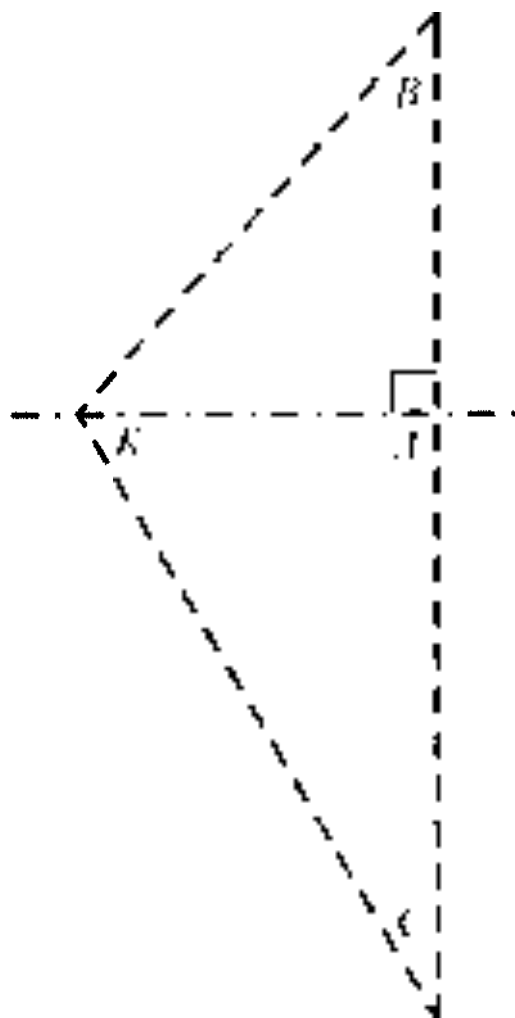
Выносные рисунки к задаче 23, в



Выносные рисунки к задаче 23, г



Макет к задаче 23, а

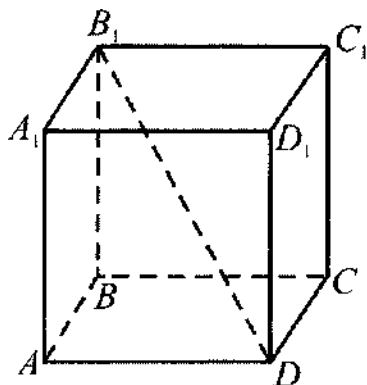


✂ — — — — — линия разреза

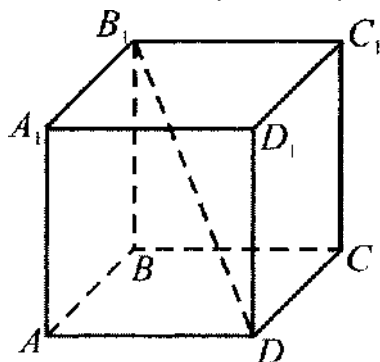
— · — · — · — · — линия сгиба

Угол между прямой и плоскостью (2)

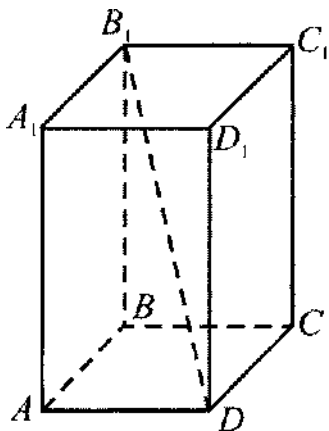
24, а $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб;
 $\operatorname{tg} \angle (B_1 D; ABC) = ?$



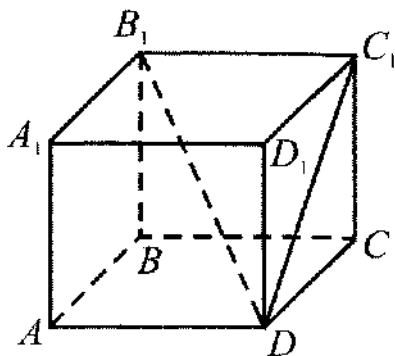
24, б $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямая призма; $ABCD$ – ромб; $AB = AA_1$;
 $\angle BAD = 60^\circ$.
 $\angle (B_1 D; ABC) = ?$



24, в $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямоугольный параллелепипед; $AB = 9$; $AD = 12$;
 $\angle (B_1 D; ABC) = \arccos 0,6$.
 $B_1 D = ?$



24, г $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – правильная призма;
 $\angle (C_1 D; ABC) = 30^\circ$.
 $\angle (B_1 D; C_1 CD) = ?$



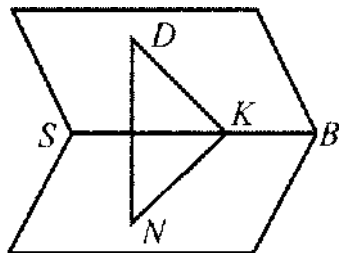
Двугранный угол (1)

Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей граничной прямой (ребром двугранного угла) и частью пространства, для которой эти полуплоскости служат границей.

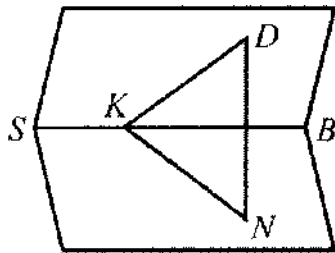
Линейным углом двугранного угла называется угол, сторонами которого являются лучи с общим началом на ребре двугранного угла, проведенными в его гранях перпендикулярно ребру.

На рисунках 25, а, б, в, г изображен двугранный угол $DSBN$.

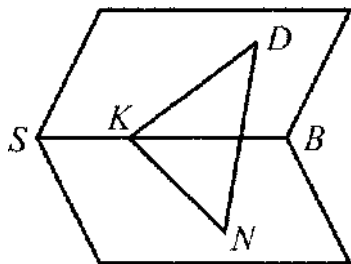
25, а $DN = 5$; $DK = 10$;
 $\angle DNK = 90^\circ$; $\angle DKB = 90^\circ$.
 $\angle DSBN = ?$



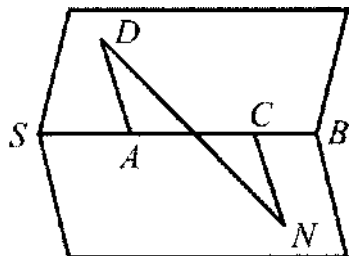
25, б $DK = 3$; $DN = 7$; $KN = 5$;
 $DK \perp SB$; $KN \perp SB$.
 $\angle DSBN = ?$



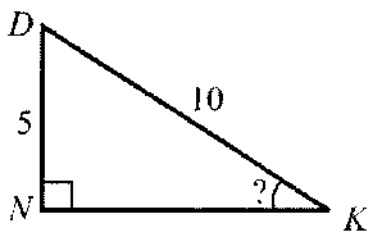
25, в $KD \perp SB$; $KN \perp SB$;
 $KD = KN$; $\angle KDN = 35^\circ$.
 $\angle DSBN = ?$



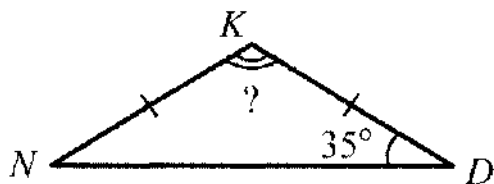
25, г $AD \perp SB$; $NC \perp SB$;
 $AD = 8$; $CN = 5$; $AC = 4\sqrt{2}$;
 $\angle DSBN = 60^\circ$.
 $DN = ?$



Выносной рисунок к задаче 25, а



Выносной рисунок к задаче 25, а



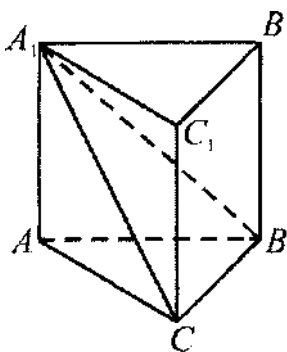
Двугранный угол (2)

Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна площади проектируемого многоугольника, умноженной на косинус угла между плоскостями многоугольника и его проекции:

$$S_{\text{пр}} = S_{\text{многоуг.}} \cdot \cos \alpha.$$

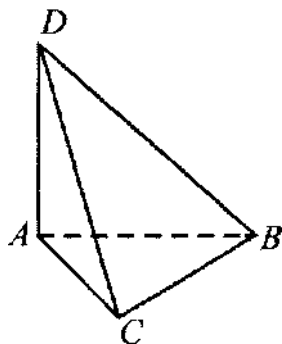
26, а $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма; $S_{A_1BC} = 14\sqrt{2}$; $\angle ABCA_1 = 45^\circ$.

$$S_{ABC} = ?$$



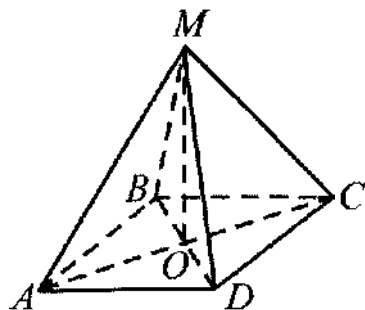
26, б $AD \perp ABC$; $AC \perp AB$; $AC = AB$; $BC = 9\sqrt{2}$; $\angle ABCD = 30^\circ$.

$$S_{BCD} = ?$$



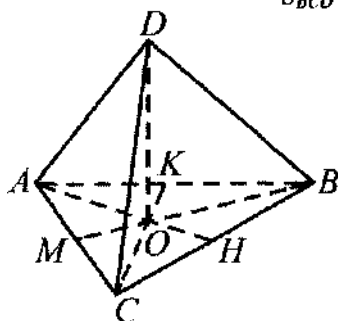
26, в $MO \perp ABC$; $ABCD$ — квадрат; $AB = 12$; $\angle MCDO = 60^\circ$.

$$S_{MCD} = ?$$



26, г $DO \perp ABC$; $\angle DBCO = 30^\circ$; $AM = MC = CH = BH = AK = BK = 6$.

$$S_{BCD} = ?$$



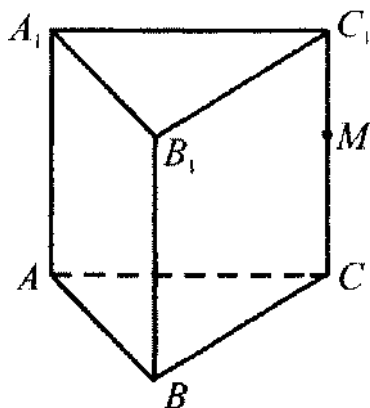
Двугранный угол (3)

Площадь сечения многогранника плоскостью можно найти по формуле $S_{\text{сеч}} = \frac{S_{\text{пр}}}{\cos \alpha}$, где $S_{\text{пр}}$ – площадь проекции сечения, α – угол между плоскостью сечения и плоскостью ее проекции.

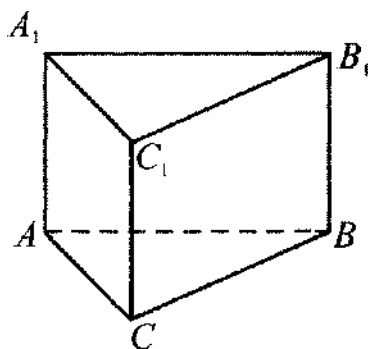
На рисунках 27, а, б, в, г изображена прямая призма. Найдите площадь сечения, проведенного через:

- 1) вершины A, B и точку M , принадлежащую ребру CC_1 (рис. 27, а);
- 2) гипотенузу основания и вершину прямого угла верхнего основания (рис. 27, б);

27, а Треугольник ABC – правильный; $AB = 6$;
 $\cos \angle MABC = 0,8$.



27, б $\angle BAC = 90^\circ$; $BC = 12$;
 $\sin \angle ABC = \frac{1}{6}$;
 $\cos \angle A_1BCA = \frac{\sqrt{35}}{8}$.



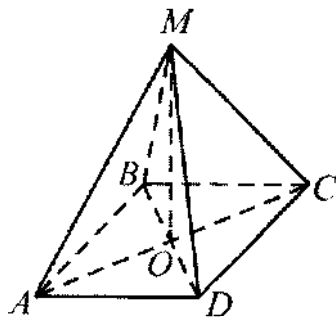
Перпендикулярность плоскостей

1. Две плоскости называются взаимно перпендикулярными, если угол между ними равен 90° .

2. Если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то эти плоскости взаимно перпендикулярны.

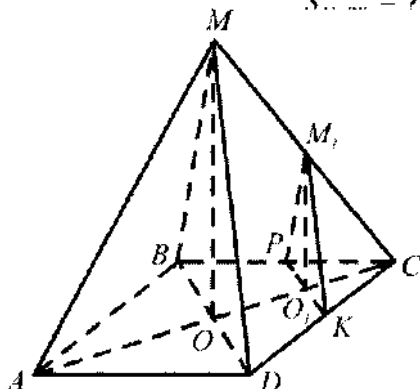
28, а $MO \perp ABC$; $S_{MAC} = 16\sqrt{3}$;
 $ABCD$ – ромб; $AD = 5$;
 $BD = 6$.

AM – ?



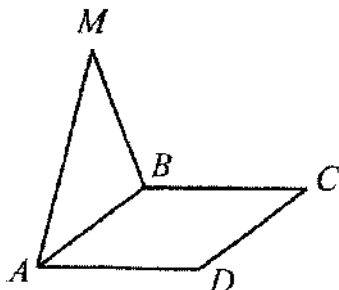
28, б $MO \perp ABC$; $M_1O_1 \parallel MO$;
 $BP = PC$; $KD = KC$;
 $S_{MBD} = 32$.

$S_{M_1B_1D_1}$ – ?



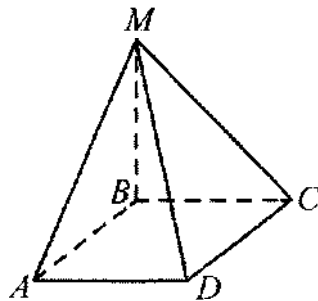
28, в $AMB \perp ABC$; $ABCD$ –
 квадрат; $AM = BM = 2\sqrt{6}$;
 $AB = 4$.

