1) Является ли система векторов линейно зависимой ?

$$\vec{a}_1 = (1;1;-1;0)$$

$$\vec{a}_2 = (2;1;0;1)$$

$$\vec{a}_3 = (3;1;0;1)$$

$$\vec{a}_4 = (1;0;0;0)$$

Смысл.

Векторы линейно независимы, если векторное равенство

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + \lambda_4\vec{a}_4 = 0$$

имеет единственное (нулевое, тривиальное) решение. В координатной форме

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Или

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 0\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 + 0\lambda_4 = 0 \\ 0\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 0\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

► 1-й способ исследования системы (через определители)

Теорема о решении квадратных линейных неоднородных систем $n \times n$.

● Если главный определитель системы $\Delta \neq 0$, то система является крамеровской (т.е. совместной и определённой; другими словами, имеет единственное решение). Решение такой системы можно найти по формулам Крамера. В случае однородной системы это единственное решение нулевое, а соответствующая система векторов линейно независима.

● Если $\Delta = 0$ и существует хотя бы один из вспомогательных определителей, не равный нулю, то система является несовместной (т.е. не имеет решений).

● Если $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = ... = \Delta_n = 0$, то система является совместной и неопределённой (т.е. имеет бесконечное множество решений). В случае однородной системы это означает бесконечное количество ненулевых решений, а соответствующая система векторов линейно зависима.

Вычислим определитель квадратной матрицы, составленной из координат векторов (не имеет значения, как располагать координаты векторов - по строкам или по столбцам):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(сначала определитель раскрыт по 4-му столбцу; в получившемся определителе два пропорциональных ряда, поэтому он равен нулю).

Поскольку определитель однородной системы уравнений равен нулю, система является совместной и неопределённой (т.е. имеет бесконечное множество решений), а соответствующая система векторов линейно зависима.

► 2-й способ исследования системы (через ранг)

Система линейных однородных уравнений всегда совместна, при этом возможны два случая:

● Система линейных однородных уравнений имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ранг её основной матрицы меньше числа переменных, т.е. $r(A)<n$. Применительно к системе векторов это означает, что система векторов линейно зависима.

● Если ранг основной матрицы однородной системы уравнений равен количеству переменных, т.е. $r(A)=n$, то система имеет единственное (нулевое, тривиальное) решение. Применительно к системе векторов это означает, что система векторов линейно независима.

Элементарными преобразованиями приведём матрицу однородной системы к ступенчатому виду (не имеет значения, как располагать координаты векторов - по строкам или по столбцам):

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Поскольку ранг основной матрицы однородной системы уравнений $r(A)=3$ меньше количества переменных $n=4$, то система имеет ненулевые решения. Следовательно, данная система векторов линейно зависима.

► Установим связь между векторами (не имеет значения, как располагать координаты векторов - по строкам или по столбцам). Преобразуем матрицу координат векторов, расположенных построчно, к упрощенному виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

последняя матрица соответствует системе

$$\begin{cases} \lambda_1=0 \\ \lambda_2+\lambda_4=0 \\ \lambda_3+\lambda_4=0 \end{cases}$$

Решение запишем в виде (переменные $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ - базисные, переменная λ_4 - свободная):

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda_4 \\ -\lambda_4 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = -\lambda_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ где } c\in R .$$

Таким образом связь между векторами описывается уравнением

$$0\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3-\vec{a}_4=0 .$$

Вывод.

Линейную зависимость векторов можно установить, исследовав матрицу, составленную из координат векторов:

- через анализ определителя матрицы (матрица квадратная)
  - если $\Delta \neq 0$, то векторы линейно независимы;
  - если $\Delta = 0$, то векторы имеют линейную зависимость.
- через анализ ранга матрицы (матрица произвольная)
  - если ранг матрицы меньше её размерности, т.е. $r(A) < n$, то векторы линейно зависимы;
  - если ранг матрицы равен её размерности, т.е. $r(A) = n$, то векторы линейно независимы.

Если векторы линейно зависимы, то можно установить связь между ними.

Литература:

1) Малугин В.А. "Математика для экономистов. Математический анализ. Задачи и упражнения", 2006, стр. 72 (пример 4);
2) Кряквин В.Д. "Линейная алгебра в задачах и упражнениях", 2007, стр. 58;
3) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2006, стр. 38 (теорема 4.5);
4) Стёпин В.П. "Высшая математика", методичка СИНХ (Екатеринбург), 2006, стр. 42, 44.

