Московский государственный технический университет

имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»

Кафедра «Вычислительная математика и математическая физика»

А.Ю. Бушуев

Введение в оптимальное управление

Электронное учебное издание

Методические указания к выполнению индивидуальных домашних заданий

по дисциплине «Оптимальное управление»

Москва

УДК 517.97;519.85

Рецензент: проф., д.т.н. Сидняев Н.И.

Бушуев А.Ю

Б Введение в оптимальное управление. Электронное учебное издание. - М.: МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2014. 23 с.

Методические указания призваны помочь студентам по направлению подготовки «Математика и компьютерные науки» при выполнении индивидуальных домашних заданий по дисциплине «Оптимальное управление». Приведены краткие теоретические сведения по аналитическим методам решения задачи Лагранжа с использованием принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина и примеры решения задач оптимального управления. Рассматривается линеаризованный принцип максимума, на основе которого строятся градиентные методы решения задач оптимального управления. Приведены варианты индивидуальных домашних заданий.

Для студентов направления подготовки "Математика и компьютерные науки", специальности "Прикладная математика", а также студентов машиностроительных специальностей.

Рекомендовано учебно-методической комиссией факультета «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э. Баумана

Электронное учебное издание

Бушуев Александр Юрьевич

ВВЕДЕНИЕ В ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания призваны помочь студентам по направлению подготовки «Математика и компьютерные науки» при выполнении индивидуальных домашних заданий по дисциплине «Оптимальное управление».

Целью выполнения работы является приобретение начальных навыков по аналитическому решению задач оптимального управления с использованием принципов Лагранжа и максимума Понтрягина и освоение градиентных методов на основе линеаризованного принципа максимума.

1. Вариационный метод в оптимальном управлении

Задача Лагранжа в форме Понтрягина [1].

Рассмотрим задачу вида:

$$\Phi(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} F_0(t,x,u)\ dt \to \min \tag{1}$$

где $x=(x_1,\ldots,x_n)^T$, $u=(u_1,\ldots,u_r)^T$ $\dot{x}=f(t,x,u)$ (2)

С граничными условиями:

$$\xi(x(t_0))=0,\ \eta(x(t_1))=0 \tag{3}$$

где $\xi(\xi_1,..\xi_k)^T$, $\eta(\eta_1,..\eta_e)^T$, $k,e\le n$.

Предполагается, что все функции F_0, $f_i\left(i=\overline{1,n}\right),\xi,\eta$ дважды непрерывно дифференцируемы, $f(x)\in C'([t_1,t_2],R^n)$, $u(t)\in(C[t_1,t_2],R^r)$.

В такой постановке задача Лагранжа отличается от задач оптимального управления только классом допустимы функций (в задаче оптимального управления фазовые координаты $x(t)\in PC'$ являются кусочно-гладкими функциями, а управление $u(t)\in PC$ кусочно-непрерывными функциями), а так же отсутствует ограничение на фазовые координаты и управления.

Применим для решения задачи (1-3) метод Лагранжа.

Составим вспомогательный функционал.

$$\tilde{\Phi}[x,u]=\int_{0}^{t_1} L\,dt+\mu^T\xi\left(x\left(t_0\right)\right)+\nu^T\eta\left(x\left(t_1\right)\right), \qquad (4)$$

$$где\;\; L(t,x,\dot{x},u)=F_0\left(t,x,u\right)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(t\right)\left(\dot{x}_i-f_i\left(t,x,u\right)\right)=F_0+\lambda^T\left(\dot{x}-f\right) \qquad (5)$$

−лагранжиан задачи;

$\lambda\left(t\right)=\left(\lambda_1\left(t\right),\ldots,\lambda_n\left(t\right)\right)^T$, $\mu=\left(\mu_1,\ldots,\mu_k\right)^T$, $\nu=\left(\nu_1,\ldots,\nu_e\right)^T$ - множители Лагранжа.

Обобщая теорему о необходимых условиях в задаче Лагранжа на случай граничных условий вида (3) можно сказать, чтобы найти экстремум задачи Лагранжа (1-3), нужно из экстремалей вспомогательного функционала (4) выбрать те, которые удовлетворяют граничным условиям (3) и дифференциальным связям (2).

Уравнения для определения экстремалей (1-3) имеет вид:

$$\begin{cases} L'_{x_i}-\dfrac{d}{dt}L'_{\dot{x}_j}=0,\; i=\overline{1,n} \\ L'_{u_j}-\dfrac{d}{dt}L_{\dot{u}_j}=0,\; j=\overline{1,r} \end{cases} \qquad (6)$$

Или учитывая вид лагранжиана L:

$$\begin{cases} \lambda'_i=\left(F_0\right)'_{x_i}-\lambda^T f'_{x_i},\; i=\overline{1,n} \\ \left(F_0\right)'_{u_j}-\lambda^T f'_{u_j}=0,\; j=\overline{1,r} \end{cases} \qquad (7)$$

где $f'_{x_i}=\left(f'_{1x_i},f'_{2x_i},\ldots,f'_{nx_i}\right)^T, i=\overline{1,n}$,

$f'_{u_j}=\left(f'_{1u_j},f'_{2u_j},\ldots,f'_{nu_j}\right)^T, j=\overline{1,r}$.

Условия трансверсальности имеют вид

$$\begin{cases} \left[\lambda_i\left(t\right)-\mu^T\xi'_{x_i}\right]\Big|_{\{t=t_0\}}=0 \\ \left[\lambda_i\left(t\right)+\nu^T\eta'_{x_i}\right]\Big|_{\{t=t_1\}}=0 \end{cases} \qquad (8)$$

Итак, для определения экстремалей задачи Лагранжа в форме Понтрягина нужно к уравнениям Эйлера (7) добавить условия трансверсальности (8), дифференциальные связи (2) и граничные условия (3).