$\angle(MC; ABC)$ – ?

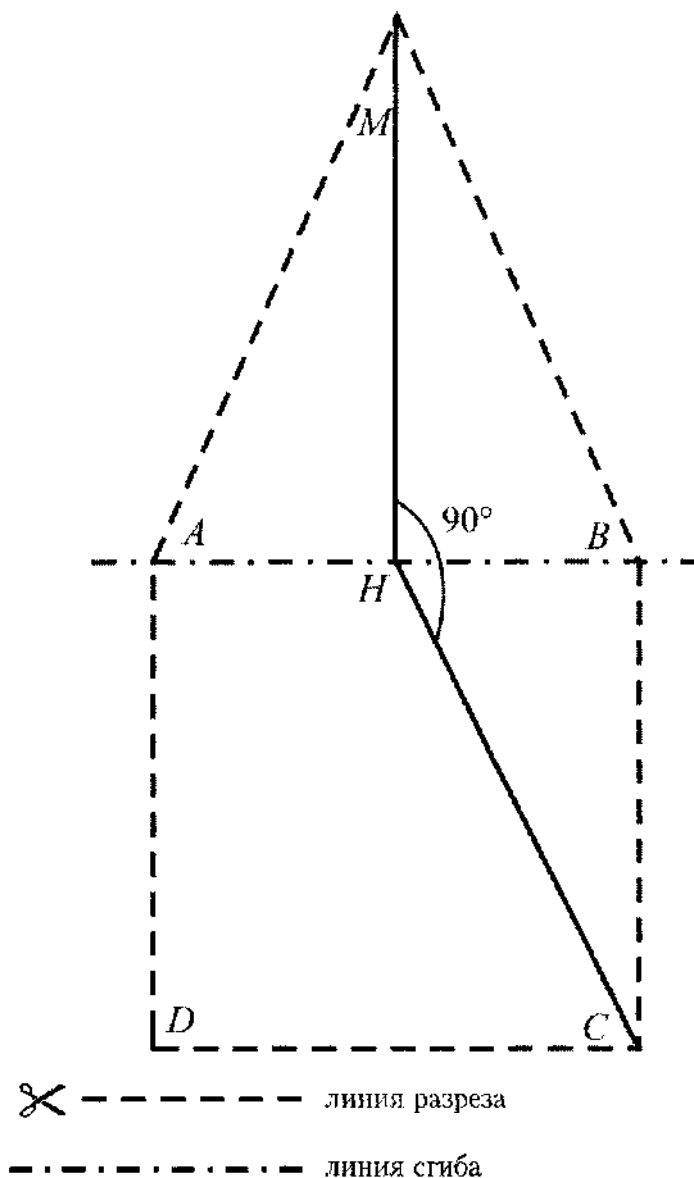


28, г $BM \perp ABC$; $\angle(ABC; MCD) =$
 45° ; $ABCD$ – квадрат;
 $AB = 10$.

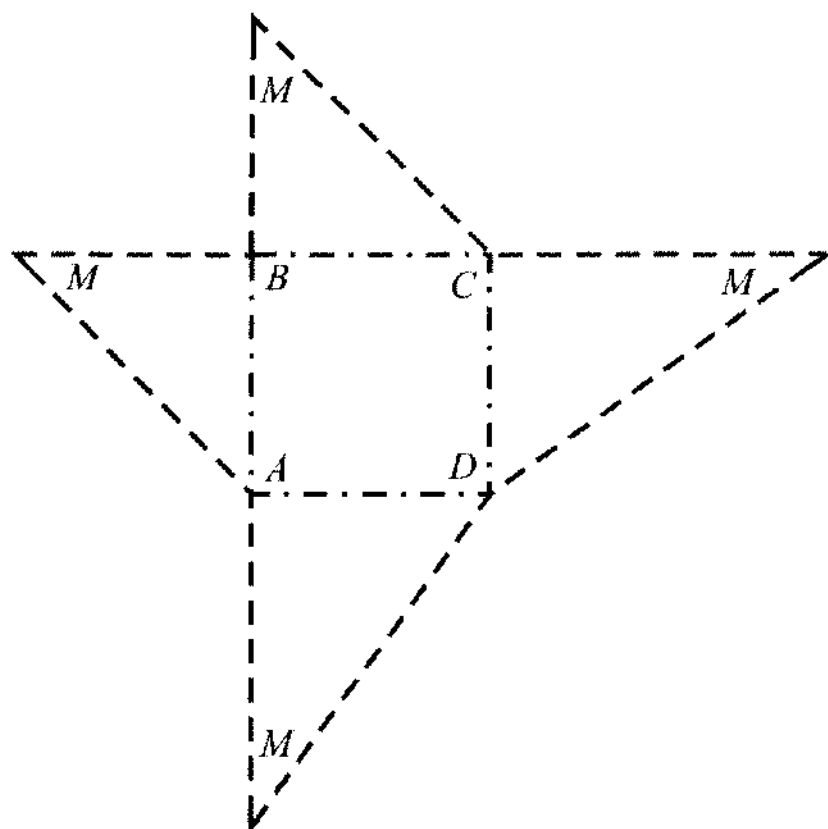
MD – ?



Макет к задаче 28, а



Макет к задаче 28, г



✂ — — — — — линия разреза

— — линия сгиба

Площадь поверхности прямой призмы

1. Призма называется прямой, если ее боковые грани перпендикулярны основаниям.

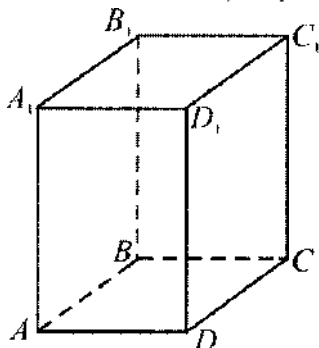
2. Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра ее основания на высоту: $S_{\text{бок}} = P \cdot H$.

3. Площадь полной поверхности призмы равна сумме площади ее боковой поверхности и удвоенной площади основания:

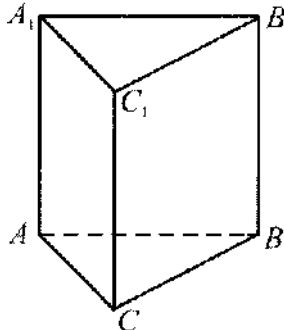
$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$$

На рисунках 29, а, б, в, г изображена прямая призма. Найдите площадь полной поверхности призмы.

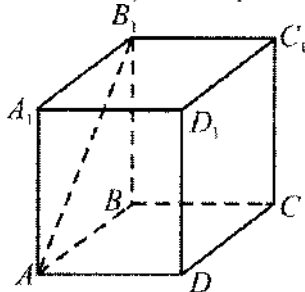
29, а $ABCD$ – ромб; $AB = 4$;
 $\angle BAD = 30^\circ$; $AA_1 = 6$.



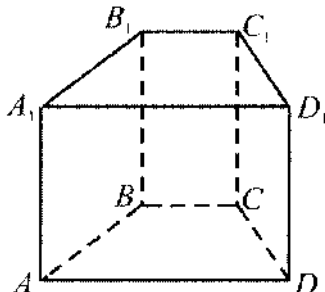
29, б $AA_1 = 10$; $AC = 6$;
 $\angle ACB = 90^\circ$; $\text{tg } \angle ABC = \frac{3}{4}$.



29, в $ABCD$ – параллелограмм;
 $AB = 6$; $AD = 7$; $\angle ABC = 150^\circ$;
 $\cos \angle B_1AB = 0,6$.



29, г $ABCD$ – трапеция; $AD \parallel BC$;
 $AB = CD = 6$; $AD = 15$; $BC = 7$;
 $AA_1 = 10$.

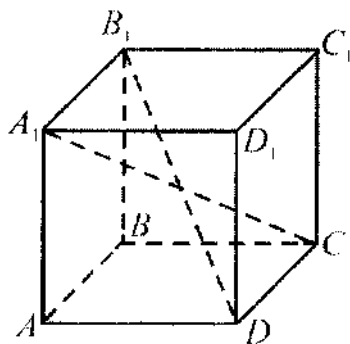


Площадь поверхности правильной призмы

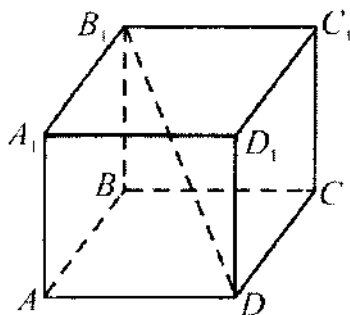
Призма называется правильной, если она прямая, а ее основаниями являются правильные многоугольники.

На рисунках 30, а, б, в, г изображена правильная призма. Найдите площадь полной поверхности призмы.

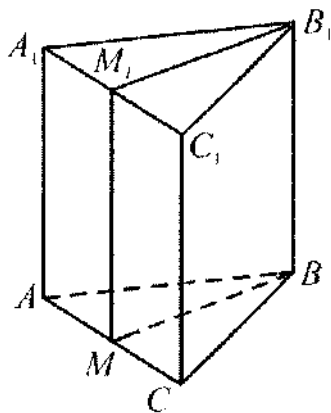
30, а $AD = AA_1$; $A_1C + B_1D = 10\sqrt{3}$.



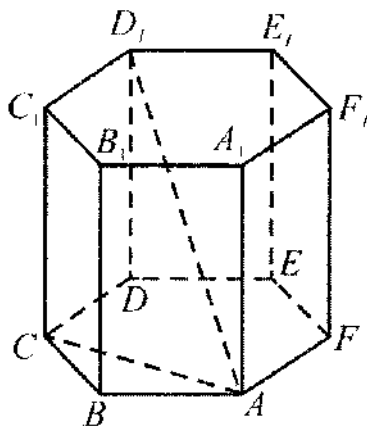
30, б $B_1D = 12$;
 $\angle(B_1D; ABC) = 30^\circ$.



30, в $AM - MC = A_1M_1 =$
 $M_1C_1 = 3$; $S_{BMM_1B_1} = 45$.



30, г $AC = 4\sqrt{3}$; $AD_1 = 10$.

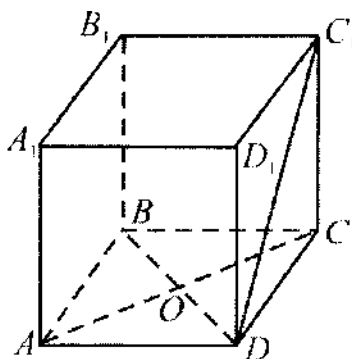


Площадь поверхности параллелепипеда

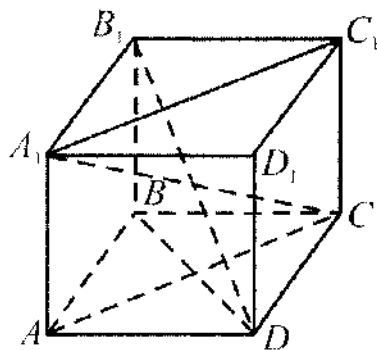
Параллелепипед – это призма, основаниями которой являются параллелограммы.

На рисунках 31, а, б, в, г изображен прямой параллелепипед.

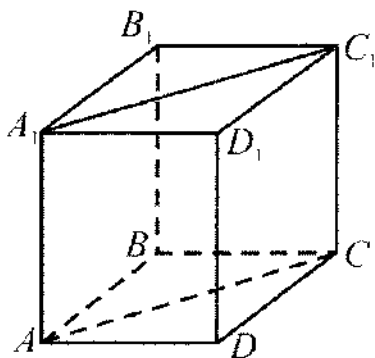
- 31, а** $ABCD$ – ромб; $\angle C_1DC = 45^\circ$; $AC = 24$; $BD = 10$.
 $S_{\text{полн}} = ?$



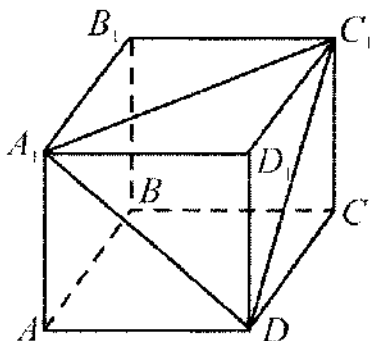
- 31, б** $ABCD$ – ромб; $AD = 8$; $\angle BAD = 60^\circ$; $B_1D = 10$.
 $S_{AA_1C_1C} = ?$



- 31, в** $ABCD$ – квадрат;
 $S_{AA_1C_1C} = 35\sqrt{2}$.
 $S_{\text{бок}} = ?$



- 31, г** $ABCD$ – прямоугольник;
 $A_1D = \sqrt{106}$; $A_1C_1 = 15$;
 $C_1D = 13$.
 $S_{\text{полн}} = ?$



Площадь поверхности наклонной призмы

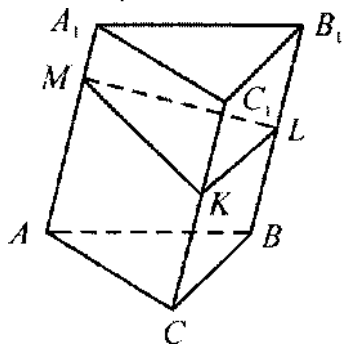
1. Призма называется наклонной, если ее боковые грани не перпендикулярны основаниям.

2. Площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро:

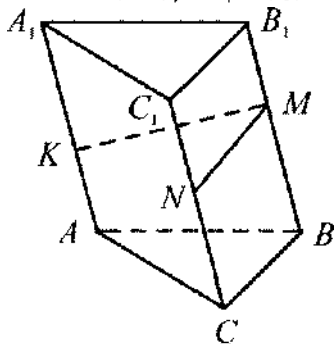
$$S_{\text{бок}} = P_{\text{сеч}} \cdot l.$$

На рисунках 32, а, б, в, г изображена наклонная призма. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

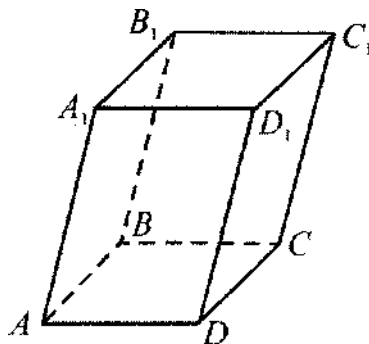
- 32, а** $MK \perp CC_1$; $KL \perp CC_1$;
 $MK = 6$; $KL = 5$; $ML = 8$;
 $AA_1 = 4$.



