

**Критерии проверки и оценка решений заданий №17
вариантов КИМ ЕГЭ-2016**

(по материалам ФИПИ для региональных предметных комиссий)

Введение текстовых задач экономического содержания в ЕГЭ-2015 по математике есть, пожалуй, наиболее заметное изменение во всем комплексе заданий КИМ с развёрнутым ответом. Во всех заданиях С1–С5 предыдущих лет условие с самого начала формулировалось в математических терминах и отдельно не предполагало построения какой-либо математической модели (частично этот момент мог присутствовать в некоторых способах решения заданий С5 с параметром). Некоторое исключение составляло задание С6, в котором явно текстовое, сюжетное, условие задачи на начальном этапе решения предполагало некоторый перевод на математический язык. Правда, сами тексты условий чаще всего уже активно использовали математическую терминологию: числа, записанные на доске, делимость, доли и дроби, средние величины и т.п.

В заданиях №17 существенно усилена сюжетная, практико-ориентированная, составляющая условия. Относительно существования (возможностей существования) непосредственных связей этих задач с окружающей нас действительностью можно составить отдельный трактат. Авторы ограничились лишь констатацией двух положений. Во-первых, сами сюжеты не есть прямые цитаты «из жизни», они априорно уже являются некоторыми текстовыми упрощениями, моделями, реально возникающих ситуаций. Во-вторых, эти сюжеты условно можно разделить на два типа, использующих соответственно дискретные модели (проценты, погашения кредитов, ...) и непрерывные модели (различные производства, протяженные во времени, объемы продукции, ...). Приведем критерии оценивания выполнения заданий №17.

Содержание критерия, задание 17	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Несколько подробнее, 1 балл можно выставить в тех случаях, когда сюжетное условие задачи верно сведено к решению математической (вычислительной, числовой, алгебраической, функциональной, геометрической) задачи. Именно к решению, а не к отдельному равенству, набору уравнений, уравнению, задающему функцию и т.п. Грубо говоря, предъявленный текст должен включать направление, «продолжаемое» до верного решения. Оценка в 2 балла, разумеется, включает в себя условия выставления 1 балла, но существенно ближе к верному решению задачи. Здесь предполагается завершённое, практически полное решение соответствующей математической задачи. Типичные допустимые погрешности здесь – вычислительные ошибки (при наличии всех

шагов решения) или недостаточно полные обоснования. Например, при отыскании экстремума решение ограничивается верным нахождением лишь критической точки, без надлежащей её проверки на экстремальность. Кратко, « 2 = 3- ».

Отмечается, что термин «математическая модель», быть может, излишне высокопарен для сравнительно простых задач экономического содержания, предлагаемых на ЕГЭ. Однако, по мнению авторов, он наиболее лаконичен, общеупотребим и достаточно ясен для того, чтобы пытаться отыскать ему адекватную замену. Следует подчеркнуть, что один и тот же сюжет может быть успешно сведен к различным математическим моделям (см. ниже задачу 2) и доведён до верного решения. По этой причине в критериях проверки нигде нет жесткого упоминания о какой-либо конкретной (алгебраической, геометрической, функциональной, ...) модели.

Вообще, способов верного решения заданий этого типа никак не меньше, чем для привычных текстовых задач. Возможен и стиль, приближенный к высшей математике, и наивный подход, напоминающий арифметический способ решения текстовых задач, и метод, использующий специфические для математической экономики понятия (целевая функция, симплекс-метод и т.п.).

Примеры решения задач

Задача 1.

1. 1 июня 2013 года Всеволод Ярославович взял в банке 900000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Всеволод Ярославович переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев Всеволод Ярославович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 300000 рублей?