Рассмотрим задачу оптимального управления со смешанным функционалом Больца:

$$\Phi_B\left[x,u\right]=\int_{t_0}^{t_1}F_0\left(t,x,u\right)dt+\hat{T}\left(x\left(t_0\right)\right)+T\left(x\left(t_1\right)\right) \tag{9}$$

с дифференциальной связью (2) и граничными условиями (3)

Вспомогательный функционал для этой задачи имеет вид:

$$\hat{\Phi}_B\left[x,u\right]=\int_{t_0}^{t_1}L\,dt+\mu^T\xi\left(x\left(t_0\right)\right)+\vartheta^T\eta\left(x\left(t_1\right)\right)+\hat{T}\left(x\left(t_0\right)\right)+T\left(x\left(t_1\right)\right),$$

где лагранжиан $L=F_0+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(t\right)(\dot{x}_i-f_i)$

и терминант

Уравнения Эйлера те же (7), но условия трансверсальности другие за счет терминальных слагаемых $\widehat{T}$ и T в функционале Больца:

или

$$\left[\lambda_i\left(t\right)-G'_{x_i}\right]_{|t=t_1}=0,\ i=\overline{i,n}$$

$$\left[\lambda_i\left(t\right)-(\mu^T\xi'_{x_i}+\widehat{T}'_{x_i})\right]_{|t=t_0}=0,\ i=\overline{i,n} \tag{10}$$

$$\left[\lambda_i\left(t\right)-(\vartheta^T\eta'_{x_i}+T'_{x_i})\right]_{|t=t_1}=0,\ i=\overline{i,n}$$

Если граничное условие (3) отсутствует, то получаем задачу со свободными концами, условия трансверсальности для которой имеет вид:

$$\left[\lambda_i(t)-\widehat{T}'_{x_i}\right]\Big|_{t=t_0}=0,\ i=\overline{1,n} \tag{11}$$

$$\left[\lambda_i(t)-T'_{x_i}\right]\Big|_{t=t_1}=0,\ i=\overline{1,n}$$

Применяя принцип Лагранжа для случая, когда отрезок $\left[t_0,t_1\right]$ может изменяться, получим для решения задачи Лагранжа (1-3) дополнительно к уравнениям Эйлера (7) и условиям трансверсальности (8), недостающие условия для определения t_0 и t_1:

$$\left(L-\sum_{i=1}^{n}\dot{x}_i\,L'_{\dot{x}_i}\right)\Big|_{t=t_0}=0 \tag{12}$$

$$\left(L-\sum_{i=1}^{n}\dot{x}_i\,L'_{\dot{x}_i}\right)\Big|_{t=t_1}=0\,,$$

где $L'_{x_i} = \lambda_i$, $i = \overline{1,n}$

2. Принцип максимума Понтрягина

Постановка задачи.

Пусть математическая модель объекта управления описывается системой уравнений:

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), u(t)\right) \qquad (1)$$

С начальным условием:

$$x(t_0) = x^0 \text{, где} \qquad (2)$$

x$\in E^n$ – вектор состояния; u$\in U \subset E^n$ – вектор управления;

E^n - n – мерное евклидово пространство;

U-заданное множество допустимых значений управления;

$t \in T = [t_0, t_1]$–отрезок времени функционирования системы;

$f(t,x,u) \in C(T \times E^n \times U, R^n)$ вместе с частными производными.

t_0- момент начала процесса.

t_1 – моментом достижения точкой $(t, x(t))$ заданной поверхности $S \subseteq E^{n+1}$.

$S = \{(t_1, x) \mid g_i(t_1, x) = 0, i = \overline{1,e}, t_1 \in (t_0, \infty), x \in E^n\}$

Т.е. в момент t_1 должно выполняться условие:

$$g_i\left(t_1, x(t_1)\right) = 0, \quad j = \overline{1,e} \qquad 0 \le e \le n+1 \qquad (3)$$

$g_i(t_1, x)$ – непрерывно дифференцируемы.

Система векторов $\{\frac{\partial g_i(t_1,x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial g_i(t_1,x)}{\partial x_n}, \frac{\partial g_i(t_1,x)}{\partial x_1}\}$, $\mathrm{j} = \overline{1,\mathrm{e}}$ – линейно-независимая

$\forall (t_1, x) \in E^{n+1}$

Определение. Множество допустимых процессов $D(t_0, X^0)$ - множество троек $\{t_1, x(\cdot), u(\cdot)\}$ $\quad (\forall t \in T; x(t) \in E^n, u(t) \in U)$, где

x(·) непрерывные и кусочно-дифференцируемые функции и u(·) – кусочно-непрерывные функции, удовлетворяющие уравнению (1) с начальными условиями (2) почти всюду на множестве T и условию (3).

Функционал, характеризующий качество управления (функционал Больца):

$$\Phi\left(t_1, x, u\right) = \int_{t_0}^{t_1} F_0\left(t, x\left(t\right), u\left(t\right)\right) dt + G\left(t_1, x\left(t_1\right)\right) \qquad (4)$$

F_0, G - заданные непрерывно-дифференцируемые функции.

Требуется найти тройку $d^* = \left\{t_1^*, x^*\left(\cdot\right), u^*\left(\cdot\right)\right\} \in D(t_0, x^\circ)$ такую, что

$$\Phi\left(d^*\right) = \min_{d \in D} \Phi(t_1, x, u) \qquad (5)$$

t_1^* - оптимальный момент окончания процесса.

Теорема. (Принцип максимума Понтрягина) [2]

Пусть на тройке $d^* = \left(t_1^*, x^*\left(\cdot\right), u^*\left(\cdot\right)\right) \in D(t_0, x^\circ)$ достигается минимум функционала Больца (5). Тогда $\exists$ такой вектор $\Psi\left(\mathrm{t}\right) = \left(\Psi_1\left(\Psi\right), \ldots, \Psi_{\mathrm{n}}\left(\mathrm{t}\right)\right)^{\mathrm{T}}$, для которого

1) в каждой точке непрерывности управления $u^*(t)$ функция $H(\mathrm{t}, \Psi(\mathrm{t}), \mathrm{x}^*(\mathrm{t}), \mathrm{u})$ достигает максимума по управлению:

$$\max_{u \in U} H(t, \Psi(t), x^*(t), u(t)) = H(t, \Psi(t), x^*(t), u^*(t)),$$

где $$H(t, \Psi, x, u) = \sum_{j=1}^{n} \Psi_j f_j(t, x, u) - \mathrm{F}_0(t, x, u)$$

2) выполняется условие трансверсальности:

$$\delta G\left(t_1^*\right) - H\left(t_1^*\right)\delta t_1 + \sum_{i=1}^{n} \Psi_{\mathrm{i}}\left(\mathrm{t}_1^*\right)\delta \mathrm{x}_{\mathrm{i}} = 0$$

при $\forall \delta t_1$ *и* δx_i , удовлетворяющих системе:

$$\delta g_i\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right) = 0, \quad j = \overline{1, e}$$

$$\delta g_i\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right) = 0, \quad j = \overline{1, e}$$

где $H\left(t_1^*\right) = H\left(t_1^*, \Psi\left(\mathrm{t}_1^*\right), x^*\left(t_1^*\right), u^*\left(t_1^*\right)\right)$

