1) Будет ли подпространством подмножество $V \subset R^4$, определённое следующим образом:

$$V = \left\{ x = (x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4) \in R^4 \mid x_3 = 2x_2 \right\}$$

Пояснение: множество V состоит из тех векторов пространства R^4, для координат которых выполняется условие $x_3 = 2x_2$ (например, $\vec{a} = (-2;\ 1;\ 2;\ 4) \in V$, а вектор $\vec{b} = (3;\ 1;\ 1;\ 0) \notin V$).

• Непустое подмножество V_1 линейного пространства V, определённого над полем F, называется его подпространством, если для любых векторов $a, b \in V_1$ и любых скаляров $\alpha, \beta \in F$ вектор $\alpha a + \beta b \in V_1$.

• Непустое множество $V_1 \subset V$ является подпространством линейного пространства V тогда и только тогда, когда для любых векторов $x, y \in V_1$ и любого скаляра $\alpha \in F$ сумма $x + y \in V_1$ и произведение $\alpha x \in V_1$.

• Непустое множество $V_1 \subset V$ является подпространством линейного пространства V тогда и только тогда, когда V_1 является линейным пространством относительно операций, введённых в V.

Любое подпространство содержит нулевой вектор.

► Пусть $x = (x_1; x_2; x_3; x_4) \in V$ и $y = (y_1; y_2; y_3; y_4) \in V$, т.е. обладают свойством

$$\begin{cases} x_3 = 2x_2 \\ y_3 = 2y_2 \end{cases} \qquad (*)$$

Составим вектор $z = \alpha x + \beta y$, где $\alpha, \beta \in R$, $x, y \in W$:

$$z = \alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1\ ;\ \alpha x_2 + \beta y_2\ ;\ \alpha x_3 + \beta y_3\ ;\ \alpha x_4 + \beta y_4) = (z_1;\ z_2;\ z_3;\ z_4).$$

► Выясним, принадлежит ли вектор z множеству V.

Найдём для вектора z сумму координат $z_3 - 2z_2$:

$$z_3 - 2z_2 = (\alpha x_3 + \beta y_3) - 2\cdot(\alpha x_2 + \beta y_2) = \alpha(x_3 - 2x_2) + \beta(y_3 - 2y_2) = 0$$

(равно нулю на основании (*)).

Итак, для вектора z выполнены условия, определяющие множество V, т.е. $z \in V$.

► Вывод. Линейные операции над векторами множества V не выводят из множества V; следовательно, V - подпространство.

2) Проверить, образует ли линейное подпространство множество

$$W = \left\{ x = (x_1; x_2; x_3; x_4) \in R^4 \mid 2x_1 + x_4 = 0 \right\}.$$

Пояснение: множество W состоит из тех векторов пространства R^4, для координат которых выполняется условие $2x_1 + x_4 = 0$ (например, $\vec{a} = (-2;\ 3;\ 0;\ 4) \in W$, а вектор $\vec{b} = (3;\ 1;\ 1;\ 0) \notin W$).

• Непустое подмножество V_1 линейного пространства V, определённого над полем F, называется его подпространством, если для любых векторов $a, b \in V_1$ и любых скаляров $\alpha, \beta \in F$ вектор $\alpha a + \beta b \in V_1$.

• Непустое множество $V_1 \subset V$ является подпространством линейного пространства V тогда и только тогда, когда для любых векторов $x, y \in V_1$ и любого скаляра $\alpha \in F$ сумма $x + y \in V_1$ и произведение $\alpha x \in V_1$.

• Непустое множество $V_1 \subset V$ является подпространством линейного пространства V тогда и только тогда, когда V_1 является линейным пространством относительно операций, введённых в V.

Любое подпространство содержит нулевой вектор.

