Новосибирский государственный университет
Специализированный учебно-научный центр

Н.А. Бунеева
А.М. Каргаполов

Задачи по стереометрии (векторный метод)

Новосибирск
2006

Бунеева Н.А., Каргаполов А.М.

Задачи по стереометрии (векторный метод).

Пособие содержит основные методы для решения задач по стереометрии с помощью векторов. Рассмотрены задачи различной степени трудности.

Сборник будет полезен для учителей и школьников старших классов и всем, кто готовится к вступительным экзаменам по математике в вузы.

§1. Определение вектора. Линейные операции над векторами. Компланарность векторов. Разложение вектора по базису.

Вектор – направленный отрезок прямой евклидова пространства, у которого один конец (точка A) называется *началом* вектора, другой конец (точка B) *концом* вектора. Обозначения вектора: $\overline{a}$, $\vec{a}$, $\overline{AB}$. Вектор начало и конец которого совпадают, называется *нулевым* вектором и обозначается $\vec{0}$. Вектор характеризуется *модулем* (или длиной), который равен длине отрезка AB, и обозначается $|\overline{a}|, |a|$ и направлением: от A к B. Вектор $\overline{BA}$ называется вектором, *противоположным* вектору $\overline{AB}$. Вектор длины, равной единице, называется *единичным* вектором. Нулевому вектору приписывается любое направление.

Напомним основные свойства линейных операций (которые доказываются точно так же, как и для плоскости).

Свойства сложения векторов

1. $\forall \vec{a}, \vec{b}: \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (коммутативность сложения).
2. $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}: \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$ (ассоциативность сложения).
3. $\forall \vec{a}: \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.
4. $\forall \vec{a}: \vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \vec{0}$.

Свойства умножения вектора на число

1. $\forall \vec{a};\ \forall \alpha, \beta \in R: (\alpha\beta)\vec{a} = \alpha\left(\beta\vec{a}\right)$ (ассоциативность).
2. $\forall \vec{a};\ \forall \alpha, \beta \in R: (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ (дистрибутивность по отношению к сложению действительных чисел).

3. $\forall \vec{a}, \vec{b}$; $\forall \alpha \in R$: $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ (дистрибутивность по отношению к сложению векторов).
4. $\forall \vec{a}$: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Два вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Векторы называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Два коллинеарных вектора называются *одинаково противоположно) направленными*, если их концы лежат по одну сторону (по разные стороны) от прямой, соединяющей их начала, или от общего начала.

Два вектора, лежащие на одной прямой, называются одинаково(противоположно) направленными, если один из лучей целиком содержится (не содержится целиком) в другом.

Два вектора называются *равными* если они имеют равные модули и одинаково направлены.

Теорема 1 *(признак компланарности векторов).* Если для векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ существуют числа x и y такие, что $\bar{c} = x\bar{a} + y\bar{b}$, то $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны.

Теорема 2. Пусть $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ - компланарные векторы, причем $\bar{a}$ и $\bar{b}$ неколлинеарны. Тогда существует единственная пара чисел x и y такая, что $\bar{c} = x\bar{a} + y\bar{b}$.

Теорема 3. Пусть $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ - некомпланарные векторы. Тогда для любого вектора $\bar{d}$ существует единственная тройка действительных чисел x, y и z таких, что $\bar{d} = x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c}$.

Базисом в пространстве называется упорядоченная тройка некомпланарных векторов.

Базис из векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ будем обозначать $\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$. Теорема 3. утверждает, что любой вектор пространства однозначно разложим по базисным векторам.

Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ - некоторый базис, $\overline{d}$ - произвольный вектор пространства. Коэффициенты α, β и γ в разложении $\overline{d}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}+\gamma\overline{c}$ называют *координатами вектора* $\overline{d}$ в базисе $\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\}$.

Решим несколько задач, используя свойства линейных операций над векторами и разложение вектора по базисным векторам.

Задача 1.

На диагонали AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка M, а на прямой B_1C – точка N – так, что отрезки MN и BD параллельны. Найти отношение длин этих отрезков.

Решение.

При решении задачи будем использовать тот факт, что если два вектора $\overline{f}$ и $\overline{g}$ параллельны, то существует такое число α, что $\overline{f}=\alpha\overline{g}$. Ясно, что число $|\alpha|$ и есть отношение длин векторов $\overline{f}$ и $\overline{g}$.

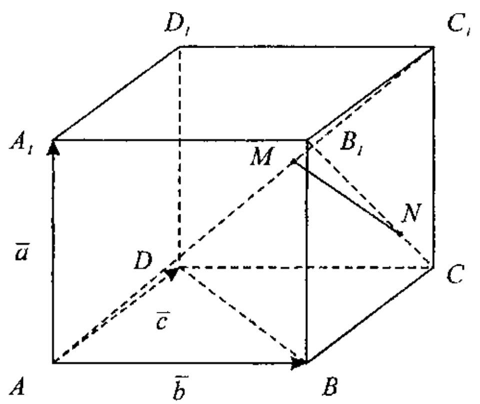

Рис. 1

Введем следующие обозначения (рис.1): $\overline{AA_1}=\overline{a}$, $\overline{AB}=\overline{b}$, $\overline{AD}=\overline{c}$.

Понятно, что $\overline{BB_1}=\overline{CC_1}=\overline{DD_1}=\overline{a}$, $\overline{A_1B_1}=\overline{D_1C}=\overline{DC}=\overline{b}$, $\overline{BC}=\overline{B_1C_1}=\overline{A_1D_1}=\overline{c}$.

Запишем векторы $\overline{AC_1}$, $\overline{CB_1}$ через $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

$$\overline{AC_1} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CC_1},$$
$$\overline{AC_1} = \overline{b} + \overline{c} + \overline{a},$$
$$\overline{CB_1} = \overline{CB} + \overline{BB_1},$$
$$\overline{CB_1} = -\overline{c} + \overline{a}.$$

Точки M и N находятся на прямых AC_1 и CB_1. Естественно вычислить векторы $\overline{AM}$ и $\overline{CN}$.

$$\overline{AM} = \beta\overline{AC_1} = \beta\overline{a} + \beta\overline{b} + \beta\overline{c},$$
$$\overline{CN} = \gamma\overline{CB_1} = \gamma\overline{a} - \gamma\overline{c}.$$

Заключительный этап решения задачи.

Так как по условию $MN \| DB$, то можно записать:

$$\overline{MN} = \alpha\overline{DB} \ (*).$$

Имеем $\overline{DB} = \overline{b} - \overline{c}$.

Вычислим $\overline{MN}$.

$$\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CN},$$
$$\overline{MN} = -\beta\overline{a} - \beta\overline{b} - \beta\overline{c} + \overline{b} + \overline{c} + \gamma\overline{a} - \gamma\overline{c}.$$

В итоге $\overline{MN} = (-\beta + \gamma)\overline{a} + (-\beta + 1)\overline{b} + (-\beta + 1 - \gamma)\overline{c}$.

Подставим $\overline{MN}$ и $\overline{DB}$ в уравнение (*). Получили векторное равенство:

$$(-\beta + \gamma)\overline{a} + (-\beta + 1)\overline{b} + (-\beta + 1 - \gamma)\overline{c} = \alpha\overline{b} - \alpha\overline{c}.$$

Из этого равенства имеем систему:

$$\begin{cases} -\beta + \gamma = 0, & (1) \\ -\beta + 1 = \alpha, & (2) \\ -\beta + 1 - \gamma = -\alpha. & (3) \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение: $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{2}{3}$, $\gamma = \frac{2}{3}$.

В итоге получили $\overline{MN} = \frac{1}{3}\overline{DB}$, следовательно, $\frac{|\overline{MN}|}{|\overline{DB}|} = \frac{1}{3}$.

Ответ: $1:3$.

Задача 2.

В основании четырехугольной пирамиды SABCD лежит трапеция ABCD, у которой отношение основания AB к основанию CD равно $2:3$. Точки K, L, M и N лежат на ребрах SA, SB, SC и SD соответственно. Известно, что $SM = MC$, $SK : KA = 3:2$, отрезки KN и LM параллельны. Найти длину отрезка KN, если $LM = 5$.

Решение.

При решении задачи будем использовать тот факт, что если два вектора $\overline{f}$, $\overline{g}$ параллельны, то существует такое число α, что $\overline{f} = \alpha\overline{g}$.

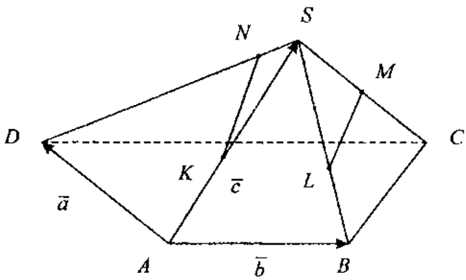

Рис. 2

Понятно, что длина вектора $\overline{f}$ равна произведению длины вектора $\overline{g}$ на модуль числа α, т.е. $|\overline{f}| = |\alpha| \cdot |\overline{g}|$.