Решение 1.1. («по-взрослому»)

Минимизировать время выплат можно, только максимизировав сами выплаты. Решим задачу в общем виде. Пусть S - сумма кредита (в тыс. руб.); S_n - задолженность в n -й месяц; s_n - выплата в n -й месяц; $s_n = s$; q - коэффициент ежемесячного повышения, $q > 1$. Тогда

$S_1 = qS - s$, $S_2 = qS_1 - s = q(qS - s) - s = q^2S - (1 + q)s$, $S_3 = qS_2 - s = q^3S - (1 + q + q^2)s$, ...
После предпоследней выплаты останется $S_{N-1} \leq s$ и тогда в последний, N -й раз, кредит будет погашен. Значит,

$$S_{N-1} = q^{N-1}S - (1 + q + q^2 + \dots + q^{N-2})s = q^{N-1}S - \frac{q^{N-1} - 1}{q - 1}s \leq s.$$

Относительно $x = q^{N-1}$ получаем неравенство

$$(q - 1)xS - (x - 1)s \leq (q - 1)s, \quad x((q - 1)S - s) \leq (q - 2)s.$$

По условию, $S = 900$, $s = 300$, $q = 1,01$, т.е. $x \cdot (-291) \leq -297$,

$$x = 1,01^{N-1} \geq \frac{297}{291} = 1,0206\dots$$

Так как $1,01^2 = 1,0201 < 1,0206\dots$, $1,01^3 = 1,030301 < 1,0206\dots$, то $N - 1 = 3$, $N = 4$.

Ответ: 4.

Решение 1.1. («по-детски»)

Если бы банк не брал процентов, то долг можно было бы вернуть за 3 месяца. Банк за 3 месяца возьмет меньше, чем 3% от первоначальной суммы в 900 тыс., т.е. меньше 27 тыс. Поэтому то, что забирает банк, точно можно будет оплатить в 4-й месяц, потратив меньше 300 тыс.

Ответ: 4.

Для следующей задачи ниже предложено три весьма разных способа решения. В первом из них используется метод вспомогательного аргумента, известный из тригонометрии. Второй использует стандартную технику применения производных, а третий основан на традиционном для задач математической экономики использовании так называемого целевого вектора.

Задача 2

Первичная информация разделяется по серверам №1 и №2 и обрабатывается на них. С сервера №1 при объеме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $20t$ Гбайт, а с сервера №2 при объеме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $21t$ Гбайт обработанной информации; $25 \leq t \leq 55$. Каков наибольший объем выходящей информации при общем объеме входящей информации в 3364 Гбайт?

Решение 2.1. (алгебра).

Пусть на сервере №1 обрабатывается x^2 , а на сервере №2 обрабатывается y^2 Гбайт из всей первичной информации. Тогда $x^2 + y^2 = 3364$, а обработано будет $20x + 21y$ Гбайт информации. Требуется найти максимум суммы $20x + 21y$ при условии

$$x^2 + y^2 = 3364, \quad 25 \leq x \leq 55, \quad 25 \leq y \leq 55.$$

Так как $3364 = 58^2$, то $x = 58 \cos \alpha$, $y = 58 \sin \alpha$ для некоторого угла $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Так как $20^2 + 21^2 = 29^2$, то

$$20x + 21y = 58(20 \cos \alpha + 21 \sin \alpha) = 58 \cdot 29 \left(\frac{20}{29} \cos \alpha + \frac{21}{29} \sin \alpha \right) = 58 \cdot 29 \sin(\alpha + \varphi)$$

для вспомогательного угла φ с $\cos \varphi = \frac{21}{29}$, $\sin \varphi = \frac{20}{29}$. Следовательно, наибольшее

значение суммы $20x + 21y$ равно $58 \cdot 29 = 1682$. Оно достигается при $\cos \varphi = \frac{21}{29}$,

$\sin \varphi = \frac{20}{29}$, $x = 40$, $y = 42$, т.е. для значений, удовлетворяющих условиям

$$25 \leq x \leq 55, \quad 25 \leq y \leq 55.$$

Ответ: 1682.

Решение 2.2. (матем. анализ).