► Пусть $x=(x_1;x_2;x_3;x_4)\in W$ и $y=(y_1;y_2;y_3;y_4)\in W$, т.е. обладают свойством

$$\begin{cases} 2x_1+x_4=0 \\ 2y_1+y_4=0 \end{cases} \qquad (*)$$

Составим вектор $z=\alpha x+\beta y$, где $\alpha,\beta\in R$, $x,y\in W$:

$$z=\alpha x+\beta y=(\alpha x_1+\beta y_1\ ;\ \alpha x_2+\beta y_2\ ;\ \alpha x_3+\beta y_3\ ;\ \alpha x_4+\beta y_4)=(z_1;\ z_2;\ z_3;\ z_4).$$

► Выясним, принадлежит ли вектор z множеству W.

Найдём для вектора z сумму координат $2z_1+z_4$:

$$2z_1+z_4=2\cdot(\alpha x_1+\beta y_1)+(\alpha x_4+\beta y_4)=\alpha(2x_1+x_4)+\beta(2y_1+y_4)=0$$

(равно нулю на основании (*)).

Итак, для вектора z выполнены условия, определяющие множество W, т.е. $z\in W$.

► Вывод. Линейные операции над векторами множества W не выводят из множества W; следовательно, W - подпространство.

Литература:

1) Красовская И.А., Керимова Д.Х., Кошелева Е.Л. "Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии", методичка СГА №1876.03.02.1 (Москва), 2004, стр. 113 (задание 1).

3) Проверить, образует ли линейное подпространство множество

$$W=\left\{x=(x_1;x_2;x_3;x_4)\in R^4\ \middle|\ 2x_1+x_4=1\right\}.$$

► Пусть $x=(x_1;x_2;x_3;x_4)\in W$ и $y=(y_1;y_2;y_3;y_4)\in W$, т.е. обладают свойством

$$\begin{cases} 2x_1+x_4=1 \\ 2y_1+y_4=1 \end{cases} \qquad (**)$$

Составим вектор $z=\alpha x+\beta y$, где $\alpha,\beta\in R$, $x,y\in W$:

$$z=\alpha x+\beta y=(\alpha x_1+\beta y_1\ ;\ \alpha x_2+\beta y_2\ ;\ \alpha x_3+\beta y_3\ ;\ \alpha x_4+\beta y_4)=(z_1;\ z_2;\ z_3;\ z_4).$$

► Выясним, принадлежит ли вектор z множеству W.

Найдём для вектора z сумму координат $2z_1+z_4$:

$$2z_1+z_4=2\cdot(\alpha x_1+\beta y_1)+(\alpha x_4+\beta y_4)=\alpha(2x_1+x_4)+\beta(2y_1+y_4)=\alpha+\beta\neq 1$$

(на основании (**)).

Итак, для вектора z условия, определяющие множество W, не выполняются; т.е. $z\notin W$.

► Вывод. Линейные операции над векторами множества W выводят из множества W; следовательно, W не является подпространством. Таким образом, совокупность решений неоднородного уравнения $2x_1+x_4=1$ не образует подпространства в отличие от подпространства решений однородного уравнения $2x_1+x_4=0$. Совокупность решений неоднородной системы - сдвиг подпространства решений однородной системы (см. [2]).

Литература:

1) Красовская И.А., Керимова Д.Х., Кошелева Е.Л. "Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии", методичка СГА №1876.03.02.1 (Москва), 2004, стр. 113 (задание 2);

2) Красовская И.А., Керимова Д.Х. "Линейная алгебра", методичка СГА №2002.03.02.1 (Москва), 2005, стр. 41.

4) Проверить, образует ли [линейное] подпространство множество W всех чётных функций пространства $C_{(-1;1)}$.

► Пусть $f(x)$, $g(x)$ - чётные, непрерывные на интервале $(-1;1)$ функции, т.е. $f, g \in W$. Тогда

$$\begin{cases} f(-x) = f(x) \\ g(-x) = g(x) \end{cases} \qquad (***)$$

Составим функцию (вектор) $\varphi(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$, где $\alpha, \beta \in R$, $f(x), g(x) \in W$.

► Выясним, принадлежит ли вектор $\varphi(x)$ множеству W.

Сравним $\varphi(x)$ и $\varphi(-x)$:

$$\varphi(-x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \varphi(x)$$

(на основании (***)).

Итак, $\varphi(-x) = \varphi(x)$; функция $\varphi(x)$ - чётная, т.е. $\varphi(x) \in W$.