А если длина вектора $\overline{g}$ задана, например, $|\overline{g}| = 5$, то для нахождения длины вектора $\overline{f}$ необходимо найти α.

Введем следующие обозначения:

$$\overline{AD} = \overline{a},\ \overline{AB} = \overline{b},\ \overline{AS} = \overline{c} \text{ (рис.2).}$$

Тогда мы можем записать следующие вектора:

$$\overline{DC} = \frac{3}{2}\overline{AB} = \frac{3}{2}\overline{b},$$

$$\overline{DS} = \overline{DA} + \overline{AS} = -\overline{a} + \overline{c},$$

$$\overline{BS} = \overline{BA} + \overline{AS} = -\overline{b} + \overline{c},$$

$$\overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AD} + \overline{DC} = -\overline{b} + \overline{a} + \frac{3}{2}\overline{b} = \overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b},$$

$$\overline{CS}=\overline{CD}+\overline{DA}+\overline{AS}=-\frac{3}{2}\overline{b}-\overline{a}+\overline{c}=-\overline{a}-\frac{3}{2}\overline{b}+\overline{c}.$$

Из условия задачи следует, что:

$$\overline{CM}=\frac{1}{2}\overline{CS}=-\frac{1}{2}\overline{a}-\frac{3}{4}\overline{b}+\frac{1}{2}\overline{c},$$

$$\overline{AK}=\frac{2}{5}\overline{AS}=\frac{2}{5}\overline{c}.$$

Для $\overline{BL}$ и $\overline{DN}$ имеем равенства:

$$\overline{BL}=\beta\overline{BS}=-\beta\overline{b}+\beta\overline{c},$$

$$\overline{DN}=\gamma\overline{DS}=-\gamma\overline{a}+\gamma\overline{c}.$$

Вычислим вектора $\overline{KN}$ и $\overline{LM}$ через вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

$$\overline{KN}=\overline{KA}+\overline{AD}+\overline{DN}=-\frac{2}{5}\overline{c}+\overline{a}+\left(-\gamma\overline{a}+\gamma\overline{c}\right)$$

$$\overline{KN}=(1-\gamma)\overline{a}+\left(\gamma-\frac{2}{5}\right)\overline{c}$$

$$\overline{LM}=\overline{LB}+\overline{BC}+\overline{CM}=\left(\beta\overline{b}-\beta\overline{c}\right)+\left(\overline{a}+\frac{1}{2}\overline{b}\right)+\left(-\frac{1}{2}\overline{a}-\frac{3}{4}\overline{b}+\frac{1}{2}\overline{c}\right)$$

$$\overline{LM}=\frac{1}{2}\overline{a}+\left(\beta-\frac{1}{4}\right)\overline{b}+\left(-\beta+\frac{1}{2}\right)\overline{c}$$

По условию $\overline{KN}\parallel\overline{LM}$, следовательно, существует число α такое, что

$$\overline{KN}=\alpha\cdot\overline{LM}.$$

Имеем следующее векторное равенство:

$$(1-\gamma)\overline{a}+\left(\gamma-\frac{2}{5}\right)\overline{c}=\frac{\alpha}{2}\overline{a}+\left(\alpha\beta-\frac{1}{4}\alpha\right)\overline{b}+\left(-\alpha\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\overline{c}$$

Из этого равенства следует, что

$$\begin{cases} 1-\gamma=\dfrac{\alpha}{2}, & (1)\\[2mm] 0=\alpha\beta-\dfrac{1}{4}\alpha, & (2)\\[2mm] \gamma-\dfrac{2}{5}=-\alpha\beta+\dfrac{\alpha}{2}. & (3)\end{cases}$$

Из уравнения (2) следует: $\alpha = 0$ или $\beta = \frac{1}{4}$.

Но при $\alpha = 0$ получаем, что $\overline{KN} = 0$, т.е. противоречие.

Следовательно, $\beta = \frac{1}{4}$.

Сложим (1) и (3).
Получим:

$1 - \frac{2}{5} = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2}$,

$\frac{3}{5} = \frac{3}{4}\alpha$,

$\alpha = \frac{4}{5}$.

$\left|\overline{KN}\right| = \frac{4}{5} \cdot \left|\overline{LM}\right| = 4$.

Ответ: $\left|\overline{KN}\right| = 4$.

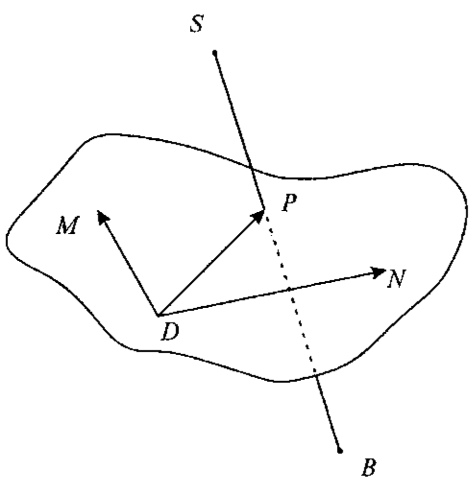

Рис. 3

Задача №3.

В основании пирамиды SABCD лежит трапеция ABCD ($AB \| CD$, $CD = 4AB$). Точки M и N принадлежат ребрам AS и CS соответственно. Известно, что $AM = \frac{1}{3}AS$ и $CN = \frac{2}{3}CS$. Плоскость проходит через точки D, M и N. Определить, в каком отношении плоскость делит ребро BS.

Решение.

Пусть точка P – пересечение плоскости и ребра BS. Сделаем следующий рисунок (рис.3).

Так как плоскость содержит векторы $\overline{DP}$, $\overline{DM}$ и $\overline{DN}$, то один из векторов (например, $\overline{DP}$) можно разложить через два других, которые не параллельны друг другу. Таким образом, существуют такие числа β и γ, что

$$\overline{DP} = \beta\overline{DM} + \gamma\overline{DN} \quad (*).$$

Введем следующие обозначения: $\overline{AS}=\bar{a}$, $\overline{AB}=\bar{b}$, $\overline{AD}=\bar{c}$ (рис.4).

Тогда $\overline{DC}=4\bar{b}$, $\overline{AM}=\frac{1}{3}\bar{a}$,

$\overline{CS}=-4\bar{b}-\bar{c}+\bar{a}$, $\overline{BS}=\bar{a}-\bar{b}$,

$\overline{CN}=\frac{2}{3}\overline{CS}$,

$\overline{CN}=\frac{2}{3}\bar{a}-\frac{8}{3}\bar{b}-\frac{2}{3}\bar{c}$,

$\overline{BP}=\alpha\overline{BS}=\alpha\bar{a}-\alpha\bar{b}$, где α – некоторый коэффициент.

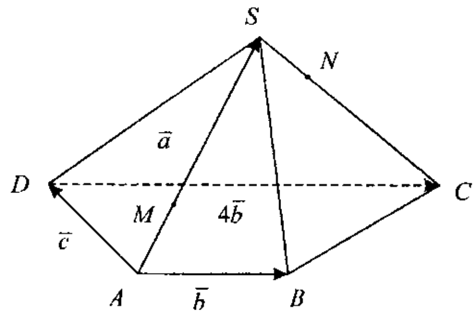

Рис. 4

Вычислим векторы $\overline{DP}$, $\overline{DM}$ и $\overline{DN}$.

$$\overline{DP}=\overline{DA}+\overline{AB}+\overline{BP}=-\bar{c}+\bar{b}+\alpha\bar{a}-\alpha\bar{b},$$

$$\overline{DP}=\alpha\bar{a}+(1-\alpha)\bar{b}-\bar{c},$$

$$\overline{DM}=-\bar{c}+\frac{1}{3}\bar{a},$$

$$\overline{DN}=4\bar{b}+\frac{2}{3}\bar{a}-\frac{8}{3}\bar{b}-\frac{2}{3}\bar{c},$$

$$\overline{DN}=\frac{2}{3}\bar{a}+\frac{4}{3}\bar{b}-\frac{2}{3}\bar{c}.$$

Подставим векторы $\overline{DP}$, $\overline{DM}$ и $\overline{DN}$ в уравнение (*):

$$\alpha\bar{a}+(1-\alpha)\bar{b}-\bar{c}=\beta\left(\frac{1}{3}\bar{a}-\bar{c}\right)+\gamma\left(\frac{2}{3}\bar{a}+\frac{4}{3}\bar{b}-\frac{2}{3}\bar{c}\right).$$

Раскроем скобки в правой части и приведем подобные. Получим следующее векторное равенство:

$$\alpha\bar{a}+(1-\alpha)\bar{b}-\bar{c}=\left(\frac{\beta}{3}+\frac{2}{3}\gamma\right)\bar{a}+\frac{4}{3}\gamma\bar{b}+\left(-\beta-\frac{2}{3}\gamma\right)\bar{c}.$$

Из которого следует равенство соответствующих коэффициентов. Получим систему:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\beta}{3} + \dfrac{2}{3}\gamma, & (1) \\ 1 - \alpha = \dfrac{4}{3}\gamma, & (2) \\ -1 = -\beta - \dfrac{2}{3}\gamma & (3) \end{cases}$$

Умножим уравнение (1) на 3 и сложим с уравнением (3). Получили равенство $3\alpha - 1 = 2\gamma - \frac{2}{3}\gamma$. Учитывая уравнение (2), в итоге имеем

$\alpha = \frac{1}{2}$.