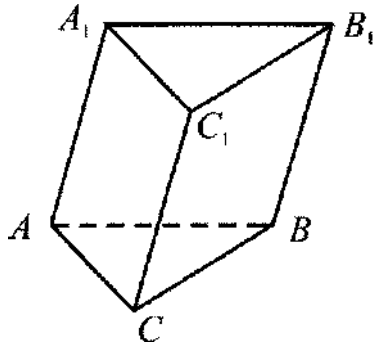
- 32, б** $KM \perp B_1B$; $MN \perp BB_1$;
 $\angle KMN = 90^\circ$; $KM = 12$;
 $MN = 5$; $AA_1 = 10$.



- 32, в** $ABCD$ – параллелограмм;
 $AD = 4\sqrt{3}$; $AB = 5$; $AA_1 = 9$;
 $\angle(AA_1B_1, ABC) = 60^\circ$.



- 32, г** Треугольник ABC – равносторонний; $AB = 6$; $AA_1 = 7$;
 $\angle ACC_1 = \angle BCC_1 = 60^\circ$.



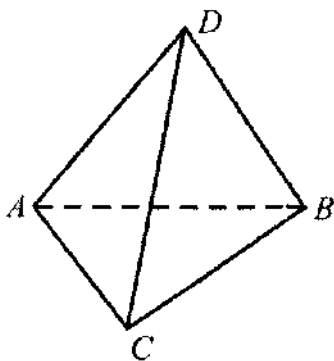
Площадь поверхности пирамиды (1)

1. Площадь полной поверхности пирамиды равна сумме площадей всех ее граней: $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$.

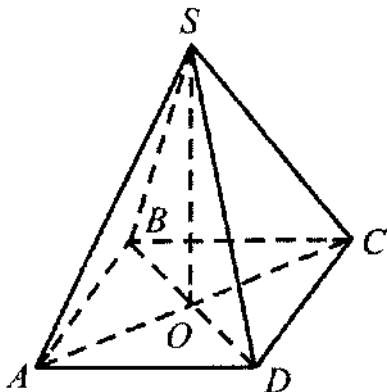
2. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему: $S_{\text{бок}} = p \cdot l$.

На рисунках 33, а, б, в, г изображена правильная пирамида. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

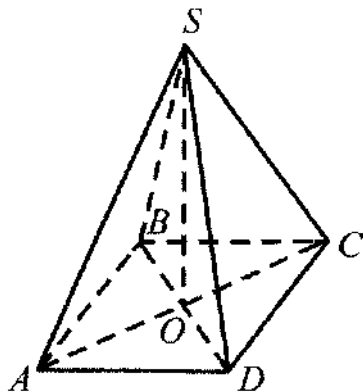
33, а $DABC$ – правильный тетраэдр; $AB = 12$.



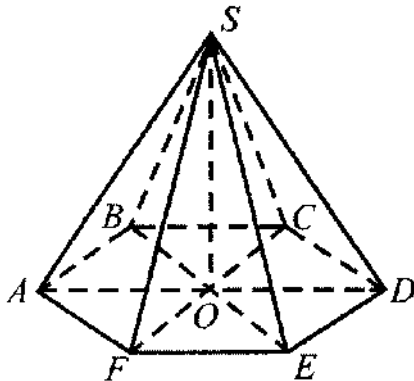
33, б $AB = 10$; $\angle(AS; ABC) = 45^\circ$.



33, в $AD = 4$; $\angle(SCD; ABC) = 60^\circ$.



33, г $SA = 12$; $\angle ASO = 30^\circ$.



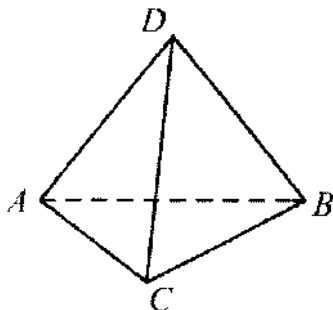
Площадь поверхности пирамиды (2)

Если все боковые ребра пирамиды образуют равные углы с плоскостью основания или равны между собой, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды.

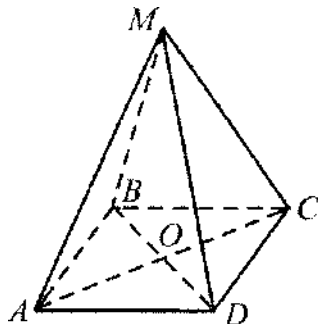
Около такой пирамиды можно описать сферу, радиус которой вычисляется по формуле $R = \frac{l}{2 \sin \alpha}$, где l – длина бокового ребра, α – угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

На рисунках 34, а, б, в, г изображена пирамида, боковые ребра которой равны между собой. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

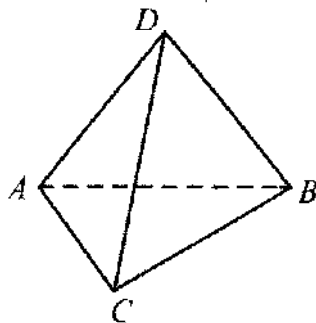
- 34, а** Треугольник ABC – равносторонний; $AB = 12$;
 $\angle (BD; ABC) = 45^\circ$.



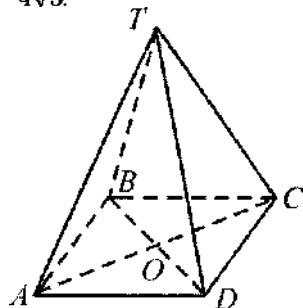
- 34, б** $ABCD$ – прямоугольник;
 $AB = 10$; $AD = 24$;
 $AM = \sqrt{313}$.

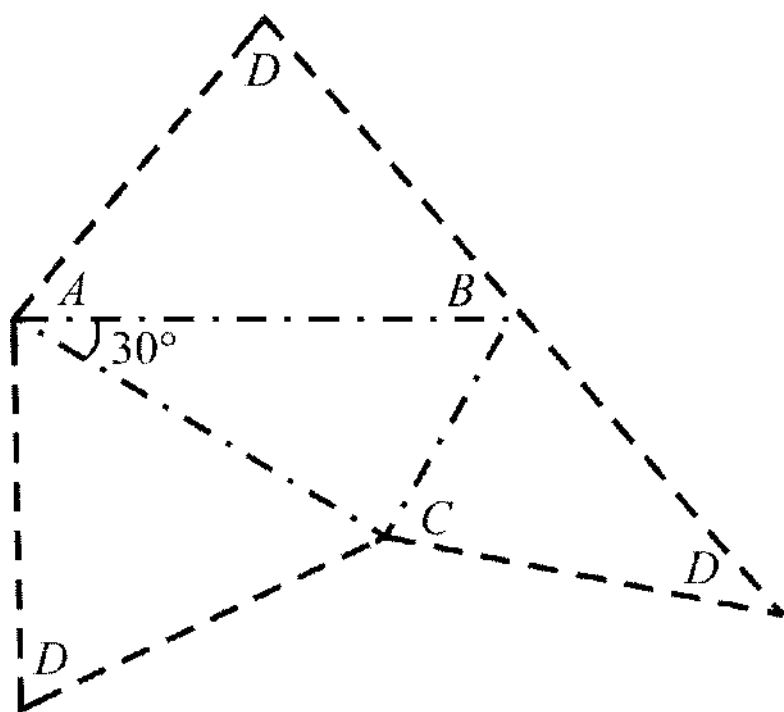


- 34, в** Высота пирамиды $DABC$ равна 12; $\angle ACB = 90^\circ$;
 $\angle BAC = 30^\circ$; $BC = 10$.



- 34, г** $ABCD$ – квадрат; $\angle TAO = 60^\circ$; радиус сферы, описанной около пирамиды равен $4\sqrt{3}$.





✂ — — — — — линия разреза

- . - . - . - . — — — — — линия сгиба

Площадь поверхности пирамиды (3)

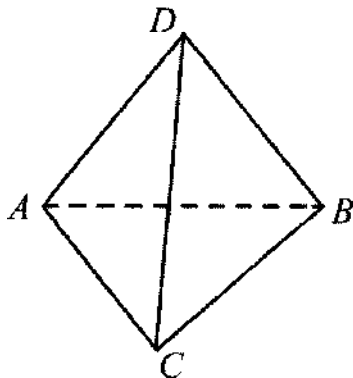
Если все двугранные углы при основании пирамиды равны (боковые грани равнонаклонены к основанию) или все апофемы равны между собой, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды. Площадь боковой поверхности такой пирамиды можно найти по формулам:

1. $S_{\text{бок}} = p \cdot l$, где p – полупериметр основания, l – апофема боковой грани.

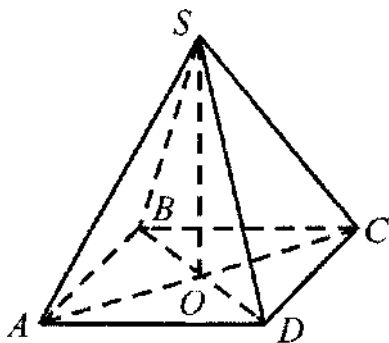
2. $S_{\text{бок}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \alpha}$, где $S_{\text{осн}}$ – площадь основания, α – угол между плоскостями боковой грани и основания.

На рисунках 35, а, б, в, г изображена пирамида, боковые грани которой равнонаклонены к основанию. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

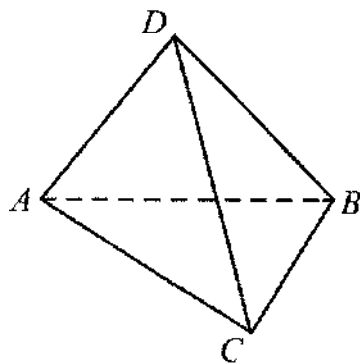
35, а Треугольник ABC – правильный; $AB = 6$;
 $\angle DACB = 60^\circ$.



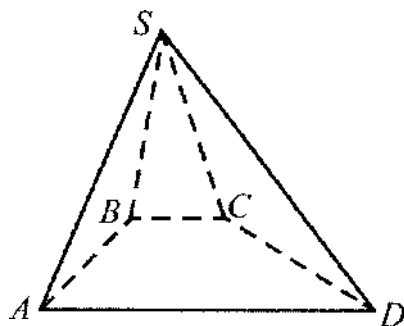
35, б $ABCD$ – ромб; $AC = 8$;
 $BD = 6$; $SO = 1,8$.



35, а $\angle ACB = 90^\circ$; $P_{ABC} = 48$;
 $AB = 20$; $\cos \angle DACB = 0,4$.



35, б $ABCD$ – трапеция;
 $AB = CD$; $AD = 10$; $BC = 6$;
 $\sin \angle SABC = \frac{\sqrt{21}}{6}$.

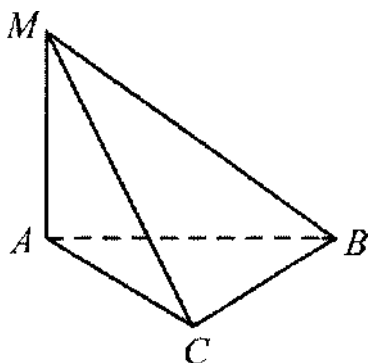


Площадь поверхности пирамиды (4)

На рисунках 36, а, б, в, г изображена пирамида, боковое ребро AM которой перпендикулярно плоскости основания. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

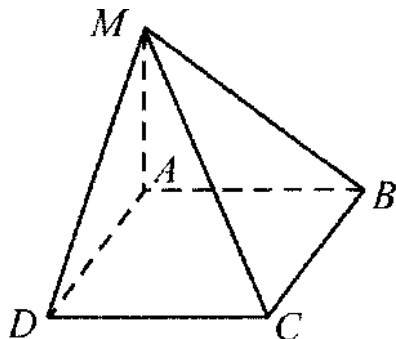
36, а

Треугольник ABC – равильный; $AB = 8$; $AM = 6$.



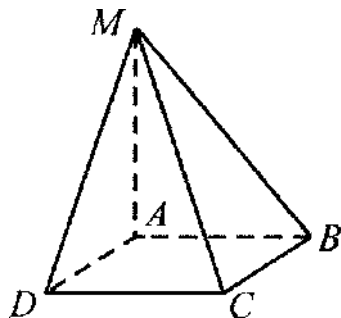
36, б

$ABCD$ – квадрат; $AB = 12$; $AM = 5$.



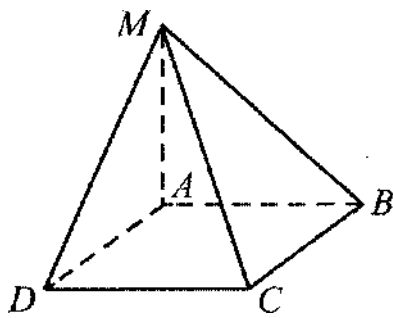
36, в

$ABCD$ – ромб; $\angle DAB = 120^\circ$; $AB = 4\sqrt{3}$; $BM = 4\sqrt{7}$.



36, г

$ABCD$ – параллелограмм; $\angle ADC = 30^\circ$; $AD = AM = 4$; $AB = 6$.



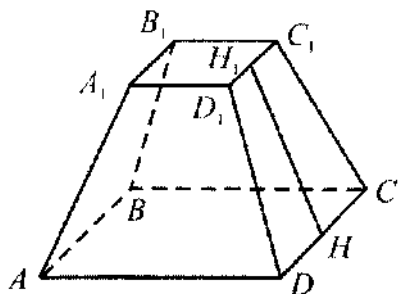
Площадь поверхности усеченной пирамиды

Площадью боковой поверхности усеченной пирамиды является сумма площадей ее боковых граней.

