

"УТВЕРЖДАЮ"

Ректор МГТУ им. Н.Э. Баумана

_____ А.А. Александров

" ____ " _____ 2013 г.

Заключительный этап академического соревнования Олимпиады школьников

«Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика»

Типовой вариант задания

1. Один автомобиль проходит в минуту на 240 м больше, чем другой, поэтому затрачивает на прохождение одного километра на 12,5 секунды меньше. На сколько метров первый автомобиль увеличивает расстояние от второго за время, пока второй проходит 1 км? (8 баллов)
2. Сколько членов содержится в возрастающей арифметической прогрессии с положительными членами, у которой сумма членов с нечетными номерами составляет 52% суммы членов всей прогрессии? (8 баллов)
3. Решите уравнение $2^x \cdot 9^{\frac{x}{x-1}} = \frac{3}{2}$. (8 баллов)
4. Решите уравнение $\operatorname{tg} 2x - \sqrt{\frac{\sin x \cos x}{1 - \sin x \cos x}} = 0$. (8 баллов)
5. Решите неравенство $\frac{(3 - \cos 2\pi x - 4 \sin \pi x)(\log_2(x^2 - x) - 1)}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x+4}} \geq 0$. (10 баллов)
6. Найдите множество значений функции $f(x) = \log_9 \left(3 - \left| 2^{1-x^2+2x} - 2 \right| \right)$. (10 баллов)
7. Площадь равнобокой трапеции равна 450. Окружность, построенная на боковой стороне трапеции как на диаметре, касается прямой, содержащей другую боковую сторону, и делит большее основание трапеции в отношении 24 : 25. Найдите стороны трапеции. (12 баллов)
8. Какую наибольшую площадь может иметь плоский треугольник, ограниченный осью Ox прямой $x = \frac{3}{2}$ и касательной к графику функции $y = 2x^2$ в точке с абсциссой x_0 , если $0 < x_0 < 3$? (12 баллов)
9. Укажите все значения a , при которых система уравнений $(x-a)^2 = x - y - a + 30$, $\frac{1 - \log_{30} y}{1 - \log_{30} x} = 1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a . (12 баллов)
10. В сферу радиуса R вписана пирамида $TABC$, основанием которой служит треугольник ABC с прямым углом C и углом A , равным 60° . Боковое ребро TA совпадает с высотой пирамиды, а угол между боковым ребром TB и биссектрисой основания AD равен 60° . Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через биссектрису AD и пересекающей ребро TB ? (12 баллов)

1. Пусть V м/сек – скорость первого автомобиля, тогда $V - 4$ – скорость второго. Тогда $\frac{1000}{V-4} = \frac{1000}{V} + 12,5$; $\frac{80}{V-4} = \frac{80}{V} + 1$; $V^2 - 4V - 320 = 0$, $V = 2 \pm 18$; $V_1 = 20$, $V_2 = 20 - 4 = 16$.

$$\Delta l = \frac{1000 \cdot 20}{16} - 1000 = 250.$$

Ответ: 250 м.

2. Так как каждый последующий член возрастающей арифметической прогрессии больше предыдущего, число членов прогрессии не может быть четным, иначе сумма членов с нечетными номерами будет меньше суммы членов с четными номерами. Пусть число членов прогрессии n . Тогда $S_{\text{even}} = a_1 + a_3 + \dots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot \frac{n+1}{2}$.

$$S = a_1 + \dots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \quad \frac{S_{\text{even}}}{S} = \frac{n+1}{2 \cdot n} = \frac{52}{100} = \frac{13}{25}, \text{ отсюда } 25n + 25 = 26n, \quad n = 25.$$

Ответ: $n = 25$.

3. Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 3: $\log_3 \left(2^x \cdot 9^{\frac{x}{x-1}} \right) = \log_3 \frac{3}{2}$;

$$x \log_3 2 + \frac{2x}{x-1} = 1 - \log_3 2; \quad (x+1) \log_3 2 + \frac{x+1}{x-1} = 0; \quad (x+1) \left(\log_3 2 + \frac{1}{x-1} \right) = 0.$$

$$1) x = -1, \quad 2) x = 1 - \log_2 3.$$

Ответ: $\{-1; 1 - \log_2 3\}$.