Следовательно, $BP = \frac{1}{2}BS = PS$, т.е. точка P – середина BS, и

$BP : PS = 1 : 1$.

Ответ: $1 : 1$.

Задача №4.

Через середины M и N ребер AD и CC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость параллельно диагонали DB_1 параллелепипеда. В каком отношении эта плоскость делит ребро BB_1?

Решение.

Пусть P – точка пересечения искомой плоскости с ребром BB_1. Сделаем следующий рисунок (рис.5). Так как плоскость содержит векторы $\overline{MN}$, $\overline{MP}$ и параллельна вектору $\overline{DB_1}$, то эти три вектора

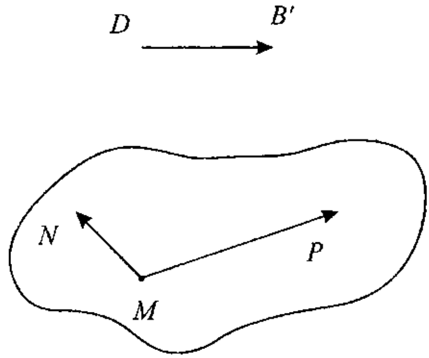

Рис. 5

являются компланарными. Следовательно, один из них (например, $\overline{MP}$) можно разложить через два других, которые не параллельны друг другу. Таким образом, существуют такие числа β и γ, что

$$\overline{MP} = \beta\overline{MN} + \gamma\overline{DB_1} \quad (*).$$

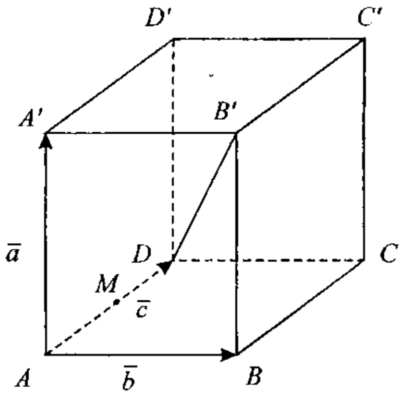

Рис. 6

Введем следующие обозначения (рис.6). Пусть $\overline{AA_1} = \bar{a}$, $\overline{AB} = \bar{b}$, $\overline{AD} = \bar{c}$.

Тогда $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AD} = \frac{1}{2}\bar{c}$,

$\overline{CC_1} = \bar{a}$,

$\overline{CN} = \frac{1}{2}\bar{a}$,

$\overline{DB_1} = \overline{DA} + \overline{AB} + \overline{BB_1} = -\bar{c} + \bar{b} + \bar{a}$,

$\overline{BP} = \alpha\overline{BB_1} = \alpha\bar{a}$, где α – некоторый коэффициент.

Вычислим векторы $\overline{MN}$ и $\overline{MP}$.

$$\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CN},$$

$$\overline{MN} = -\frac{1}{2}\bar{c} + \bar{b} + \bar{c} + \frac{1}{2}\bar{a} = \frac{1}{2}\bar{a} + \bar{b} + \frac{1}{2}\bar{c},$$

$$\overline{MP} = \overline{MA} + \overline{AB} + \overline{BP},$$

$$\overline{MP} = -\frac{1}{2}\bar{c} + \bar{b} + \alpha\bar{a}.$$

Подставим векторы $\overline{MP}$, $\overline{MN}$, $\overline{DB_1}$ в уравнение (*).

$$\alpha\bar{a} + \bar{b} - \frac{1}{2}\bar{c} = \beta\left(\frac{1}{2}\bar{a} + \bar{b} + \frac{1}{2}\bar{c}\right) + \gamma\left(\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}\right),$$

Раскроем скобки в правой части и приведем подобные. Получим следующее векторное равенство

$$\alpha\bar{a} + \bar{b} - \frac{1}{2}\bar{c} = \left(\frac{\beta}{2} + \gamma\right)\bar{a} + (\beta + \gamma)\bar{b} + \left(\frac{\beta}{2} - \gamma\right)\bar{c}.$$

Из которого следует равенство соответствующих коэффициентов. Получили систему:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\beta}{2} + \gamma, \\ 1 = \beta + \gamma, \\ -\dfrac{1}{2} = \dfrac{\beta}{2} - \gamma. \end{cases}$$

Откуда $\alpha = \frac{5}{6}$, $\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma = \frac{2}{3}$.

Следовательно, $BP = \frac{5}{6} BB_1$ и $PB_1 = \frac{1}{6} BB_1$.

В итоге, $BP : PB_1 = 5 : 1$.

Ответ: $5 : 1$.

Задача №5.

На диагонали AB_1 грани ABB_1A_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ расположена точка М так, что $AM : MB_1 = 5 : 4$. Плоскость проходит через точку М и параллельна диагоналям A_1C и BC_1. Определить, в каком отношении эта плоскость делит ребро CC_1.

Решение.

Пусть точка Р – пересечение искомой плоскости и ребра CC_1. Сделаем следующий рисунок (рис.7).

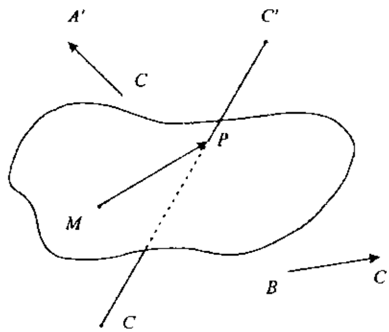

Рис. 7

Так как плоскость, содержащая вектор $\overline{MP}$, параллельна векторам $\overline{CA_1}$ и $\overline{BC_1}$, то векторы $\overline{MP}$, $\overline{CA_1}$ и $\overline{BC_1}$ являются компланарными. Следовательно, существуют такие числа β и γ, что

$$\overline{MP} = \alpha\overline{CA_1} + \beta\overline{BC_1} \quad (*).$$

Т.е. из компланарности трех векторов следует, что один из них (например, $\overline{MP}$) можно разложить через два других, не параллельных друг другу, вектора. Ясно, что $\overline{CA_1}$ не параллелен $\overline{BC_1}$.

Введем следующие обозначения (рис.8). Пусть $\overline{AA_1} = \bar{a}$, $\overline{AB} = \bar{b}$ и $\overline{AC} = \bar{c}$.

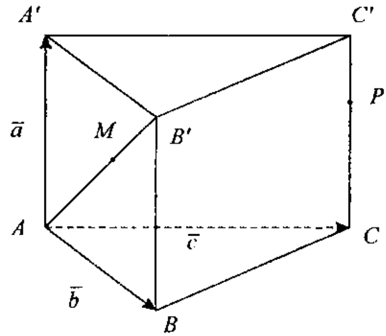

Рис. 8

$\overline{AB_1} = \bar{a} + \bar{b}$, $\overline{CC_1} = \bar{a}$,

$\overline{AM} = \frac{5}{9}\overline{AB_1} = \frac{5}{9}(\bar{a} + \bar{b}) = \frac{5}{9}\bar{a} + \frac{5}{9}\bar{b}$,

$\overline{CP} = \alpha\overline{CC_1} = \alpha\bar{a}$, где α – некоторый коэффициент.

Тогда $\overline{CA_1} = \overline{CA} + \overline{AA_1} = \bar{a} - \bar{c}$,

$\overline{BC_1} = \overline{BA} + \overline{AC} + \overline{CC_1} = -\bar{b} + \bar{c} + \bar{a}$.

Вычислим вектор $\overline{MP}$.

$\overline{MP} = \overline{MA} + \overline{AC} + \overline{CP}$,

$\overline{MP} = -\frac{5}{9}\bar{a} - \frac{5}{9}\bar{b} + \bar{c} + \alpha\bar{a} = \left(-\frac{5}{9} + \alpha\right)\bar{a} - \frac{5}{9}\bar{b} + \bar{c}$.

Векторы $\overline{MP}$, $\overline{CA_1}$ и $\overline{BC_1}$ подставим в уравнение (*).

$$\left(-\frac{5}{9} + \alpha\right)\bar{a} - \frac{5}{9}\bar{b} + \bar{c} = \beta(\bar{a} - \bar{c}) + \gamma(-\bar{b} + \bar{c} + \bar{a}).$$

Раскроем скобки в правой части и приведем подобные. Получим следующее векторное равенство

$$\left(-\frac{5}{9} + \alpha\right)\bar{a} - \frac{5}{9}\bar{b} + \bar{c} = (\beta + \gamma)\bar{a} + (-\gamma)\bar{b} + (-\beta + \gamma)\bar{c},$$

из которого следует равенство соответствующих коэффициентов. Получили систему:

$$\begin{cases} -\frac{5}{9} + \alpha = \beta + \gamma, \\ -\frac{5}{9} = -\gamma, \\ 1 = -\beta + \gamma. \end{cases}$$

Ясно, что $\gamma = \frac{5}{9}$, $\beta = -\frac{4}{9}$, $\alpha = \frac{2}{3}$.