$G\left(t_1^*\right) = G\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right)$, а вариации определяются так:

$$\delta G\left(t_1^*\right) = \delta G\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right) = \frac{\partial G\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right)}{\partial t_1}\delta t_1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right)}{\partial x_i}\delta x_i$$

$$\delta g_j\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right) = \frac{\partial g_j\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right)}{\partial t_1}\delta t_1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_j\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right)}{\partial x_i}\delta x_i$$

3) Удовлетворяется система канонических уравнений:

$$x_i^{\circ}(t)=\frac{\partial H\left(t,\Psi(t),x^*(t),u^*(t)\right)}{\partial \Psi_i}=f_i\left(t,x^*(t),u^*(t)\right),x_i^*(t_0)=x_i^{\circ}\quad i=\overline{1,n}$$

$$\Psi_i^{\circ}(t)=\frac{\partial H\left(t,\Psi(t),x^*(t),u^*(t)\right)}{\partial x_i},\quad i=\overline{1,n}$$

Ψ_i - вспомогательные (сопряженные) переменные.

Замечание.

1. В частном случае задания множества S, когда количество ограничений равно $l=k+1$, момент времени $t_1=T_1$ задан и фиксировано k координат $x_i(t_1)=x_{i1},\ i=1,2,\dots,k;\ 0\le k\le n,$ вектора $x(t_1)$,функции $g_i(t_1,x)$ имеет вид:

$$g_i(t_1,x)=x_i-x_{i1}=0,\ \ i=\overline{1,k}$$

$$g_{k+1}(t_1,x)=t_1-T_1=0$$

Здесь при $k=n$ правый конец траектории фиксирован, а при $k=0$ свободен.

Отсюда следует, что $\Rightarrow\ \delta x_i=0,\ i=\overline{1,k},\ \delta t_1=0$

Задача записывается в форме $\Phi(d)=\int_{t_0}^{t_1}F_0\left(t,x(t),u(t)\right)dt+G\left(x(t_1)\right)\to min$

Решением является пара $\left(x^*(\cdot),u^*(\cdot)\right)$ оптимальная траектория и оптимальное управление.

2. Если начальное состояние и момент начала процесса t_0 не заданы, а определяются вместе с конечными состояниями соотношениями:

$g_i\ (t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))=0,\ \ j=\overline{1,e},$ то терминальный член может задаваться в виде суммы $G_0\left(t_0,x(t_0)\right)+G_1\left(t_1,x(t_1)\right)$

Тогда условие трансверсальности имеет вид:

$$\left[\delta G_1\left(t_1^*\right)-H\left(t_1^*\right)\delta t_1+\sum_{i=1}^{n}\Psi_{\rm i}\left({\rm t}_1^*\right)\delta{\rm x}_{{\rm it}_1}\right]-\left[\delta G_0\left(t_0^*\right)-H\left(t_0^*\right)\delta t_0+\sum_{i=1}^{n}\Psi_{\rm i}\left({\rm t}_0^*\right)\delta{\rm x}_{{\rm it}_0}\right]=0$$

При $\delta g_j\left(t_0^*,x^*\left(t_0^*\right),t_1^*,x^*(t_1^*)\right)=0,\qquad g_j\left(t_0^*,x^*\left(t_0^*\right),t_1^*,x^*(t_1^*)\right)=0,\quad j=\overline{1,e}$

Решение в этом случае есть $(t_0^*,t_1^*,x^*(\cdot),u^*(\cdot)$

3. Если на управление нет ограничений $U = E^r$, то максимум гамильтониана H ищется с помощью необходимых и достаточных условий безусловного экстремума.
4. Если математическая модель объекта управления описывается линейным дифференциальным уравнением, а функционал качества квадратичный, принцип максимума является необходимым и достаточным условием оптимальности.

5. В общем случае следует записывать гамильтониан в виде .

И при решении задач рассматривать 2 случая: и $\Psi_0(t) \not\equiv 0$

Можно показать, что тогда можно положить $\Psi_0(t) = 1$

3. Пример решения задачи Лагранжа.

Рассмотрим применение принципа Лагранжа для следующей задачи:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 dt \to extr$$

$$\ddot{x} + x = u,$$

$$x_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0, x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

<u>Решение</u>

Предварительно задачу нужно привести к задаче Лагранжа.

1. Вводим .

Тогда система примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x(0) = x(0) = 0 \\ \dot{x}_2 = u - x_1, & x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\xi_1 = x_1(0) - 0 = 0$$

$$\xi_2 = x_2(0) - 0 = 0$$

$$\eta_1 = x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 = 0$$

$$\eta_2 = 0$$

2. Вспомогательный функционал:

$$\Phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[u^2 + \lambda_1(t)(\dot{x}_1 - x_2) + \lambda_2(\dot{x}_2 - u + x_1) \right] dt + \mu_1 x_1(0) + \mu_2 x_2(0) + \nu_1 (x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1)$$

3. Уравнения Эйлера:

$$\lambda_2(t) - \dot{\lambda}_1(t) = 0,$$

$$-\lambda_1(t) - \dot{\lambda}_2(t) = 0,$$

$$2u - \lambda_2(t) = 0.$$

4. Условия трансверсальности:

$$\lambda_1(0) = \mu_1, \ \lambda_2(0) = \mu_2, \ \lambda_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\nu_1, \ \lambda_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\lambda_1(t) = -\dot{\lambda}_2(t) \Rightarrow \dot{\lambda}_1(t) = -\ddot{\lambda}_2(t)$$

$$\ddot{\lambda}_2(t) + \lambda_2(t) = 0$$

$$\lambda_2(t) = Asint + Bcost$$

Используя условия трансверсальности, получаем $\lambda_2(t) = B\cos t$

$u^*(t) = Ccost.$

5. $\ddot{x} + x = Ccost$

$$\ddot{x} + x = 0$$

$$x(t) = C_1 sint + C_2 cost$$

$$\dot{x}(t) = C_1 cost - C_2 sint,\ \ddot{x}(t) = C'_1 cost - C'_2 sint - C_1 sint - C_2 \cos t$$

$$\begin{cases} C'_1 cost - C'_2 sint = Ccost \\ C'_1 sint + C'_2 cost = 0 \end{cases}$$

$$C'_1 = Ccos^2 t \Rightarrow C_1 = \int cos^2 tdt = \frac{1}{2}Ct + \frac{1}{4}Csin2t + C_1$$

