Разберём возможные способы решения задачи (на примере функции трёх переменных).

Экстремум функции $u = f(x, y, z)$ называется условным, если он достигнут при условии, что аргументы функции связаны уравнением $\varphi(x, y, z) = 0$, называемым уравнением связи.

Задачу можно решить трёмя способами.

1. Метод исключения части переменных. Допустим, что при рассматриваемых значениях x, y и z уравнение $\varphi(x, y, z) = 0$ определяет z как однозначную дифференцируемую функцию $z = \psi(x, y)$. Подставляя в функцию $f(x, y, z)$ вместо z функцию $\psi(x, y)$, получаем функцию двух переменных x и y: $u = f(x, y, \psi(x, y)) = F(x, y)$. Экстремум (безусловный) функции $F(x, y)$ является искомым условным экстремумом функции $f(x, y, z)$ при наличии связи $\varphi(x, y, z) = 0$. Отметим, что этот способ требует фактического решения уравнения $\varphi(x, y, z) = 0$ относительно какой-либо переменной, и это может быть не всегда удобно.

2. Метод неопределённых множителей Лагранжа. Составляется **функция Лагранжа** $L(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda \cdot \varphi(x, y, z)$, которая исследуется на экстремум при дополнительном условии $d\varphi = 0$ (полный дифференциал функции $\varphi(x, y, z)$ равен нулю, т.е. $\varphi_x' dx + \varphi_y' dy + \varphi_z' dz = 0$.

3. Метод геометрической интерпретации. Может быть использован для функции двух переменных в случае, когда функции соответствует какая-либо простая поверхность (например, плоскость), а условию соответствует очевидная линия.

Метод исключения части переменных.

1) Определить условные экстремумы функции $f(x, y) = xy + 3x^2$ при $x + y + 1 = 0$.

- требуется найти экстремумы функции двух переменных $f(x, y) = xy + 3x^2$ при условии, что аргументы функции связаны уравнением $x + y + 1 = 0$ (задача поиска условного экстремума).

Для решения задачи используем метод исключения части переменных.

Используем уравнение связи $x + y + 1 = 0$ для замены переменной y:

$$f(x, y) = x \cdot (-x - 1) + 3x^2 = 3x^2 - x^2 - x = 2x^2 - x$$

т.е. получаем в результате функцию одной переменной $f(x) = 2x^2 - x$, и для ответа на вопрос достаточно найти её экстремумы.

Находим стационарные точки функции из условия $f'(x) = 0$:

$$(2x^2 - x)' = 0$$

$$4x - 1 = 0$$

$$x = 0,25$$

Поскольку

$$f''(x) = (4x - 1)' = 4$$

$$f''\left(\frac{1}{4}\right) = 4 > 0$$

то функция в найденной стационарной точке имеет минимум.

Соответствующее значение y находим из уравнения связи:

$$y = -0,25 - 1 = -1,25$$

Итак, функция $f(x,y)=xy+3x^2$ при условии $x+y+1=0$ имеет минимум в точке $(0,25;-1,25)$, достигая значения $f(0,25;-1,25)=-0,125$.

Вычисление в Mathcad 14:

$x := 1 \quad y := 1$

$f(x,y) := x \cdot y + 3 \cdot x^2$

Given $\quad x + y + 1 = 0$

$z := \mathrm{Minimize}(f,x,y)$

$z = \begin{pmatrix} 0.25 \\ -1.25 \end{pmatrix} \quad f(z_0,z_1) = -0.125$

Литература:

1) Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселёв А.И. "Вариационное исчисление", 1973, стр. 15 (условный экстремум), стр. 18 (пример 3);
2) Кудрявцев Л.Д. "Математический анализ", часть 2, стр. 66 (метод множителей Лагранжа);
3) Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. "Математический анализ в вопросах и задачах", 2001, стр. 261...268;
4) Малугин В.А. "Линейная алгебра. Задачи и упражнения", 2006, стр. 150 (условный экстремум функции);
5) Шевцов Г.С. "Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты", 2003, стр. 459 (критерий Сильвестра), стр. 464 (пример 9.2);
6) Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. “Линейная алгебра в примерах и задачах”, 2005, стр. 251.

Метод геометрической интерпретации.

2) Определить условные экстремумы функции $f(x)=x+y$ при $x^2+y^2-4=0$.

Данная задача является по сути задачей поиска экстремумов функции нескольких переменных при заданных условиях. Такие задачи обычно решаем одним из двух способов - или через функцию Лагранжа, или подстановкой зависимости, заданной в условии, в саму функцию. Но здесь область поиска экстремумов определена окружностью $x^2+y^2=4$ с центром в точке $(0;0)$, а сама функция является плоскостью. За счёт этого можно существенно упростить решение задачи.