Следовательно, $CP = \frac{2}{3}CC_1$ и $PC_1 = \frac{1}{3}CC_1$. Тогда $CP : PC_1 = 2:1$.

Ответ: $2:1$.

Задача №6.

(НГУ ММФ 2002, В 2.1). В параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ с основанием ABCD и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD' точки M, N, F, G – середины ребер $A'B'$, CC', AD и CD соответственно. Плоскости $FB'D'$ и $GB'D'$ пересекают отрезок MN в точках K и L соответственно. Найти отношение $MK : KL : LN$.

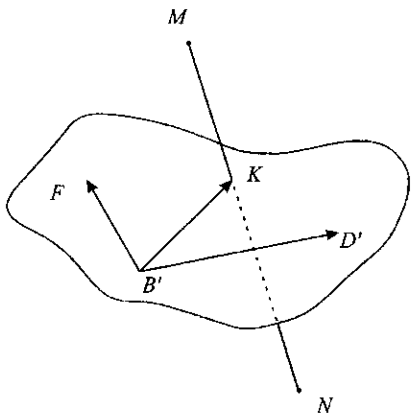

Рис. 9

Решение.

Решим первую часть данной задачи: в каком отношении отрезок MN делится плоскостью $FB'D'$. Будем использовать возможность разложения вектора $\overline{B'K}$ через вектора $\overline{B'F}$ и $\overline{B'D'}$.

Так как векторы $\overline{B'K}$, $\overline{B'F}$ и $\overline{B'D'}$ (рис.9) лежат в одной плоскости (и $\overline{B'F}$ не параллелен $\overline{B'D'}$), то существуют числа β и γ, что

$$\overline{B'K} = \beta\overline{B'K} + \gamma\overline{B'D'} \quad (*).$$

Пусть $\overline{AA'} = \bar{a}$, $\overline{AB} = \bar{b}$, $\overline{AD} = \bar{c}$ (рис.10).

Тогда имеем: $\overline{AF} = \dfrac{1}{2}\bar{c}$, $\overline{CN} = \dfrac{1}{2}\bar{a}$, $\overline{A'M} = \dfrac{1}{2}\bar{b}$.

$$\overline{MN} = \overline{MA'} + \overline{A'A} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CN},$$

$$\overline{MN} = -\frac{1}{2}\bar{b} - \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \frac{1}{2}\bar{a},$$

$$\overline{MN} = -\frac{1}{2}\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b} + \bar{c}.$$

Тогда

$$\overline{MK} = \alpha\overline{MN} = -\frac{\alpha}{2}\bar{a} + \frac{\alpha}{2}\bar{b} + 2\bar{c}.$$

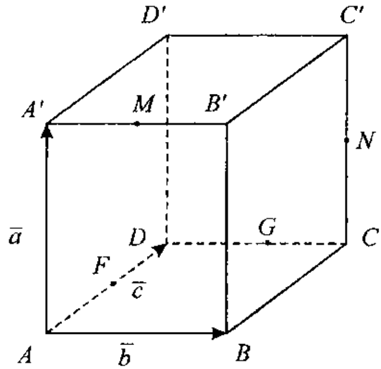

Рис. 10

Найдем $\overline{B'K}$, $\beta\overline{B'F}$, $\gamma\overline{B'D'}$ через $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

$$\overline{B'K} = \overline{B'M} + \overline{MK} = -\frac{1}{2}\bar{b} - \frac{\alpha}{2}\bar{a} + \frac{\alpha}{2}\bar{b} + \alpha\bar{c},$$

$$\overline{B'K} = -\frac{\alpha}{2}\bar{a} + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\right)\bar{b} + \alpha\bar{c} \ (1).$$

$$\overline{B'F} = \overline{B'A'} + \overline{A'A} + \overline{AF} = -\bar{b} - \bar{a} + \frac{1}{2}\bar{c},$$

$$\beta\overline{B'F} = -\beta\bar{a} - \beta\bar{b} + \frac{\beta}{2}\bar{c} \ (2).$$

$$\overline{B'D'} = \overline{B'A'} + \overline{A'D'} = -\bar{b} + \bar{c},$$

$$\gamma\overline{B'D'} = -\gamma\bar{b} + \gamma\bar{c} \ (3).$$

Подставим из уравнений (1), (2), (3) найденные величины в уравнение (*). Получили векторное равенство:

$$-\frac{\alpha}{2}\bar{a}+\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\right)\bar{b}+\alpha\bar{c}=-\beta\bar{a}-\beta\bar{b}+\frac{\beta}{2}\bar{c}-\gamma\bar{b}+\gamma\bar{c}.$$

Или $-\frac{\alpha}{2}\bar{a}+\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\right)\bar{b}+\alpha\bar{c}=-\beta\bar{a}+(-\beta-\gamma)\bar{b}+\left(\frac{\beta}{2}+\gamma\right)\bar{c}$.

Имеем равенство коэффициентов:

$$\begin{cases}-\frac{\alpha}{2}=-\beta,\\ \frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}=-\beta-\gamma,\\ \alpha=\frac{\beta}{2}+\gamma.\end{cases}$$

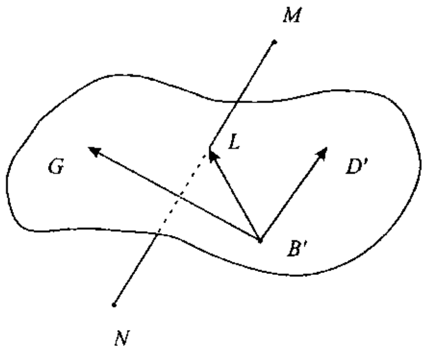

Рис. 11

В итоге $\alpha=\frac{2}{7}$.

Следовательно, $MK=\frac{2}{7}MN$.

Решим вторую часть задачи: в каком отношении отрезок MN делится плоскостью $GB'D'$ (рис.11).

Решаем аналогично, используя формулу

$\overline{B'L}=\beta\overline{B'G}+\gamma\overline{B'D'}$ (**) (величины α, β, γ уже «свои» для данного уравнения).

$\overline{ML}=\alpha\overline{MN}$,

$\overline{B'L}=-\frac{\alpha}{2}\bar{a}+\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\right)\bar{b}+\alpha\bar{c}$,

$\gamma\overline{B'D'}=-\gamma\bar{b}+\gamma\bar{c}$,

$\beta\overline{B'G}=-\beta\bar{a}-\frac{\beta}{2}\bar{b}+\beta\bar{c}-\gamma\bar{b}+\gamma\bar{c}$.

Подставим в уравнение (**).

$$-\frac{\alpha}{2}\bar{a}+\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\right)\bar{b}+\alpha\bar{c}=-\beta\bar{a}-\frac{\beta}{2}\bar{b}+\beta\bar{c}-\gamma\bar{b}+\gamma\bar{c}.$$

Приравнивая коэффициенты при $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ в этом векторном равенстве, получаем:

$$\begin{cases} -\frac{\alpha}{2}=-\beta, \\ \frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{\beta}{2}-\gamma, \\ \alpha=\beta+\gamma. \end{cases}$$

Откуда $\alpha=\frac{2}{5}$.

Следовательно, $ML=\frac{2}{5}MN$, т.к. $MK=\frac{2}{7}MN$, то можно записать:

$$MK=\frac{10}{35}MN,$$

$$ML=\frac{14}{35}MN.$$

В итоге $MK:KL:LN=10:4:21$.

Ответ: $MK:KL:LN=10:4:21$.

Задача №7.

В параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ точка М находится на луче DD', $DM=4DD'$, точка N находится на луче DC, $DN=\frac{5}{2}DC$, точка К находится на луче DA, $DK = 2DA$. Построить сечение плоскостью MNK, т.е. найти в каком отношении эта плоскость делит ребра параллелепипеда.

Решение.

Построим сечение с помощью векторов.
Пусть $\overline{AA'} = \overline{a}$, $\overline{AB} = \overline{b}$, $\overline{AD} = \overline{c}$ (рис.12).

Если точка Т – пересечение ребра BB' и плоскости MNK, то верно равенство $\overline{KT} = \beta\overline{KM} + \lambda\overline{KN}$ (*).

Запишем векторы $\beta\overline{KM}$, $\lambda\overline{KN}$ и $\overline{KT}$ через $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

$\overline{KM} = \overline{KD} + \overline{DM} = 2\overline{c} + 4\overline{a}$,

$\beta\overline{KM} = 4\beta\overline{a} + 2\beta\overline{c}$,

$\overline{KN} = 2\overline{c} + \dfrac{5}{2}\overline{b}$,

$\lambda\overline{KN} = \dfrac{5}{2}\lambda\overline{b} + 2\lambda\overline{c}$.

$\overline{KT} = \overline{KA} + \overline{AB} + \overline{BT}$.