6. $x(t) = \left(\frac{1}{2}Ct + \frac{1}{4}Csin2t + C_1\right)sint + \left(\frac{1}{4}Ccos2t + C_2\right)\cos t$

$$x(0) = \frac{1}{4}C + C_2 = 0,\ x(0) = \frac{1}{4}C + C_2 = 0,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + C_1 = 1$$

$$x'(t) = cost\left(\frac{1}{2}Ct + \frac{1}{4}Csin2t + C_1\right) + sint\left(\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}Ccos2t\right) - sint\left(\frac{1}{4}Ccos2t + C_2\right) + cost\left(-\frac{1}{2}Csin2t\right)$$

$$x'(0) = C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{\pi}, C = \frac{4}{\pi}$$

$$x(t) = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\pi}t + \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{\pi}sin2t\right)sint + \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{\pi}cos2t - \frac{1}{\pi}\right)cost = \frac{2}{\pi}t\sin t$$

Рассмотрим применение принципа максимума Понтрягина для решения задачи оптимального управления с ограничениями на фазовые координаты и управления:

$$\phi(u) = \int_0^1 x_1(1)dt \to \min$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u\end{cases}$$

$$|u(t)| \le 2$$

$$g_1 = x_1(0) + x_1(1) = 0$$

$$g_2 = x_2(0) + x_2(1) = 0$$

Решение:

$$H = -x_1 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u$$

$$u^* = \arg\max 2 sign\psi_2 \quad \text{при} \quad |u(t)| \le 2$$

$$\begin{cases}\dot{\psi}_1 = 1 \\ \dot{\psi}_2 = \psi_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 2 sign\psi_2\end{cases}$$

Условие трансверсальности:

$$-H(t_1)|_T \ \delta t_1 + \psi\delta x = 0$$

$$\psi_1\delta x_1|_{t=1} + \psi_2\delta x_2|_{t=1} - \psi_1\delta x_1|_{t=0} - \psi_2\delta x_2|_{t=0} = 0$$

$$\begin{cases}\delta g_1 = \delta x_1(0) + \delta x_1(1) = 0 \\ \delta g_2 = \delta x_2(0) + \delta x_2(1) = 0\end{cases}$$

Значит:

$$\begin{cases}-\delta x_1(1) = \delta x_1(0) \\ -\delta x_2(1) = \delta x_2(0)\end{cases}$$

$$(\psi_1(1) + \psi_1(0))\delta x_1(1) + (\psi_2(1) + \psi_2(0))\delta x_2(1) = 0$$

$$\begin{cases}\psi_1(1) + \psi_1(0) = 0 \\ \psi_2(1) + \psi_2(0) = 0\end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases}\psi_1 = t + c_1 \\ \psi_2 = -\dfrac{t^2}{2} - c_1 t + c_2\end{cases}$$

Из (1) находим c_1=-1/2 и c_2=0, а значит

$$\begin{cases}\psi_1 = t - \dfrac{1}{2} \\ \psi_2 = -\dfrac{t^2}{2} + \dfrac{1}{2}t\end{cases}$$

Отсюда следует, что оптимальное управление равно $u^* = 2$

Тогда

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2\dfrac{t^2}{2} + c_1 t + c_2 \\ x_2 = 2t + c_1 \end{cases}$$

Очевидно что $c_1 = -1, c_2 = 0$

Таким образом, оптимальная траектория

$$\begin{cases} x_1^* = t^2 - t \\ x_2^* = 2t - 1 \end{cases}$$

4. Пример решения задачи оптимального быстродействия

Рассмотрим применение принципа максимума на примере решения простейшей задачи оптимального быстродействия.

Найти оптимальное по быстродействию управление $u^*(t)$, соответствующую ему траекторию $x^*(t)$ и время T, затрачиваемое на переход из состояния

$x_1(0)=0,\ x_2(0)=-4$ в начало координат для математической модели объекта управления, описываемой системой дифференциальных уравнений.

$$\overset{\circ}{x}_1(t)=x_2(t) \qquad x=(x_1,x_2)^T \quad ,|\mathrm{u}|\le 0$$

$$\overset{\circ}{x}_2(t)=u(t) \qquad t\in[0,T]$$

Сформулируем проблему в виде задачи Лагранжа

$$\Phi=\int_0^T dt\to\min,\ где T-не задан$$

$$f_1=x_2\ \ ,f_2=u,\ F_0=1\ ,\ \ h(x)$$

$$Г.у.\ \begin{matrix} x_1(0)=0\ ,x_2(0)=-4 \\ x_1(T)=0\ ,x_2(T)=0 \end{matrix}$$

1.) Гамильтониан $H=\sum\Psi_i f_i-F_0=\Psi_1x_2+\Psi_2u-1$

2.) Находятся условия $\max\limits_{|u|\le1}H=$ $\arg\max \mathrm{H}(\mathrm{t}_1,\Psi(\mathrm{t}),\mathrm{x}(\mathrm{t}),\ \mathrm{u})=1\ \mathrm{sign}\ \Psi_2$

3.) Канонические уравнения принципа максимума

$$x_1^*=x_2 \qquad\qquad x_1(0)=0\ ,x_1(T)=0$$

$$x_2^*=u^*=sign\Psi_2(t) \qquad x_2(0)=-4 \quad ;\ \lambda_2(T)=0$$

$$\Psi_1^*(t)=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=0\ , \qquad \Psi_2^*(t)=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-\Psi_1$$

4.) Проверка условий трансверсальности.

$$\left[\delta G-H(t_1)\delta t_1+\sum_{i=1}^{r}\Psi_i(t_1)\delta x_i\right]=0$$

$$H(T)=H\big(T,\Psi(T),x(T),u(T)\big)=0$$

$$\delta G=0,\delta x_1=\delta x_2=0 \qquad t_1=T$$

5.) Решаем двухточечную краевую задачу.

Оптимальное управление имеет вид:

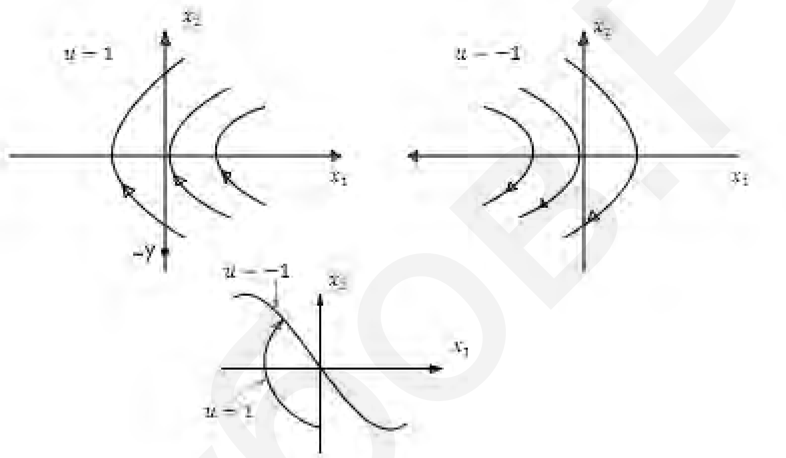
$u^*(t) = sign\,\Psi_2(t) = sign(-C_1 t + C_2)$

Так как $\Psi_2(t)$ меняет знак не более одного раза, то оптимальное управление является кусочно постоянной функцией, имеющей не более двух интервалов знакопостоянства: либо $u^*(t)=1$, *либо* $u^*(t)=-1$.