2) Определить, является ли система векторов

$$(1;2;3;4),\ (2;3;4;5),\ (3;4;5;6),\ (1;3;5;7)$$

линейно независимой; выразить зависимые векторы через остальные; выписать базис пространства, порождённого этой системой векторов.

Обозначим векторы: $\vec{a} = (1;2;3;4)$, $\vec{b} = (2;3;4;5)$, $\vec{c} = (3;4;5;6)$, $\vec{d} = (1;3;5;7)$.

► Векторы линейно независимы, если векторное равенство

$$\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} + \lambda_4\vec{d} = 0$$

имеет единственное (нулевое) решение.

Элементарными преобразованиями приведём матрицу однородной системы к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Поскольку ранг основной матрицы однородной системы уравнений $r(A) = 2$ меньше количества переменных $n = 4$, то система совместна и неопределённа, т.е. имеет кроме нулевого (тривиального) решения, бесконечное количество ненулевых решений. Следовательно, данная система векторов линейно зависима.

► Установим связь между векторами. Продолжим преобразования матрицы и приведём её к упрощенному виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Линейно независимым векторам соответствуют в матрице столбцы базисных переменных, т.е. линейно независимые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Последняя матрица соответствует системе

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Решение запишем в виде

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_3-3\lambda_4\\ -2\lambda_3+\lambda_4\\ \lambda_3\\ \lambda_4\end{pmatrix}=\lambda_3\cdot\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+\lambda_4\cdot\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

или

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\end{pmatrix}=c_1\cdot\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+c_2\cdot\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

где $\{c_1, c_2\}\in R$.

Полагая $\begin{cases}c_1=1\\ c_2=0\end{cases}$ и $\begin{cases}c_1=0\\ c_2=1\end{cases}$, запишем систему уравнений, описывающую связь между векторами:

$$\begin{cases}\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}=0\\ -3\vec{a}+\vec{b}+\vec{d}=0\end{cases}$$

и выразим зависимые векторы через линейно независимые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\begin{cases}\vec{c}=-\vec{a}+2\vec{b}\\ \vec{d}=3\vec{a}-\vec{b}\end{cases}$$

► Базис пространства, порождённого этой системой векторов, состоит из линейно независимых векторов, например $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е.

$$\{\vec{a}, \vec{b}\}.$$

Литература:

1) Малугин В.А. "Математика для экономистов. Математический анализ. Задачи и упражнения", 2006, стр. 72 (пример 4).

3) Найти базис подпространства R^4, порождённого векторами

$$\vec{a}_1=(-1\,;\,2\,;\,2\,;\,-1)$$

$$\vec{a}_2=(4\,;\,-3\,;\,-3\,;\,4)$$

$$\vec{a}_3=(1\,;\,-1\,;\,-1\,;\,1)$$

► Сначала исследуем линейную зависимость (независимость) данных векторов.

Векторы линейно независимы, если векторное равенство

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\lambda_3\vec{a}_3=0 \qquad (*)$$

имеет единственное (нулевое, тривиальное) решение.

Элементарными преобразованиями приведём матрицу однородной системы к ступенчатому виду:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Поскольку ранг основной матрицы однородной системы уравнений $r(A)=2$ меньше количества переменных $n=3$, то система совместна и неопределённа, т.е. имеет кроме нулевого (тривиального) решения, бесконечное количество ненулевых решений. Следовательно, данная система векторов линейно зависима.

► Установим связь между векторами. Продолжим преобразование матрицы и приведём её к упрощенному виду:

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Линейно независимым векторам соответствуют в матрице столбцы базисных переменных, т.е. в данном случае линейно независимые векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_3$.

Последняя матрица соответствует системе

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2=0 \\ 5\lambda_2+\lambda_3=0 \end{cases}$$

Решение запишем в виде

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ -5\lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix},$$

полагая $\lambda_2=-c$, запишем

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

где $c \in R$.

Полагая $c=1$, запишем уравнение, описывающее связь между векторами (из *):

$$\vec{a}_1-\vec{a}_2+5\vec{a}_3=0$$

и зависимый вектор выражается через линейно независимые векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_3$ так:

$$\vec{a}_2=\vec{a}_1+5\vec{a}_3$$

► Базис пространства, порождённого данной системой векторов, состоит из линейно независимых векторов, например $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_3$, т.е.

$$\{\vec{a}_1, \vec{a}_3\}.$$

Замечание. В качестве линейно независимых векторов могли быть выбраны следующие пары векторов:

$$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$$

$$\{\vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

Литература:

1) Малугин В.А. "Математика для экономистов. Математический анализ. Задачи и упражнения", 2006, стр. 72 (пример 4).