4. $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{\frac{2 \sin x \cos x}{2 - 2 \sin x \cos x}}$. При условии $\operatorname{tg} 2x \geq 0$ возводим в квадрат обе части

$$\text{уравнения: } \operatorname{tg}^2 2x = \frac{\sin 2x}{2 - \sin 2x} \Leftrightarrow \frac{\sin^2 2x}{1 - \sin^2 2x} = \frac{\sin 2x}{2 - \sin 2x} \Leftrightarrow 1) \sin 2x = 0 \quad x = \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z} \text{ или}$$

$$2) \frac{\sin 2x}{1 - \sin^2 2x} = \frac{1}{2 - \sin 2x} \Leftrightarrow \sin 2x \neq \pm 1, \quad \sin 2x(2 - \sin 2x) = 1 - \sin^2 2x \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \text{ С учетом условия } \operatorname{tg} 2x \geq 0 \text{ окончательно имеем } x = \frac{\pi n}{2},$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi n}{2}, \quad x = \frac{\pi}{12} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

5. $\frac{(3 - \cos 2\pi x - 4 \sin \pi x)(\log_2(x^2 - x) - 1)}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x+4}} \geq 0$. ОДЗ: $2x+1 \geq 0, \quad x(x-1) > 0 \Rightarrow$

$x \in [-0,5; 0) \cup (1; +\infty)$. Так как $\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x+4} < 0$, то на ОДЗ исходное неравенство эквивалентно следующему

$$(2\sin^2 \pi x - 4\sin \pi x + 2)(x^2 - x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow (\sin \pi x - 1)^2(x+1)(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \pi x = 1, \\ x \in [-1; 2] \end{cases}$$

С учетом ОДЗ имеем $x \in [-0,5; 0) \cup (1; 2] \cup \left\{ \frac{1}{2} + 2n, n \in \mathbb{N} \right\}$

Ответ: $x \in [-0,5; 0) \cup (1; 2] \cup \left\{ \frac{1}{2} + 2n, n \in \mathbb{N} \right\}$.

6. $f(x) = \log_9(3 - |2^{1-x^2+2x} - 2|)$ Функция $t = 1 - x^2 + 2x$ или $t = 2 - (x-1)^2$ принимает

значения $t \in (-\infty; 2]$. Функция $z = 2^t$, где $t \in (-\infty; 2]$ принимает значения $z \in (0; 4]$.

Рассмотрим функцию $y = \log_9(3 - |z - 2|)$, определенную на полуинтервале $(0; 4]$. Если

$z \in (0; 2]$, то $y = \log_9(1 + z)$, и функция возрастает и принимает все значения из промежутка

$(0; 0,5]$. Если $z \in (2; 4]$, то $y = \log_9(5 - z)$, и функция убывает и принимает все значения из

промежутка $[0; 0,5)$. Объединяя полученные множества значений, получаем $E_f = [0; 0,5]$.

Ответ: $E_f = [0; 0,5]$.

7. ABCD - равнобокая трапеция, $AB = CD$, $\angle A$ - острый, AB - диаметр окружности, M - центр окружности, P - точка касания окружности боковой стороны CD . Обозначим радиус окружности x . Тогда $AM = MB = MP = x$. Пусть N - середина стороны CD , тогда

треугольник MPN прямоугольный, $\angle P = 90^\circ$, $\angle MNP = \angle A = \alpha$, $MN = \frac{x}{\sin \alpha}$. Пусть K -

точка пересечения окружности с основанием AD ($K \neq A$). Треугольник ABK -

прямоугольный, $\angle K = 90^\circ$, BK - высота трапеции, $BK = AB \sin \alpha = 2x \sin \alpha$.

$$S_{ABCD} = MN \cdot BK = 2x^2 = 450 \Rightarrow x = 15,$$

$$AB = CD = 2x = 30.$$

$AK = AB \cos \alpha = 2x \cos \alpha$, $KMND$ - параллелограмм, $KD = MN = \frac{x}{\sin \alpha}$.

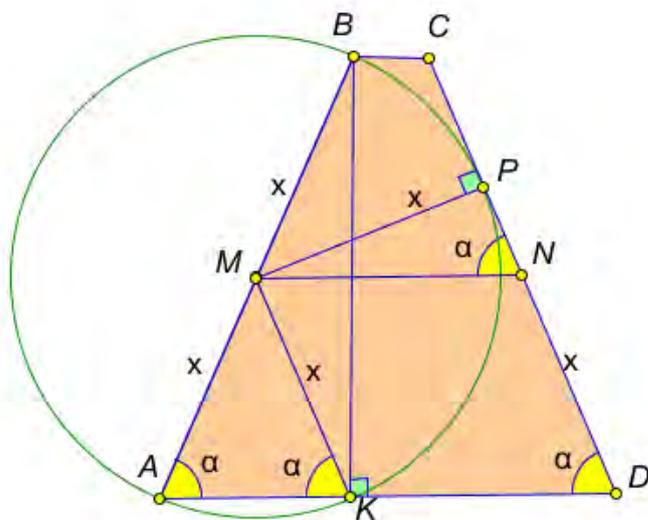
$$\frac{AK}{KD} = \frac{24}{25} \Rightarrow 2 \cos \alpha \sin \alpha = \frac{24}{25} \Rightarrow$$