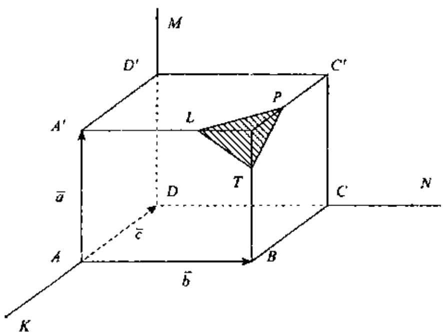

Рис. 12

Заметим, что $\overline{BT} = \alpha\overline{a}$. $\overline{KT} = \alpha\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$.
Подставим найденные векторы
$\beta\overline{KM}$, $\lambda\overline{KN}$ и $\overline{KT}$ в уравнение (*) и получим векторное равенство

$$\alpha\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = 4\beta\overline{a} + \frac{5}{2}\lambda\overline{b} + (2\beta + 2\lambda)\overline{c}.$$

Получаем систему

$$\begin{cases} \alpha = 4\beta, \\ 1 = \dfrac{5}{2}\lambda, \\ 1 = 2\beta + 2\lambda. \end{cases}$$

Решим и получим, что $\alpha = \frac{2}{5}$.

Таким образом точка Т делит ребро BB' в отношении $2:3$, считая от вершины В.

Если точка Р – пересечение ребра $B'C'$ с плоскостью MNK, то аналогично решаем векторное уравнение $\overline{KP} = \beta\overline{KM} + \lambda\overline{KN}$.

Находим, что Р делит ребро $B'C'$ в отношении $3:7$, считая от вершины B'.

Если точка L – пересечение ребра $A'B'$ с плоскостью MNK, то из уравнения $\overline{KL} = \beta\overline{KM} + \lambda\overline{KN}$ следует, что L делит ребро $A'B'$ в отношении $5:3$, считая от вершины A'.

Треугольник LPT и есть искомое сечение.

Задача №8.

В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 и основаниями ABC и $A_1B_1C_1$ через середины ребер A_1B_1, AC и BB_1 (точки K, M и N соответственно) проведена плоскость π. Найти расстояние от середины ребра B_1C_1 (точка P) до плоскости π, если известно, что расстояние от середины ребра AA_1 (точка L) до этой плоскости равно 6.

Решение.

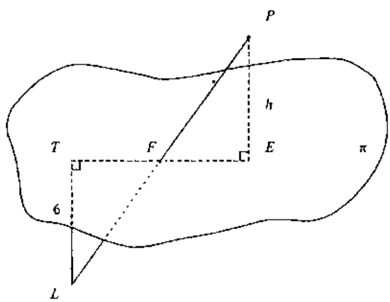

Рис. 13

Рассмотрим следующий чертеж(рис.13). Пусть F – пересечение LP с плоскостью π. LT и PE – перпендикуляры из L и P на плоскость π. Ясно, что $\frac{PF}{FL} = \frac{PE}{TL}$ (подобие треугольников PFE и LFT).

Пусть PE = h. Тогда $\frac{PF}{FL} = \frac{h}{6}$ и $h = \frac{PF}{FL} \cdot 6$.

Данная задача свелась к ответу на вопрос: «В каком отношении плоскость π (K, M и N) делит LP?»

Сделаем следующий рисунок(рис.14).

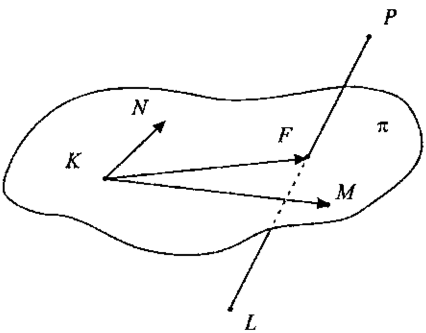

Рис. 14

Так как плоскость содержит вектора $\overline{KF}$, $\overline{KM}$, $\overline{KN}$, то один из них (например, $\overline{KF}$) можно разложить через два других, которые не параллельны друг другу. Таким образом, существуют такие числа β и λ, что $\overline{KF} = \beta\overline{KN} + \lambda\overline{KM}$ (*). Введем следующие обозначение обозначения.

Пусть $\overline{AA'} = \bar{a}$, $\overline{AB} = \bar{b}$, $\overline{AC} = \bar{c}$ (рис.15).

Запишем векторы $\beta\overline{KN}$, $\lambda\overline{KM}$ и $\overline{KF}$ через $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

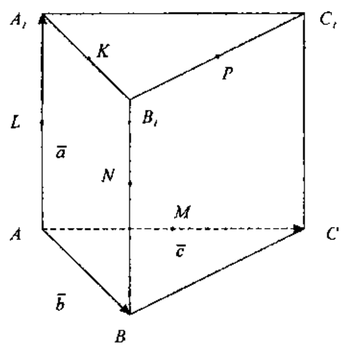

Рис. 15

$$\overline{KN} = \overline{KA} + \overline{AA'} + \overline{A'N} = -\frac{1}{2}\bar{c} + \bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b},$$

$$\beta\overline{KN} = \beta\bar{a} + \frac{\beta}{2}\bar{b} - \frac{\beta}{2}\bar{c},$$

$$\overline{KM} = \overline{KA} + \overline{AC} + \overline{CM} = -\frac{1}{2}\bar{c} + \bar{b} + \frac{1}{2}\bar{a},$$

$$\lambda\overline{KM} = \frac{\lambda}{2}\bar{a} + \lambda\bar{b} - \frac{\lambda}{2}\bar{c}.$$

Ясно, что $\overline{LF} = \alpha \cdot \overline{LP}$, где α - некоторое число.

$$\overline{LP} = \overline{LA'} + \overline{A'B'} + \overline{B'P},\ \overline{LP} = \frac{1}{2}\bar{a} + \bar{b} + \frac{1}{2}\left(-\bar{b} + \bar{c}\right) = \frac{1}{2}\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b} + \frac{1}{2}\bar{c}.$$

Получили, что $\overline{LP} = \frac{1}{2}\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b} + \frac{1}{2}\bar{c}$.

Тогда $\overline{KF} = \overline{KA} + \overline{AL} + \overline{LF}$.

$$\overline{KF} = -\frac{1}{2}\bar{c} + \frac{1}{2}\bar{a} + \frac{\alpha}{2}\bar{a} + \frac{\alpha}{2}\bar{b} + \frac{\alpha}{2}\bar{c}.$$

В итоге $\overline{KF} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)\bar{a} + \frac{\alpha}{2}\bar{b} + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\right)\bar{c}$.

Подставим векторы $\overline{KN}$, $\overline{KM}$ и $\overline{KF}$ в уравнение (*) и получим следующее векторное равенство:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)\bar{a} + \frac{\alpha}{2}\bar{b} + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\right)\bar{c} = \left(\beta + \frac{\lambda}{2}\right)\bar{a} + \left(\frac{\beta}{2} + \lambda\right)\bar{b} + \left(-\frac{\beta}{2} - \frac{\lambda}{2}\right)\bar{c}.$$

Приравниваем соответствующие коэффициенты и получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} = \beta + \frac{\lambda}{2}, \\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} + \lambda, \\ \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{\beta}{2} - \frac{\lambda}{2}. \end{cases}$$

Сложим первые два уравнения и утроенное третье.

$\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2} = 0$. В итоге $\alpha = \frac{2}{5}$. Получили, что $\overline{LF} = \frac{2}{5}\overline{LP}$ и $\overline{FP} = \frac{3}{5}\overline{LP}$. Тогда $h = \frac{3}{2} \cdot 6 = 9$.

Ответ: 9.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием ABCD и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1. Точки M, N и K лежат на ребрах A_1D_1, CC_1 и AB соответственно, причем $A_1M = \frac{1}{2}A_1D_1$, $CN = \frac{1}{3}CC_1$, $AK = \frac{1}{4}AB$. Через точки M, N и K проведена плоскость. В каком отношении она делит ребро BC?
   Ответ: BP:PC = 3:1.

2. Точки M, N и P соответственно – середины ребер AB, CD и BC тетраэдра ABCD. Через точку P проведена плоскость, параллельная прямым DM и AN. В каком отношении эта плоскость делит ребро AD?

   Ответ: 1 : 1.

3. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием ABCD и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 точки M, N, F – середины ребер AB, B_1C_1, DD_1 соответственно. Плоскости A_1BD и A_1BF пересекают отрезок MN в точках K и L соответственно. Найти отношение MK:KL:LN.

   Ответ: : 7:1:20.

§2. Угол между прямыми. Угол между векторами.

Скалярное произведение векторов.

Фигура, образованная двумя лучами с общим началом и одной из плоских областей, ограниченных ими, называется *плоским углом.*
Угол между параллельными прямыми по определению полагается равным нулю.
Углом между пересекающимися прямыми называется величина наименьшего из плоских углов, образованных этими прямыми.
Углом между двумя скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, параллельными данным скрещивающимся прямым.