4) В трёхмерном пространстве заданы векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\vec{a}=(1;\,2;\,4),\ \ \vec{b}=(1;\,-1;\,3),\ \ \vec{c}=(-2;\,-4;\,5).$$

Доказать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис и найти в этом базисе координаты вектора $\vec{d}=(6;\,7;\,-2)$.

Векторы образуют базис пространства, если выполнены два условия:
- их количество равно размерности пространства (матрица, составленная из координат векторов, квадратная);
- они линейно независимы.

Линейную независимость можно установить:
- через анализ определителя матрицы (матрица квадратная)
  - если $\Delta \neq 0$, то векторы линейно независимы;
  - если $\Delta = 0$, то векторы имеют линейную зависимость.
- через анализ ранга матрицы (матрица произвольной размерности)
  - если ранг матрицы меньше её размерности, т.е. $r(A)<n$, то векторы линейно зависимы;
  - если ранг матрицы равен её размерности, т.е. $r(A)=n$, то векторы линейно независимы.

► Количество данных векторов равно размерности пространства $n=\dim R^3=3$.

Вычислим определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}=1\cdot(-5+12)-1\cdot(10+16)-2\cdot(6+4)=-39\neq 0$$

- следовательно, данная система векторов линейно независима.

Вывод: векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис в пространстве R^3.

1-й способ решения

► Выразим вектор $\vec{d}$ через линейную комбинацию векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$x_1\cdot\vec{a}+x_2\cdot\vec{b}+x_3\cdot\vec{c}=\vec{d},$$

т.е. $\vec{d}^{\,*}=(x_1;\,x_2;\,x_3)$ - координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$. Решаем неоднородную систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & -4 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -13 & 26 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 & 13 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 39 & -73 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 39 & 0 & 0 & 23 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 39 & -73 \end{pmatrix}$$

Итак, в базисе $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ вектор $\vec{d}$ имеет координаты:

$$\vec{d}^{\,*}=\left(\frac{23}{39};\,\frac{5}{3};\,-\frac{73}{39}\right)=\left(\frac{23}{39};\,1\frac{2}{3};\,-1\frac{34}{39}\right).$$

2-й способ решения

► Используем формулу перехода от базиса к базису:

$$\vec{d}^{\,*} = T^{-1} \cdot \vec{d} \,,$$

где $\vec{d}^{\,*}$ - столбец координат вектора $\vec{d}$ в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$,

$\vec{d}$ - столбец координат вектора в стандартном базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$,

T - матрица перехода, составляется из столбцов координат векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

$$\vec{d}^{\,*} = T^{-1} \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23/39 \\ 5/3 \\ -73/39 \end{pmatrix}$$

Итак, в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ вектор $\vec{d}$ имеет координаты:

$$\vec{d}^{\,*} = \left(\frac{23}{39}; \frac{5}{3}; -\frac{73}{39} \right) = \left(\frac{23}{39}; 1\frac{2}{3}; -1\frac{34}{39} \right).$$

Вычисление в Mathcad 14:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \quad |A| \to -39 \quad A^{-1} \cdot B \to \begin{pmatrix} \frac{23}{39} \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{73}{39} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{39} \\ 1\frac{2}{3} \\ -1\frac{34}{39} \end{pmatrix}$$

Вычисление в Mathematica 9:

$$\mathbf{LinearSolve}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \{6, 7, -2\}\right]$$

$$\left\{\frac{23}{39}, \frac{5}{3}, -\frac{73}{39}\right\}$$

5) Показать, что система многочленов $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = x$, $\varphi_3 = x^2 + 2x + 1$, $\varphi_4 = x^3 - x^2$ образует базис в пространстве многочленов степени $n \le 3$.

Найти координаты вектора $P(x) = x^2 + x$ в этом базисе.

► Выпишем стандартный базис пространства и определим размерность пространства.
В пространстве P многочленов степени $n \le 3$ стандартный базис состоит из функций

$$e_1 = 1, \quad e_2 = x, \quad e_3 = x^2, \quad e_4 = x^3 \quad (\dim P = 4).$$

► Определим координаты системы векторов $\{\varphi\}$ в стандартном базисе $\{e\}$:

$$\varphi_1 = 1 = e_1 = (1;0;0;0)$$

$$\varphi_2 = x = e_2 = (0;1;0;0)$$

$$\varphi_3 = 1 + 2x + x^2 = e_1 + 2e_2 + e_3 = (1;2;1;0)$$

$$\varphi_4 = -x^2 + x^3 = -e_3 + e_4 = (0;0;-1;1)$$

► Составим матрицу A из координат векторов $\{\varphi\}$ в базисе $\{e\}$ и найдём её ранг методом Гаусса:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Поскольку $r(A)=4=\dim P$, то система векторов $\{\varphi\}=\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4\}$ образует базис.