Пусть на сервере №1 обрабатывается x^2 , а на сервере №2 обрабатывается y^2 Гбайт из всей первичной информации. Тогда $x^2 + y^2 = 3364$, а обработано будет $20x + 21y$ Гбайт информации. Выразим y через x : $y = \sqrt{3364 - x^2}$. Требуется найти наибольшее значение функции $f(x) = 20x + \sqrt{3364 - x^2}$.

$$f'(x) = 20 - \frac{21x}{\sqrt{3364 - x^2}}, \quad f'(x) = 0, \quad 400 = \frac{441x^2}{3364 - x^2}, \quad x^2 = \frac{400 \cdot 3364}{841} = 1600, \quad x = 40.$$

$x = 40$ - единственная критическая точка и $y = \sqrt{3364 - 1600} = 42$. Условия $25 \leq x \leq 55$, $25 \leq y \leq 55$ выполнены. Если $x < 40$, то $x^2 < 1600$, $400 > \frac{441x^2}{3364 - x^2}$ и $f'(x) > 0$. Если $x > 40$, то $f'(x) < 0$. Поэтому $x = 40$ - точка максимума. Значит, $f_{\text{наиб}} = f(40) = 20 \cdot 40 + 21 \cdot 42 = 1682$.

Ответ: 1682.

Решение 2.3. (геометрия).

Пусть на сервере №1 обрабатывается x^2 , а на сервере №2 обрабатывается y^2 Гбайт из всей первичной информации. Тогда $x^2 + y^2 = 3364$, а обработано будет $20x + 21y$ Гбайт информации.

Так как $3364 = 58^2$, то $x^2 + y^2 = 3364$ задает окружность ω радиуса 58 с центром в начале координат. Проведем целевой вектор $\vec{a}(20;21)$ и перпендикулярную ему прямую $l: 20x + 21y = 0$, проходящую через начало координат. Луч, коллинеарный вектору $\vec{a}(20;21)$, пересечет окружность ω в точке $A(40;42)$. Прямая m , проходящая через точку $A(40;42)$ и перпендикулярная вектору $\vec{a}(20;21)$ будет касаться окружности ω и задаваться уравнением $m: 20x + 21y = C$ со значением C , наибольшим среди всех прямых, параллельных l и пересекающих ω . Условия $25 \leq x \leq 55$, $25 \leq y \leq 55$ для точки $A(40;42)$ выполнены. Значит, $C_{\text{наиб}} = 20 \cdot 40 + 21 \cdot 42 = 1682$.

Ответ: 1682.

Комментарий к условию задачи 2. Ограничение $25 \leq t$ включено для того, чтобы объем выходящей информации $2t$ был меньше t^2 выходящей информации; хватило бы ограничения $21 \leq t$. Ограничение $t \leq 55$ возникает из-за условий $25 \leq t$ и $x^2 + y^2 = 3364$; на самом деле $t \leq 55,34...$. Отсутствие явной ссылки на справедливость неравенств $25 \leq 40 \leq 55$, $25 \leq 42 \leq 55$ является тем недочетом, за который вряд ли разумно снижать оценку на 1 балл. Для такого снижения есть более серьезные недостатки. Например, отсутствие обоснования того, что критическая точка есть точка максимума.

Задача 3.

15 – го января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в процентах от кредита)	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивался на 5%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Решение. Пусть 15-го числа текущего месяца долг равен x , а 15-го числа предыдущего месяца долг равен y . Тогда в конце предыдущего месяца долг равен $1,05y$ и поэтому выплата в первой половине текущего месяца равна $1,05y - x$.

Значит, в процентах от суммы кредита выплаты в феврале составили $1,05 \cdot 100 - 90 = 15\%$, в марте составили $1,05 \cdot 90 - 80 = 14,5\%$, в апреле – 14% , в мае –

13,5%, в июне – 13%, а в июле $1,05 \cdot 50 = 52,5\%$. Следовательно, общая сумма выплат составила $15 + 14,5 + 14 + 13,5 + 13 + 52,5 = 122,5\%$.

Ответ: 22,5.