Построим фазовый портрет. Для этого получим уравнение траекторий системы на фазовой плоскости ox_1x_2 .

$x_1^*(t) = x_2(t)\ , x_2^*(t) = u(t)$

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_2}{u} \ \rightarrow d\,x_1 = \frac{x_2}{u}dx_2 \Rightarrow \ \ x_1 = \frac{x_2^2}{2\,u} + C$$



На 1-ом отрезке разрыв кривой $u^*=1$, на 2-ом $u^*=-1$ $T=t_1+t_2$

Найдем суммарное время Т на переход из точки $x\ =(0,-4)^T$ в начало координат.

$t_1 - \textit{время движения с}\, u^* = 1, t_2 - \textit{время движения с}\, u^* = -1$

На 1-м участке)

$$\begin{matrix} x_1^*(t) = x_2(t) \\ x_2^*(t) = u = 1 \end{matrix} \rightarrow x_2(t) = t + c_1 \ \ , x_1(t) = \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2$$

При t=0 $x_2(0) = c_1 = -4$, $x_1(0) = C_2 = 0 \rightarrow \begin{matrix} x_1(t) = \frac{t^2}{2} - 4t \\ x_2(t) = t - 4 \end{matrix}$ $(*)$

На 2-м участке:

$$\begin{matrix} x_1^*(t) = x_2(t) \\ x_2^*(t) = u = -1 \end{matrix} \rightarrow x_2 = -t + c_1 \ \ , x_1(t) = -\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2 \qquad (**)$$

При $T = t_1 + t_2$ траектория должна попасть в начало координат $(0{,}0)^T$:

$$\begin{cases} x_1\left(t_1+t_2\right) = -\dfrac{\left(t_1+t_2\right)^2}{2} + c_1\left(t_1+t_2\right) + c_2 = 0 \\ x_2\left(t_1+t_2\right) = -\left(t_1+t_2\right) + c_1 = 0 \rightarrow c_1 = t_1 + t_2, \quad c_2 = -\dfrac{\left(t_1+t_2\right)^2}{2} \end{cases}$$

В силу непрерывности траектории при $t = t_1$

$$x_1\left(t_1\right) = \frac{t_1^2}{2} - 4t_1 = -\frac{t_1^2}{2} + \left(t_1+t_2\right)t_1 - \frac{\left(t_1+t_2\right)^2}{2}$$

$$x_2\left(t_1\right) = t_1 - \gamma = -t_1 + t_1 + t_2 \rightarrow t_2 = t_1 - 4$$

$$t_1^2 - 8t_1 + 8 \rightarrow t_1 = 4 + 2\sqrt{2}, \quad t_2 = t_1 - 4 = 2\sqrt{2}$$

Окончательно получим минимальное время процесса:

$$T = t_1 + t_2 = 4\sqrt{2} + 4$$

5. Градиентные методы решения задач оптимального управления, использующие линеаризованный принцип максимума

Рассмотрим задачу Больца со свободным правым концом:

$$\Phi(u) = \int_{t_0}^{t_1} F(t,x,u)dt + G(x(t_1)) \qquad (1)$$

$$\dot{x} = f(t,x,u) \quad x(t_1) = X' \quad \boldsymbol{u(t)} \in U$$

Пусть справедливы следующие ЛП- условия (условия линеаризованного принципа максимума) [5]:

1) $f = (f_1,...,f_n)$ - непрерывна по (x,u,t) вместе с частными производными по x и удовлетворяет условии Липшица по X с одной константой L для $\forall u \in U, t \in [t_1, t_2]$

$$\| f(t, x+\Delta x, u) \ - f(t,x,u) \| \le L \| \Delta x \|$$

2) Скалярные функции G(x) и F(t,x,m) непрерывны по своим аргументам вместе с частными производными по x.

3) Множество $U \in E^r$ - выпуклое.

4) $f(t,x,u), F(t,x,u)$ дифференцируемы по u

Справедлив линеаризованный принцип максимума:

Пусть в задаче (1) – (2) справедливы ЛП - условия и допустимый процесс $(\dot{u}, \dot{x})$ оптимален. Тогда в каждой точке $t \in \Delta = [t_0, t_1]$ этот процесс удовлетворяет линеаризованному условию принципа максимума:

$$< \frac{\delta H(t,\Psi,x^*,u^*)}{\delta u}, u^*(t) >= max_{\upsilon\in U} < \frac{\delta H}{\delta u}(t,\Psi,x^*,u^*),\upsilon > \quad (3)$$

С функцией $\Psi = \Psi(t)$ удовлетворяющей сопряженной задаче:

$$\Psi = -\frac{\delta\, \mathrm{H}(t,\Psi,X^*,u^*)}{\delta x}, \Psi(t_1) = -\frac{\delta G(x^*(t_2))}{\delta x} \quad (4)$$

Рассмотрим методы последовательных приближений для поиска управлений, удовлетворяющих линеаризованному принципу максимума. Эти методы используют информацию о градиенте H'_u функции Понтрягина и применяются для решения конечномерных задач максимизации гамильтониана в точках $[t_0, t_1]$.