Углом между двумя векторами называется угол между изображающими их направленными отрезками, отложенными от одной точки пространства.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними. Если хотя бы один из векторов нулевой, то их скалярное произведение по определению полагают равным нулю.
Скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ обозначается $\overline{a}\cdot\overline{b}$. Таким образом $\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cos\varphi$, где $\varphi=\angle(\overline{a},\overline{b})$, для $\overline{a}\neq 0$ и $\overline{b}\neq 0$ и $\overline{a}\cdot\overline{0}=\overline{0}\cdot\overline{b}=\overline{0}\cdot\overline{0}=0$.

Свойства скалярного произведения

1. $\forall\vec{a},\vec{b}:\ \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (коммутативность).
2. $\forall\vec{a}:\ \vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$, выражение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ называется скалярным квадратом вектора $\overline{a}$ и обозначается $\overline{a}^2$
3. Скалярное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда сомножители ортогональны или хотя бы один из них нулевой.
4. $\forall\vec{a},\vec{b}$, $\forall k\in R:\ (k\vec{a})\cdot\vec{b}=k\cdot(\overline{a}\cdot\overline{b})$ (ассоциативность по отношению к умножению вектора на число).

5. $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}: \vec{c}(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{c}\cdot\vec{a} + \vec{c}\cdot\vec{b}$ (дистрибутивность).

***Теорема 4.** В ортонормированном базисе скалярное произведение векторов равно сумме произведений их соответствующих координат. т.е. если* $\bar{a}\ \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\bar{b}\ \{b_1, b_2, b_3\}$, то $\bar{a}\cdot\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Решим несколько задач на нахождении длины отрезка и угла между прямыми с помощью скалярного произведения векторов.

Задача 9.

В пирамиде ABCD двугранный угол при ребре AB равен 60^0. К ребру AB из вершин C и D проводятся перпендикуляры соответственно CM и DN. Найти длину ребра CD, если известно, что CM = 4, DN = 3 и MN = 1.

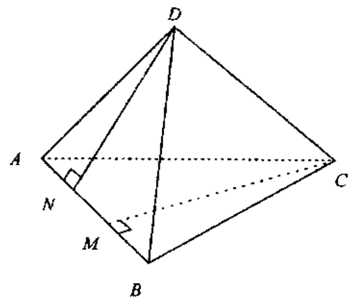

Рис.16

Решение.

Пусть $\overline{ND} = \bar{a}$, $\overline{NM} = \bar{b}$, $\overline{MC} = \bar{c}$.

Тогда $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 1$, $|\bar{c}| = 4$,

$\cos(\angle(\bar{a}, \bar{b})) = 0$, $\cos(\angle(\bar{b}, \bar{c})) = 0$,

$\cos(\angle(\bar{a}, \bar{c})) = \dfrac{1}{2}$ (рис.16).

Последнее равенство вытекает из того, что угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{c}$ равен величине двугранного угла при ребре AB, т.е. равен $60°$. Запишем вектор $\overline{CD}$ через $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. $\overline{CD} = -\bar{c} - \bar{b} + \bar{a}$.

Для нахождения длины вектора используем скалярное произведение, т.е. $\left|\overline{CD}\right|^2 = \overline{CD}\cdot\overline{CD} = (\bar{a} - \bar{b} - \bar{c})\cdot(\bar{a} - \bar{b} - \bar{c})$

$$\left|\overline{CD}\right|^2 = |\bar{a}|^2 - \bar{a}\cdot\bar{b} - \bar{a}\cdot\bar{c} - \bar{b}\cdot\bar{a} + |\bar{b}|^2 + \bar{b}\cdot\bar{c} - \bar{c}\cdot\bar{a} + \bar{c}\cdot\bar{b} + |\bar{c}|^2$$

$$\left|\overline{CD}\right|^2 = 9 - 0 - 6 - 0 + 1 + 0 - 6 + 0 + 16, \quad \left|\overline{CD}\right|^2 = 14.$$

В итоге получили, что длина ребра CD равна $\sqrt{14}$.

Ответ: $\sqrt{14}$.

Задача 10.

В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 2, боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания и его длина равна 4. Точки M и N - середины боковых ребер SB и SC, точка K - середина ребра AB. Отрезок PQ, концы которого лежат на прямых MN и CK, пересекается с прямой SA в точке O и делится этой точкой пополам. Найти длину отрезка PQ.

Решение.

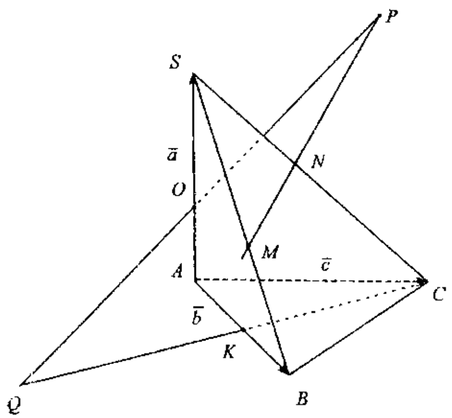

Рис. 17

Введем систему из трех некомпланарных векторов(рис.17).

Пусть $\overline{AS}=\bar{a}$, $\overline{AB}=\bar{b}$, $\overline{AC}=\bar{c}$. Длины этих векторов известны:

$|\bar{a}|=4$, $|\bar{b}|=|\bar{c}|=2$. Также известно, что $\cos(\bar{a},\bar{b})=0$, $\cos(\bar{a},\bar{c})=0$, $\cos(\bar{b},\bar{c})=\dfrac{1}{2}$.

Для нахождения длины отрезка PQ достаточно вычислить вектор $\overline{PQ}$ через вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и получить равенство $|\overline{PQ}|^2=\overline{PQ}\cdot\overline{PQ}$, т.е. использовать скалярное произведение.

Проведем подготовительную работу – выпишем всевозможные (нужные) вектора. Так как O принадлежит прямой AS, то существует число γ, что

$\overline{AO} = \gamma \overline{AS} = \gamma \overline{a}$.

Понятно, что $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}\left(\overline{c} - \overline{b}\right)$, $\overline{CK} = \frac{1}{2}\overline{b} - \overline{c}$.

Следовательно, имеем $\overline{NP} = \alpha \overline{MN} = \frac{\alpha}{2}\left(\overline{c} - \overline{b}\right)$

$\overline{KQ} = \beta \overline{CK} = \frac{\beta}{2}\overline{b} - \beta \overline{c}$,

где α, β - соответствующие (пока неизвестные, как и γ) коэффициенты.

По условию O - середина отрезка PQ. Можно записать, что

$$\overline{PO} = \overline{OQ} \quad (*).$$

Вычислим эти вектора.

$\overline{OQ} = \overline{OA} + \overline{AK} + \overline{KQ}$.

$\overline{OQ} = -\gamma \overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b} + \frac{\beta}{2}\overline{b} - \beta \overline{c}$

$\overline{OQ} = -\gamma \overline{a} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\beta}{2}\right)\overline{b} - \beta \overline{c}$.

Аналогично вычислим вектор $\overline{PO}$.

$\overline{PO} = \overline{PN} + \overline{NC} + \overline{CA} + \overline{AO}$

$\overline{PO} = -\frac{\alpha}{2}\left(\overline{c} - \overline{b}\right) - \frac{1}{2}\left(-\overline{c} + \overline{a}\right) - \overline{c} + \gamma \overline{a}$.

$$\overline{PO}=\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\overline{a}+\frac{\alpha}{2}\overline{b}+\left(-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\right)\overline{c}.$$

Подставим вектора $\overline{OQ}$, $\overline{PO}$ в равенство (*)

$$\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\overline{a}+\frac{\alpha}{2}\overline{b}+\left(-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\right)\overline{c}=-\gamma\overline{a}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\overline{b}-\beta\overline{c}.$$

Из этого векторного равенства имеем систему, которая соответствует равенству коэффициентов при векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$:

$$\begin{cases}\gamma-\dfrac{1}{2}=-\gamma\\ \dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\beta}{2}\\ -\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{1}{2}=-\beta,\end{cases}$$

Решаем систему и получаем: $\alpha=3$, $\beta=2$, $\gamma=\frac{1}{4}$.

Тогда $\overline{PQ}=\overline{PO}+\overline{OQ}=2\left(-\frac{1}{4}\overline{a}+\frac{3}{2}\overline{b}-2\overline{c}\right)$, $\overline{PQ}=-\frac{1}{2}\overline{a}+3\overline{b}-4\overline{c}$.

Вычисляем длину вектора $\overline{PQ}$.

$$\left|\overline{PQ}\right|^2=\overline{PQ}\cdot\overline{PQ}=\left(-\frac{1}{2}\overline{a}+3\overline{b}-4\overline{c}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\overline{a}+3\overline{b}-4\overline{c}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}(\overline{a})^2-\frac{3}{2}\overline{a}\cdot\overline{b}+2\overline{ac}-\frac{3}{2}\overline{ab}+9(\overline{b})^2-12\overline{bc}+2\overline{ac}-12\overline{bc}+16(\overline{c})^2.$$

Вспоминая, что $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$, $\overline{ac}=0$, $\overline{bc}=2\cdot2\cdot\frac{1}{2}=2$,

имеем $\left|\overline{PQ}\right|^2=\frac{1}{4}\cdot16+9\cdot4-12\cdot4\cdot\frac{1}{2}\cdot2+16\cdot4=4+36-48+64=56$.