Задача 4 (демоверсия)

31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 9930000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определенную сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Решение. Пусть сумма кредита равна a , ежегодный платеж равен x рублей, а годовые составляют $k\%$. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $m = 1 + 0,01k$. После первой выплаты сумма долга составит: $a_1 = am - x$. После второй выплаты сумма долга составит:

$$a_2 = a_1 m - x = (am - x)m - x = am^2 - mx - x = am^2 - mx - x = am^2 - (1 + m)x.$$

После третьей выплаты сумма долга

$$\text{составит: } a_3 = a_2 m - x = (am^2 - (1 + m)x)m - x = am^3 - (m^2 + m + 1)x = am^3 - \frac{m^3 - 1}{m - 1} \cdot x.$$

По условию тремя выплатами Сергей должен погасить кредит полностью, поэтому $am^3 - \frac{m^3 - 1}{m - 1} \cdot x = 0$, откуда $x = \frac{am^3(m - 1)}{m^3 - 1}$. При $a = 9930000$ и $k = 10$, получаем

$$m = 1,1 \text{ и } x = \frac{9930000 \cdot 1,331 \cdot 0,1}{0,331} = 3993000 \text{ рублей.}$$

Ответ: 3993000.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Получено верное выражение для суммы платежа, но допущена вычислительная ошибка, приведшая к неверному ответу.	2
Получено выражение для ежегодной выплаты, но уравнение не составлено ИЛИ верный ответ найден подбором	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

Тренировочные задачи

1. В банк помещена сумма 3900 тысяч рублей под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял к вкладу?

Решение. Пусть в банк была помещена сумма a тысяч рублей и вкладчик дополнительно вносил ежегодно x тысяч рублей. Тогда после первого взноса

дополнительной суммы вклад составил $a \cdot \frac{3}{2} + x$ тысяч рублей, после второго –

$\left(a \cdot \frac{3}{2} + x\right) \cdot \frac{3}{2} + x$, после третьего – $\left(\left(a \cdot \frac{3}{2} + x\right) \cdot \frac{3}{2} + x\right) \cdot \frac{3}{2} + x$, после четвертого –

$\left(\left(\left(a \cdot \frac{3}{2} + x\right) \cdot \frac{3}{2} + x\right) \cdot \frac{3}{2}\right) + x$.

Получаем уравнение $\left(\left(\left(\left(a \cdot \frac{3}{2} + x\right) \cdot \frac{3}{2} + x\right) \cdot \frac{3}{2} + x\right) \cdot \frac{3}{2}\right) + x = \frac{33}{4}a$.

$$\left(\left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} + 1\right) \cdot x = \left(\frac{11}{2} - \frac{3^4}{2^4}\right) \cdot a. \quad \frac{65}{8} \cdot x = \frac{7}{16} \cdot a. \quad x = \frac{7}{130} \cdot a = \frac{7 \cdot 3900}{130} = 210.$$

Ответ: 210000.

2. Транснациональная компания «Амосо inc.» решила произвести недружественное поглощение компании «First Aluminum Company» (FAC) путем скупки акций миноритарных акционеров. Известно, что Амосо inc. было сделано три предложения владельцам акций FAC, при этом цена покупки одной акции каждый раз повышалась на $\frac{1}{3}$, а общее количество приобретенных Амосо inc. акций поглощаемой компании увеличивалось на 20%. Определите величину третьего предложения и общее количество скупленных акций FAC, если начальное предложение составило \$27 за одну акцию, а количество акций, выкупленных по второй цене, - 15 тысяч.

Решение. Предлагаемая цена покупки составляла соответственно \$27; \$36; \$48.

Пусть первоначально было приобретено x акций, тогда $1,2x = 15000$; $x = 12500$.

Итак, было приобретено соответственно 12500, 15000 и 18000 акций.

Ответ: 48; 45500.

3. Два брокера купили акции одного достоинства на сумму 3640 р. Когда цена на эти акции возросла, они продали часть акций на сумму 3927 р. Первый брокер продал 75% своих акций, а второй – 80% своих. При этом сумма от продажи акций, полученная вторым брокером, на 140% превысила сумму, полученную первым брокером. На сколько процентов возросла цена одной акции?