5.1 Метод условного градиента

Пусть на k-й итерации имеется допустимое управление $u^k(t)$ с соответствующей фазовой и сопряженной траекториями $x^k(t)$ и $\Psi^k(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. Определим вспомогательное управление

$$\bar{u}^k(t) = argmax_{\upsilon \in U} < H'_u(t, \Psi^k(t), x^k(t), u^k(t)), \upsilon >$$

Подсчитаем величину:

$$\delta(u^k) = \int_{t_0}^{t_1} < H'_u(t, \Psi^k(t), x^k(t), u^k(t)), \bar{u}^k(t) - u^k(t) > dt \geq 0$$

Если $\delta(u^k) = 0$, то u^k удовлетворяет линеаризованному принципу максимума, иначе образуем α-параметрическое семейство управлений (выпуклую комбинацию управлений u^k и $\bar{u}^k$):

$$u_\alpha^{(k)}(t) = u^{(k)}(t) + \alpha(\bar{u}^{(k)}(t) - u^{(k)}(t)), t \in [t_1, t_2], \alpha \in [0,1]$$

Тогда очередное (k+1)-е приближение ищется в виде:

$$u^{(k+1)}(t) = u_{\alpha_k}^{(k)}(t) \ , t \in [t_0, t_1]$$

Где α_k - решение задачи одномерного поиска:

$$\Phi(u_\alpha^k) \to min \quad , \ \alpha \in [0,1]$$

Пример 1.

$$\Phi(u) = \int_0^2 (x^2(t) - u^2(t))dt - \frac{1}{2}x(2) \to min$$

$$\dot{x} = u, x(0) = 0, |u(t)| \leq 1$$

Выполнить одну итерацию метода условного градиента для заданного начального приближения:

$u^o(t) \equiv 0, t \in [0,2]$

Решение:

1) Функция Понтрягина: $H(t,\psi,x,u) = \Sigma \psi_i f_i - F = \psi u - x^2 + u^2$

2) $H'_u = \psi + 2u$

3) Сопряженное уравнение: $\dot{\psi} = 2x, \psi(2) = \frac{1}{2}$

4) Найдем фазовую и сопряжѐнную траектории:

$x^o(t) = 0$, $\Psi^o(t) = \frac{1}{2}, t \in [0,2]$

5) Сформируем вспомогательное управление:

6) $\delta(u^o) = \frac{1}{2}\int_0^2 dt = 1 > 0 \quad \int_0^1 \frac{1}{2}(1 - u^o)dt$

7) Определим α - параметрическое семейство управлений:

$u_\alpha^{(k)}(t) = u^{(k)}(t) + \alpha(\overline{u}^{(k)}(t) - u^{(k)}(t))$

$u_\alpha^o = 0 + \alpha(1-0) = \alpha \quad 0 \le \alpha \le 1, t \in [0,2]$

Задача одномерного поиска:

$\Phi(u_\alpha^o) \to min_\alpha \quad 0 \le \alpha \le 1$

Найдем представление для функции $\Phi(u_\alpha^o)$.

Для этого решим задачу Коши:

$\dot{x} = \alpha, x(0) = 0$

$x_\alpha^{(o)} = \alpha t, t \in [0,2] \Rightarrow$

$$\Phi(u_\alpha^o) = \int_0^2 [(x_\alpha^{(o)}(t))^2 - (u_\alpha^{(o)}(t))^2]dt - \frac{1}{2}(x_\alpha^{(o)}(2)) = \int_0^2 (\alpha^2 t^2 - \alpha^2)dt$$

$$\alpha = -\alpha + \frac{2}{3}\alpha^2 \to \min_{0\le\alpha\le1} \Rightarrow \alpha_0 = \frac{3}{4}$$

Тогда $u^1(t) = u^{\text{o}}_{\alpha_o} = \alpha_o$,таким образом, $u'(t) \equiv \frac{3}{4}, t \in [0,2]$

5.2 Метод проекции градиента

Пусть на k-м шаге итерационного процесса имеется допустимое управление $u^*(t), t \in [t_1, t_2]$ $u = 0,1\dots$. Найдем соответствующие решения $x^k(t), \Psi^k(t), t \in [t_1, t_2]$ фазовой и сопряженной задачи.

Образуем вспомогательное управление $\overline{u}^k(t)$ по правилу:

$$\overline{u}^k(t) \quad = P_\upsilon(u^k(t) + H_u(t, \Psi^k(t), x^k(t), u^k(t)) \;\; t \in [t_1, t_2]$$

P_υ - оператор проектирования на множество U в евклидовой метрике.

Вычислим величину:

$$\delta(u^k) = \int_{t_0}^{t_1} < H_u(t, \Psi^k(t), x^k(t), u^k(t)), \overline{u}^k(t) - u^k(t) > dt \ge 0$$

Если $\delta(u^k) = 0$, то управление u^k удовлетворяет линеаризованному принципу максимума.

Если же $\delta(u^k) > 0$, то формируем α - параметрическое семейство управлений:

$$u_\alpha^{(k)} = (1-\alpha)u^k + \alpha\overline{u}^k = u_\alpha^k(t) = u^k(t) + \alpha(\overline{u}^k(t) \text{ -} u^k(t)) \quad t \in [t_1, t_2]$$

Очередное (k+1)-е приближение определяется по форме:

$$u^{(k+1)}(t) = u^k_{\alpha_k}(t) \;\; , t \in [t_1, t_2]$$

Где α_k - решение задачи одномерной оптимизации $\Phi(u_\alpha^k) \to min_{\alpha\in[0,1]}$

Выполним одну итерацию для начального приближения $u^o(t) = 0$.

$$\Phi(u) = -\int_0^1 x(t)(3u(t)+1)dt - 2x(1) \to min;\; x^o(t) = -u, x(0) = 1$$

$$|u(t)| \le 1$$

1.) Функция Понтрягина $H(t, \psi, x, u) = -\psi u + 3ux + x$

$$|u(t)| \le 1$$

2.) Сопряжѐнная задача: $\Psi = -H'_x = -3u - 1$, $\Psi(1) = 2$

$$\psi(t_1) = -\frac{\delta G(x(t_1))}{\delta x}$$

$$\psi(t_1) = -\frac{\delta h(x(t_1))}{\delta x}$$

3.) Находим фазовую и сопряженную траектории, соответствующие управлению u^o :

$$x^o(t) = 1; \psi^o(t) = 3 - t \quad , \; t \in [t_0, t_1] = [0,1]$$

4.) Формируем задачу поиска вспомогательного управления:

$$u^o + H'_u = 3x - \psi \; , \; \psi = 3 - t$$

$\bar{u}^o = P_{|u| \le 1}(t), t \in [0,1]$. Тогда $\overline{u^o}(t) = t$.

$$\delta(u^k) = \int_{t_0} t_1 < H'_u(t, \psi^k, x^k, u^k), \bar{u}^{(k)} \; \text{-} u^{(k)} > dt = \int_0^1 < 3x^{(o)} - \psi^{(o)} \; , \bar{u}^{(o)} - u^{(o)} > dt =$$

$$= \int_0^0 < 3 - 3 + t, t - 0 > dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} > 0$$

$$u^{(1)}(t) = u^0{}_{\alpha_0}(t) - \alpha_0 t \; ,$$

где α_0 - решение задачи одномерной минимизации $\Phi(u^o_\alpha) \to min \;\; 0 \le \alpha \le 1$

Чтобы найти явное выражение для функции $\Phi(u^o_\alpha)$ от параметра α, решим задачу Коши и

определим $x^o_\alpha(t)$, $t \in [t_0, t_1]$.