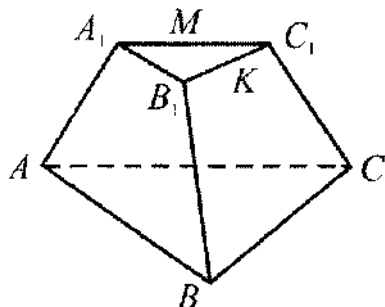
Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды можно найти по формуле $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) \cdot l$, где P_1 и P_2 – периметры оснований, l – апофема.

На рисунках 37, а, б, в, г изображена правильная усеченная пирамида. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

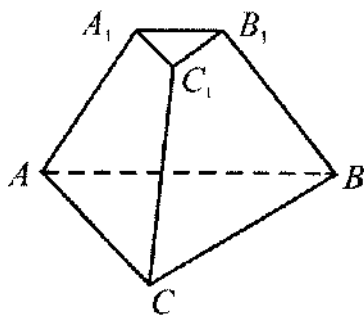
- 37, а** $AB = 9$; $A_1B_1 = 5$;
 $H_1H \perp CD$; $H_1H = 7$.



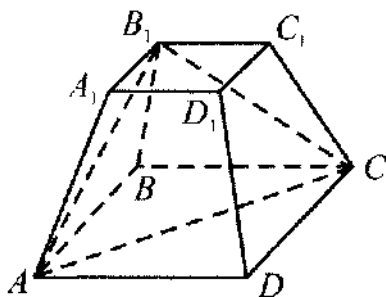
- 37, б** $AB = 20$; $A_1B_1 = 10$;
 $AA_1 = 13$.



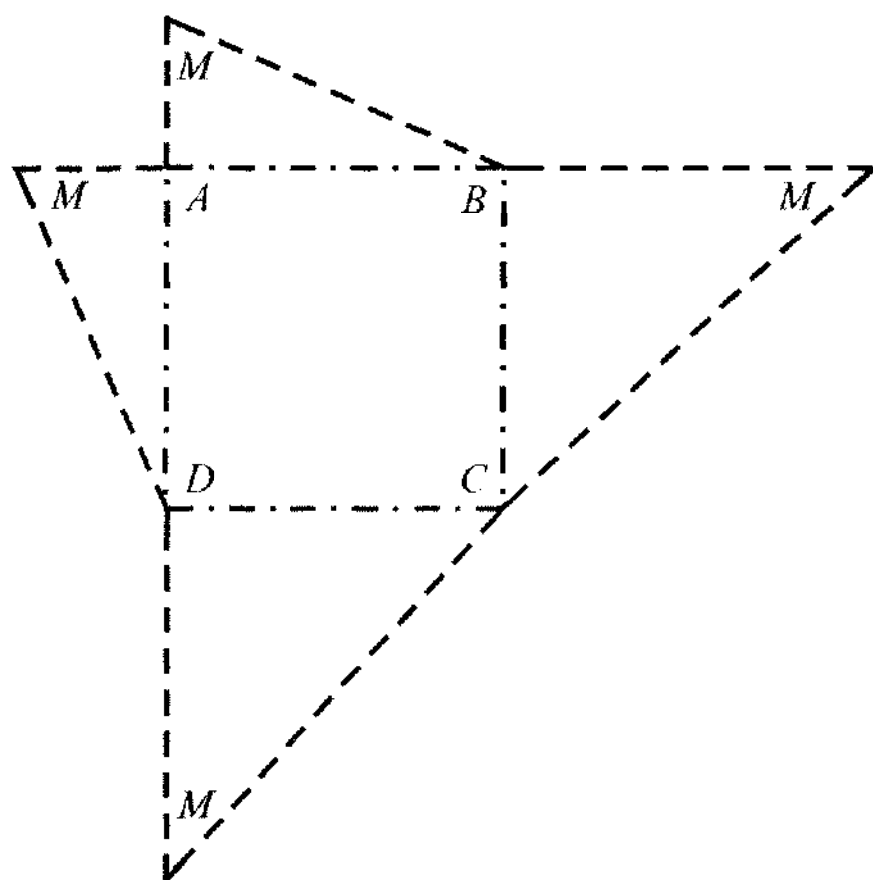
- 37, в** $AB = 6$; $A_1B_1 = 2$;
 $\angle A_1AC = 60^\circ$.



- 37, г** Треугольник AB_1C – равносторонний; $S_{AB_1C} = 18\sqrt{3}$;
 $A_1B_1 = 2$.



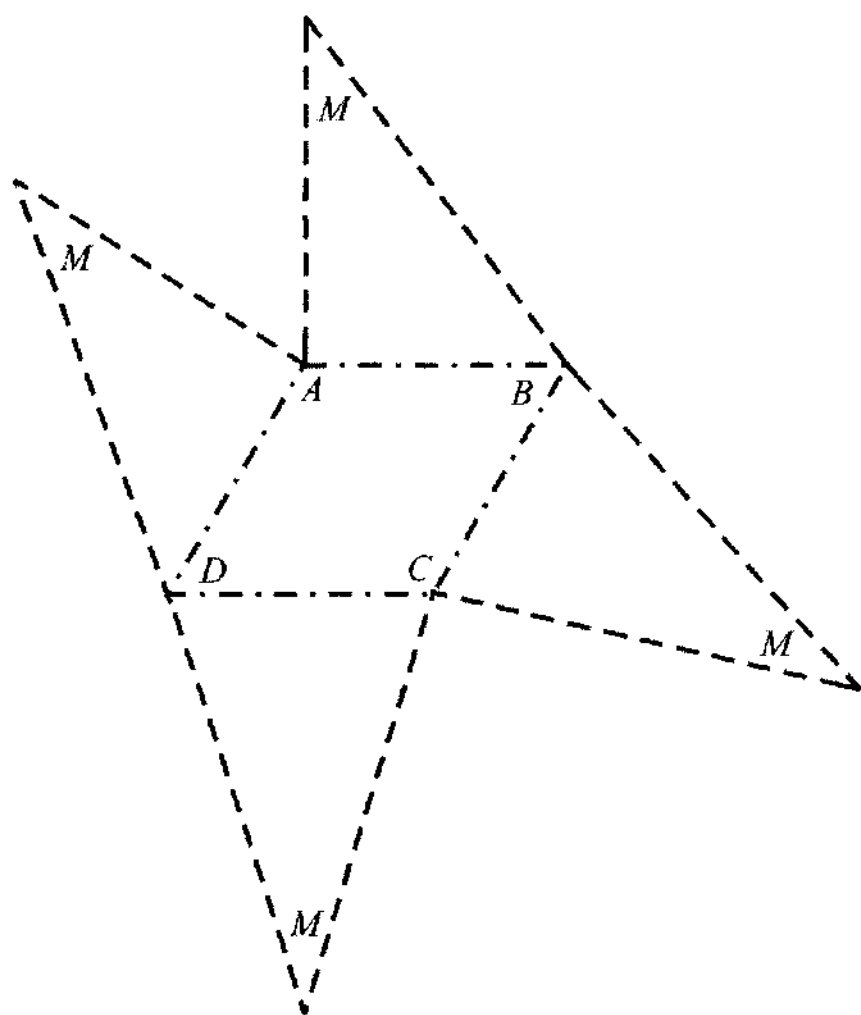
Макет и задаче 36, б



✂ — — — — — линия разреза

- . - . - . - . — — — — — линия сгиба

Макет к задаче 36, в

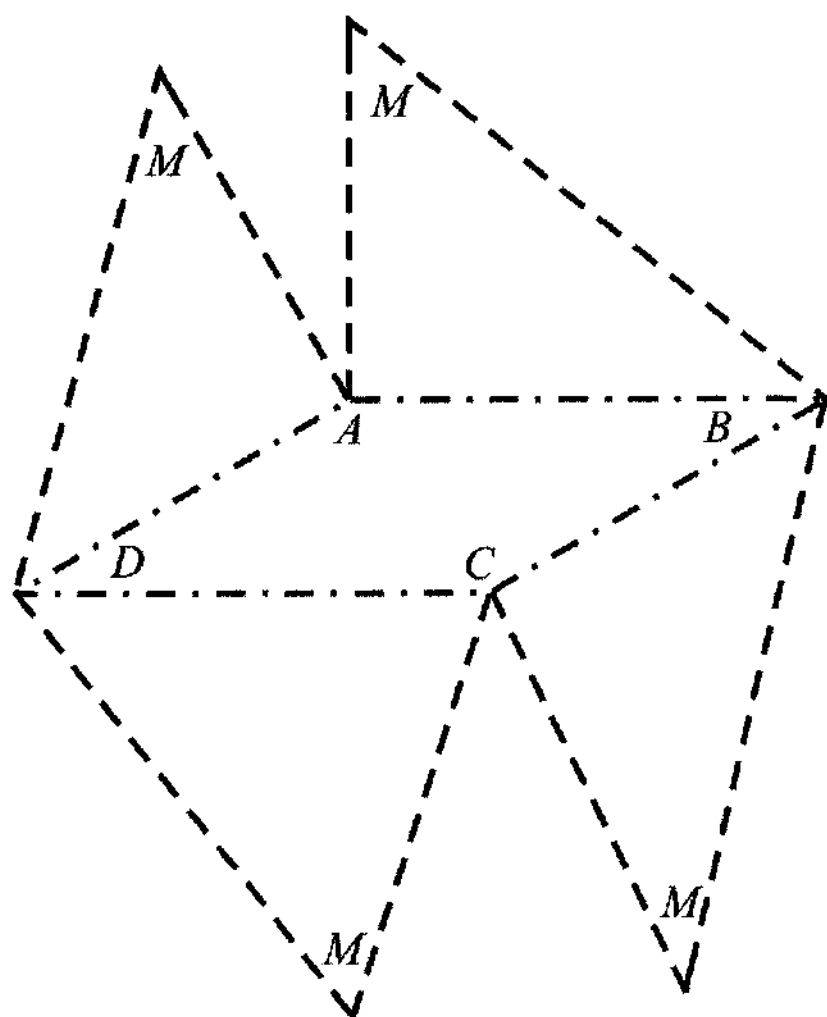


----- линия разреза



- . - . - . линия сгиба

Макет к задаче 36, 2



линия разреза



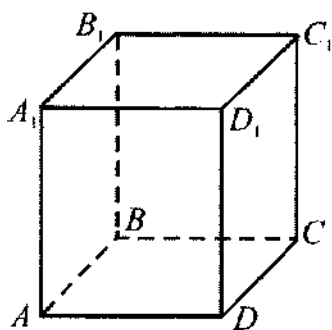
линия сгиба

Объем прямой призмы

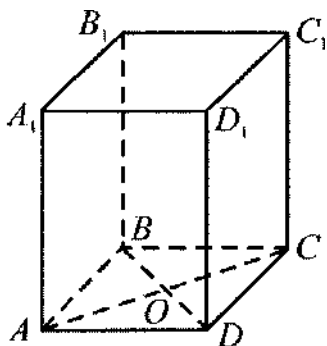
Объем прямой призмы равен произведению площади основания на высоту: $V = S_{\text{осн}} \cdot h$.

На рисунках 38, а, б, в, г изображена прямая призма. Найдите объем призмы.

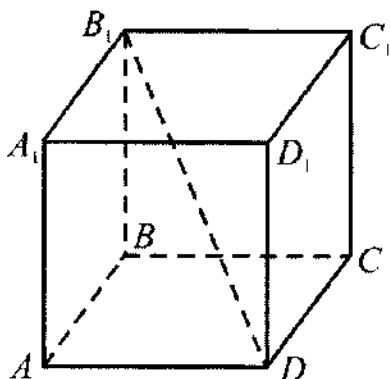
- 38, а** $ABCD$ – параллелограмм;
 $AB = 5\sqrt{3}$; $AD = 10$;
 $\angle BAD = 60^\circ$; $AA_1 = 12$.



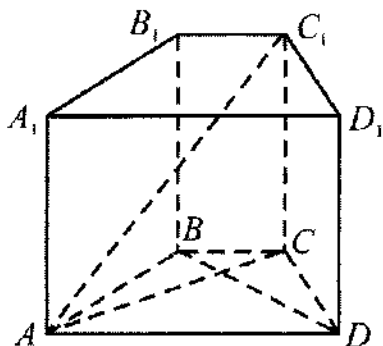
- 38, б** $ABCD$ – прямоугольник;
 $AC = 8$; $\angle AOD = 120^\circ$;
 $AA_1 = 10$.



- 38, в** $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб;
 $B_1 D = 6\sqrt{3}$.



- 38, г** $ABCD$ – трапеция;
 $AD \parallel BC$; $AD = 8$; $BC = 3$;
 $AC = 7$; $BD = 6$;
 $\angle (AC_1; ABC) = \arctg \frac{5}{7}$.



Объем пирамиды (1)

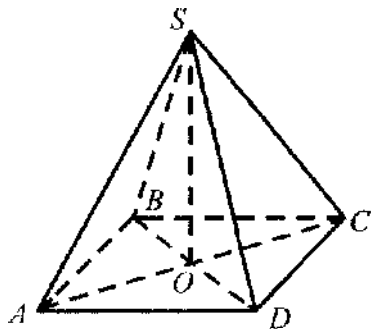
1. Объем пирамиды равен одной третьей произведения площади ее основания на высоту: $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$.

2. Объем пирамиды равен одной третьей произведения площади ее полной поверхности на радиус сферы, вписанной в пирамиду:

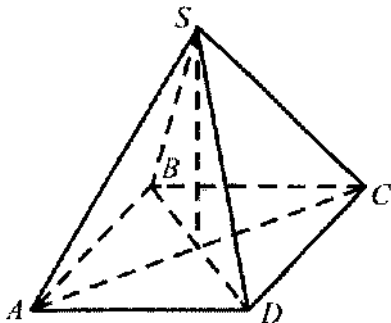
$$V = \frac{1}{3} S_{\text{полн}} \cdot R.$$

На рисунках 39, а, б, в, г изображена пирамида. Найдите ее объем.

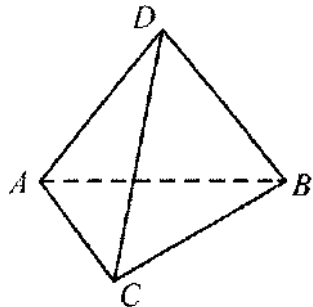
- 39, а** Пирамида $SABCD$ – правильная; $AS = 12$; $\angle SAC = 45^\circ$.