Решение. Пусть первоначальная цена одной акции составляла a рублей и затем она возросла на $k\%$ и стала составлять $a(1 + 0,01k)$ рублей. Пусть первый брокер купил x акций, а второй – y акций.

$$\text{По условию} \begin{cases} a(x + y) = 3640 \\ a(1 + 0,01k) \cdot (0,75x + 0,8y) = 3927 \\ \frac{0,8y}{0,75x} = 2,4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{9}{4}x \\ \frac{13}{4}ax = 3640 \\ \frac{51}{20}ax(1 + 0,01k) = 3927 \end{cases} ; \quad 1 + 0,01k = \frac{3927}{3640} \cdot \frac{65}{51} = 1,375, \quad k = 37,5$$

Ответ: 37,5.

4. Максим хочет взять кредит 1,5 млн. рублей. Погашаться кредит должен раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов по ставке 10% годовых. На какое максимальное количество лет может быть взят кредит, чтобы ежегодные выплаты не превосходили 350 тысяч рублей?

Решение.

Год	Долг	Остаток
0	1500000	-
1	1650000	1300000
2	1430000	1080000
3	1188000	838000
4	921800	571800
5	628980	278980
6	306878	-

Ответ: 6 лет.

5. 31 декабря Федор взял в банке кредит 6951000 на три года. Погашаться кредит должен раз в год равными суммами после начисления процентов по ставке 10% годовых. На сколько рублей меньше Федор выплатил банку, если бы кредит был взят на два года?

Решение.

Год	Долг	Остаток
0	p	-
1	1,1p	1,1p-x
2	1,21p-1,1x	1,21p-2,1x
3	1,331p-2,31x	1,331p-3,31x

$$x_1 = \frac{1,331p}{3,31} = \frac{1,331 \cdot 6951000}{3,31} = 2795100 \quad x_2 = \frac{1,21p}{2,1} = \frac{1,21 \cdot 6951000}{2,1} = 4005100$$

$$3x_1 - 2x_2 = 3 \cdot 2795100 - 2 \cdot 4005100 = 8385300 - 8010200 = 375100.$$

Ответ: 375100.

6. Требуется построить несколько одинаковых домов общей площадью 40000 м^2 . Стоимость дома площадью $S \text{ м}^2$ складывается из стоимости фундамента, пропорциональной $\sqrt{S}$ и стоимости наземной части, пропорциональной $S\sqrt{S}$. Известно, что при строительстве дома площадью 400 м^2 80% затрат идет на фундамент. Сколько домов необходимо построить, чтобы общие затраты на строительство были наименьшими?
7. Алексей приобрёл ценную бумагу за 7000 рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 2000 рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через тридцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

Решение.

8. (МГУ. Эконом. ф-т, 1997) Банк планирует вложить на 1 год 40% имеющихся у него средств клиентов в проект X , а остальные 60% - в проект Y . В зависимости от обстоятельств проект X может принести прибыль в размере от 19% до 24% годовых, а проект Y - от 29% до 34% годовых. В конце года банк обязан вернуть деньги клиентам и выплатить им проценты по заранее установленной ставке. Определить наименьший и наибольший возможный уровень процентной ставки по вкладам, при которых чистая прибыль банка составит не менее 10% и не более 15% годовых от суммарных вложений в проекты X и Y .

Решение. Пусть общая сумма вкладов в банк составляет S рублей, тогда вложения в проекты X и Y равны, соответственно, $0,4S$ и $0,6S$. Прибыль от проекта X обозначим Q_1 , от проекта Y - Q_2 . По условию, $0,076S \leq Q_1 \leq 0,096S$; $0,174S \leq Q_2 \leq 0,204S$. Таким образом, общая прибыль Q находится в пределах $0,25S \leq Q \leq 0,3S$. Чистая прибыль банка находится в пределах от $0,1S$ до $0,15S$. Следовательно, возможный уровень процентной ставки по вкладам находится в пределах от 10% до 20% годовых.

Ответ: 10%, 20%.