$$\sin 2\alpha = \frac{24}{25} \Rightarrow \cos 2\alpha = \pm \frac{7}{25} \Rightarrow$$

$$1) \sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = \frac{3}{5},$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = \frac{4}{5} \quad \text{или}$$

$$2) \sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = \frac{3}{5}.$$



Для первого случая имеем: $AK = 2x \cos \alpha = 24$, $KD = \frac{x}{\sin \alpha} = 25$, $AD = AK + KD = 49$,
 $BC = 2MN - AD = 1$.

Для второго случая имеем: $AK = 2x \cos \alpha = 18$, $KD = \frac{x}{\sin \alpha} = \frac{75}{4}$, $AD = AK + KD = \frac{147}{4}$,
 $BC = 2MN - AD = \frac{3}{4}$.

Ответ: 1, 49, 30, 30 или $\frac{3}{4}$, $\frac{147}{4}$, 30, 30.

8. Составим уравнение касательной к графику функции $y = 2x^2$ в точке с абсциссой

x_0 : $y_{кас} = 4x_0(x - x_0) + 2x_0^2$. Пусть точки $A(a; 0)$ и $B(\frac{3}{2}; b)$ - точки пересечения касательной

с осью Ox и прямой $x = \frac{3}{2}$,

соответственно.

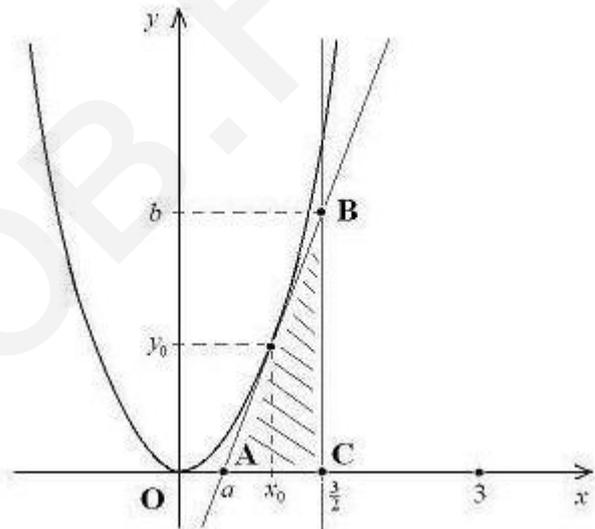
Подставим координаты этих точек в уравнение касательной и выразим a и b через x_0 :

$$b = 4x_0(1,5 - x_0) + 2x_0^2 = 6x_0 - 2x_0^2 =$$

Отметим, что из условия $0 < x_0 < 3$ следует $0 < a < \frac{3}{2}$, и потому точка $A(a; 0)$ находится на оси абсцисс слева от точки $C(\frac{3}{2}; 0)$. Тогда площадь

треугольника ABC равна $S = \frac{(1,5 - a)b}{2} = \frac{x_0(3 - x_0)^2}{2}$.

Находим экстремумы полученной функции $S = S(x_0)$ в интервале $(0; 3)$. Функция S в каждой точке этого интервала имеет производную. Определим нули ее производной:
 $S' = \frac{(3 - x_0)^2 - 2x_0(3 - x_0)}{2} = \frac{3(x_0 - 3)(x_0 - 1)}{2} = 0$, $x_0 = 1$. Так как в интервале $(0; 1)$ верно неравенство $S'(x_0) > 0$, а в интервале $(1; 3)$ верно неравенство $S'(x_0) < 0$, то $x_0 = 1$ - единственная точка максимума в интервале $(0; 3)$. Следовательно, $S_{\max} = S(1) = 2$. Наибольшая площадь треугольника равна 2. **Ответ:** 2.