В итоге $\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$.

Ответ: $2\sqrt{14}$.

Задача №11.

В пирамиде ABCD ребро BD перпендикулярно ребрам AB и CD. Найти угол между прямыми AB и CD, если известно, что $BD : CD : PQ : AB = 3 : 4 : 5 : 6$, где P и Q – середины ребер CD и AB соответственно.

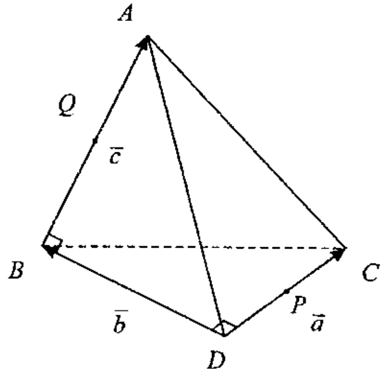

Рис. 18

Решение.

Сделаем следующий чертеж (рис.18) и обозначим: $\overline{DC} = \bar{a}$, $\overline{DB} = \bar{b}$, $\overline{BA} = \bar{c}$.

Тогда вектор $\overline{PQ} = \overline{PD} + \overline{DB} + \overline{BQ}$,

$$\overline{PQ} = -\frac{1}{2}\bar{a} + \bar{b} + \frac{1}{2}\bar{c}.$$

Учитывая соотношения между отрезками, можно считать, что

$$\left|\bar{a}\right| = 4f,\ \left|\bar{b}\right| = 3f,\ \left|\bar{c}\right| = 6f,\ \left|\overline{PQ}\right| = 5f.$$

Рассмотрим скалярное произведение $\overline{PQ} \cdot \overline{PQ}$.

С одной стороны

$$\overline{PQ} \cdot \overline{PQ} = \left|\overline{PQ}\right| \cdot \left|\overline{PQ}\right| = 25f^2 \ (1).$$

С другой

$$\overline{PQ}\cdot\overline{PQ}=\left(-\frac{1}{2}\bar{a}+\bar{b}+\frac{1}{2}\bar{c}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\bar{a}+\bar{b}+\frac{1}{2}\bar{c}\right).$$

Так как по условию $BD\perp AB$ и $BD\perp CD$, то $\cos(\bar{a},\bar{b})=0$, $\cos(\bar{b},\bar{c})=0$.

Пусть φ - угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{c}$. Тогда получаем равенство

$$\overline{PQ}\cdot\overline{PQ}=\frac{1}{4}\left|\bar{a}\right|^2-0-\frac{1}{4}\bar{a}\cdot\bar{c}-0+\left|\bar{b}\right|^2+0-\frac{1}{4}\bar{a}\cdot\bar{c}+0+\frac{1}{4}\left|\bar{c}\right|^2\ (2).$$

$$\overline{PQ}\cdot\overline{PQ}=\frac{1}{4}\cdot16f^2-\frac{1}{2}\cdot24f^2\cdot\cos\varphi+9f^2+\frac{1}{4}\cdot36f^2,$$

$$\overline{PQ}\cdot\overline{PQ}=22f^2-12f^2\cos\varphi\ (3).$$

В итоге получили, что

$$25f^2=22f^2-12f^2\cos\varphi,$$

$$\cos\varphi=-\frac{1}{4},\ \text{т.е. } \varphi>90^\circ.$$

Следовательно, угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{c}$ равен $\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$.

А искомый угол между прямыми AB и CD равен $\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$.

Ответ: $\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$.

Задача №12.

В основании пирамиды SABC лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 2, точка D – середина ребра SB. Через середины K и

L отрезков SA и CD проведена прямая, которая пересекает плоскость основания ABC в точке M. Найти расстояние до вершины A.

Решение.

Введем систему из трех неколлинеарных векторов(рис.19).

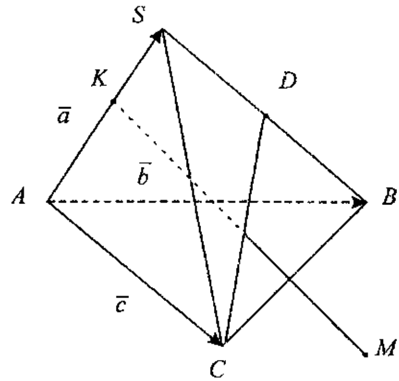

Рис. 19

Пусть $\overline{AS} = \bar{a}$, $\overline{AB} = \bar{b}$, $\overline{AC} = \bar{c}$.

Заметим, что длины векторов $\bar{b}$ и $\bar{c}$ равны 2 и угол между этими векторами равен 60^0. Из условия следует, что $\overline{AK} = \frac{1}{2}\bar{a}$,

$\overline{BD} = \frac{1}{2}\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}$. Вычислим вектор $\overline{CL}$:

$\overline{CL} = \frac{1}{2}\overline{CD} = \frac{1}{2}\left(-\bar{c} + \bar{b} + \frac{1}{2}\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}\right)$; $\overline{CL} = \frac{1}{4}\bar{a} + \frac{1}{4}\bar{b} - \frac{1}{2}\bar{c}$. Запишем

вектор $\overline{KL}$: $\overline{KL} = \overline{KA} + \overline{AC} + \overline{CL}$; $\overline{KL} = -\frac{1}{2}\bar{a} + \bar{c} + \frac{1}{4}\bar{a} + \frac{1}{4}\bar{b} - \frac{1}{2}\bar{c}$;

$\overline{KL} = -\frac{1}{4}\bar{a} + \frac{1}{4}\bar{b} + \frac{1}{2}\bar{c}$. Ясно, что $\overline{KM} = \alpha\overline{KL}$, где α - некоторое

число, т.е. $\overline{KM} = -\frac{\alpha}{4}\bar{a} + \frac{\alpha}{4}\bar{b} + \frac{\alpha}{2}\bar{c}$. И, наконец, запишем искомый

вектор $\overline{AM}$: $\overline{AM} = \overline{AK} + \overline{KM}$; $\overline{AM} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4}\right)\bar{a} + \frac{\alpha}{4}\bar{b} + \frac{\alpha}{2}\bar{c}$.

В силу того, что вектор $\overline{AM}$ принадлежит плоскости ABC, этот вектор однозначно представим в виде линейной комбинации векторов $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Следовательно $\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}=0$, откуда $\alpha=2$ и $\overline{AM}=\frac{1}{2}\bar{b}+\bar{c}$. Тогда

$$|\overline{AM}|^2=\overline{AM}\cdot\overline{AM}=\frac{1}{4}\left|\bar{b}\right|^2+\frac{1}{2}\bar{b}\cdot\bar{c}\cdot 2+\left|\bar{c}\right|^2=\frac{1}{4}\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}+4=7.$$

В итоге длина AM равна $\sqrt{7}$.

Ответ: $\sqrt{7}$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. В пирамиде ABCD двугранный угол при ребре AB равен 120^0. К ребру AB из вершин C и D проводятся перпендикуляры соответственно CM и DN. Найти длину отрезка MN, если известно, что CM = 6, DN = 5 и CD = $\sqrt{95}$.
   Ответ: 2.
2. В пирамиде ABCD точки P и Q лежат на ребрах AD и BC так, что AP:PD = BQ:QC = 1:2. Найти угол между прямыми AB и DC, если известно, что AB = DC = 2PQ.
   Ответ: arccos 11/16.

§3. Задачи.

1. Докажите, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 3 : 1, считая от вершины.
2. В основании четырехугольной пирамиды SABCD лежит трапеция ABCD, у которой отношение основания AD к основанию BC равно 3:5. Точки K, L, M и N лежат на ребрах SA, SB, SC и SD соответственно. Известно, что SN=ND, SL : LB = 1:2, отрезки KL и NM параллельны. Найти длину отрезка KL, если NM = 9.

   Ответ: 10.
3. Основанием пирамиды SABCD служит параллелограмм ABCD. На ребре SD взята точка L так, что SL : LD = 2, точка K – середина ребра SB. Определить в каком отношении плоскость AKL делит ребро SC.

   Ответ: 2 : 3.
4. Основанием пирамиды SABCD служит трапеция ABCD. Отношение длин оснований AD и BC этой трапеции равно 2. Определить, в каком отношении сечение, проходящее через вершину D и середины ребер SA и SB, делит ребро SC.

   Ответ: 2 : 1.
5. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием ABCD и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 точки M, N, F, G– середины ребер A_1B_1, CC_1, AD и CD соответственно. Плоскости FB_1D_1 и GB_1D_1 пересекают отрезок MN в точках K и L соответственно. Найти отношение MK:KL:LN.

   Ответ: 10:4:21.
6. В произвольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M – середина ребра B_1C_1. В каком отношении плоскости A_1BD и A_1BC_1 делят отрезок AM?

   Ответ: 6 : 4 : 5.
7. В пирамиде ABCD ребра AB, BC, CD попарно перпендикулярны. Известно, что расстояние между серединами ребер AB и CD равно 7. Найти длину ребра BC.