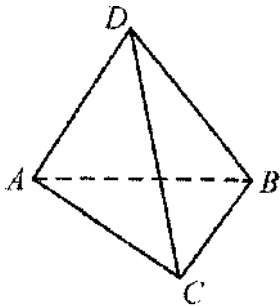
- 39, б** $ABCD$ – ромб; $\angle ASC = 60^\circ$; $S_{ASC} = 36\sqrt{3}$; $AD = 3\sqrt{5}$.



- 39, в** Пирамида $DABC$ – правильная; $AB = 9$; $AD = \sqrt{91}$.



- 39, г** $AD = BD = CD$; $AB = 18$; $AC = BC = 15$; $\text{tg } \angle (AD; ABC) = 0,8$.



Объем усеченной пирамиды

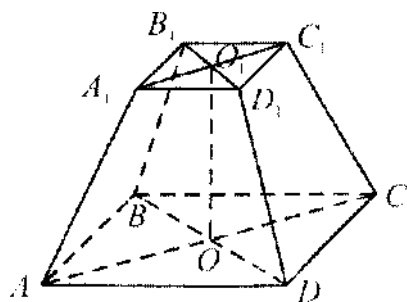
Формула для вычисления объема усеченной пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} h (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2),$$

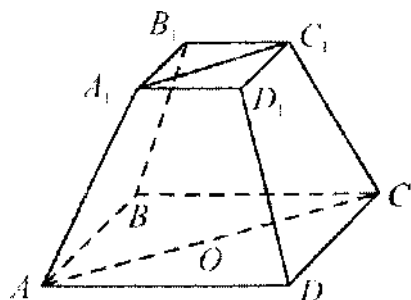
где h – высота пирамиды, S_1 и S_2 – площади оснований.

На рисунках 40, а, б, в, г изображена правильная усеченная пирамида. Найдите объем пирамиды.

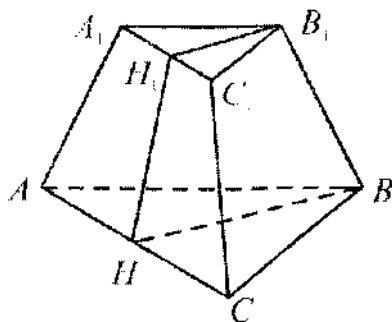
40, а $AB = 7; A_1B_1 = 4; OO_1 = 6.$



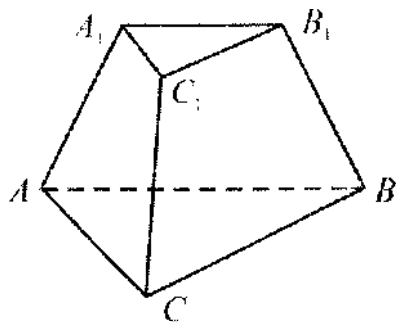
40, б $AB = 8; A_1B_1 = 5;$
 $S_{\triangle A_1B_1C_1} = 65\sqrt{2}.$



40, в $AB = 18; A_1B_1 = 12;$
 $BH \perp AC; B_1H_1 \parallel BH;$
 $S_{\triangle H_1B_1C_1} = 105\sqrt{3}.$



40, г $AB = 12; A_1B_1 = 6;$
 $\angle (C_1B_1B; ABC) = 60^\circ.$



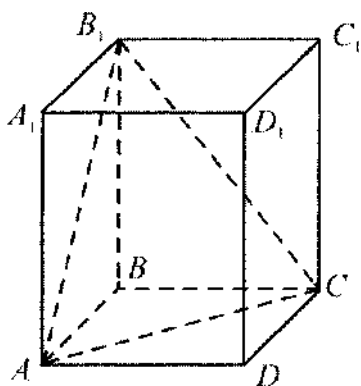
Объем пирамиды (2)

На рисунках 41, а, б, в, г изображена правильная призма.

41, а

$$AC = 6\sqrt{2}; BB_1 = 7.$$

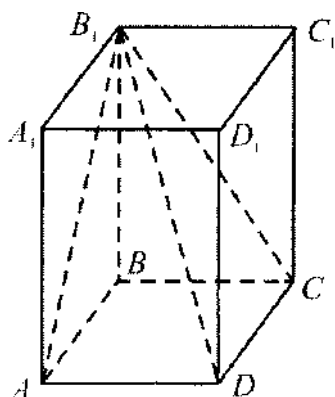
$$V_{B_1ABC} = ?$$



41, б

$$AB = 10; \angle (B_1AD; ABC) = 60^\circ$$

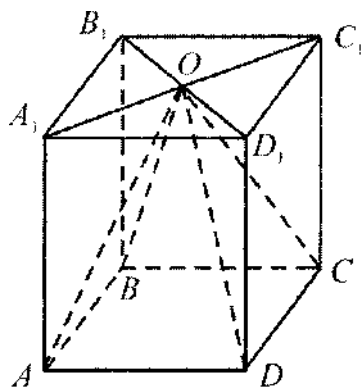
$$V_{B_1ABCD} = ?$$



41, в

$$AB = 8; AA_1 = 9.$$

$$V_{OABCD} = ?$$

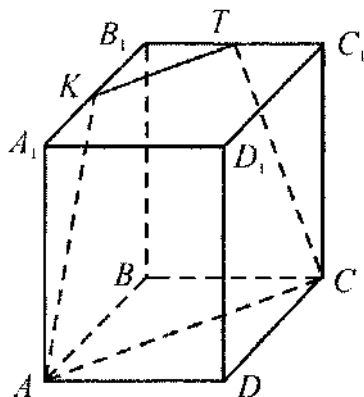


41, г

$$AB = 12; AA_1 = 15;$$

$$A_1K = KB_1 = B_1T = TC_1.$$

$$V_{ABCKBT} = ?$$

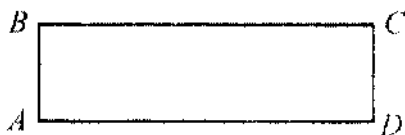


Цилиндр (1)

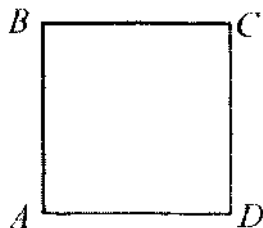
1. Радиусом цилиндра называется радиус его основания.
2. Высотой цилиндра называется длина его образующей.
3. Осью цилиндра называется отрезок, соединяющий центры его оснований.
4. Осевым сечением цилиндра называется сечение цилиндра плоскостью, проходящей через его ось.
5. Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности его основания на высоту: $S_{\text{бок.ц.}} = 2\pi RH = 2\pi R(H + R)$.
6. Площадь полной поверхности равна сумме площадей боковой поверхности и двух оснований: $S_{\text{полн}} = 2\pi RH + 2\pi R^2$.
7. Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту: $V = S_{\text{осн}} \cdot H = \pi R^2 H$.

На рисунках 42, а, б изображена развертка боковой поверхности цилиндра. Найдите его объем.

42, а $AB = 6$; $AD = 12\pi$.



42, б $ABCD$ – квадрат; $AB = 8$.



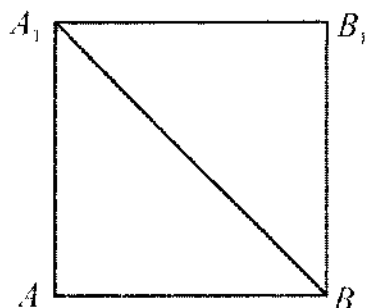
Цилиндр (2)

На рисунках 43, а, б, в, г изображено осевое сечение цилиндра.

43, а

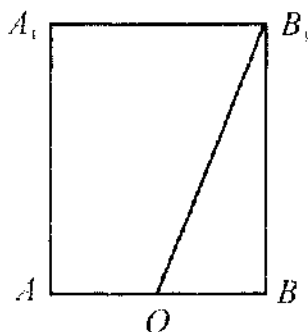
AA_1B_1B – квадрат;
 $A_1B = 6\sqrt{2}$.

$S_{\text{полн}} = ?$



43, б

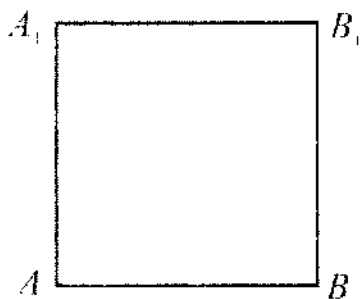
$AB = 10$; $BO = R$; $B_1O = 13$.
 $V = ?$



43, в

AA_1B_1B – квадрат;
 $S_{\text{полн}} = 64\pi$.

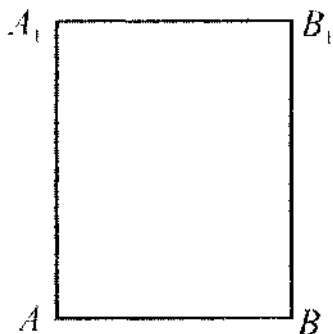
$V = ?$



43, г

$AA_1 = 10$; $S_{\text{полн}} = 112\pi$.

$S_{\text{бок}} = ?$



Конус (1)

1. Образующими конуса называются отрезки, соединяющие его вершину с точками окружности основания.

2. Высотой конуса называется отрезок, соединяющий вершину конуса с центром основания.

3. Прямая, содержащая высоту конуса, называется осью конуса.

4. Осевым сечением конуса называется сечение, полученное плоскостью, проходящей через его ось.

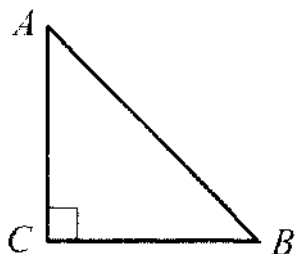
5. Площадь боковой поверхности конуса равна произведению половины длины окружности основания на образующую: $S_{\text{бок}} = \pi Rl$.

6. Площадь полной поверхности конуса равна сумме площадей боковой поверхности и площади основания: $S_{\text{полн}} = \pi Rl + \pi R^2$.

7. Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту: $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3} \pi R^2 H$.

На рисунках 44, а, б изображен прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$). Найдите объем фигуры, полученной при вращении треугольника ABC вокруг катета AC .

44, а $AB = 9\sqrt{2}$; $\angle B = 45^\circ$.



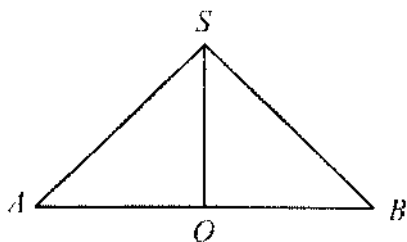
44, б $AB = \sqrt{13}$; $BC = 2$.



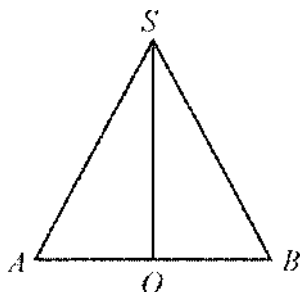
Конус (2)

На рисунках 45, а, б, в, г изображен равнобедренный треугольник ASB , являющийся осевым сечением конуса. SO – высота конуса.

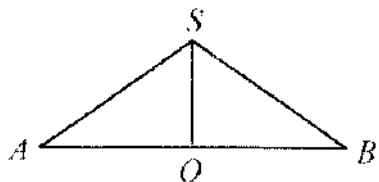
45, а $SO = 12$; $\angle ASB = 90^\circ$.
 $S_{\text{бок}} = ?$



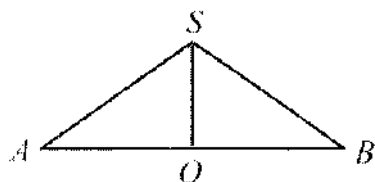
45, б $AS = 4$; $\angle A = 60^\circ$.
 $V = ?$



45, в $SA = 16$; $\angle A = 30^\circ$.
 $S_{\text{пол}} = ?$



45, г $\angle ASB = 120^\circ$; $V = 216\pi$.
 $S_{\text{пол}} = ?$



Усеченный конус

1. Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей основания на образующую:

$$S_{\text{бок}} = \pi(R_1 + R_2)l.$$

2. Площадь полной поверхности усеченного конуса равна сумме площадей боковой поверхности и двух оснований:

$$S_{\text{полн}} = \pi(R_1l + R_2l + R_1^2 + R_2^2).$$

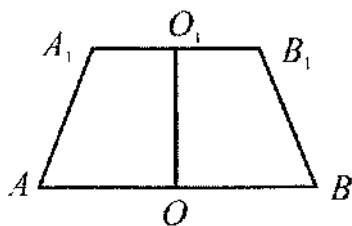
3. Формула объема усеченного конуса: $V = \frac{1}{3} \pi H(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2),$

где H – высота конуса, R_1 и R_2 – радиусы оснований.

На рисунках 46, а, б изображено осевое сечение усеченного конуса, OO_1 – высота конуса.

46, а $AB = 6; A_1B_1 = 4; OO_1 = 3.$

$V = ?$

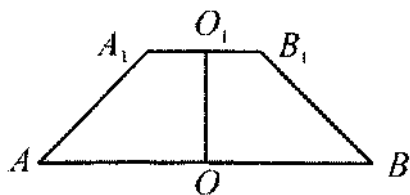


46, б

$AB = 10\sqrt{3}; A_1B_1 = 6\sqrt{3};$

$\angle A = 30^\circ.$

$S_{\text{полн}} = ?$

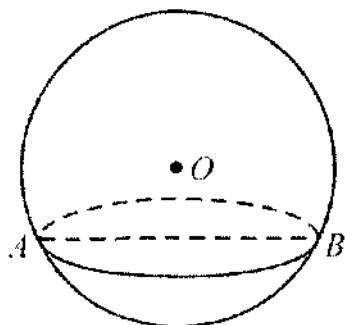


Сфера

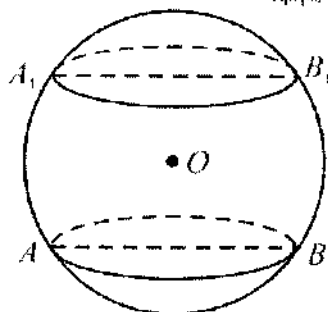
Площадь сферы вычисляется по формуле: $S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2$, где R – радиус сферы.