$\dot{x} = -\alpha t, x(\mathbf{O}) = \mathbf{1}$. Отсюда, $x^o_\alpha(t) = 1 - \frac{1}{2}\alpha t^2$.

$$\Phi(u^o_\alpha) = -\int_0^1 x^o_1(t)[3u^o_\alpha(t) + 1)]dt \; \text{-} \; 2x^o_\alpha(1) =$$

$$-\int_0^1 (1-\frac{1}{2}\alpha t^2)(3\alpha t+1)dt+\alpha-2=\frac{3}{8}\alpha^2-\frac{1}{3}\alpha-3\to\min_{0\le\alpha\le1}$$

Таким образом, $\alpha_0=\frac{4}{9}$ и искомое управление: $u^{(1)}(t)=\frac{4}{9}t$

6.Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте принцип Лагранжа.

2. В чем состоит метод Лагранжа?

3. Постановка задачи Лагранжа в форме Понтрягина.

4. Постановка задачи оптимального управления.

5. В чѐм отличие задачи Лагранжа в форме Понтрягина от задачи оптимального управления?

6. Что называется функцией Гамильтона?

7. Сформулируйте принцип максимума Понтрягина.

8. Выпишите условия трансверсальности.

9. Как ставиться простейшая задача оптимального быстродействия?

10. Сформулируйте линеаризованный принцип максимума.

11. Условия применения линеаризованного принципа максимума.

12. Приведите алгоритм метода условного градиента.

13. Приведите алгоритм метода проекции градиента.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Индивидуальное домашнее задание № 1

Задача 1. Используя принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина решить задачу Лагранжа

Вариант	Условие задачи
1	$\int_0^1 u^2 dt \to min, \ddot{x} - x = u, x(0) = 1$
2	$\int_0^1 u^2 dt \to min, \ddot{x} - x = u, x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$

3	$\int_0^1 u^2 dt \to min, \ddot{x} - x = u, x(0) = 1, x(1) = sh1, \dot{x}(1) = ch1 + sh1$
4	$\int_0^1 u^2 dt \to min, \ddot{x} - x = u, x(0) = \dot{x}(0) = 0, x(1) = sh1, \dot{x}(1) = ch1 + sh1$
5	$\int_0^1 u^2 dt \to min, \ddot{x} + x = u, \dot{x}(0) = 1$
6	$\int_0^1 u^2 dt \to min, \ddot{x} + x = u, x(0) = 0, x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 1$
7	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 dt \to min, \ddot{x} + x = u, x(0) = x(\frac{\pi}{2}) = 0, \dot{x}(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$
8	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 dt \to min, \ddot{x} + x = u, x(\frac{\pi}{2}) = 0, \dot{x}(\frac{\pi}{2}) = 1, x(0) = 0, \dot{x}(0) = -\frac{\pi}{2}$
9	$\int_0^1 (x^2 + u^2) dt \to min, \dot{x} = x + u, x(1) = 1$
10	$\int_0^1 (x^2 + 2u^2) dt \to min, \dot{x} = \frac{x}{\sqrt{2}} + u, x(0) = 1$
11	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 dt + x^2(0) \to min, \ddot{x} + x = u$
12	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 dt + x^2(0) \to min, \ddot{x} + x = u, x(\frac{\pi}{2}) = 1$
13	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 dt + x^2(0) \to min, \ddot{x} + x = u, x(\frac{\pi}{2}) = 0, \dot{x}(\frac{\pi}{2}) = 1$
14	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 dt + x^2(0) \to min, \ddot{x} + x = u, x(\frac{\pi}{2}) = \dot{x}(0) = 0, \dot{x}(\frac{\pi}{2}) = 1$
15	$\int_0^1 u^2 dt + \dot{x}^2(0) \to min, \ddot{x} - x = u$
16	$\int_0^1 u^2 dt + \dot{x}^2(0) \to min, \ddot{x} - x = u, x(0) = 1$
17	$\int_0^1 u^2 dt + \dot{x}^2(0) \to min, \ddot{x} + x = u, x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 1$

Задача 2. Решить задачу оптимального быстродействия

Вариант Условие задачи

1 $T \to min \ |\ddot{x}| \le 2$, $x(-1)=1$, $x(T)=-1$, $\dot{x}(-1)=\dot{x}(T)=0$

2 $T \to min \ -3 \le \ddot{x} \le 2$, $x(0)=3$, $x(T)=-1$, $\dot{x}(0)=\dot{x}(T)=0$

3 $T \to min \ 0 \le \ddot{x} \le 1$, $x(0)=\xi_1$, $\dot{x}(0)=\xi_2$, $x(T)=\dot{x}(T)=0$

4 $T \to min \ |\ddot{x}| \le 2$, $\dot{x}(0)=\dot{x}(T)=0$, $x(0)=1, x(T)=3$

5 $T \to min \ -1 \le \ddot{x} \le 3$, $x(0)=1$, $\dot{x}(0)=\dot{x}(T)=0$, $x(T)=-1$

6 $T \to min \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$, $x_1(t_0)=x_2(t_0)=0$, $x_1(T)=-1$, $x_2(T)=0, |u| \le 1$

7 $T \to min \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u \end{cases}$, $x_1(0)=x_2(0)=0$, $x_1(T)=-2$, $x_2(T)=0, |u| \le 2$

8 $T \to min \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u \end{cases}$, $x_1(0)=0, x_2(0)=4$, $x_1(T)=x_2(T)=0$

9 $T \to min \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2 \end{cases}$, $x_1(0)=x_2(0)=2$, $x_1(T)=6$, $x_2(T)=-2, |u_1| \le 2, |u_2| \le 2$

10 $T \to min \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2 \end{cases}$, $x_1(0)=-2, x_2(0)=2$, $x_1(T)=2$, $x_2(T)=-10, |u_1| \le 2, |u_2| \le 2$

11 $T \to min \ |\ddot{x}| \le 2$, $x(-1)=1$, $x(T)=-1$, $\dot{x}(-1)=\dot{x}(T)=0$

12 $T \to min \ -3 \le \ddot{x} \le 2$, $x(0)=3$, $x(T)=-1$, $\dot{x}(0)=\dot{x}(T)=0$

13 $T \to min \ 0 \le \ddot{x} \le 1$, $x(0)=\xi_1$, $\dot{x}(0)=\xi_2$, $x(T)=\dot{x}(T)=0$

14 $T \to min \ |\ddot{x}| \le 2$, $\dot{x}(0)=\dot{x}(T)=0$, $x(0)=1, x(T)=3$

15 $T \to min \ -1 \le \ddot{x} \le 3$, $x(0)=1$, $\dot{x}(0)=\dot{x}(T)=0$, $x(T)=-1$

16 $T \to min \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$, $x_1(t_0)=x_2(t_0)=0$, $x_1(T)=-1$, $x_2(T)=0, |u| \le 1$

17 $T \to min \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u \end{cases}$, $x_1(0)=x_2(0)=0$, $x_1(T)=-2$, $x_2(T)=0, |u| \le 2$

Индивидуальное домашнее задание №2

Задача 1.