9. $(x-a)^2 = x-y-a+30$, $\frac{1-\log_{30} y}{1-\log_{30} x} = 1$. Второе уравнение равносильно системе:

$x > 0$, $x \neq 30$, $y = x$. Подставляя $y = x$ в первое уравнение, получаем; $(x-a)^2 = 30-a$, или $x^2 - 2ax + a^2 + a - 30 = 0$ (*), у которого $D/4 = a^2 - a^2 - a + 30 = 30 - a$. Количество решений заданной системы уравнений зависит от числа корней этого квадратного уравнения.

Корень $x = 30$ квадратного уравнения может получиться, когда $(30-a)^2 = 30-a$, т.е. если

1) $a = 30$, уравнение имеет вид $(x-30)^2 = 0$, тогда этот корень единственный и заданная система решений не имеет, или 2) $(30-a) = 1$, т.е. $a = 29$, тогда для x получаем уравнение $(x-29)^2 = 1$, $x = 29 \pm 1$, у которого, кроме постороннего корня $x_1 = 30$, есть еще один корень $x_2 = 28$, удовлетворяющий условиям, и заданная система имеет единственное решение $(28; 28)$.

Рассмотрим все случаи, когда система может иметь единственное решение.

1. $\begin{cases} D/4 = 30 - a = 0, \\ a > 0, \quad a \neq 30. \end{cases}$ Система решений не имеет.

2. $a^2 + a - 30 < 0$, т.е. при $-6 < a < 5$ $x = a + \sqrt{30-a}$.

3. $a^2 + a - 30 = 0$, отсюда $a = 5$, $x^2 - 10x = 0$, $x_1 = 0$ – посторонний корень, $x_2 = 10$

удовлетворяет условиям, или $a = -6$, $x^2 + 12x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -12$ – посторонние корни.

Рассмотрим случаи, когда система будет иметь два различных решения. Квадратное уравнение (*) будет иметь два различных положительных корня $x_{1,2} = a \pm \sqrt{30-a}$, если

$$\begin{cases} 30 - a > 0, \\ a > 0, \\ a^2 + a - 30 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 30, \\ \left[\begin{array}{l} a < -6, \\ a > 5 \end{array} \right] \Leftrightarrow 5 < a < 30. \end{cases}$$

Из этого множества надо убрать рассмотренную ранее точку $a = 29$.

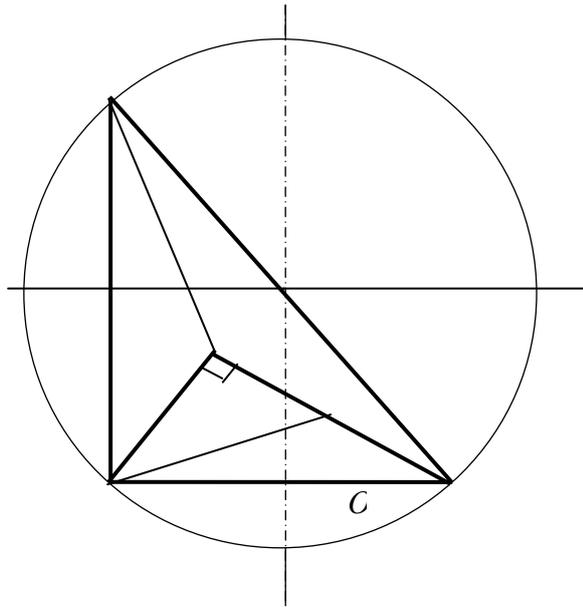
Объединяя найденные значения a , получим ответ.

Ответ: $a \in (-6; 5]$, $x = y = a + \sqrt{30-a}$;

$a \in (5; 29) \cup (29; 30)$, $x_{1,2} = y_{1,2} = a \pm \sqrt{30-a}$;

$a = 29$, $x = y = 28$.