9. (ЕГЭ – 26.03.15). Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $2t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Владимир платит рабочему 500 рублей. Владимиру нужно каждую неделю производить 580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придется тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

Решение.

Допустим, что на заводе, расположенном в первом городе, рабочие трудятся x^2 часов, а на заводе, расположенном во втором городе, y^2 часов. Тогда в неделю будет произведено $2x+5y$ единиц товара, а затраты на оплату труда составят $500(x^2 + y^2)$ рублей. В этом случае нужно найти наименьшее значение $Q = 500(x^2 + y^2)$ при условии $2x+5y=580$.

Выразим y через x : $2x+5y=580$; $y = \frac{580-2x}{5}$.

Значит, требуется найти наименьшее значение функции

$$Q(x) = 500 \left(x^2 + \left(\frac{580-2x}{5} \right)^2 \right) \text{ при } 0 \leq x \leq 290.$$

Для этого найдем производную функции $Q(x)$

$$Q'(x) = 500 \left(2x - \frac{4}{5} \cdot \frac{580-2x}{5} \right).$$

Найдем точки экстремума:

$$Q'(x) = 0; \quad x - \frac{2}{25}(580-2x) = 0; \quad 29x = 2 \cdot 580,$$

то есть $x=40$ - единственная точка экстремума, удовлетворяющая условию $0 \leq x \leq 290$. Найдем значения функции в найденной точке и на концах отрезка:

$$Q(40) = 5800000, \quad Q(290) = 42050000, \quad Q(0) = 6728000.$$

Наименьшее значение $Q(x)$ равно 5800000, значит, наименьшая сумма, которую придется тратить еженедельно на оплату труда рабочих, равна 5800000 рублей.

Ответ: 5800000.

10. (ЕГЭ – 21.04.15). Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей. Григорий готов выделить 5000000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение 1. (матем. анализ)

Допустим, что на заводе, расположенном в первом городе, рабочие трудятся x^2 часов, а на заводе, расположенном во втором городе, y^2 часов. Тогда в неделю будет произведено

$3x+4y$ единиц товара, а затраты на оплату труда составят $500(x^2 + y^2)$ рублей. В этом случае нужно найти наибольшее значение $Q = 3x+4y$ при условии

$$500(x^2 + y^2) = 5000000$$

Выразим y через x : $x^2 + y^2 = 10000$; $y^2 = 10000 - x^2$; $y = \sqrt{10000 - x^2}$.

Значит, нам нужно найти наибольшее значение функции

$$Q(x) = 3x + 4\sqrt{10000 - x^2} \text{ при } 0 \leq x \leq 100.$$

Для этого найдем производную функции $Q(x)$:

$$Q'(x) = 3 - \frac{4x}{\sqrt{10000 - x^2}}.$$

Найдем точки экстремума:

$$Q'(x) = 0; \quad 3 = \frac{4x}{\sqrt{10000 - x^2}}; \quad 3\sqrt{10000 - x^2} = 4x; \quad 90000 - 9x^2 = 16x^2; \quad x^2 = 3600,$$

то есть $x = 60$ - единственная точка экстремума, удовлетворяющая условию $0 \leq x \leq 100$. Найдем значения функции в найденной точке и на концах отрезка:

$$Q(60) = 500, \quad Q(100) = 300, \quad Q(0) = 400.$$

Наибольшее значение $Q(x)$ равно 500, значит, наибольшее количество единиц товара равно 500.

Ответ: 500.

Решение 2 (векторы)

Допустим, что на заводе, расположенном в первом городе, рабочие трудятся x^2 часов, а на заводе, расположенном во втором городе, y^2 часов. Тогда в неделю будет произведено

$3x + 4y$ единиц товара, а затраты на оплату труда составят $500(x^2 + y^2)$ рублей. В этом случае нужно найти наибольшее значение $Q = 3x + 4y$ при условии

$$500(x^2 + y^2) = 5000000$$

Рассмотрим векторы $\vec{a}\{x; y\}$; $\vec{b}\{3; 4\}$.