► Располагая координатами системы векторов $\{\varphi\}$ в стандартном базисе $\{e\}$:

$$\varphi_1=(1;0;0;0)$$

$$\varphi_2=(0;1;0;0)$$

$$\varphi_3=(1;2;1;0)$$

$$\varphi_4=(0;0;-1;1)$$

запишем матрицу перехода C от старого базиса $\{e\}$ к новому базису $\{\varphi\}$:

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пусть координаты многочлена $P(x)$ по многочленам j_i будут y_1, y_2, y_3, y_4; в стандартном базисе многочлен $P(x)$ имеет координаты $P(x)=x+x^2=e_2+e_3=(0;1;1;0)$, тогда

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}=C^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

т.е.

$$x^2+x=-\varphi_1-\varphi_2+\varphi_3.$$

Литература:

1) Красовская И.А., Керимова Д.Х., Кошелева Е.Л. "Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии", методичка СГА №1876.03.02.1 (Москва), 2004, стр. 117 (задание 2), стр. 121 (задание 2).

6) Написать разложение вектора $\vec{x}$ по векторам $\vec{p},\vec{d},\vec{r}$:

$$\vec{x}=(-2;4;7)$$

$$\vec{p}=(0;1;2)$$

$$\vec{d}=(1;0;1)$$

$$\vec{r}=(-1;2;4)$$

Выразим вектор $\vec{x}$ через линейную комбинацию векторов $\vec{p}, \vec{d}, \vec{r}$:

$$\lambda_1 \cdot \vec{p} + \lambda_2 \cdot \vec{d} + \lambda_3 \cdot \vec{r} = \vec{x},$$

где $(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3)$ - координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{p}, \vec{d}, \vec{r}\}$. Решаем неоднородную систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Итак, система является совместной и определённой, следовательно, векторы $\vec{p}, \vec{d}, \vec{r}$ составляют базис. Вектор $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{p}, \vec{d}, \vec{r}\}$ имеет координаты:

$$\vec{x}^* = (2; -1; 1).$$

7) Найти размерность и базис пространства $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, если $2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{0}$.

Всякую конечную упорядоченную систему векторов линейного пространства X называют базисом (или базой) линейного пространства, если эта система векторов линейно независима и любой вектор линейного пространства линейно выражается через векторы системы (*).

Следовательно, данная тройка векторов уже не может быть базисом данного пространства, т.к. они по условию линейно зависимы ($2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{0}$). Линейная зависимость векторов говорит об их компланарности.

Случай **а**: нет коллинеарных пар векторов.

Базис состоит из двух векторов. Размерность данного линейного пространства $\dim X = 2$.

В качестве базиса можно использовать любую пару векторов из $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$:

$$\{\vec{a}_1; \vec{a}_2\} \text{ или } \{\vec{a}_1; \vec{a}_3\} \text{ или } \{\vec{a}_2; \vec{a}_3\}.$$

Случай **б**: есть одна пара коллинеарных векторов.

Базис состоит из двух векторов. Размерность данного линейного пространства $\dim X = 2$.

В качестве базиса можно использовать любую пару неколлинеарных векторов из $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$:

$$\{\vec{a}_1; \vec{a}_3\} \text{ или } \{\vec{a}_2; \vec{a}_3\}, \text{ если } \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2;$$

$$\{\vec{a}_1; \vec{a}_2\} \text{ или } \{\vec{a}_2; \vec{a}_3\}, \text{ если } \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_3;$$

$$\{\vec{a}_1; \vec{a}_2\} \text{ или } \{\vec{a}_1; \vec{a}_3\}, \text{ если } \vec{a}_2 \parallel \vec{a}_3.$$

Случай **в**: все векторы коллинеарны.

Базис состоит из одного вектора. Размерность данного линейного пространства $\dim X = 1$.

В качестве базиса можно использовать любой вектор из $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$:

$$\{\vec{a}_1\} \text{ или } \{\vec{a}_2\} \text{ или } \{\vec{a}_3\}.$$

Литература:

1) Шевцов Г.С. "Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты", 2003, стр. 80, 105.
2) Ермаков В.И. "Общий курс высшей математики для экономистов", 2007, стр. 33.