► Очевидно, что здесь имеем два экстремума - один максимум и один минимум, в проекции на плоскость xOy являющиеся точками пересечения окружности $x^2+y^2=4$ и проекции прямой, лежащей в плоскости $z=x+y$ и проходящей через точку $(0;0)$. Направляющий вектор этой прямой: $\vec{s}=\mathrm{grad}\, f(x,y)=(1;1)$ (соответствует наибольшему наклону плоскости). Так что точки экстремумов определим, решив систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ \dfrac{x-0}{1}=\dfrac{y-0}{1} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1=\sqrt{2} \quad , \quad y_1=\sqrt{2} \\ x_2=-\sqrt{2} \ , \quad y_2=-\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\max f = f\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}$$

$$\min f = f\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)=-2\sqrt{2}$$

Ответ: функция $f(x)=x+y$ при условии $x^2+y^2-4=0$ имеет минимум $f\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)=-2\sqrt{2}$, и максимум $f\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}$.

3) Найти условные экстремумы функции $z = 2x^2 + 9y^2$ при $x^2 + 9y^2 = 1$.

Составим функцию Лагранжа:

$$\Phi(x,y) = \left(2x^2 + 9y^2\right) + \lambda \cdot \left(x^2 + 9y^2 - 1\right)$$

где λ - неопределённый постоянный множитель,

$\varphi(x;y) = x^2 + 9y^2 - 1$ - некоторое условие, задаваемое уравнением связи $\varphi(x;y) = 0$,

$z(x;y) = 2x^2 + 9y^2$ - исследуемая функция.

Для определения множителя λ и координат возможных точек экстремума решаем систему $\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 4x + 2\lambda x = 0 \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 18y + 18\lambda y = 0 \\ &x^2 + 9y^2 - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\begin{aligned} &\lambda_1 = -2, \quad x_1 = -1, \quad y_1 = 0 \\ &\lambda_2 = -2, \quad x_2 = 1, \quad y_2 = 0 \\ &\lambda_3 = -1, \quad x_3 = 0, \quad y_3 = -1/3 \\ &\lambda_4 = -1, \quad x_4 = 0, \quad y_4 = 1/3 \end{aligned}\right.$$

Итак, найдены четыре стационарные точки:

$M_1(-1;0)$, при этом $\lambda_1 = -2$,

$M_2(1;0)$, при этом $\lambda_2 = -2$,

$M_3(0;-1/3)$, при этом $\lambda_3 = -1$,

$M_4(0;1/3)$, при этом $\lambda_4 = -1$.

Наличие критической точки ещё не гарантирует наличие экстремума функции. Достаточным критерием наличия экстремума функции в точке служит знакоопределённость квадратичной формы функции.

Если квадратичная форма (т.е. второй дифференциал функции Лагранжа, при выполнении условий связи)
а) будет отрицательно определённая, то в точке строгий условный максимум;
б) если положительно определённая, то в точке строгий условный минимум;
в) если неопределённая, то точка не является точкой условного экстремума.

Квадратичная форма функции определяется как

$$A(dx_1, dx_2 \ldots, dx_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f\left(x^{(0)}\right)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$ и фактически является вторым дифференциалом функции.

Второй дифференциал функции $\Phi(x,y,z)$ равен

$$d^2\Phi(x,y,z) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} dz^2 + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} dxdy + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} dxdz + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} dydz$$

или, в случае функции двух переменных,

$$d^2\Phi(x,y) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dy^2 + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} dxdy$$

Вычислим второй дифференциал функции Лагранжа:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 4x + 2\lambda x \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 4 + 2\lambda$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 18y + 18\lambda y \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 18 + 18\lambda$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0$$

$$d^2\Phi = 2\cdot(2+\lambda)dx^2 + 18\cdot(1+\lambda)dy^2$$

Заметим, что

$dx^2 = (dx)^2$, т.е. $dx^2 > 0$ и $dy^2 > 0$.

Следовательно, в точках $M_1(-1;0)$ и $M_2(1;0)$, для которых $\lambda_{1,2} = -2$, второй дифференциал $d^2\Phi < 0$, что означает наличие в этих точках максимума.

Соответственно в точках $M_3(0;-1/3)$ и $M_4(0;1/3)$, для которых $\lambda_{3,4} = -1$, второй дифференциал $d^2\Phi > 0$, и это означает наличие в данных точках минимума.

Ответ: функция имеет два локальных условных максимума:

$z(-1;0) = 2$, $z(1;0) = 2$

и два локальных условных минимума:

$z(0;-1/3) = 1$, $z(0;1/3) = 1$.

Литература:

1) Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселёв А.И. "Вариационное исчисление", 1973, страницы 15...20;
2) Кудрявцев Л.Д. "Математический анализ", часть 2, страницы 66...72.