По условию, $x^2 + y^2 = 10000$, следовательно, $|\vec{a}| = 100$. $|\vec{b}| = 5$.

Согласно векторной форме неравенства Коши-Буняковского $-\vec{a} \cdot \vec{b} \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Следовательно, $-500 \leq 3x + 4y \leq 500$.

Ответ: 500.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: - неверный ответ из-за вычислительной ошибки; - верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

11. (ЕГЭ – 04.06.15). 15 – го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2 – го по 14 – е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15 – го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15 – е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r .

Решение.

Пусть сумма кредита равна S . По условию, долг перед банком по состоянию на 15 – е число должен уменьшаться равномерно: $S, \frac{18S}{19}, \dots, \frac{2S}{19}, \frac{S}{19}, 0$.

Первого числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$. Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$, тогда последовательность размеров долга на 1 – е число каждого месяца такова:

$$kS, \frac{18kS}{19}, \dots, \frac{2kS}{19}, \frac{kS}{19}, 0.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$(k-1)S + \frac{S}{19}, \frac{18(k-1)S + S}{19}, \dots, \frac{2(k-1)S + S}{19}, \frac{(k-1)S + S}{19}.$$

Всего следует выплатить $S + S(k-1)\left(1 + \frac{18}{19} + \dots + \frac{2}{19} + \frac{1}{19}\right) = S(1 + 10(k-1))$.

Общая сумма выплат на 30% больше суммы, взятой в кредит, поэтому $10(k-1) = 0,3$; $k = 1,03$; $r = 3$.

Ответ: 3.

Второе решение.

Пусть сумма кредита равна S и кредит взят на n месяцев. Тогда переплата за кредит равна

$$0,01r\left(S + \frac{n-1}{n}S + \dots + \frac{2}{n}S + \frac{1}{n}S\right) = 0,01rS \cdot \frac{n + (n-1) + \dots + 2 + 1}{n} = 0,01rS \cdot \frac{n+1}{2}.$$

Отсюда $0,1r = 0,3$; $r = 3$.

12. (ЕГЭ – 04.06.15). Зависимость объема Q (в шт) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 15000 - P$, $1000 \leq P \leq 15000$. Доход от продажи товара составляет PQ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $3000Q + 5000000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену продукции на 20%, однако ее прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

Решение. Прибыль фирмы выражается как

$$\begin{aligned} f(P) &= PQ - (3000Q + 5000000) = \\ &= (P - 3000)(15000 - P) - 5000000 = -P^2 + 18000P - 5000000, \end{aligned}$$

то есть квадратично зависит от цены P . Пусть первоначальная цена равнялась P_0 . После снижения цена стала равняться $0,8P_0$. Наибольшая прибыль достигается при значении P , для которого $f(P)$ достигает максимума. График функции $y = f(P)$ – парабола с ветвями, направленными вниз, поэтому максимум $f(P)$ достигается в вершине параболы. Поскольку $f(P_0) = f(0,8P_0)$, вершина параболы находится в точке

$\frac{P_0 + 0,8P_0}{2} = 0,9P_0$. Значит, нужно увеличить цену с $0,8P_0$ до $0,9P_0$, то есть на 12,5%.

Ответ: 12,5%

13. (ЕГЭ – 21.06.15). Строительство нового завода стоит 78 млн. рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + 2x + 6$ млн. рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн. рублей) за один год составит $px - (0,5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более, чем за 3 года?

Решение. По условию, прибыль за год $Q(x) = -0,5x^2 + (p - 2)x - 6$. Очевидно, прибыль будет наибольшей при $x = p - 2$. Таким образом, наибольшая прибыль составит $-0,5(p - 2)^2 + (p - 2)^2 - 6$ или $0,5(p - 2)^2 - 6$.

$3(0,5(p - 2)^2 - 6) \geq 78$, $0,5(p - 2)^2 - 6 \geq 26$, $0,5(p - 2)^2 \geq 32$, $(p - 2)^2 \geq 64$, $p - 2 \geq 8$, $p \geq 10$.

Ответ: 10.