На рисунках 47, а, б, в, г изображена сфера с центром в точке O . Точки A, B, C, A_1, B_1 принадлежат сфере.

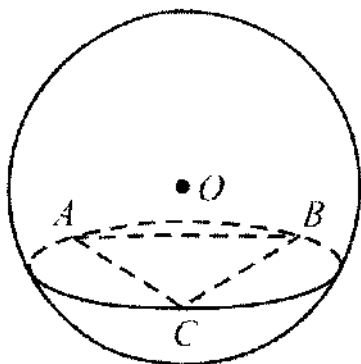
47, а $S_{\text{сферы}} = 900\pi$, $AB = 24$.
 $d(O; AB) = ?$



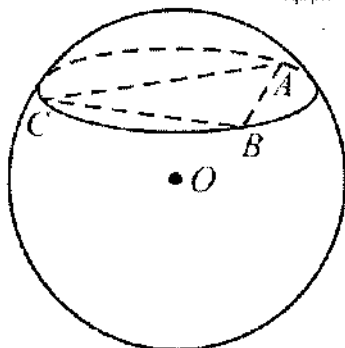
47, б $AB = 10$; $A_1B_1 = 12$;
 $AB \parallel A_1B_1$;
 $d(AB; A_1B_1) = 11$.
 $S_{\text{сферы}} = ?$



47, в $S_{\text{сферы}} = 256\pi$; треугольник ACB – равносторонний;
 $AB = 12$.
 $d(O; ABC) = ?$



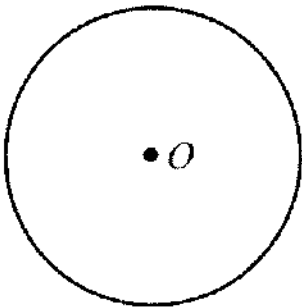
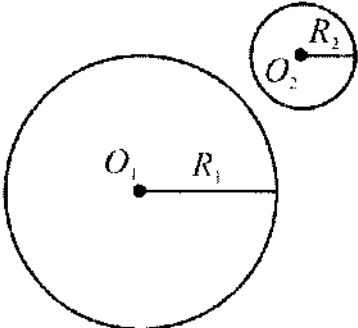
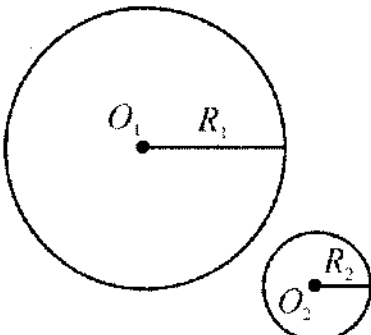
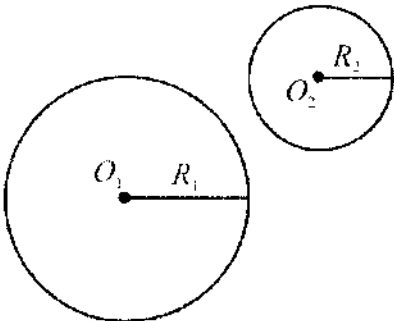
47, г Треугольник ACB – прямоугольный; $\angle B = 90^\circ$;
 $\angle C = 30^\circ$; $AB = 7$;
 $d(O; ABC) = 5$.
 $S_{\text{сферы}} = ?$



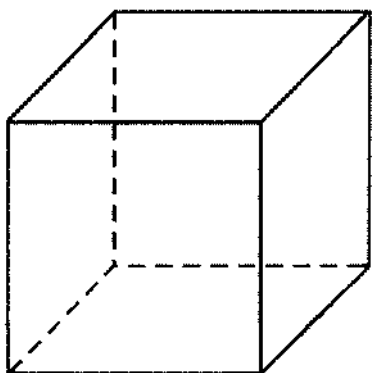
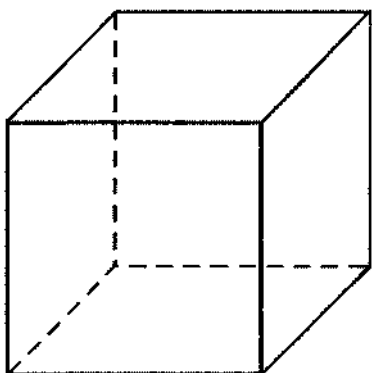
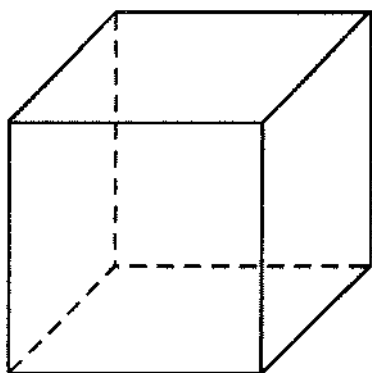
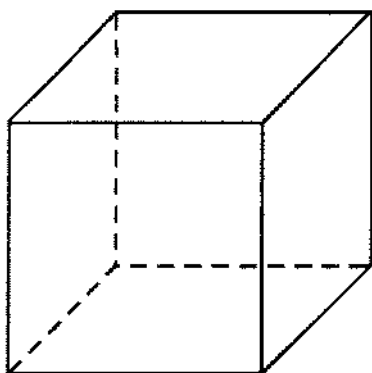
Шар

Объем шара вычисляется по формуле: $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3$, где R – радиус шара.

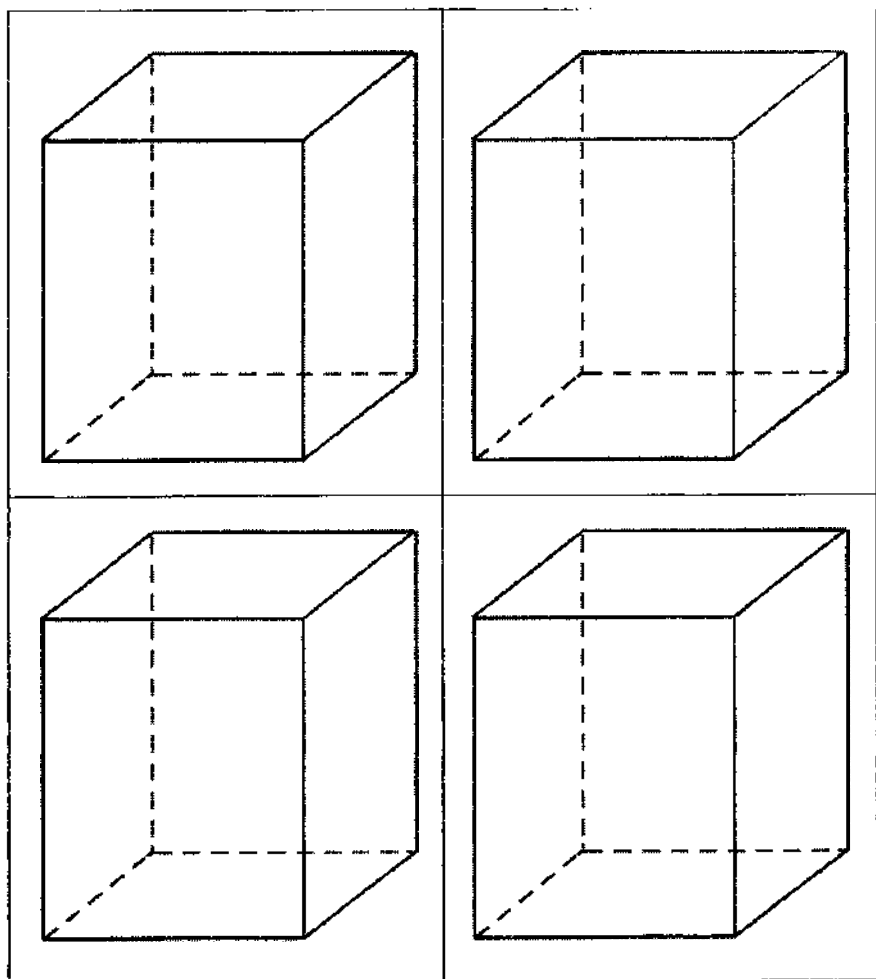
На рисунках 48, а, б, в, г изображены шары с центрами в точках O , O_1 и O_2 .

48, а $S_{\text{сферы}} = 144\pi$ $V_{\text{шара}} = ?$ 	48, б $R_1 = 3R_2$ $\frac{V_1}{V_2} = ?$ 
48, в $R_1 > R_2$ на 200 % $\frac{V_2}{V_1} = ?$ 	48, г $R_1 = 6; \frac{V_1}{V_2} = 8$ $R_2 = ?$ 

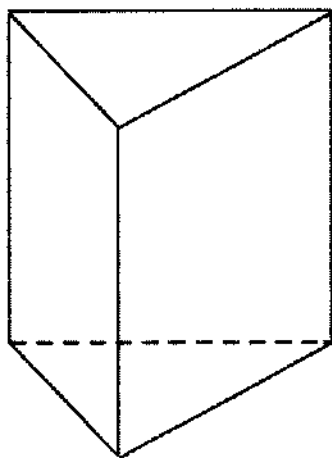
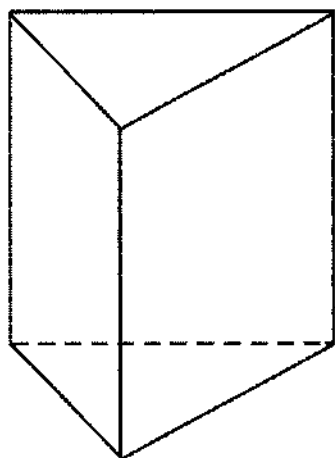
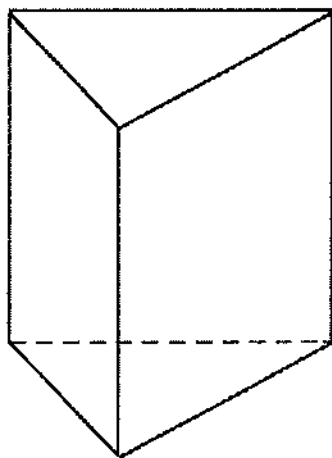
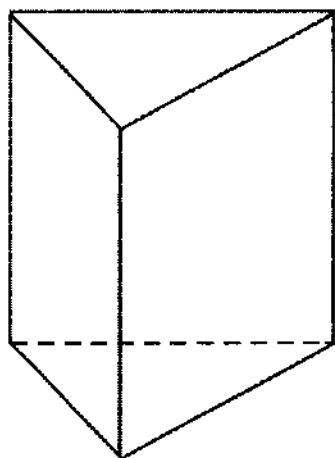
Шаблоны стереометрических фигур



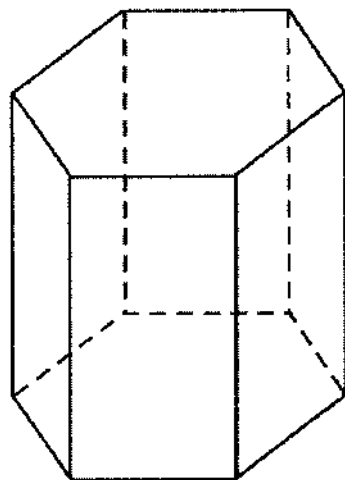
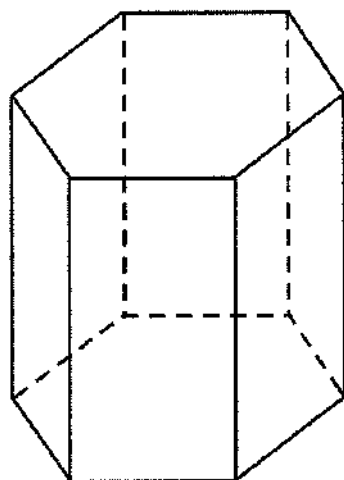
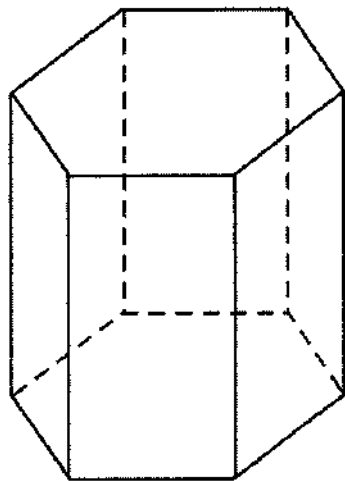
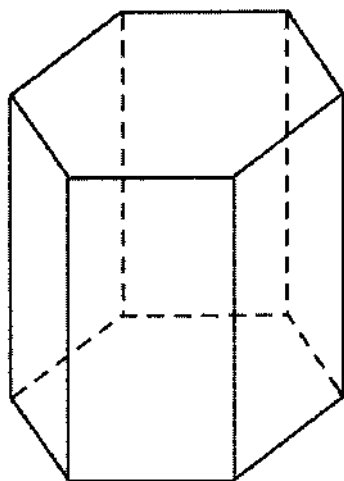
Шаблоны стереометрических фигур