Выполнить одну итерацию метода условного градиента и одну итерацию метода проекции градиента.

Вариант	Условие задачи
1	2
1	$\Phi(u) = -3x_1(u) + x_2(4) + \int_0^4 x_1(t)u(t)dt \to min$ $x_1^0 = 4u\ , x_1(0) = 4\ , x_2^0 = \frac{1}{4}x_1\ , x_2(0) = 0$ $\mid u \mid \le 1\ , u^{(0)}(t) = -\frac{1}{4}\ , t \in [0, 4]$
2	$\Phi(u) = \frac{1}{2}x_2(1) + 2x_3(1) \to min$ $x^0 = u\ , x_1(0) = 0\ , x_2^0 = x_1^{\ 2}\ , x_2(0) = 0$ $-1 \le \mid u \mid \le 2\ , u^{(0)}(t) = 0\ , t \in [0,1]$
3	$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2(t) + 2u^2(t))dt \to min$ $x^0 = 2u\ , x\ (0) = 0$ $\mid u \mid \le 1, u^{(0)}(t) = 1, t \in [0,1]$
4	$\Phi(u) = \frac{1}{2}x_1^{\ 2}(\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}x_2^{\ 2}(\frac{\pi}{2}) \to min$ $x_1^0 = x_2\ , x_1(0) = 1\ , x_2^0 = -x_1 + u\ \ \ , x_2(0) = 0$ $\mid u \mid \le 1\ , u^{(0)}(t) = 0\ , t \in [0, \frac{\pi}{2}]$
5	$\Phi(u) = 4x(2) + \int\limits_0^2 x(t)(u(t) - 2)dt \to min$ $x^0 = 2u\ , x_1(0) = 0$ $-1 \le \mid u \mid \le 3\ , u^{(0)}(t) = 1\ , t \in [0, 2]$

Вариант	Условие задачи
1	2
6	$\Phi(u)=4x(3)+3\int_0^3 x(t)(u(t)+1)dt \to min$ $x^0=u\ ,x(0)=0\ ,1\le\mid u\mid\le 3\ ,u^{(0)}(t)=2\ ,t\in[0,3]$
7	$\Phi(u)=-6x_1(4)+x_2(4)+2\int_0^4 x_1(t)dt \to min$ $x_1^0=3u\ ,x_1(0)=0\ ,x^0{}_2=x_1u^0;x_2(0)=0;\mid u\mid\le 2,u^{(0)}=-1\ ,t\in[0,4]$
8	$\Phi(u)=x_1(1)+x_2(1)\to min$ $x_1^0=u\ ,x_1(0)=0\ ,x^0{}_2=2ux_1,x_2(0)=0,\mid u\mid\le 1\ ,u^{(0)}=0\ ,t\in[0,1]$
9	$\Phi(u)=x_3(1)\to min$ $x_1^0=x_2\ ,x_1(0)=0\ ,x^0{}_2=u,x_2(0)=0,x^0{}_3=ux_1,x_3(0)=0$ $\mid u\mid\le 1\ ,u^{(0)}(t)=1\ ,t\in[0,1]$
10	$\Phi(u)=\int_0^2 \frac{1}{2}[x^2(t)-2(t+1)u(t)]dt \to min$ $x^0=u\ ,x(0)=0\ ,\mid u\mid\le 1\ ,u^{(0)}(t)=0\ ,t\in[0,2]$
11	$\Phi(u)=4x_1(3)-x_2(3)+x_3(3)\to min$ $x_1^0=-3u,x_1(0)=0,x_2^0=2x_1u,x_2(0)=0\ \ ,x_3^0=6x_1,x_3(0)=0$ $-3\le\mid u\mid\le 1,u^{(0)}(t)=-2\ ,t\in[0,3]$
12	$\Phi(u)=4x(3)-\int_0^3 x(t)(u(t)+1)dt \to min$ $x^0=-u\ ,x(0)=0\ ,2\le\mid u\mid\le 34,u^{(0)}(t)=3\ ,t\in[0,3]$

Вариант	Условие задачи
1	2
13	$\Phi(u) = -2x_1(2) + x_2(2) - 4\int\limits_0^2 x_1(t)u(t)dt \to min$ $x_1^0 = -u$, $x_1(0) = 0$, $x_2^0 = 4x_1, x_2(0) = 0$ $\lvert u \rvert \le 3$, $u^{(0)}(t) = -1$, $t \in [0,2]$
14	$\Phi(u) = \frac{3}{2}x^2(2) - \int\limits_0^2 x(t)u(t)dt \to min$ $x^0 = u + 1$, $x(0) = -1$, $-2 \le \lvert u \rvert \le 0$, $u^{(0)} = -1$, $t \in [0,2]$
15	$\Phi(u) = x(2) + 2\int\limits_0^3 x(t)(u(t)+1)dt \to min$ $x^0 = -u$, $x(0) = 0$, $\lvert u \rvert \le 2$, $u^{(0)}(t) = 1$, $t \in [0,2]$
16	$\Phi(u) = 3x_1(4) - x_2(4) + 6\int\limits_0^4 x_2(t)u(t)dt \to min$ $\dot{x}_1 = x_2 u$, $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_2 = 2u, x_2(0) = 0, \lvert u \rvert \le 1, u^{(0)}(t) = 1, t \in [0,4]$

Список литературы

1. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006.

2. Пантелеев А.В., Бортаковский А.С., Летова Т.А. Оптимальное управление в примерах и задачах. М: Издательство МАИ, 1996.

3. Галеев Э.М. Оптимизация. Теория. Примеры. Задачи. М.: URSS, 2006.

4. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высшая школа, 2003.

5. Васильев О.В., Аргучинцев А.В. Методы оптимизации в задачах и упражнениях, 1999.