

1) Доказать, что отображение

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2; 2x_2; x_1)$$

является линейным отображением пространства $V = R^3$.

Найти его матрицу в базисе

$$e_1 = (1; -1; 0)$$

$$e_2 = (1; 1; 0)$$

$$e_3 = (1; 1; 1)$$

► Проверим линейность данного отображения A .

Определение. Отображение A является линейным отображением пространства $V = R^3$, если

$$1) A(x + y) = Ax + Ay;$$

$$2) A(\alpha x) = \alpha Ax.$$

Найдём $A(X + Y)$ и $A(\alpha X)$:

$$\begin{aligned} A(X + Y) &= A((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) = A(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = \\ &= (x_1 + y_1 + x_2 + y_2, 2(x_2 + y_2), x_1 + y_1) = ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), 2x_2 + 2y_2, x_1 + y_1) = \\ &= (x_1 + x_2, 2x_2, x_1) + (y_1 + y_2, 2y_2, y_1) = AX + AY \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(\alpha X) &= A(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) = (\alpha x_1 + \alpha x_2; 2\alpha x_2; \alpha x_1) = \\ &= \alpha \cdot (x_1 + x_2; 2x_2; x_1) = \alpha AX \end{aligned}$$

- следовательно, данное отображение является линейным.

► Найдём матрицу отображения A в базисе

$$e_1 = (1; -1; 0)$$

$$e_2 = (1; 1; 0)$$

$$e_3 = (1; 1; 1)$$

В стандартном (по умолчанию) базисе

$$s_1 = (1; 0; 0)$$

$$s_2 = (0; 1; 0)$$

$$s_3 = (0; 0; 1)$$

отображение A имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Выпишем матрицу T перехода от базиса $\{s_1; s_2; s_3\}$ к новому базису $\{e_1; e_2; e_3\}$:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

и найдём матрицу отображения B в новом базисе по формуле $B = T^{-1}A \cdot T$:

$$B = T^{-1}A \cdot T = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Литература:

- 1) Кряквин В.Д. "Линейная алгебра в задачах и упражнениях", 2007, стр. 165;
- 2) Красовская И.А., Керимова Д.Х., Кошелева Е.Л. "Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии", методичка СГА №1876.03.02.1 (Москва), 2004, стр. 124 (задание 1).

2) Докажите линейность, найдите матрицу, область значений и ядро оператора проектирования на плоскость $x - \sqrt{3}z = 0$.

► Запишем матрицу A оператора проектирования на плоскость $x - \sqrt{3}z = 0$.

Нормальный вектор данной плоскости $1 \cdot x + 0 \cdot y - \sqrt{3} \cdot z = 0$:

$$\vec{n} = (1; 0; -\sqrt{3})$$

Проекция произвольной точки $(x_0; y_0; z_0)$ на эту плоскость есть пересечение прямой, проходящей через эту точку, и имеющей направляющий вектор $(1; 0; -\sqrt{3})$:

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{-\sqrt{3}}$$

Т.е. эта проекция определяется системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{-\sqrt{3}} \\ x - \sqrt{3}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4}x_0 + \frac{\sqrt{3}}{4}z_0 \\ y = y_0 \\ z = \frac{\sqrt{3}}{4}x_0 + \frac{1}{4}z_0 \end{cases}$$

и

$$A = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & \sqrt{3}/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

► Область значений оператора A - вся плоскость $x - \sqrt{3}z = 0$ (все точки, принадлежащие плоскости $x - \sqrt{3}z = 0$).

► Докажем (проверим) линейность оператора A .

Определение. Отображение A является линейным отображением пространства $V = R^3$, если

$$1) A(x + y) = Ax + Ay;$$

$$2) A(\alpha x) = \alpha Ax.$$

$$\begin{aligned} A(X + Y) &= A((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) = A(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = \\ &= \left(\frac{3}{4}(x_1 + y_1) + \frac{\sqrt{3}}{4}(x_3 + y_3), (x_2 + y_2), \frac{\sqrt{3}}{4}(x_1 + y_1) + \frac{1}{4}(x_3 + y_3) \right) = \\ &= \left(\left(\frac{3}{4}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{4}x_3 \right) + \left(\frac{3}{4}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{4}y_3 \right), (x_2 + y_2), \left(\frac{\sqrt{3}}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_3 \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}y_1 + \frac{1}{4}y_3 \right) \right) = \\ &= \left(\frac{3}{4}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{4}x_3, x_2, \frac{\sqrt{3}}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_3 \right) + \left(\frac{3}{4}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{4}y_3, y_2, \frac{\sqrt{3}}{4}y_1 + \frac{1}{4}y_3 \right) = AX + AY \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(\alpha X) &= A(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) = \left(\frac{3}{4}\alpha x_1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha x_3, \alpha x_2, \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha x_1 + \frac{1}{4}\alpha x_3 \right) = \\ &= \alpha \cdot \left(\frac{3}{4}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{4}x_3, x_2, \frac{\sqrt{3}}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_3 \right) = \alpha AX \end{aligned}$$

- следовательно, данное отображение является **линейным**.

► Найдём ядро оператора A .

Определение. **Ядром** (или нуль-пространством) линейного оператора $A \in L(V)$ называется множество всех элементов из V , которые отображаются линейным оператором A в нулевой вектор. Ядро оператора A обозначается $\ker A$.

$$\ker A = \{x \mid x \in V, Ax = 0\}$$

В соответствии с определением ядра

$$Ax = 0$$

$$\begin{aligned} (x \ y \ z) \cdot \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & \sqrt{3}/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} &= (0 \ 0 \ 0) \\ \begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}z = 0 \\ y = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}z = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Итак, ядром оператора A является точка $(0; 0; 0)$:

$$\ker A = (0; 0; 0)$$