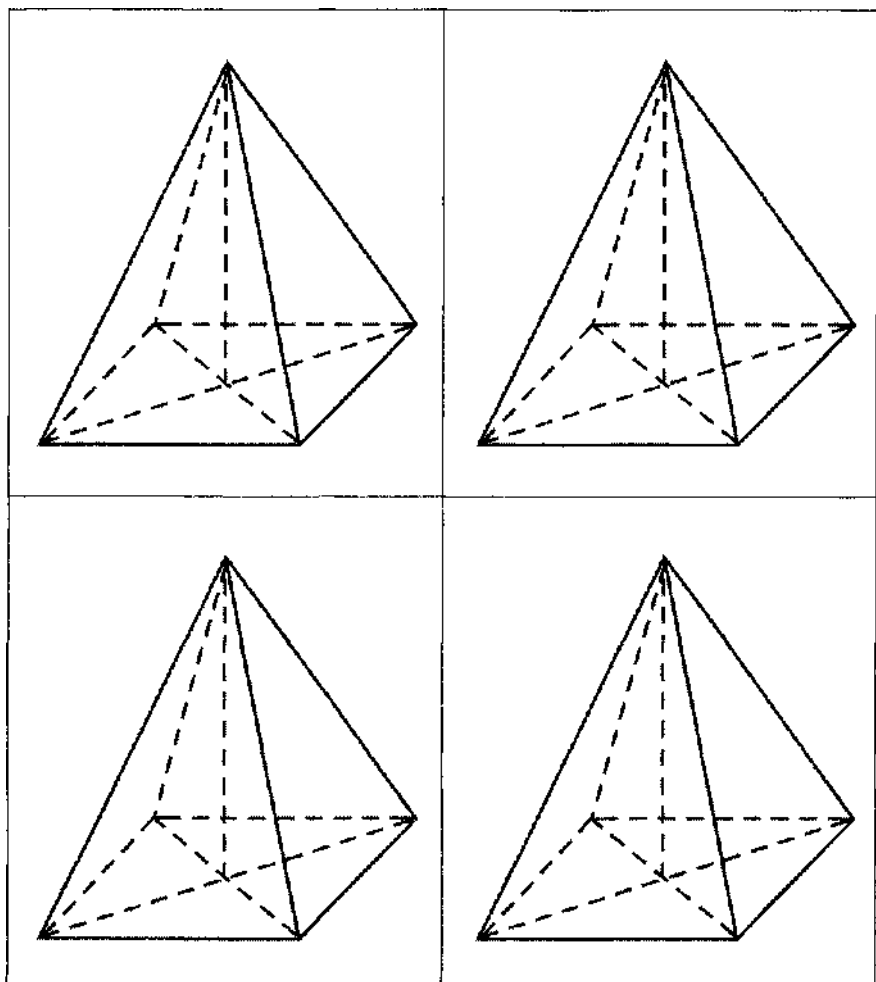
Шаблоны стереометрических фигур



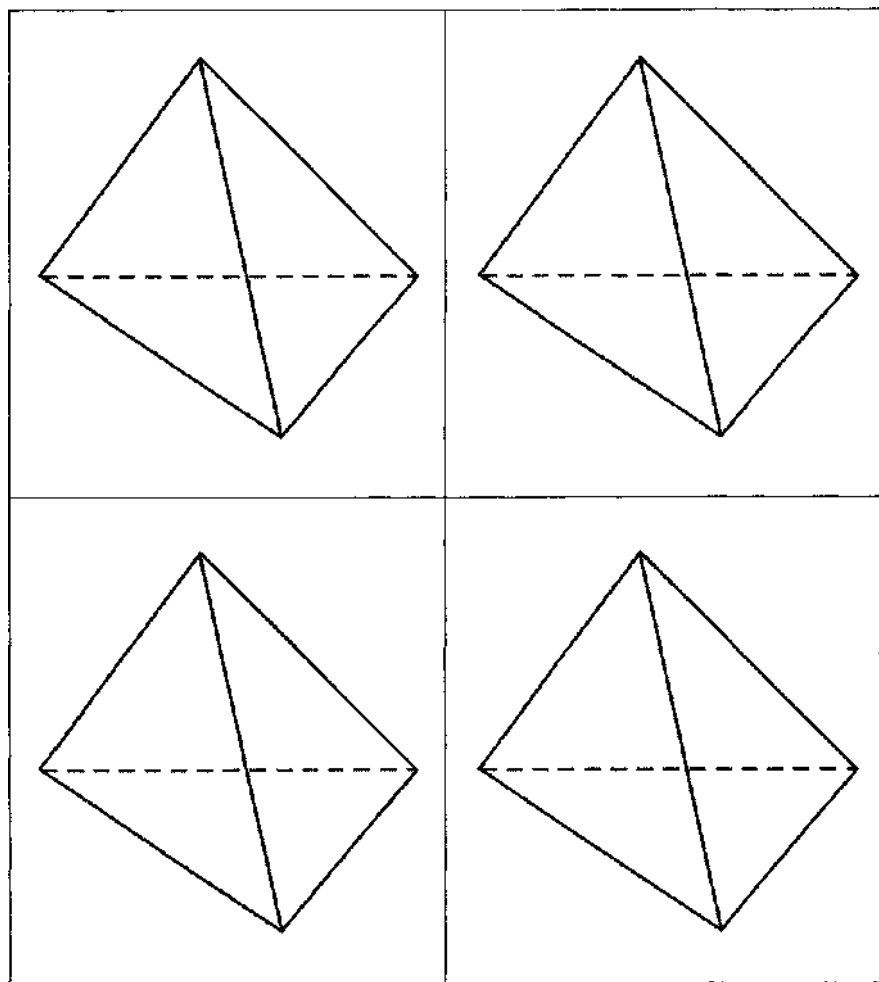
Шаблоны стереометрических фигур



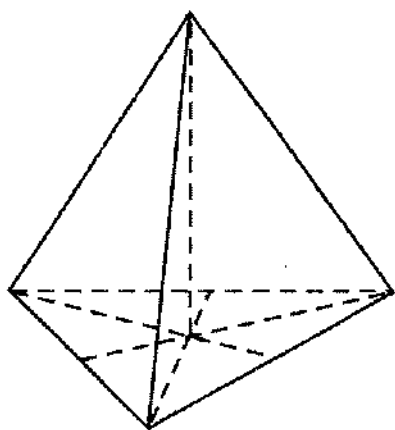
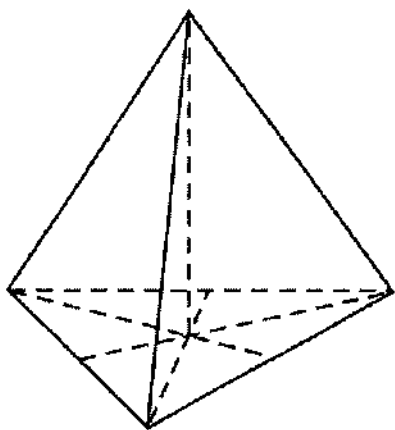
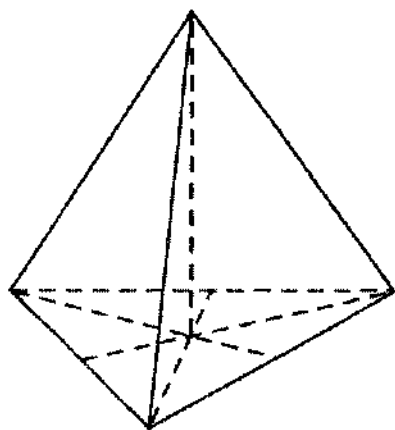
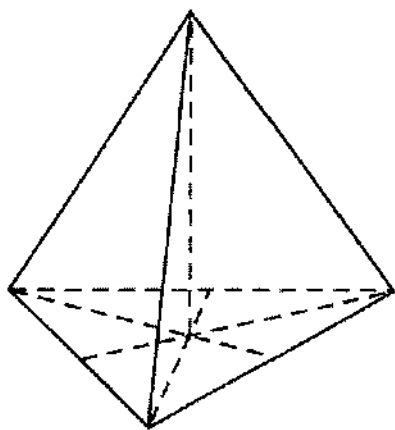
Шаблоны стереометрических фигур



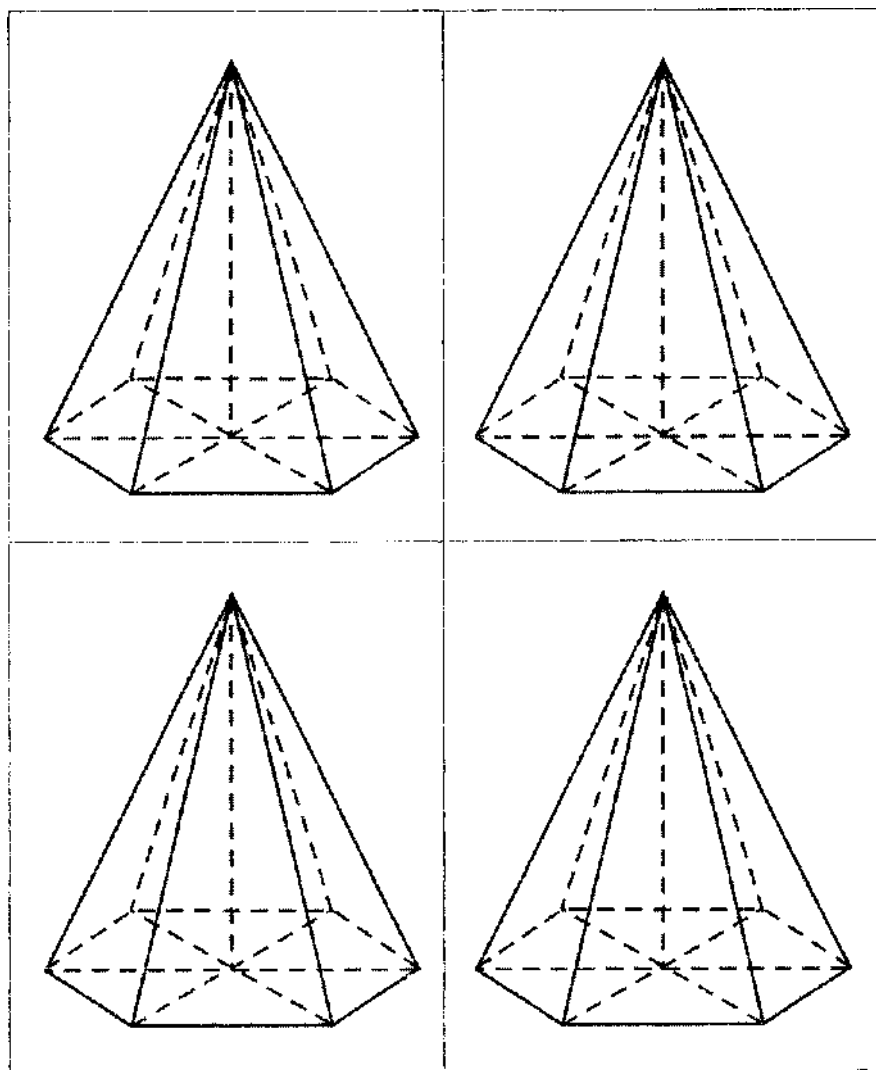
Шаблоны стереометрических фигур



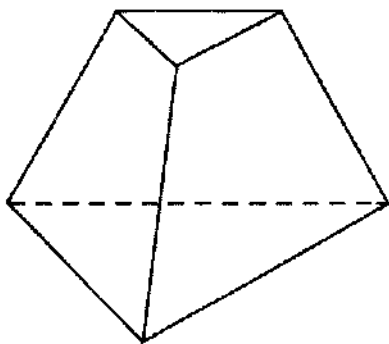
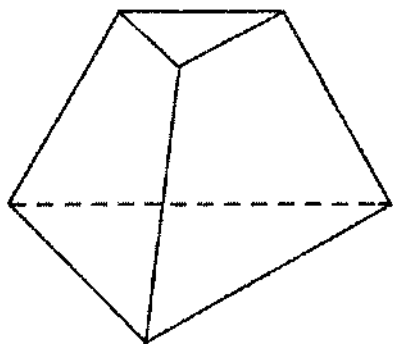
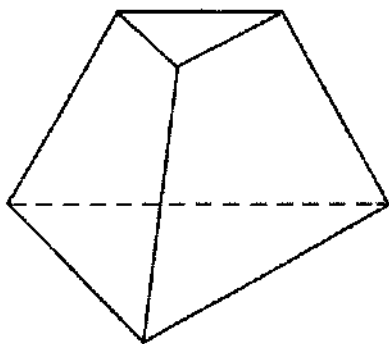
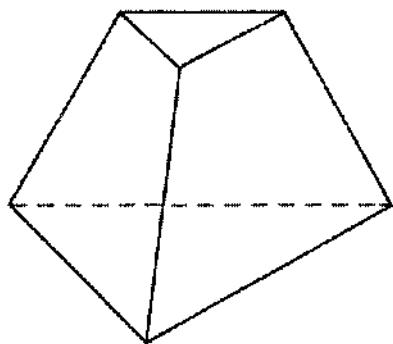
Шаблоны стереометрических фигур