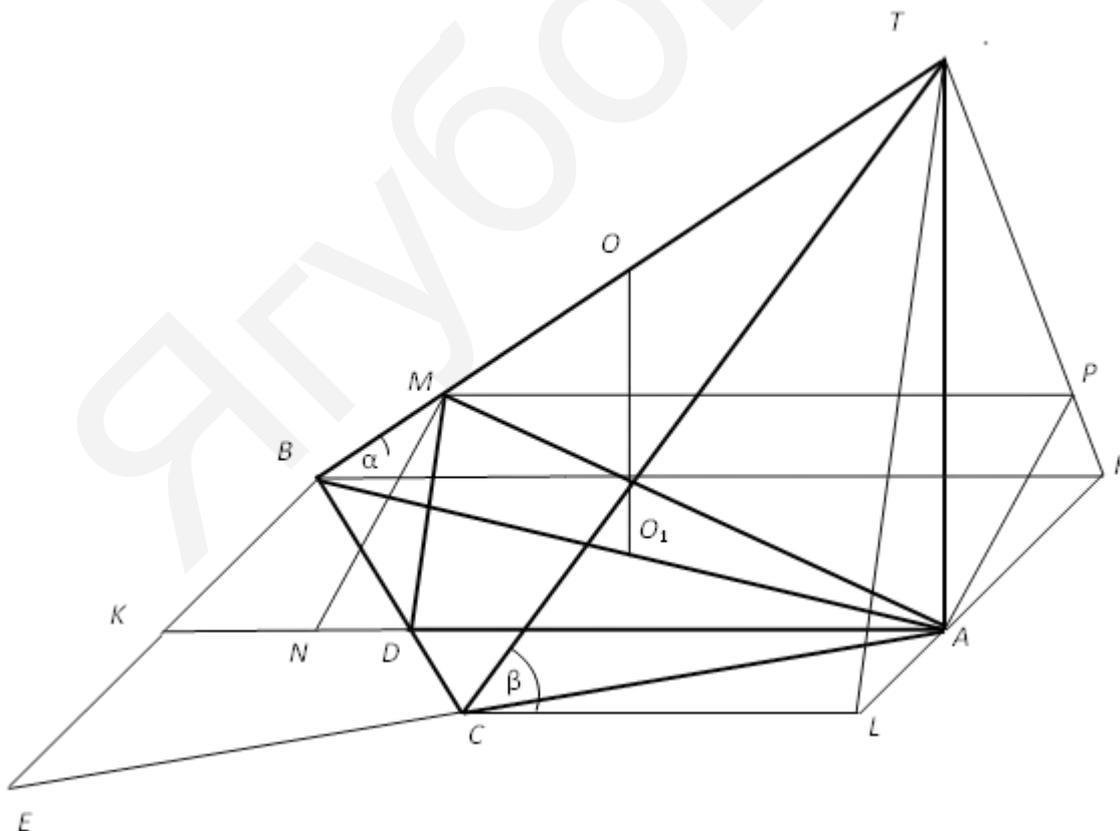
$a \in (1/4; 1/2) \cup (1/2; +\infty)$, $x_1 = 0$, $y_1 = 1 - 1/4a$; $x_2 = 1$, $y_2 = 1$; $x_3 = (4a-1)^2$, $y_3 = 4a-1$.



10. Так как $\triangle ABC$ прямоугольный, центр описанной окружности O_1 лежит на середине гипотенузы AB , а центр сферы лежит на перпендикуляре к плоскости ABC , проходящем через O_1 . Так как $\triangle ABT$ прямоугольный и перпендикулярен плоскости основания, то OO_1 лежит в нем и середина гипотенузы BT – центр описанной сферы O . следовательно $BT = 2R$. Для наглядности построим $\triangle ABC$ до равностороннего $\triangle ABE$, тогда D – точка пересечения его биссектрис и медиан.

Проведем $BF \parallel AD$ и $AF \perp AD$, тогда $\angle TBF = \alpha$ – заданный в условиях угол между боковым ребром TB и биссектрисой основания AD .

Проведем $CL \parallel AD$ и $AL \perp AD$, тогда $\angle TCL = \beta$ – заданный в условиях угол между боковым ребром TC и биссектрисой основания AD .



Проведем $AP \perp TF$, $PM \parallel FB$ и $MN \perp AK$; MN – общий перпендикуляр к AD и TB , причем $MN = AP$. Очевидно, MN – высота треугольника AMD , при которой сечение пирамиды плоскостью, проходящей через биссектрису AD и пересекающей ребро будет иметь наименьшую площадь $S_{\Delta AMD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot MN$.

По условию $\alpha = 60^\circ$. Пусть $AB = a$. Тогда $BF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $TF = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2}a$, $AF = \frac{a}{2}$,

$$AT = \sqrt{TF^2 - AF^2} = \sqrt{\frac{9}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2} = a\sqrt{2}. \quad AP = \frac{AT \cdot AF}{TF} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a \cdot 2}{2 \cdot 3a} = \frac{a\sqrt{2}}{3}. \quad AD = \frac{2}{3} \cdot BF = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$$2R = BT = \frac{BF}{\cos \alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{2 \cos 60^\circ} = a\sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

$$S_{\Delta AMD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AP = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} a^2 = \frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} R^2.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} R^2$