► Вывод. Линейные операции над чётными функциями оставляют функцию чётной, т.е. множество чётных функций является подпространством.

Аналогично можно убедиться, что множество нечётных функций пространства $C_{(-1;1)}$ является подпространством.

Литература:

1) Красовская И.А., Керимова Д.Х., Кошелева Е.Л. "Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии", методичка СГА №1876.03.02.1 (Москва), 2004, стр. 114 (задание 3).

5) Является ли вещественным линейным пространством:
а) множество всех многочленов (от одного переменного) с действительными коэффициентами степени ≤ 4;
б) множество всех таких многочленов степени 4.

а)

В пространстве P, образуемом множеством многочленов степени ≤ 4, стандартный базис состоит из функций:

$$e_1 = 1,\ e_2 = x,\ e_3 = x^2,\ e_4 = x^3,\ e_5 = x^4 \quad (\dim P = 5).$$

Так что $P = \left\{ a = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^4 \in R^5 \ \middle|\ a_i (i = 1 \ldots 5) \in R \right\}$

► Пусть векторы $a = (a_1; a_2; a_3; a_4; a_5) \in P$ и $b = (b_1; b_2; b_3; b_4; b_5) \in P$, т.е. многочлены

$$a = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^4$$

$$b = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + b_4 x^3 + b_5 x^4$$

определённые в указанном базисе.

Составим многочлен $z = \alpha a + \beta b$, где $\alpha, \beta \in R$, $a, b \in P$:

$$z = \alpha a + \beta b = \alpha \cdot \left(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^4 \right) + \beta \cdot \left(b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + b_4 x^3 + b_5 x^4 \right) =$$

$$= (\alpha a_1 + \beta b_1) + (\alpha a_2 + \beta b_2) x + (\alpha a_3 + \beta b_3) x^2 + (\alpha a_4 + \beta b_4) x^3 + (\alpha a_5 + \beta b_5) x^4 =$$

$$= z_1 + z_2 x + z_3 x^2 + z_4 x^3 + z_5 x^4, \text{ где } z_i \left(i = 1 \ldots 5\right) \in R.$$

Итак, для многочлена z выполнены условия, определяющие множество P, т.е. $z \in P$.

► Вывод. Линейные операции над многочленами множества P не выводят из множества P; следовательно, P - вещественное линейное пространство.

Ответ: да.

б)

В данном случае $P = \left\{ a = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^4 \in R^5 \mid a_i \left(i = 1 \ldots 4\right) \in R, \ a_5 \in R \setminus \{0\} \right\}$ (коэффициент a_5 не может быть нулевым).

► Пусть векторы $a = \left(a_1; a_2; a_3; a_4; a_5\right) \in P$ и $b = \left(b_1; b_2; b_3; b_4; b_5\right) \in P$, т.е. многочлены

$$a = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^4$$

$$b = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + b_4 x^3 + b_5 x^4$$

определённые в указанном базисе.

Составим многочлен $z = \alpha a + \beta b$, где $\alpha, \beta \in R$, $a, b \in P$:

$$z = \alpha a + \beta b = \alpha \cdot \left(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^4\right) + \beta \cdot \left(b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + b_4 x^3 + b_5 x^4\right) =$$

$$= \left(\alpha a_1 + \beta b_1\right) + \left(\alpha a_2 + \beta b_2\right) x + \left(\alpha a_3 + \beta b_3\right) x^2 + \left(\alpha a_4 + \beta b_4\right) x^3 + \left(\alpha a_5 + \beta b_5\right) x^4 = .$$

$$= z_1 + z_2 x + z_3 x^2 + z_4 x^3 + z_5 x^4, \text{ где } z_i \left(i = 1 \ldots 5\right) \in R.$$

Поскольку $\alpha, \beta \in R$, то $z_5 \in R$ (может быть $z_5 = 0$), и условия, определяющие множество P, не выполняются, т.е. $z \notin P$.

► Вывод. Линейные операции над многочленами множества P выводят из множества P; следовательно, P не является линейным пространством.

Ответ: нет.