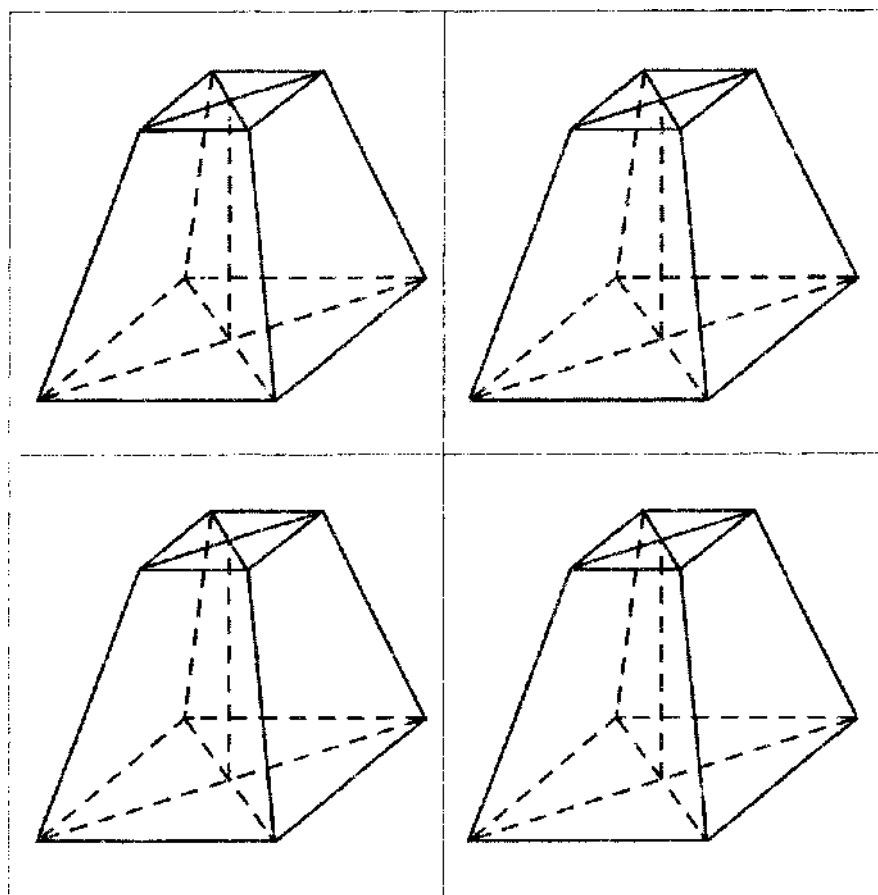
Шаблоны стереометрических фигур



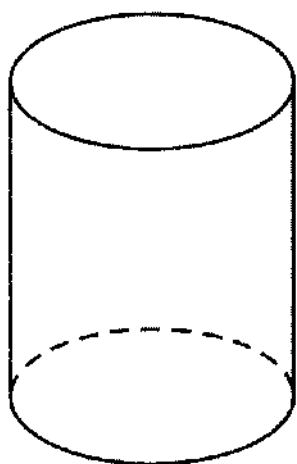
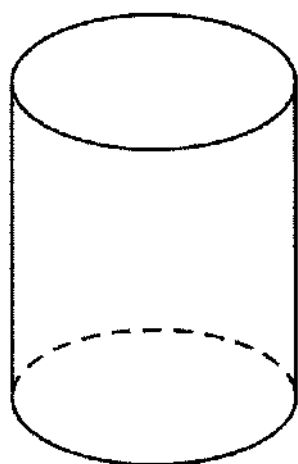
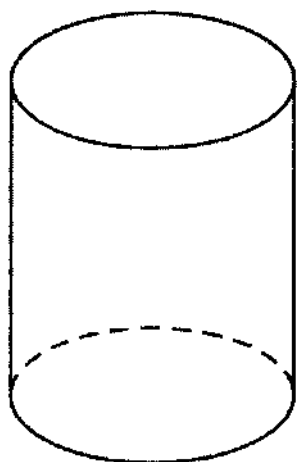
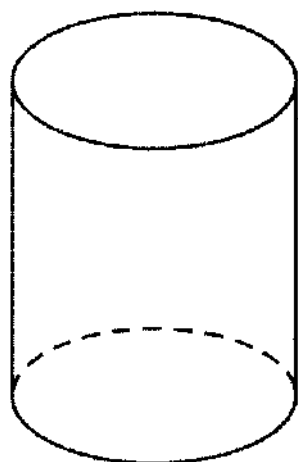
Шаблоны стереометрических фигур



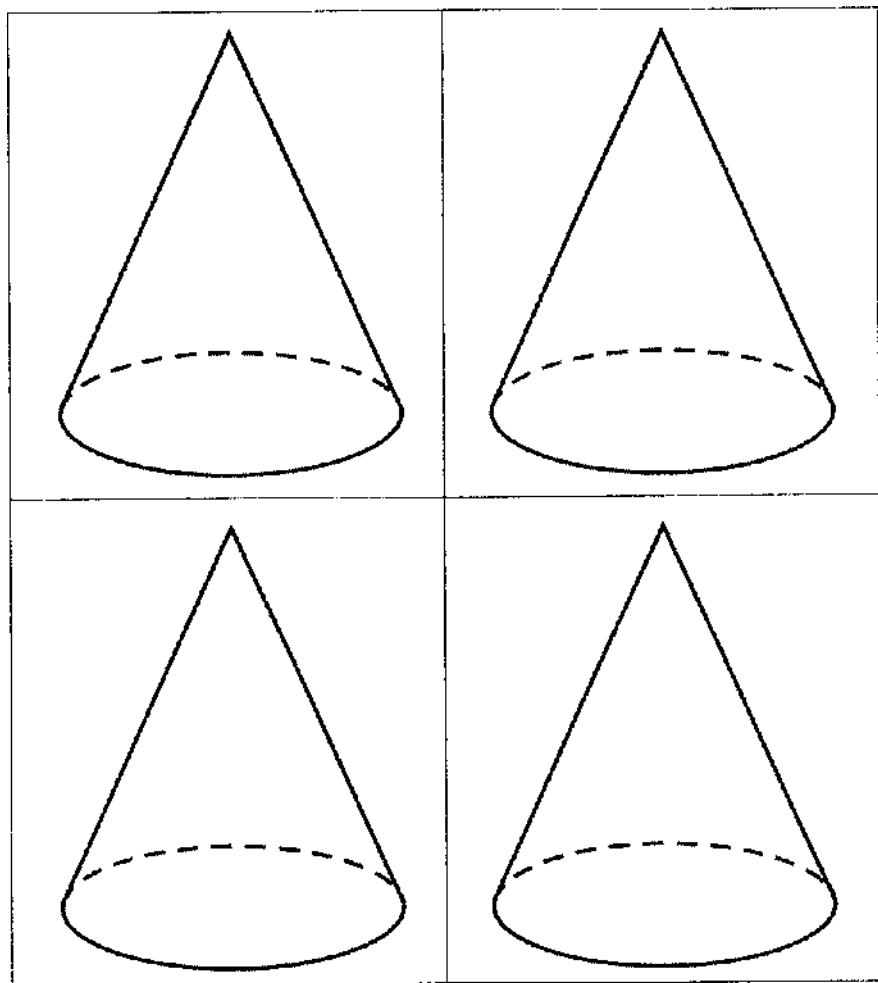
Шаблоны стереометрических фигур



Шаблоны стереометрических фигур



Шаблоны стереометрических фигур



ОТВЕТЫ

Аксиомы стереометрии (1)

1. а) ABC и ABM ; б) ABC и ABM ; в) ABC и ABM ; г) ABC и ABM .

Параллельные прямые в пространстве

6. а) BB_1, CC_1, DD_1, OO_1 ; б) OF и AC ; в) BC, MK и PQ ; г) BM и FO .

Параллельность прямой и плоскости

7. а) $3\sqrt{2}$; б) 9; в) 12; г) $12\sqrt{2}$.

Скрещивающиеся прямые

8. а) 50° ; б) 24° ; в) 45° ; г) 60° .

Параллельность плоскостей (1)

9. а) 12; б) 9.

Параллельность плоскостей (2)

10. а) 5; б) 15,6; в) 6; г) 4,5.

Построение сечений многогранников плоскостью (6)

14. а) $16\sqrt{2}$; б) $25\sqrt{2}$; в) $20\sqrt{2}$; г) $9\sqrt{55}$.

Перпендикулярность прямой и плоскости

15. а) $\sqrt{5}$; б) 4,2; в) 10,5; г) $8(1 + \sqrt{2})$.

Свойства диагоналей прямоугольного параллелепипеда

16. а) 7; б) 150; в) $36\sqrt{3}$; г) 16.

Перпендикуляр и наклонная

17. а) 7; б) 4; в) 12; г) 16.

Теорема о трёх перпендикулярах

18. а) $2\sqrt{13}$; б) 15; в) 6; г) $\sqrt{14}$.

Расстояние от точки до плоскости (1)

19. а) $6\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{5}$; в) $\frac{80}{13}$; г) $\frac{13\sqrt{2}}{2}$.

Расстояние от точки до плоскости (2)

20. а) $3\sqrt{2}$; б) 7,2; в) 12; г) $5\sqrt{3}$.

Расстояние между скрещивающимися прямыми

22. а) 8; б) $6\sqrt{2}$; в) $3\sqrt{3}$; г) $4\sqrt{2}$.

Угол между прямой и плоскостью (1)

23. а) 45° ; б) 30° ; в) $\arctg \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\arctg \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Угол между прямой и плоскостью (2)

24. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) 45° ; в) 25; г) $\arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Двугранный угол (1)

25. а) 30° ; б) 120° ; в) 110° ; г) 9.

Двугранный угол (2)

26. а) 14; б) $27\sqrt{3}$; в) 72; г) 24.

Двугранный угол (3)

27. а) $\frac{45\sqrt{3}}{4}$; б) 16; в) $\frac{32}{3}$; г) $54\sqrt{2}$.

Перпендикулярность плоскостей

28. а) 8; б) 8; в) 45° ; г) $10\sqrt{3}$.

Площадь поверхности прямой призмы

29. а) 112; б) 288; в) 159; г) $340 + 44\sqrt{5}$.

Площадь поверхности правильной призмы

30. а) 150; б) $36(3 + 2\sqrt{6})$; в) $108\sqrt{3}$; г) $144 + 48\sqrt{3}$.

Площадь поверхности параллелепипеда

31. а) 916; б) $48\sqrt{3}$; в) 140; г) 426.

Площадь поверхности наклонной призмы

32. а) 76; б) 300; в) 198; г) $42(1 + \sqrt{3})$.

Площадь поверхности пирамиды (1)

33. а) $144\sqrt{3}$; б) $100(\sqrt{3} + 1)$; в) 48; г) $54\sqrt{3}(1 + \sqrt{5})$.

Площадь поверхности пирамиды (2)

34. а) $36\sqrt{3}(\sqrt{5} + 1)$; б) $552 + 120\sqrt{2}$; в) $120 + 115\sqrt{3} + 5\sqrt{219}$;
г) $72(\sqrt{7} + 1)$.

Площадь поверхности пирамиды (3)

35. а) $18\sqrt{3}$; б) 30; в) 240; г) 96.

Площадь поверхности пирамиды (4)

36. а) $48 + 8\sqrt{21}$; б) 216; в) $72\sqrt{3}$; г) $30 + 6\sqrt{5}$.

Площадь поверхности усеченной пирамиды

37. а) 302; б) $540 + 125\sqrt{3}$; в) $34\sqrt{3}$; г) $40 + 32\sqrt{14}$.

Объем прямой призмы

38. а) 900; б) $160\sqrt{3}$; в) 216; г) $30\sqrt{10}$.

Объем пирамиды (1)

39. а) $288\sqrt{2}$; б) $72\sqrt{3}$; в) $54\sqrt{3}$; г) 270.

Объем усеченной пирамиды

40. а) 186; б) 430; в) $798\sqrt{3}$; г) $63\sqrt{3}$.

Объем пирамиды (2)

41. а) 42; б) $\frac{1000\sqrt{3}}{3}$; в) 192; г) 630.

Цилиндр (1)

42. а) 216π ; б) $\frac{128}{\pi}$.

Цилиндр (2)

43. а) 54π ; б) 300π ; в) 128π ; г) 80π .

Конус (1)

44. а) 243π ; б) 4π .

Конус (2)

45. а) $144\pi\sqrt{2}$; б) $\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$; в) $64\pi(3+2\sqrt{3})$; г) $36\pi(3+2\sqrt{3})$.

Усеченный конус

46. а) 19π ; б) $\pi(32\sqrt{3}+102)$.

Сфера

47. а) 9; б) 244π ; в) 4; г) 296π .

Шар

48. а) 288π ; б) 27; в) $\frac{1}{27}$; г) 3.

СОДЕРЖАНИЕ

От автора	3
Аксиомы стереометрии (1)	4
Аксиомы стереометрии (2)	5
Аксиомы стереометрии (3)	6
Построение сечений многогранников плоскостью (1)	7
Построение сечений многогранников плоскостью (2)	8
Параллельные прямые в пространстве	9
Параллельность прямой и плоскости	10
Скрещивающиеся прямые	11
Параллельность плоскостей (1)	12
Параллельность плоскостей (2)	13
Построение сечений многогранников плоскостью (3)	14
Построение сечений многогранников плоскостью (4)	15
Построение сечений многогранников плоскостью (5)	16
Построение сечений многогранников плоскостью (6)	17
Перпендикулярность прямой и плоскости	18
Свойства диагоналей прямоугольного параллелепипеда	20
Перпендикуляр и наклонная	21
Теорема о трех перпендикулярах	23
Расстояние от точки до плоскости (1)	25
Расстояние от точки до плоскости (2)	26
Построение ортогональных проекций	27
Расстояние между скрещивающимися прямыми	28
Угол между прямой и плоскостью (1)	29
Макет к задаче 23, а	31
Угол между прямой и плоскостью (2)	33
Двугранный угол (1)	34
Двугранный угол (2)	36
Двугранный угол (3)	37
Перпендикулярность плоскостей	38
Макет к задаче 28, в	39
Макет к задаче 28, г	41
Площадь поверхности прямой призмы	43
Площадь поверхности правильной призмы	44
Площадь поверхности параллелепипеда	45
Площадь поверхности наклонной призмы	46
Площадь поверхности пирамиды (1)	47
Площадь поверхности пирамиды (2)	48

Макет к задаче 34, в	49
Площадь поверхности пирамиды (3)	51
Площадь поверхности пирамиды (4)	53
Площадь поверхности усеченной пирамиды	54
Макет к задаче 36, а	55
Макет к задаче 36, б	57
Макет к задаче 36, в	59
Макет к задаче 36, г	61
Объем прямой призмы	63
Объем пирамиды (1)	64
Объем усеченной пирамиды	65
Объем пирамиды (2)	66
Цилиндр (1)	67
Цилиндр (2)	68
Конус (1)	69
Конус (2)	70
Усеченный конус	71
Сфера	72
Шар	73
Наблюдения стереометрических фигур	74
Ответы	86

Учебное издание

Домашний учитель

**Савченко Валентина Ивановна
Крылович Марина Владимировна**

СТЕРЕОМЕТРИЯ
на готовых чертежах и макетах

Отвественный за выпуск Т.В. Анирович

Компьютерная верстка Н.А. Колелько

Подписано в печать с готовых диапозитивов 09.10.2013. Формат 60 × 84¹/₁₆.
Бумага газетная. Гарнитура Petersburg. Печать офсетная. Усл. печ. л. 5,58.
Уч.-изд. л. 2,2. Тираж 3100 экз. Заказ 233.

Общество с ограниченной ответственностью «Сер-Вит».

ЛП № 02330/0494356 от 01.04.2009. Ул. Гурьского, д. 30, к. 31, 34, 220015, Минск.

Тел./факс 202-82-82, 202-81-81, 202-83-83. E-mail: ser-vit@mail.ru.

ОАО «Брестская типография» ЛП 02330/0494170 от 03.04.2009 г.

Проспект Машерова, 75, 224013, Брест.