

Нормы матриц.

Проблема собственных значений определена только для квадратных матриц. В экономической практике часто необходимо оценивать не только квадратные матрицы. Для такой оценки можно использовать универсальное понятие нормы, справедливое для матриц любой размерности.

Нормой произвольной матрицы A называется действительное число $\|A\|$, удовлетворяющее целому ряду условий, наиболее важными из которых являются:

1. $\|A\| \geq 0$, причём $\|A\| = 0$ только в случае полностью нулевой матрицы A ;
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$, где $\alpha \in R$.

В какой-то степени норму $\|A\|$ можно образно представлять как показатель "толщины" или "мощности" матрицы A .

Норма называется **канонической**, если $\|A\| \geq |a_{ij}|$, т.е. она не меньше, по модулю, любого элемента матрицы A . При выборе нормы возможно использовать самые разнообразные соображения, не противоречащие определению. Однако на практике обычно достаточно следующих канонических норм:

1. **m - норма** $\|A\|_m = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ - суммируются, по модулю, все строки матрицы A и максимальная

из полученных сумм объявляется нормой. Соответствующая встроенная функция в Mathcad: **normi(M)** - матричная норма на бесконечности (бесконечная норма).

2. **l - норма** $\|A\|_l = \max_j \sum_i |a_{ij}|$ - суммируются, по модулю, все столбцы матрицы A и максимальная

из полученных сумм объявляется нормой. Соответствующая встроенная функция в Mathcad: **norm1(M)** - матричная норма в пространстве $L1$ (первая норма).

3. **k - норма** $\|A\|_k = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$ - суммируются квадраты всех элементов матрицы A и корень из этой

суммы объявляется нормой. Соответствующая встроенная функция в Mathcad: **norme(M)** - матричная норма в евклидовом пространстве (евклидова норма).

Заметим, что далее в примерах вычисляются с учебной целью все нормы. На практике же обычно выбирается какая-то одна норма, с помощью которой и анализируется совокупность матриц или изменяемость данной матрицы в некотором процессе. Все нормы конкретной матрицы приблизительно одинаковы - как правило, различие не выходит за пределы одного порядка. А так как матричные нормы - величины оценочные, то нет разницы, какую из них использовать.

Примечание. Mathcad вычисляет нормы только квадратных матриц.

1) Вычислить все нормы матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & -6 \end{pmatrix}$.

Для удобства сразу перейдём к модулю этой матрицы

$$|A| = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

В соответствии с определениями норм, получаем:

$$\|A\|_m = \max(1+3+2; 4+5+1; 3+8+6) = \max(6; 10; 17) = 17$$

$$\|A\|_l = \max(1+4+3; 3+5+8; 2+1+6) = \max(8; 16; 9) = 16$$

$$\|A\|_k = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2 + \dots + 6^2} = \sqrt{165} \quad (\approx 12,8)$$

Вычисление норм в Mathcad 14:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & -6 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} \text{norm}(A) = 17 \\ \text{norm1}(A) = 16 & \text{norm2}(A) = 12.3 \\ \text{norme}(A) = 12.8 \end{array}$$

2) Вычислить все нормы матрицы-столбца $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Здесь $|A| = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ и нормы имеют вид:

$$\|A\|_m = \max(1; 2; 3; 4) = 4$$

$$\|A\|_l = \max(1+2+3+4) = \max(10) = 10$$

$$\|A\|_k = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{30} \quad (\approx 5,5)$$

3) Вычислить все нормы матрицы-строки $A = (5 \ 2 \ 4 \ 7)$.

Здесь нет отрицательных элементов. Поэтому:

$$\|A\|_m = \max(5+2+4+7) = \max(18) = 18$$

$$\|A\|_l = \max(5; 2; 4; 7) = 7$$

$$\|A\|_k = \sqrt{5^2 + 2^2 + 4^2 + 7^2} = \sqrt{94} \quad (\approx 9,7)$$

Литература:

- 1) Демин И.И. "Математика для экономистов", часть 1, методичка МИЭП (Москва), 1999, стр. 42;
- 2) Босс В. "Лекции по математике. Линейная алгебра", часть 3, 2005, стр. 127;
- 3) Гурский Д.А., Турбина Е.С. "Вычисления в Mathcad 12", 2006, стр. 127 (функции вычисления матричных норм);
- 4) Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. "Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9", 2006, стр. 72.