   Ответ: $4\sqrt{3}$.

8. Докажите, что если две пары противоположных ребер тетраэдра перпендикулярны, то перпендикулярны и два оставшихся противоположных ребра.
9. В основании пирамиды SABCD лежит трапеция ABCD, $AD \| BC$. $3AD = 2BC$. Точка M середина ребра SA. Плоскость α проходит через B и M так, что точки S и C равноудалены от плоскости α. Найти отношение SN : ND, если точка N – точка пересечения плоскости α и ребра SD.
Ответ: 3/5, 3.
10. Через вершину C тетраэдра ABCD и середины ребер AD и BD проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость разделит отрезок MN, где M и N– соответственно середины ребер AB и CD.
Ответ: 2 : 1.
11. На ребрах A_1B_1, AB и CC_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ расположены соответственно точки M, N и P так, что $A_1M : MB_1 = BN : NA = C_1P : PC = 1 : 2$. Точка Q – точка пересечения плоскости MNP с прямой B_1C_1. Найти отношение $C_1Q : B_1C_1$.
Ответ: 1 : 5.
12. В основании четырехугольной пирамиды SABCD лежит параллелограмм ABCD. Найти, в каком отношении делит объем плоскость, проходящая через вершину D, и середины ребер AB и SC.
Ответ: 5 : 7.
13. В основании четырехугольной пирамиды SABCD лежит параллелограмм ABCD. На ребре SB выбрана точка T, на диагонали AC – точка M так, что ST : SB = AM : MC = 1 : 3, точка K - середина ребра BC. Через точку M параллельно прямым AS и TK проведена плоскость. В каком отношении проведенная плоскость делит ребро AD?
Ответ: 1/16.
14. Точки M и N – соответственно середины ребер AC и SB правильного тетраэдра SABC. Ребра тетраэдра равны 1. На прямых AS и CN выбраны точки P и Q так, что прямая PQ параллельна прямой BM. Найти длину отрезка PQ.
Ответ: $\sqrt{3}/3$.

15. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковые грани ABB_1A_1, ACC_1A_1, CBB_1C_1 являются параллелограммами. На ребре AA_1 выбрана точка E, на ребре BC_1 – точка T так, что $AE = 1/4AA_1$, $BT : TC_1 = 2 : 1$. В каком отношении плоскость, проведенная через точки A_1 и B, параллельно прямой ET делит ребро B_1C_1?
Ответ: 8/17.
16. Даны три некомпланарных вектора. Существует ли ненулевой четвертый вектор, перпендикулярный трем данным?
Ответ: не существует.
17. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребрах AC, CC_1 и диагонали B_1D_1 выбраны соответственно точки E, M и K таким образом, что $AE = 1/4AC$, $B_1K : B_1D_1 = 1 : 3$, $CM : MC_1 = 1 : 3$. В каком отношении плоскость, проведенная через точки E, K и M, делит диагональ B_1D?
Ответ: 11/27.
18. Точки M и N – соответственно середины ребер BC и AD тетраэдра ABCD, в котором AC = BD, а угол между прямыми AC и BD равен α. Найдите угол между прямыми MN и AC.
Ответ: два решения: arccos 1/3 и arccos 2/3.
19. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ длины ребер AB и BC соответственно 2 и 4. Известно, что существует прямая, пересекающая прямые AA_1, BC, C_1D_1 и образующая с ними равные углы. Найдите длину ребра AA_1.
Ответ: два решения: 2 и 6.
20. В основании пирамиды SABCD лежит параллелограмм ABCD. Точка E делит ребро CD в отношении 1 : 2, считая от вершины C. Точка F выбрана на луче BS так, что BF : BS = 6 : 5. Через точки E, F и середину ребра AS проведена плоскость. В каком отношении она делит отрезок AC?
Ответ: 3:7.
21. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием ABCD и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 точки M, N и F – середины ребер BB_1, AD и C_1D_1 соответственно. Плоскости B_1AC и ACF пересекают отрезок MN в точках K и L соответственно. Найти отношение MK:KL:LN.
Ответ: 7:3:4.

22. В основании пирамиды SABCDEF лежит правильный шестиугольник ABCDEF. На ребре BS взята точка M так, что BM = 1/3BS, точка N – середина ребра FS. Через точки A, M и N проведена плоскость. Определить в каком отношении данная плоскость делит ребро DS.
Ответ: 3 : 1, считая от D.
23. В основании пирамиды SABCDEF лежит правильный шестиугольник ABCDEF. На ребре BS взята точка M так, что BM = 1/3BS, точка N – середина ребра FS. Через точку M, параллельно прямым AN и DS проведена плоскость. Определить в каком отношении данная плоскость делит 1)ребро CD, 2)ребро AB, 3)ребро CS.
Ответ: 1) 2 : 1, считая от C, 2) 8 : 1, считая от A, 3) 2 : 1, считая от C.
24. В треугольной пирамиде ABCD углы ACB и DAC – прямые, ребра AC = 1, AD = BC = 2. Угол между гранями ACD и ABC равен 120^0. Найти длину ребра BD.
Ответ: $\sqrt{13}$.
25. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 точка M – середина ребра A_1C_1. Через точки A и M проводится плоскость α, которая пересекает ребро BC в точке N. Известно, что расстояние от вершин B_1 и C до плоскости α равны. В каком отношении точка N делит ребро BC?
Ответ: 1 : 2.
26. В основании правильной четырехугольной пирамиды SABCD лежит квадрат ABCD; все ребра пирамиды имеют одинаковую длину 1. Точка M – середина ребра SA, SN – высота в треугольнике SBC. Через M проходит прямая, пересекающая прямые SN и BD в точках P и Q. Найти длину отрезка PQ.
Ответ: $\sqrt{11}/3$.
27. В четырехугольной пирамиде SABCD с вершиной S точки M и N – середины ребер SC и AD. Доказать, что каждая точка отрезка MN является серединой некоторого отрезка с концами на ребрах SA и CD.

28. В треугольной пирамиде ABCD точки E и F – середины ребер BC и AD соответственно. Известно, что остальные ребра AB, AC, DB и DC имеют одинаковую длину. Точки M и N выбраны произвольным образом соответственно на прямых BC и AD. Доказать, что скалярное произведение $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{EF}$ векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{EF}$ не зависит от выбора точек M и N.
29. В пирамиде ABCD ребра AB, BC, CD попарно перпендикулярны. Известно, что BC = 5, а расстояние между серединами ребер AD и BC равно 6. Найти длину ребра AD.
Ответ: 13.
30. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 все ребра имеют длину 1, точки M и N – середины ребер A_1B_1 и B_1C_1. Отрезок PQ, концы которого лежат на прямых AA_1 и MN, пересекается с прямой BC в точке O и делится этой точкой пополам. Найти длину отрезка PQ.
Ответ: $\sqrt{29}/2$.
31. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 и основаниями ABC и $A_1B_1C_1$ через вершину A_1 и середины ребер BB_1, AC проведена плоскость α. Найти расстояние от середины ребра B_1C_1 до плоскости α, если известно, что расстояние от вершины A до этой плоскости равно 8.
Ответ:10.
32. В основании треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 4, точка D – середина ребра BB_1. Через середины K и L отрезков AB_1 и CD проведена прямая, которая пересекает плоскость основания ABC в точке M. Найти расстояние от точки M до вершины A.
Ответ: $2\sqrt{7}$.
33. В тетраэдре ABCD, длины ребер AB, BC и CD равны 2, $\angle ABC = \dfrac{\pi}{2}$, $\angle BCD = \angle(AB, CD) = \arccos\dfrac{5}{7}$. Найдите длину ребра AD.
Ответ: такого тетраэдра не существует.

34. Точка пересечения медиан тетраэдра ABCD одинаково удалена от вершин A и B. Докажите, что $AC^2 + AD^2 = BC^2 + BD^2$.
35. В пирамиде ABCD точка P – середина ребра CD. Ребро AD перпендикулярно рёбрам CD и AB. Найти угол между прямыми AB и CD, если известно, что AD:CD:AB:BP=3:4:5:5.
    Ответ: arccos 13/20.
36. Докажите, что для любых четырех точек пространства A, B, C и D справедливо равенство $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BD} = 0$.

Литература

1. Белоносов В.С., Фокин М.В. Задачи вступительных экзаменов по математике. Новосибирск: Сибирское университетское издательство, 2005.

2. Бунеева Н.А., Каргаполов А.М. Варианты и решения выпускных экзаменов по математике в СУНЦ НГУ. Новосибирск: ИДМИ, 2005.

3. Калинин А.Ю., Терешин Д.А. Стереометрия 10. Москва: Издательство МФТИ, 1996.

4. Яковлев Г.Н. Пособие по математике. Москва: Издательский дом «ОНИКС 21 век», 2001.

Оглавление

Учебное издание

Бунеева Наталья Александровна

Каргаполов Александр Михайлович

Задачи по стереометрии (векторный метод)

Компьютерная верстка Бунеева Н.А.